



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Enzo Ferreira Tomaz Silva

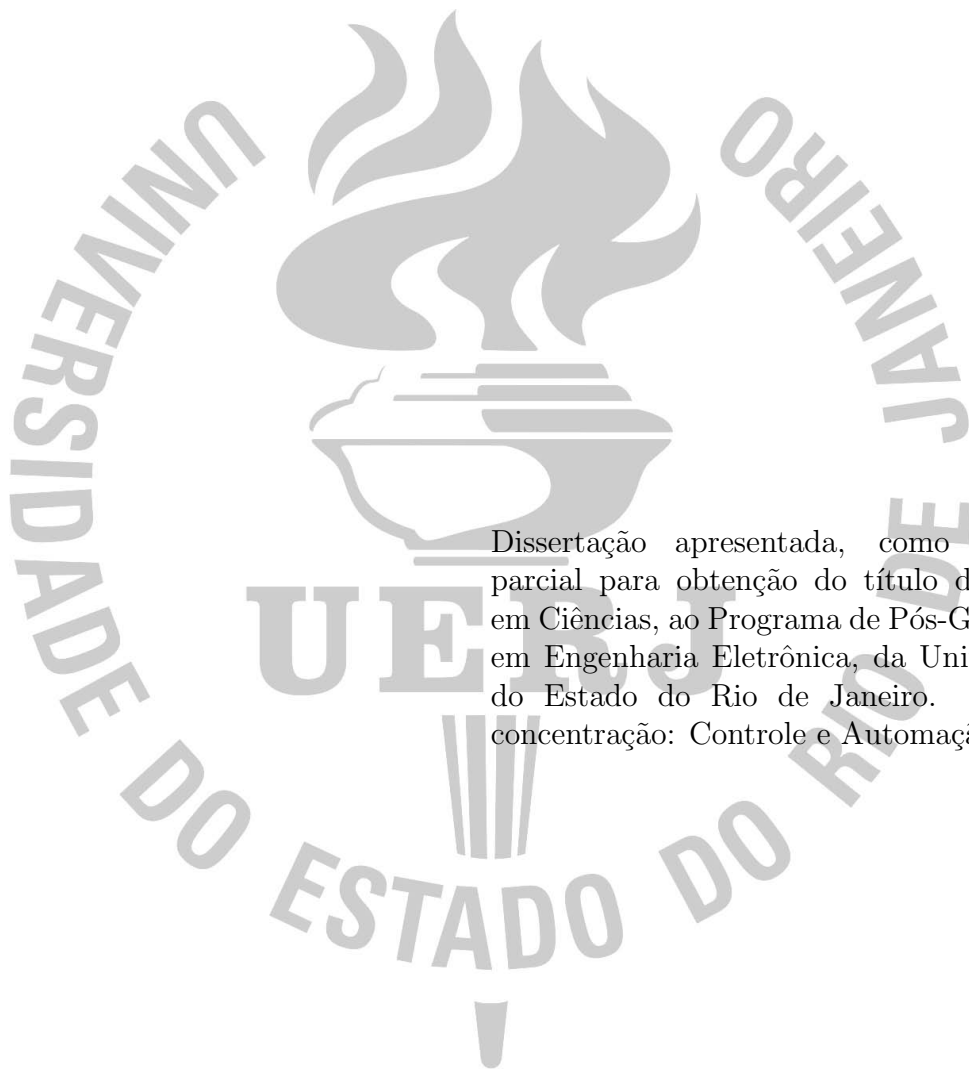
**Controle Extremal Multivariável Baseado no Algoritmo do
Gradiente Sujeito à Saturação**

Rio de Janeiro

2025

Enzo Ferreira Tomaz Silva

**Controle Extremal Multivariável Baseado no Algoritmo do Gradiente Sujeito
à Saturação**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Controle e Automação.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira

Orientador: Pedro Henrique Silva Coutinho

Rio de Janeiro

2025

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Enzo Ferreira Tomaz.
Controle extremal multivariável baseado no algoritmo do gradiente sujeito à saturação / Enzo Ferreira Tomaz Silva. – 2025.
68 f.

Orientadores: Tiago Roux de Oliveira, Pedro Henrique Silva Coutinho.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Equações - Soluções numéricas - Teses. 3. Algoritmos - Teses. 4. Análise multivariada - Teses. 5. Sistemas lineares de controle - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Coutinho, Pedro Henrique Silva. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 681.511.2

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Enzo Ferreira Tomaz Silva

**Controle Extremal Multivariável Baseado no Algoritmo do Gradiente Sujeito
à Saturação**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Controle e Automação.

Aprovado em: 18/12/2025

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Pedro Henrique Silva Coutinho (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Paulo César Pellanda

Departamento de Engenharia Elétrica - IME

Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha

Faculdade de Engenharia - UERJ

Rio de Janeiro

2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às pessoas que tornaram possível cada etapa desta jornada: aos professores, cuja dedicação me inspirou ao longo dos anos; e a todos aqueles que, de alguma forma, possam ser beneficiados por esta pesquisa.

AGRADECIMENTO

É importante ressaltar o apoio incondicional dos meus pais, Danielle e Leonardo, que foram pilares fundamentais para o meu equilíbrio entre a vida acadêmica e profissional durante toda a trajetória no mestrado.

Agradeço imensamente aos meus orientadores, Prof. Tiago Roux de Oliveira e Prof. Pedro Henrique Silva Coutinho, pelos direcionamentos sempre precisos, pela paciência e pela qualidade com que guiaram meus estudos e trabalhos acadêmicos, respeitando a minha agenda profissional turbulenta.

Por fim, agradeço a todo o corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica (PEL) da UERJ, cuja dedicação e compromisso fortalecem a ciência em nosso país, permitindo que alcance e transforme cada vez mais estudantes.

Somos todos diferentes — mas compartilhamos o mesmo espírito humano.
Talvez seja da natureza humana que nos adaptemos — e sobrevivamos.

Stephen Hawking

RESUMO

Silva, Enzo Ferreira Tomaz. *Controle Extremal Multivariável Baseado no Algoritmo do Gradiente Sujeito à Saturação*. 69 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2025.

Esta dissertação aborda o controle extremal multivariável baseado no algoritmo do gradiente sujeito à saturação. Dois cenários distintos são investigados: saturação agindo na entrada da função a ser otimizada, à qual se aplica uma estratégia de compensação *anti-windup*, e saturação afetando a estimação do gradiente. Em ambos os casos, a matriz Hessiana desconhecida é representada por meio de um modelo politópico incerto, e condições expressas na forma de desigualdades matriciais lineares são empregadas para o projeto dos ganhos de controle estabilizantes. As condições propostas garantem a estabilidade exponencial da origem do sistema em malha fechada médio sob saturação. Com base nas condições de projeto propostas, os ganhos de controle podem ser obtidos em formato matricial não diagonal. Além disso, a estabilidade e a convergência são rigorosamente provadas por meio do Teorema da Média para sistemas dinâmicos com lados direitos Lipschitz contínuos. Por fim, exemplos numéricos ilustram a efetividade dos algoritmos de controle extremal propostos, confirmando a convergência em uma vizinhança do ponto ótimo, mesmo na presença de saturação.

Palavras-chave: Controle extremal; Atuadores saturantes; Algoritmo do gradiente; Sistemas multivariáveis; Otimização convexa.

ABSTRACT

Silva, Enzo Ferreira Tomaz. *Multivariable Gradient-Based Extremum Seeking Control with Saturation Constraints*. 69 p. Dissertation (Master in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2025.

This dissertation addresses the multivariable gradient-based extremum-seeking control subject to saturation. Two distinct saturation scenarios are investigated here: saturation at the input of the function to be optimized, addressed using an anti-windup compensation strategy, and saturation affecting the gradient estimate. In both cases, the unknown Hessian matrix is represented using a polytopic uncertainty description, and sufficient conditions in the form of linear matrix inequalities are derived to design a stabilizing control gain. The proposed conditions guarantee exponential stability of the origin for the average closed-loop system under saturation constraints. With the proposed design conditions, non-diagonal control gain matrices can be obtained. Stability and convergence are rigorously proven using the Averaging Theory for dynamical systems with Lipschitz continuous right-hand sides. Numerical simulations illustrate the effectiveness of the proposed extremum-seeking algorithms, confirming convergence to the neighborhood of the optimum point even in the presence of saturation.

Keywords: Extremum seeking control; Actuator saturation; Gradient algorithm; Multivariable systems; Convex optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama de blocos de um sistema de controle extremal multivariável clássico baseado no algoritmo do gradiente.	16
Figura 2	Representação do conjunto de incerteza da matriz Hessiana.	32
Figura 3	Trajetórias do ESC em malha fechada, com o ganho de controle projetado conforme o Lema 1.2.	33
Figura 4	Controle extremal com saturação na entrada do mapa quadrático estático. Adaptado de [1].	36
Figura 5	Ilustração da função de saturação definida em (68).	37
Figura 6	Representação gráfica da função de zona morta definida em (71).	38
Figura 7	Trajetória do ESC em malha fechada sob saturação na entrada com o controlador <i>anti-windup</i> (70) projetado de acordo com Lema 2.2.	48
Figura 8	Trajetória da saída $y(t)$ do ESC em malha fechada sob saturação na entrada com o controlador <i>anti-windup</i> (70) projetado conforme o Lema 2.2.	49
Figura 9	Trajetórias do sistema ESC em malha fechada sob saturação de entrada sem compensação <i>anti-windup</i>	50
Figura 10	Sistema de controle extremal sob saturação no gradiente.	52
Figura 11	Trajetórias do ESC em malha fechada sujeito à saturação no gradiente com o controlador (117) projetado de acordo com o Lema 3.2 (continua)...	60
Figura 11	Trajetórias do ESC em malha fechada sujeito à saturação no gradiente com o controlador (117) projetado de acordo com o Lema 3.2 (continuação).	61

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	CONTROLE EXTREMAL BASEADO NO ALGORITMO DO GRADIENTE	16
1.1	Formulação do problema	16
1.2	Sistema em malha fechada médio	22
1.3	Representação politópica da matriz hessiana	25
1.4	Análise da estabilidade	26
1.4.1	Desigualdades matriciais lineares	27
1.4.2	Projeto do ganho de controle estabilizante	27
1.4.3	Convergência exponencial para uma vizinhança do extremo	29
1.5	Resultados numéricos	31
1.6	Conclusão	34
2	CONTROLE EXTREMAL SOB SATURAÇÃO NO ATUADOR .	35
2.1	Formulação do problema	35
2.2	Mudança da escala temporal	39
2.3	Sistema em malha fechada médio	40
2.4	Análise da estabilidade via teorema da média	41
2.4.1	Estabilização do sistema médio em malha fechada	41
2.5	Convergência assintótica para uma vizinhança do extremo	45
2.6	Resultados numéricos - ESC sob saturação na entrada	47
2.7	Conclusão	50
3	CONTROLE EXTREMAL SOB SATURAÇÃO NO GRADIENTE	52
3.1	Formulação do problema	52
3.2	Controle extremal com taxa de atualização limitada	53
3.3	Definindo uma nova escala temporal para a análise média	54
3.4	Estudo da estabilidade em malha fechada	54
3.4.1	Estabilização do sistema médio em malha fechada	55
3.4.2	Estabilidade exponencial prática via teorema da média	58

3.5	Resultados numéricos - ESC sob saturação no gradiente.....	59
3.6	Conclusão.....	61
	CONCLUSÃO	61
	APÊNDICE	64
A	Teorema da média para sistemas com lados direitos Lipschitz contínuos	64
	REFERÊNCIAS	66

INTRODUÇÃO

O controle extremal (ESC, do inglês *Extremum Seeking Control*) é uma estratégia de otimização adaptativa, em tempo real e livre de modelo. A proposta dessa técnica é encontrar um ponto ótimo, dado que uma função desejada (com parâmetros desconhecidos) seja maximizada ou minimizada, isto é, que seu extremo seja atingido [2, 3]. Desde a primeira análise de estabilidade desenvolvida em [4], diversos esforços têm sido feitos para estender o ESC a diferentes classes de mapas e problemas de controle: sistema com atraso temporal [5], mapas em cascata com equações diferenciais parciais [6–8], jogos cooperativos com equilíbrio de Nash [9, 10] e controle acionado por eventos [11]. Todavia, esses estudos lidam com o ESC livre de efeitos de saturação.

Sabe-se que, na prática, restrições na entrada podem surgir devido a limitações físicas e operacionais [12–14]. Se a presença de restrições na entrada não for propriamente analisada e levada em conta na síntese de controle, o desempenho do sistema em malha fechada pode ser deteriorado ou até mesmo levar à instabilidade do sistema. No contexto do ESC, as restrições de entrada foram tratadas empregando uma perspectiva de otimização limitada.

Em [1], o problema de ESC foi tratado considerando uma não-linearidade de saturação rígida que restringe a entrada em um esquema de ESC baseado em gradiente para otimizar mapas quadráticos escalares. Embora um compensador *anti-windup* (AW) seja sugerido nesse trabalho, os autores também afirmam que é difícil demonstrar rigorosamente que o mecanismo AW funciona. Por esse motivo, os autores propõem esquemas de ESC baseados em funções de penalidade e estabelecem relações com a compensação AW. Visto isso, há uma limitação na demonstração explícita da estabilidade e no projeto sistemático do ganho de controle da compensação AW.

Em [15], um problema de controle LQ de horizonte finito foi resolvido por meio de ESC, utilizando o operador de projeção para lidar com as restrições na entrada e introduzindo um ESC discreto baseado em Newton. Entretanto, o trabalho restringe-se ao caso de entrada escalar e não fornece garantias explícitas de estabilidade da trajetória do sistema em malha fechada. Além disso, o método requer o conhecimento completo da matriz Hessiana associada ao problema de otimização.

Uma compensação para o ESC foi empregada também em um ESC baseado em

observador para um processo de destilação por membrana em contato direto [16]. A compensação AW também é empregada no caso multivariável, adicionando um compensador a cada canal de entrada, constituindo, assim, um compensador AW descentralizado.

Para a classe de sistemas de controle não lineares em tempo discreto, a referência [17] propõe um ESC proporcional e integral com um mecanismo AW discreto no tempo. Nesse trabalho, a saturação do atuador é tratada como uma consequência direta da presença do sinal de excitação empregado na estimação do gradiente. Para mitigar esse efeito, os autores introduzem, no caso SISO, um método adaptativo de atualização da amplitude do sinal de excitação, a fim de evitar violações persistentes dos limites de saturação. Logo, a saturação é vista como um efeito indesejado do sinal de excitação, não como uma restrição operacional.

Em [18], um esquema de ESC é apresentado para o controle operacional de processamento de minerais, considerando tanto a regulação dos índices operacionais quanto a maximização da produtividade. Para lidar com restrições na entrada, uma função de saturação é aplicada a cada entrada, e uma função pênalti é adicionada para penalizar entradas que infringem a região de trabalho permitida.

Diferentemente dos artigos mencionados anteriormente que lidam com restrições rígidas de saturação, a referência [19] lida com a limitação de entrada empregando um método baseado em uma função de barreira, de modo que as restrições de entrada sejam satisfeitas, desde que a inicialização paramétrica produza condições operacionais que não violem as restrições.

Mais recentemente, [20] investigou a abordagem baseada em penalização AW de [1] para esquemas de ESC baseados em Newton com derivadas de ordem superior, sob saturação de entrada. Diferentemente do estudo inicial [1], os autores de [20] concentraram-se na otimização da velocidade de compensação da função de penalidade incorporada ao mapa não linear. No entanto, a análise é restrita ao caso SISO e não são fornecidas condições sistemáticas de projeto dos ganhos de controle.

Apesar dos avanços no tratamento com o ESC saturado usando abordagens com funções AW e de penalidade, as soluções existentes na literatura geralmente estão limitadas ao caso escalar. Em particular, quando o caso multivariável é considerado, uma estratégia descentralizada de compensação AW é empregada em cada canal de entrada. Além disso, nenhum desses trabalhos propõe condições para projetar o ganho de adaptação

realimentado e o ganho do compensador AW. Em contraste, alguns trabalhos, fora do contexto de ESC, lidam com a saturação no atuador, usando técnicas de compensação AW e fornecendo condições construtivas e numericamente implementáveis para projetar controladores por meio de soluções de otimização baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) [21–23]. Entretanto, as soluções requerem conhecimento de um modelo da planta a ser controlada e não lidam com otimização em tempo real, o que difere das estratégias de ESC.

Objetivos e Contribuições

Esta dissertação trata do ESC baseado no algoritmo do gradiente sujeito a restrições de saturação. Especificamente, dois cenários distintos são investigados: saturação presente na entrada do mapa a ser otimizado e a saturação na estimativa do gradiente. Em ambos os cenários, o objetivo é projetar o ganho de controle do ESC e demonstrar que as trajetórias do sistema convergem para uma vizinhança do ponto ótimo.

Para o primeiro caso, emprega-se um esquema de compensação AW para garantir a estabilização exponencial global do sistema médio. Para isso, propõe-se uma condição de síntese na forma de LMIs. Para o segundo caso, uma condição de estabilização local para o sistema médio é obtida, também expressa na forma de LMIs. Em ambos os casos, para obter as condições de síntese, a matriz Hessiana desconhecida do mapa quadrático é modelada considerando uma representação por incerteza politópica. Destaca-se que a metodologia de projeto apresentada permite a obtenção de ganhos de controle não diagonais, oferecendo maior flexibilidade no projeto de controle em comparação com os ganhos diagonais tipicamente escolhidos *a priori* na literatura sobre ESC multivariável.

Em ambos os casos, a convergência das trajetórias para uma vizinha do ponto ótimo é garantida, invocando-se o Teorema da Média para sistemas com não linearidades Lipschitz, apresentado no Apêndice A. Este resultado também constitui uma contribuição dessa dissertação e pode ser visto como uma aplicação do resultado mais geral descrito em [24].

Estrutura da Dissertação

No Capítulo 1, o problema clássico do controle extremal multivariável sem restrições de saturação é apresentado [2]. A dinâmica média do sistema em malha é apresentada adotando-se a representação de incerteza politópica proposta. Com isso, estabelece-se uma condição de projeto do ganho estabilizante, na forma de LMIs, para assegurar a estabilidade exponencial do sistema médio em malha fechada. Finalmente, a convergência para uma vizinhança do ponto ótimo do ESC é demonstrada pelo Teorema da Média de [25].

No Capítulo 2, aborda-se o caso em que o sistema está sujeito à saturação na entrada do mapa estático a ser otimizado, o que impõe uma restrição à faixa de operação do atuador. Para lidar com a restrição na entrada, uma estrutura de compensação AW é incorporada ao esquema de controle. A função de saturação é representada por uma função de zona morta, permitindo adotar uma condição de setor generalizada, que pode ser incorporada para obter, na forma de LMIs, uma condição que assegura a estabilização exponencial do sistema médio. A convergência do sistema para uma vizinhança do ponto ótimo é demonstrada invocando o Teorema da Média apresentado no Apêndice **A**.

No Capítulo 3, considera-se o caso em que a saturação é imposta na estimação do gradiente. Esse cenário é interpretado como um limitante à taxa de atualização do sistema. Da mesma forma que no capítulo anterior, uma condição de setor generalizada é empregada para analisar o sistema médio em malha fechada, considerando a não linearidade de zona morta. Uma condição de projeto também é obtida para assegurar a estabilização exponencial do sistema médio e a convergência do sistema para uma vizinhança do ponto ótimo também é demonstrada invocando o Teorema da Média apresentado no Apêndice **A**.

Finalmente, a conclusão da dissertação é apresentada no último capítulo, elencando os principais resultados alcançados e os futuros desafios que podem ser estudados com as técnicas desenvolvidas neste trabalho.

1 CONTROLE EXTREMAL BASEADO NO ALGORITMO DO GRADIENTE

Neste capítulo, apresenta-se o ESC multivariável baseado no algoritmo do gradiente. Inicialmente, será detalhado o funcionamento do ESC, incluindo a descrição do sistema em malha fechada e a análise de estabilidade com base no Teorema da Média. Como primeira contribuição desta dissertação, a partir de uma descrição politópica da matriz Hessiana, propõe-se um método de otimização convexa baseado em LMIs. A principal vantagem desta abordagem é a sistematização do projeto do ganho de controle para o ESC multivariável, evitando-se hipóteses e restrições quanto à estrutura da matriz de ganho estabilizante. Os resultados de simulação são apresentados para ilustrar a eficácia e a aplicabilidade da condição de projeto proposta.

1.1 Formulação do problema

A utilização da técnica de estimação de gradiente confere ao ESC a capacidade de inferir a direção de aumento ou diminuição do desempenho de um sistema a partir de pequenas perturbações e medições da resposta, sem a necessidade de conhecer o modelo matemático da função.

Para a formulação do problema de ESC multivariável baseado no algoritmo do gradiente [2], considere o diagrama apresentado na Figura 1.

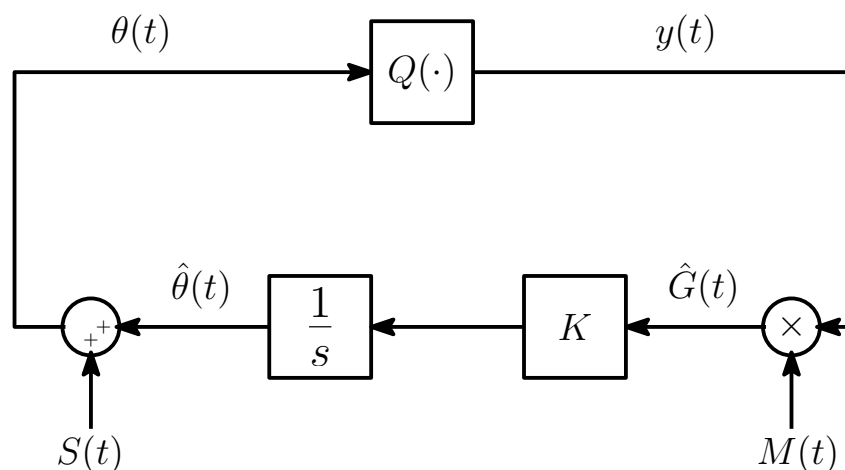


Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema de controle extremal multivariável clássico baseado no algoritmo do gradiente.

Na Figura 1, o objetivo é fazer com que a saída $y(t) \in \mathbb{R}$ alcance o ponto ótimo

$Q^* \in \mathbb{R}$ desconhecido do mapeamento. Para isso, a ideia do ESC consiste em aplicar pequenas perturbações, dadas por $M(t)$ e $S(t)$, a serem definidas posteriormente, de modo que a entrada do mapa, $\theta(t) \in \mathbb{R}^n$, convirja para uma vizinhança do otimizador $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ desconhecido do mapeamento. Considere que a saída é definida por

$$y(t) = Q(\theta(t)), \quad (1)$$

onde $Q(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é um mapa não linear estático, que satisfaz a seguinte hipótese.

Hipótese 1.1. *O mapa estático não linear é continuamente diferenciável e é representado pelo seguinte mapa localmente quadrático em torno do ponto ótimo:*

$$Q(\theta(t)) = Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t) - \theta^*)^\top H(\theta(t) - \theta^*), \quad (2)$$

onde $y^* \in \mathbb{R}$ é o valor ótimo desconhecido da saída, $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ é o ponto ótimo desconhecido e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Hessiana desconhecida.

Em particular, a equação (2) mostra que se o mapa é localmente quadrático, a metodologia desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada em uma vizinhança do extremo. Essa suposição é pouco restritiva, uma vez que qualquer função não linear $Q(\cdot)$, duas vezes continuamente diferenciável, admite uma aproximação quadrática na vizinhança de seu extremo. Portanto, todos os resultados de estabilidade apresentados neste trabalho são válidos, ao menos, localmente. Para mapeamentos que não são localmente quadráticos e que podem não garantir estabilidade exponencial do sistema médio, a abordagem em [26] pode assegurar estabilidade prática assintótica (em vez de exponencial).

Além disso, a saída do integrador fornece a estimativa $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$ do ponto ótimo θ^* . Assim, pode-se definir o erro de estimação $\tilde{\theta}(t)$ como

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*. \quad (3)$$

Analogamente, o sinal $\theta(t)$ aplicado ao mapa pode ainda ser expresso como

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t). \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3), tem-se que o erro de estimação é

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - S(t) - \theta^*, \quad (5)$$

a partir do qual pode-se obter a seguinte relação

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t). \quad (6)$$

Por sua vez, a estimativa do gradiente é obtida por

$$\hat{G}(t) = M(t)y(t), \quad (7)$$

onde os sinais de excitação e de demodulação são definidos de forma a evitar a sobreposição de sinais associados a diferentes frequências, prevenindo, assim, o *aliasing* e a interferência espectral, conforme apresentado em [27].

$$S(t) = \left[a_1 \sin(\omega_1 t) \quad \cdots \quad a_n \sin(\omega_n t) \right]^\top, \quad (8)$$

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \quad \cdots \quad \frac{2}{a_n} \sin(\omega_n t) \right]^\top, \quad (9)$$

onde a_i , para todo $i = 1, \dots, n$, são amplitudes não nulas dos sinais de excitação, e as frequências deles são selecionadas seguindo a hipótese

Hipótese 1.2. *Para uma dada frequência angular $\omega > 0$, as frequências de excitação são selecionadas de modo que*

$$\omega_i = \omega'_i \omega, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

onde ω'_i é um número racional que satisfaz

$$\omega'_i \notin \left\{ \omega'_j, \frac{1}{2}(\omega'_j + \omega'_k), \omega'_j + 2\omega'_k, \omega'_k \pm \omega'_i \right\}, \quad (11)$$

para todo $i, j, k = 1, \dots, n$ e l .

A partir da equação (7) e utilizando a relação em (6), pode-se descrever a estimativa

do gradiente da seguinte forma:

$$\hat{G}(t) = M(t) \left(Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t) - \theta^*)^\top H(\theta(t) - \theta^*) \right) \quad (12)$$

$$= M(t) \left(Q^* + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}(t) + S(t))^\top H(\tilde{\theta}(t) + S(t)) \right) \quad (13)$$

a qual pode ainda ser expressa como

$$\hat{G}(t) = M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)S^\top(t)HS(t) + M(t)S(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t). \quad (14)$$

A partir do esquema apresentado na Figura 1, tem-se que o sinal de entrada do integrador é a derivada temporal de $\hat{\theta}(t)$. Logo, derivando-se (3), tem-se que

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) \quad (15)$$

visto que a derivada temporal de θ^* é nula, pois o ponto ótimo é uma constante. Dessa forma, a dinâmica do erro de estimação é igual à dinâmica de estimação.

De forma similar, pode-se estabelecer a seguinte relação entre a estimativa do gradiente e a dinâmica do erro de estimação:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = K\hat{G}(t). \quad (16)$$

Conforme estabelecido nos objetivos deste trabalho, um dos cenários investigados consiste na saturação no sinal de estimação do gradiente. Com o propósito de caracterizar a dinâmica da estimação do gradiente, tanto na presença quanto na ausência de saturação, a dinâmica do erro de estimação obtida em (16) é reorganizada a partir da derivada temporal em (14). Em seguida, obtém-se um modelo dinâmico que relaciona explicitamente a derivada temporal da estimação do gradiente com o próprio estado do

gradiente estimado.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{G}}(t) &= \dot{M}(t)Q^* \\
&+ \left(\frac{1}{2}\dot{M}(t)S^\top(t)HS(t) + \frac{1}{2}M(t)\dot{S}^\top(t)HS(t) + \frac{1}{2}M(t)S^\top(t)H\dot{S}(t) \right) \\
&+ \left(\dot{M}(t)S(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + M(t)\dot{S}(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + M(t)S(t)^\top H\dot{\tilde{\theta}}(t) \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2}\dot{M}(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2}M(t)\dot{\tilde{\theta}}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\dot{\tilde{\theta}}(t) \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Aplicando a mesma análise da simetria feita anteriormente

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{G}}(t) &= \dot{M}(t)Q^* \\
&+ \left(\frac{1}{2}\dot{M}(t)S^\top(t)HS(t) + M(t)S^\top(t)H\dot{S}(t) \right) \\
&+ \left(\dot{M}(t)S(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + M(t)\dot{S}(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + M(t)S(t)^\top H\dot{\tilde{\theta}}(t) \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2}\dot{M}(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) + M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\dot{\tilde{\theta}}(t) \right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Um resultado importante obtido em [11] permite que (18) seja reorganizado da seguinte forma. Definindo-se

$$\Omega(t) = M(t)S^\top(t)H, \tag{19}$$

a multiplicação expressa em (19) pode ser expandida como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{2}{a_1} \text{sen}(\omega_1 t) \\ \vdots \\ \frac{2}{a_n} \text{sen}(\omega_n t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \text{sen}(\omega_1 t) & \cdots & a_n \text{sen}(\omega_n t) \end{bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} 2 \text{sen}^2(\omega_1 t) & \cdots & \frac{2a_n}{a_1} \text{sen}(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_n t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_1}{a_n} \text{sen}(\omega_1 t) \text{sen}(\omega_n t) & \cdots & 2 \text{sen}^2(\omega_n t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde os elementos da matriz resultante são

$$\begin{aligned}
\text{sen}^2(\omega_i t) &= 1 - \cos(2\omega_i) \\
\text{sen}(\omega_i) \text{sen}(\omega_j) &= \frac{1}{2}(\cos(\omega_i - \omega_j) - \cos(\omega_i + \omega_j)).
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$, define-se uma matriz matriz $\Delta(t)$ onde

$$\Delta_{ii}(t) = \cos(2\omega_i t), \quad (20)$$

$$\Delta_{ij}(t) = \frac{a_j}{a_i} \cos(\omega_i t - \omega_j t) - \frac{a_j}{a_i} \cos(\omega_i t + \omega_j t). \quad (21)$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 - \Delta_{11}(t) & \cdots & \Delta_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1}(t) & \cdots & 1 - \Delta_{nn}(t) \end{bmatrix} = I + \Delta(t).$$

Portanto, pode-se reorganizar (19) como

$$\Omega(t) = M(t)S^\top(t)H = H + \Delta(t)H, \quad (22)$$

e reescrever (18)

$$\dot{\hat{G}}(t) = (H + \Delta(t)H)\dot{\hat{\theta}}(t) + v(t), \quad (23)$$

substituindo por (16)

$$\dot{\hat{G}}(t) = (H + \Delta(t)H)K\hat{G}(t) + v(t), \quad (24)$$

onde

$$\begin{aligned} v(t) = & \dot{M}(t)Q^* + \frac{1}{2}\dot{M}(t)S^\top(t)HS(t) + M(t)S^\top(t)H\dot{S}(t) + \dot{M}(t)S(t)^\top H\tilde{\theta}(t) \\ & + M(t)\dot{S}(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2}\dot{M}(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) + M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\dot{\tilde{\theta}}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

Após o desenvolvimento das equações que descrevem a dinâmica de $\hat{G}(t)$, verifica-se que a estrutura resultante não é trivial para a análise de estabilidade nem para o projeto do ganho estabilizante K . Uma ferramenta capaz de simplificar sistemas dessa natureza é o Teorema da Média, apresentado em Khalil [25]. A partir desse teorema, é possível estabelecer uma relação entre o sistema original e o seu sistema médio, o que permite simplificações analíticas e facilita o estudo da estabilidade.

1.2 Sistema em malha fechada médio

O método da média é aplicado a sistemas da forma

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \quad (26)$$

onde ε é um parâmetro pequeno positivo e $f(t, x, \varepsilon)$ é T -periódico em t ; isto é,

$$f(t + T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon), \quad \forall (t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \quad (27)$$

para algum domínio $D \in \mathbb{R}^n$. O método aproxima a solução do problema por uma solução do sistema médio, obtido através de $f(t, x, \varepsilon)$ em $\varepsilon = 0$. Consequentemente, a representação média desse sistema é

$$\dot{x} = \varepsilon f(x). \quad (28)$$

Portanto, é estabelecido o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja $f(t, x, \varepsilon)$ e suas derivadas parciais em relação a (x, ε) , até a segunda ordem, contínuas e limitadas em $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D_0 \times [0, \varepsilon_0]$, para qualquer conjunto compacto $D_0 \subset D$, onde $D \in \mathbb{R}^n$ é um domínio. Sejam $x(t, \varepsilon)$ e $x_{av}(\varepsilon t)$ as soluções de (26) e de (28), respectivamente.*

- *Se $x_{av}(t) \in D$, $\forall t \in [0, \frac{b}{\varepsilon}]$, e $x(0, \varepsilon) - x_{av}(0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, então existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $x(t, \varepsilon)$, é definido e*

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ em } [0, b/\varepsilon]$$

- *Se a origem $x = 0 \in D$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável de (28), $\chi \in D$ é um subconjunto compacto a sua região de atração, $x_{av}(0) \in \Omega$, e $x(0, \varepsilon) - x_{av} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, então existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $x(t, \varepsilon)$, é definido e*

$$x(t, \varepsilon) - x_{av}(\varepsilon t) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \forall t \in [0, \infty]$$

- *Se a origem $x = 0 \in D$ é um ponto de equilíbrio do sistema médio (28), então existem constantes positivas ε^* e κ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, (26) tem uma*

solução única, exponencialmente estável, com período T e solução média $\bar{x}(t, e)$ com a propriedade $\|\bar{x}(t, e)\| \leq \kappa\varepsilon$.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser consultada em [25, Seção 10.4].

□

Após a definição do Teorema 1.1 que será aplicado sobre (24), é construído o sistema médio em malha fechada para a dinâmica da estimação do gradiente.

Hipótese 1.3. *Na análise do sistema médio, assume-se que o erro de estimação $\tilde{\theta}(t)$ permanece constante ao longo de um período T , de modo que sua derivada pode ser considerada desprezível, isto é, $\dot{\tilde{\theta}}(t) \approx 0$. Em outras palavras, existe um $\omega > 0$, suficientemente grande, tal que $\tilde{\theta}(t)$ varia numa escala de tempo muito mais lenta do que as oscilações encontradas nos sinais de excitação (8) e (9). Assim, garante-se a existência de um período T .*

$$T = 2\pi \times \text{MMC} \left\{ \frac{1}{\omega_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

onde MMC denota o mínimo múltiplo comum. A mudança de escala de tempo do sistema em (24) consiste em uma transformação $\tau = \omega t$, onde

$$\omega := \frac{2\pi}{T}. \quad (30)$$

Iniciando a análise média em $\Delta(\tau)$, considerando (20) e (21), observa-se um conjunto de cossenoides que são periódicas em T , continuamente deriváveis e suas frequências possuem a relação (11), então, utilizando o **Teorema Fundamental do Cálculo** [28], a média sobre um período é nula:

$$\begin{aligned} \Delta_{iia_v} &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega_i \delta) d\delta = 0, \\ \Delta_{ijav} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{a_j}{a_i} \cos(\omega_i \delta - \omega_j \delta) - \frac{a_j}{a_i} \cos(\omega_i \delta + \omega_j \delta) d\delta = 0. \end{aligned}$$

Seguindo para o sinal $v(t)$, há $v_1 = \dot{M}(\tau)Q^*$: como $M(t)$ é um conjunto de senoides, ela é T -periódica e continuamente derivável, e Q^* constante, utilizando a mesma

ferramenta acima:

$$\begin{aligned} v_{1av} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{M}(\delta) Q^* d\delta \\ v_{1av} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{M}(\delta) d\tau (Q^*) \\ v_{1av} &= \frac{1}{T} (M(T) - M(0)) Q^* = 0 \\ v_{1av} &= \frac{1}{T} (M(0) - M(0)) Q^* = 0. \end{aligned}$$

Analisando $v_2 = \frac{1}{2} \dot{M}(t) S^\top(t) H S(t)$:

$$v_{2av(ij)} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\omega_i}{a_i} \cos(\omega_i t) a_j \sin(\omega_j t) H_{ij} a_i \sin(\omega_i t)$$

considere uma constante $C_{i,j} = \omega_i a_j H_{ij}$.

$$\begin{aligned} v_{2av(ij)} &= \sum_{i,j=1}^n C_{i,j} \cos(\omega_i t) \sin(\omega_j t) \sin(\omega_i t) \\ v_{2av(ij)} &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i,j=1}^n C_{i,j} \cos(\omega_i \delta) \sin(\omega_j \delta) \sin(\omega_i \delta) d\delta \\ v_{2av(ij)} &= \frac{1}{T} \sum_{i,j=1}^n C_{i,j} \int_0^T \cos(\omega_i \delta) \sin(\omega_j \delta) \sin(\omega_i \delta) d\delta \end{aligned}$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo, a integral da combinação de seno e cossenos é nula; logo, $v_{2av(ij)} = 0$. Analogamente, pode-se concluir que $M(t) S^\top(t) H \dot{S}(t)$, $\dot{M}(t) S(t)^\top H \tilde{\theta}(t)$ e $M(t) \dot{S}(t)^\top H \tilde{\theta}(t)$ possuem média nula pela demonstração acima.

Finalmente, utilizando a Hipótese 1.3, os termos $\frac{1}{2} \dot{M}(t) \tilde{\theta}^\top(t) H \tilde{\theta}(t)$ e $M(t) \tilde{\theta}^\top(t) H \dot{\tilde{\theta}}(t)$ também possuem média nula.

Dessa forma, após os cálculos acima, $\Delta_{av}(t)$ e $v_{av}(t)$ são nulos na análise média. Portanto, o sistema médio da dinâmica (24) com a mudança temporal:

$$\dot{\hat{G}}_{av}(t) = H K \hat{G}_{av}(t). \quad (31)$$

1.3 Representação politópica da matriz hessiana

Em geral, as metodologias de Controle Extremal (ESC) assumem como premissa que a matriz Hessiana desconhecida é definida negativa ou definida positiva, a depender de o ponto ótimo corresponder a um máximo ou mínimo da função de custo, respectivamente. Com base nessa propriedade, costuma-se associar uma estrutura diagonal definida negativa (ou positiva) à matriz de ganho K .

No entanto, essa abordagem não é direta, uma vez que o projeto do ganho K ainda precisa ser realizado, sendo geralmente ajustado de forma empírica. Para contornar essa limitação, este trabalho propõe o uso de uma representação politópica da matriz Hessiana, a qual possibilita incorporar explicitamente a incerteza estrutural dessa matriz. Essa formulação é enunciada na hipótese apresentada a seguir

Hipótese 1.4. *A Matriz Hessiana desconhecida assume valores dentro do domínio politópico:*

$$\mathcal{H} = \text{co}\{H_1, \dots, H_N\}, \quad (32)$$

onde N é o número de vértices do politopo e $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, são matrizes simétricas conhecidas.

Sob a Hipótese 1.4, qualquer matriz desconhecida $H \in \mathcal{H}$ pode ser parametrizada como:

$$H = H(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i H_i, \quad (33)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é o vetor de parâmetros fixos, porém desconhecidos, que pertence ao seguinte simplex unitário:

$$\Xi = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (34)$$

Com a parametrização politópica em (33), a matriz Hessiana continua desconhecida; apenas os vértices do domínio politópico precisam ser conhecidos. Note que, para manter a consistência, as matrizes dos vértices devem ser todas definidas positivas ou negativas, dependendo se o problema é de minimização ou maximização. Além disso, o politopo pode

ser obtido utilizando diferentes representações de incerteza. Por exemplo, assumindo que $\lambda_1 I \leq H \leq \lambda_2 I$, pode-se escolher $H_1 = \lambda_1 I$ e $H_2 = \lambda_2 I$, obtendo-se um politopo com dois vértices. Alternativamente, pode-se introduzir uma incerteza sobre uma estimativa da Hessiana nominal H_0 , tal que $H = H_0 + \delta H_0$, $|\delta| \leq \bar{\delta}$, o que permite a construção de um poliedro de dois vértices definido por $H_1 = (1 - \bar{\delta})H_0$ e $H_2 = (1 + \bar{\delta})H_0$. Também é possível atribuir limites distintos aos elementos de uma matriz Hessiana incerta. Por exemplo, se H for de ordem dois, como

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

e assumindo que $|h_{11}| \leq \bar{\delta}_1$, $|h_{12}| \leq \bar{\delta}_2$, e $|h_{22}| \leq \bar{\delta}_3$, pode-se construir um poliedro com oito vértices (2^p , sendo $p = 3$ o número de parâmetros incertos, h_{11} , h_{12} , e h_{22}) combinando os limites desses parâmetros. De forma mais geral, considerando uma representação afim:

$$H = \Gamma_0 + \delta_1 \Gamma_1 + \dots + \delta_p \Gamma_p, \quad (36)$$

onde $|\delta_i| \leq \bar{\delta}_i$ and Γ_i , $i = 0, 1, \dots, p$, são matrizes conhecidas, constrói-se a representação politópica para H com 2^p vértices. Por exemplo, a matriz incerta (35) pode ser representada na forma (36) com $\delta_1 = h_{11}$, $\delta_2 = h_{12}$, $\delta_3 = h_{22}$,

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, reescreve-se (31) como

$$\dot{\hat{G}}_{av}(t) = H(\alpha)K\hat{G}_{av}(t). \quad (37)$$

1.4 Análise da estabilidade

Nesta seção, propõe-se uma condição de projeto, na forma de LMIs, para obter um ganho de controle $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que assegura que a origem do sistema médio em malha (37) seja exponencialmente estável. Em seguida, invocando-se o Teorema da Média (1.1), mostra-se que as trajetórias do ESC convergem exponencialmente para uma vizinhança do ponto ótimo.

1.4.1 Desigualdades matriciais lineares

As LMIs constituem uma classe de restrições convexas expressas na forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i < 0, \quad (38)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor que contém n números reais, chamados de variáveis de decisão. As matrizes F_0, \dots, F_i são simétricas, ou seja, $F_j = F_j^\top$. Por fim, a desigualdade em (38) indica que a matriz é definida negativa. Isso significa que $u^\top F(x)u < 0$ para todo vetor real não nulo u . Como todos os autovalores de matrizes são reais, a condição (38) equivale a afirmar que todos os autovalores de $F(x)$ são negativos. De forma equivalente, tem-se que o maior autovalor de $F(x)$ satisfaz $\lambda_{\max}(F(x)) < 0$.

Em sistemas de controle, as LMIs aparecem em vários contextos, como análise de estabilidade, μ -síntese, minimização de valores singulares, avaliação de funções de custo quadráticas e diversos outros [29]. Em geral, essas condições são obtidas do método direto de Lyapunov [29].

1.4.2 Projeto do ganho de controle estabilizante

Agora, são definidas condições de projeto para obter o ganho de controle $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que estabiliza exponencialmente a origem da dinâmica média da estimativa do gradiente definida em (37).

Considere a seguinte função de Lyapunov candidata

$$V(\hat{G}_{av}) = \hat{G}_{av}^\top P \hat{G}_{av}, \quad (39)$$

onde $P = P^\top > 0$ assegura que $V(\hat{G}) > 0, \forall \hat{G}_{av} \neq 0$. A partir dessa função, é possível desenvolver uma condição de projeto do ganho K na forma de LMIs, conforme estabelecido no seguinte Lema.

Lema 1.2. *Seja $\eta > 0$ um escalar dado. Se existir uma matriz definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$L^\top H_i + H_i L + 2\eta X < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (40)$$

então a origem do sistema médio em malha fechada é exponencialmente estável com taxa de decaimento η .

Demonstração. Assuma que as condições em (40) sejam verificadas. Então, obtém-se uma matriz X definida positiva. Logo, assegura-se que X é invertível. Assim, multiplicando-se (40) por $P = X^{-1}$ à esquerda e à direita e fazendo a mudança de variáveis $K = LX^{-1}$, tem-se que

$$K^\top H_i P + P H_i K + 2\eta P < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (41)$$

Segue então de (41) e (33) que

$$K^\top H(\alpha) P + P H(\alpha) K < -2\eta P, \quad (42)$$

ou ainda, equivalentemente, que

$$\dot{V}(\hat{G}_{av}(t)) \leq -2\eta V(\hat{G}_{av}(t)), \quad (43)$$

onde $V(\hat{G}_{av})$ é dada em (39). A partir do Lema da Comparação [25], é possível concluir de (43) que

$$V(\hat{G}_{av}(t)) \leq e^{-2\eta t} V(\hat{G}_{av}(0)). \quad (44)$$

Dado que

$$\lambda_{\min}(P) \|\hat{G}_{av}\|^2 \leq V(\hat{G}_{av}) \leq \lambda_{\max}(P) \|\hat{G}_{av}\|^2, \quad (45)$$

segue de (44) e (45) que

$$\|\hat{G}_{av}(t)\| \leq \kappa e^{-\eta t} \|\hat{G}_{av}(0)\|, \quad (46)$$

onde $\kappa = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$. Portanto, a origem de (37) é exponencialmente estável. Isto conclui a demonstração. \square

1.4.3 Convergência exponencial para uma vizinhança do extremo

O Lema 1.2 estabelece uma condição de projeto para o ganho de controle que garante a estabilidade exponencial regional do sistema médio em malha fechada descrito por (31). Em seguida, apresenta-se o resultado principal, no qual se demonstra a convergência exponencial local para uma vizinhança do extremo por meio do Teorema 1.1.

Teorema 1.3. *Considere o ESC na Figura 1 e as Hipóteses 1.1, 1.2 e 1.4, como também a correspondente média da dinâmica em malha fechada guiando a estimação do gradiente em (37). Se as condições do Lema 1.2 são satisfeitas, então, para $\omega > 0$ suficientemente grande em (10), então existem constantes $\bar{\kappa}_\theta, \bar{\kappa}_y, \eta > 0$, tais que:*

$$\|\theta(t) - \theta^*\| \leq \bar{\kappa}_\theta e^{-\eta t} + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \quad (47)$$

$$|y(t) - Q^*| \leq \bar{\kappa}_y e^{-\eta t} + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right), \quad (48)$$

onde $a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, com a_i definido em (8)–(9), e $\bar{\kappa}_\theta$ e $\bar{\kappa}_y$ são constante que dependem da condição inicial $\theta(0)$.

Demonstração. Pelas equações (14) e (19), e lembrando que $\Delta_{\text{av}}(t) = 0$, deduz-se que

$$\hat{G}_{\text{av}}(t) = H\tilde{\theta}_{\text{av}}(t), \quad (49)$$

desde que os outros termos também possuem média nula.

Reescrevendo a função de Lyapunov em (39) como

$$V(\tilde{\theta}_{\text{av}}) = \tilde{\theta}_{\text{av}}^\top \bar{P} \tilde{\theta}_{\text{av}}, \quad (50)$$

onde $\bar{P} = HPH$ é uma matriz simétrica definida positiva, desde que P seja simétrica e definida positiva e H simétrica. Assim, é possível encontrar

$$\|\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)\| \leq \kappa_\theta e^{-\eta t} \|\tilde{\theta}_{\text{av}}(0)\|, \quad (51)$$

onde $\kappa_\theta = \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{P})/\lambda_{\min}(\bar{P})}$. Desde que o sistema médio em malha fechada é exponencialmente estável de acordo com (51), aplicando o Teorema 1.1, com $\varepsilon := 1/\omega$); conclui-se

que:

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_{\text{av}}(t)\| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (52)$$

Ao aplicar a desigualdade triangular, obtém-se que

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \kappa_{\theta} e^{-\eta t} \|\tilde{\theta}(0)\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (53)$$

Com base no Teorema da Média, é possível concluir que

$$\|\hat{G}(t) - \hat{G}_{\text{av}}(t)\| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (54)$$

De maneira análoga, aplica-se a desigualdade triangular para se obter

$$\|\hat{G}(t)\| \leq \kappa e^{-\eta t} \|\hat{G}(0)\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (55)$$

De (6) e (53), a seguinte relação pode ser deduzida:

$$\|\theta(t) - \theta^*\| \leq \kappa_{\theta} e^{-\eta t} \|\theta(0) - \theta^*\| + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \quad (56)$$

resultando em (47), com $\bar{\kappa}_{\theta} = \kappa_{\theta} \|\theta(0) - \theta^*\|$.

Seja o erro da saída

$$\tilde{y}(t) := y(t) - Q^*, \quad y(t) = Q(\theta(t)). \quad (57)$$

Calculando sua norma e aplicando a desigualdade de Cauchy–Schwarz, tem-se que

$$|\tilde{y}(t)| = |y(t) - Q^*| = |(\theta(t) - \theta^*)^{\top} H(\theta(t) - \theta^*)| \quad (58)$$

$$\leq \|H\| \|\theta(t) - \theta^*\|^2. \quad (59)$$

A partir de (56), é ainda possível de obter

$$|\tilde{y}(t)| \leq \|H\| \kappa_{\theta}^2 e^{-2\eta t} \|\theta(0) - \theta^*\|^2 + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{2a}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right). \quad (60)$$

Desde $e^{-\eta t} \geq e^{-2\eta t}$ e $a^2 + \frac{1}{\omega^2} \geq \frac{2a}{\omega}$, para $\omega > 0$ e $a > 0$, pela desigualdade de Yuong,

verifica-se

$$|y(t) - Q^*| \leq \bar{\kappa}_y e^{-2\eta t} + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right), \quad (61)$$

onde

$$\bar{\kappa}_y = \kappa_\theta^2 \|H\| \|\theta(0) - \theta^*\|^2,$$

resultando na desigualdade (48). Isto conclui a demonstração. \square

1.5 Resultados numéricos

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos após a implementação da teoria desenvolvida ao longo desse Capítulo para o projeto do ganho estabilizante K , tomando a Hessiana uma matriz aleatória dentro de um conjunto politópico.

As simulações foram feitas usando uma matriz Hessiana de referência H_0 usada em [27]:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 100 & 30 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} \quad (62)$$

onde os vértices do politopo foram obtidos usando a estrutura em (35). Dessa forma, os vértices foram construídos usando $\bar{\delta} = 0.1$. Assim

$$H_1 = \begin{bmatrix} 90 & 27 \\ 27 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 110 & 33 \\ 33 & 22 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

A matriz aleatória desconhecida gerada foi

$$H^* = \begin{bmatrix} 100.5500 & 30.1650 \\ 30.1650 & 20.1100 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

A Figura 2 apresenta o conjunto de incerteza da matriz Hessiana. Nesta figura, é possível visualizar a região onde a matriz Hessiana desconhecida aleatória foi gerada para o projeto do ganho de controle.

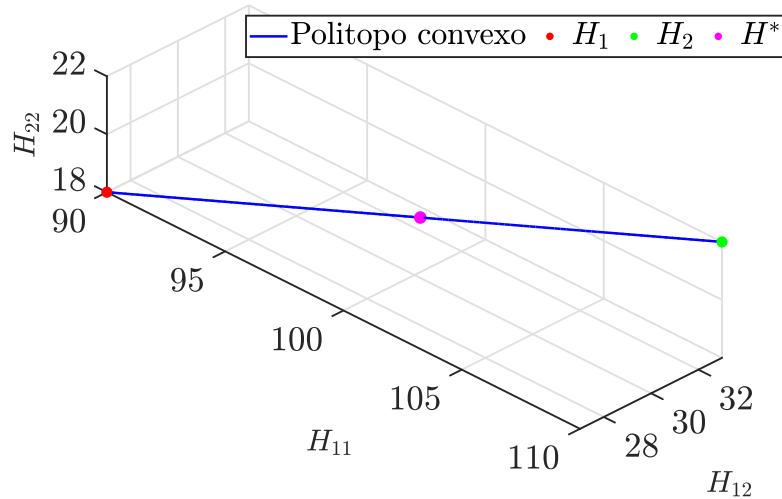


Figura 2: Representação do conjunto de incerteza da matriz Hessiana.

O ganho estabilizante K obtido após a solução da LMI definida em (40) é

$$K = \begin{bmatrix} -0.0659 & -0.0201 \\ 0.1994 & -4.5737 \times 10^{-9} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Destaca-se que mesmo com um termo relativamente pequeno presente na matriz do ganho de controle K , o produto KH^* permanece Hurwitz.

Para a simulação, as frequências dos vetores de excitação (8) e (9) são escolhidas como $\omega_1 = 50$ rad/s e $\omega_2 = 70$ rad/s, as amplitudes das perturbações são $a_1 = a_2 = 0.1$. Além disso, as simulações foram realizadas considerando a condição inicial $\theta(0) = [2.5 \ 6]^\top$ e uma taxa de decaimento exponencial $\eta = 0.1$. Por fim, as frequências de corte utilizadas para o filtro passa-baixas e para o passa-altas foram $\omega_l = 5$ rad/s e $\omega_h = 7$ rad/s, respectivamente. Os resultados mostram que o ganho projetado assegura a estabilidade do controle extremal.

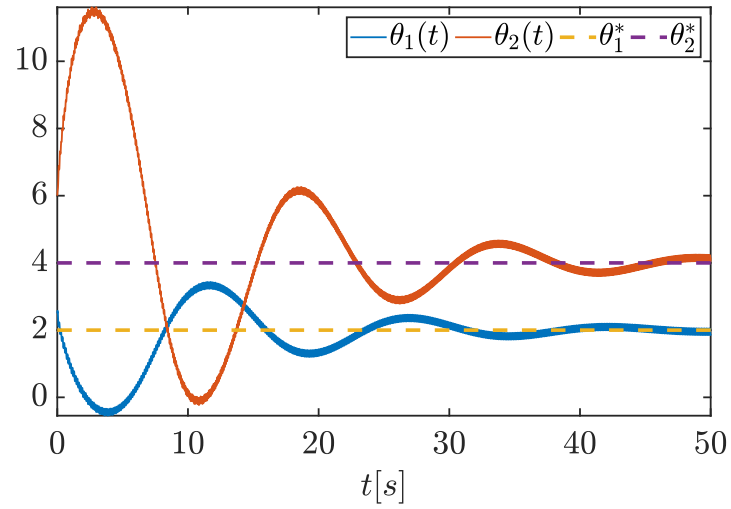
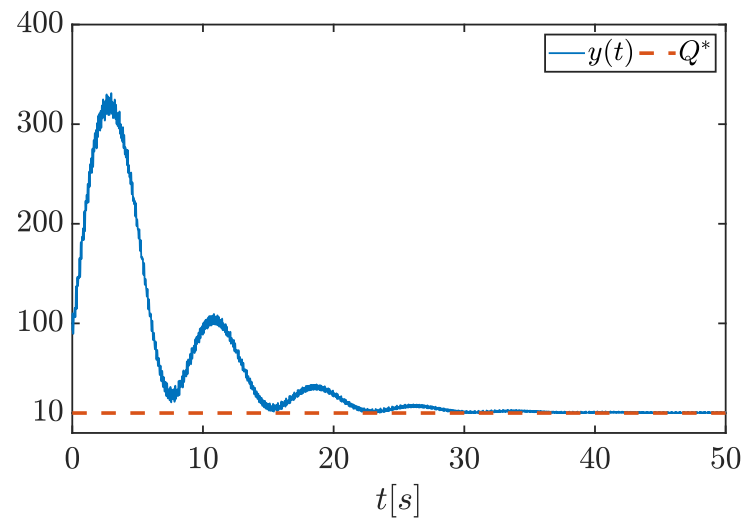
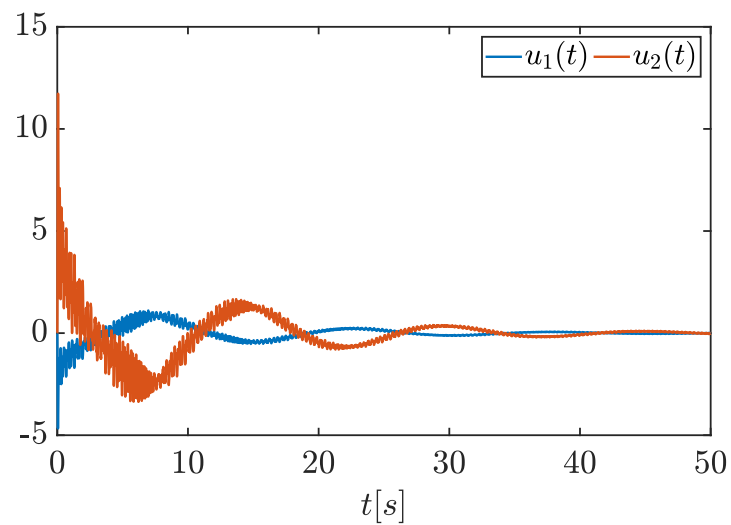
(a) Trajetória da entrada $\theta(t)$.(b) Trajetória da saída $y(t)$.(c) Trajetória do sinal $u(t)$.

Figura 3: Trajetórias do ESC em malha fechada, com o ganho de controle projetado conforme o Lema 1.2.

1.6 Conclusão

Este capítulo tratou do controle extremal multivariável baseado no algoritmo do gradiente, considerando a Hessiana desconhecida em um polítopo convexo. Utilizando uma função de Lyapunov candidata, estabeleceu-se uma condição de estabilidade para o sistema médio. Com base no Teorema da Média, garantiu-se a convergência das trajetórias em uma vizinhança do ponto ótimo. Assumindo uma incerteza politópica na matriz Hessiana, foi proposta uma condição construtiva para o projeto do ganho estabilizante. Assim, desenvolveu-se um método sistemático para projetar o ganho K , dispensando ajustes empíricos. Simulações ilustraram a eficácia da abordagem proposta em comparação com estruturas tradicionais da literatura.

Nos próximos capítulos, a análise será estendida considerando o efeito da saturação no sistema apresentado na Figura 1, imposta em dois cenários:

1. Saturação no vetor de entrada do mapa $\theta(t)$;
2. Saturação no sinal que antecede o integrador, ou seja, no sinal $K\hat{G}$, onde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o ganho do algoritmo do ESC.

2 CONTROLE EXTREMAL SOB SATURAÇÃO NO ATUADOR

Conforme destacado em [12], a saturação de atuadores impõe desafios significativos ao projeto de sistemas de controle, resultando em desempenho degradado e na ocorrência do efeito integrador *windup*. Esse efeito manifesta-se quando o controlador possui ação integral e o erro continua se acumulando devido ao efeito de saturação, o que pode ocasionar elevação do sobressinal, aumento do tempo de convergência do sistema ou até mesmo instabilidade. Diante desse problema, diversas pesquisas têm sido desenvolvidas com o objetivo de mitigar seus efeitos, como apresentado em [30] e nas abordagens de estratégias de AW implementadas em diferentes trabalhos mencionados na introdução desta dissertação.

Uma das principais referências utilizadas neste capítulo foi [1]. Em contraste com esse estudo, o presente trabalho investiga o caso multivariável, enquanto [1] aborda o caso escalar. Além disso, a metodologia empregada aqui considera uma representação da função de saturação como a soma de um termo não linear, com uma não linearidade de zona morta. Essa representação permite adotar uma condição de setor generalizada para lidar efetivamente com o efeito da não linearidade de zona morta na análise de estabilidade do sistema. Assim, são estabelecidas condições sistemáticas de projeto do ganho de controle com compensação AW, formulada na forma de LMIs. A solução dessa condição assegura a convergência das trajetórias do ESC mesmo com a presença de saturação.

Ademais, a saturação do atuador pode ser interpretada como uma limitação aplicada ao sinal de controle que efetivamente atua como entrada da planta. Estendendo esse conceito ao ESC, o atuador pode ser visto como o sinal de entrada do mapa estático não linear a ser otimizado. Portanto, a saturação do atuador corresponde à saturação na entrada do mapa.

2.1 Formulação do problema

Considere o controle extremal multivariável com saturação na entrada mostrado na Figura 4.

Para esse sistema, considera-se que o mapa estático não linear satisfaz a Hipótese 1.1, de forma que o mapa sujeito à saturação na entrada pode ser representado da seguinte

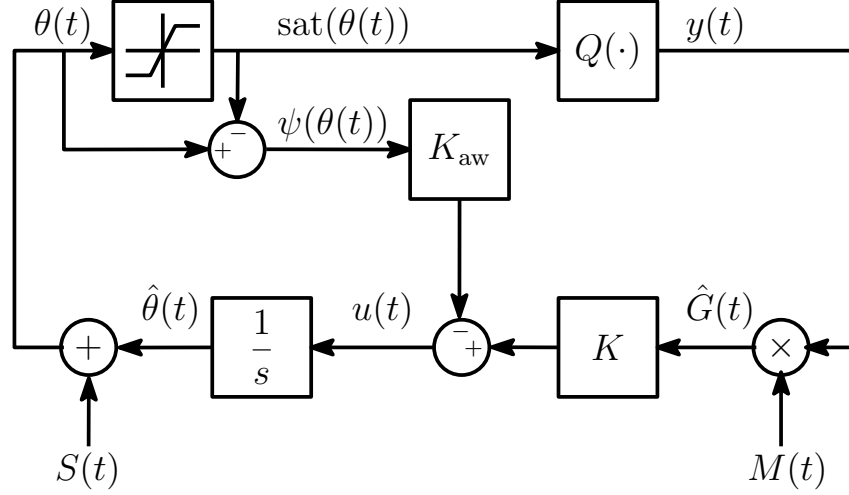


Figura 4: Controle extremal com saturação na entrada do mapa quadrático estático. Adaptado de [1].

forma quadrática:

$$y(t) = Q(\text{sat}(\theta(t))) \quad (66)$$

$$= Q^* + \frac{1}{2}(\text{sat}(\theta(t)) - \theta^*)^\top H(\text{sat}(\theta(t)) - \theta^*), \quad (67)$$

onde $\text{sat}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa a função de saturação definida elemento a elemento, definida como:

$$\text{sat}(\theta) = \begin{bmatrix} \text{sat}(\theta_1) \\ \vdots \\ \text{sat}(\theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\theta_1) \min(|\theta_1|, \bar{\theta}_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(\theta_n) \min(|\theta_n|, \bar{\theta}_n) \end{bmatrix}, \quad (68)$$

onde $\bar{\theta}_\ell > 0$ é o limite de saturação do sinal de entrada de ordem ℓ . Para um dado canal de entrada do mapa θ_ℓ , a função de saturação é ilustrada na Figura 5. Nota-se que, no intervalo $-\bar{\theta}_\ell \leq \theta_\ell \leq \bar{\theta}_\ell$, o sistema opera na região linear e não há efeito de saturação. Por outro lado, fora deste intervalo, ocorre o efeito da saturação e o valor da entrada saturada torna-se constante.

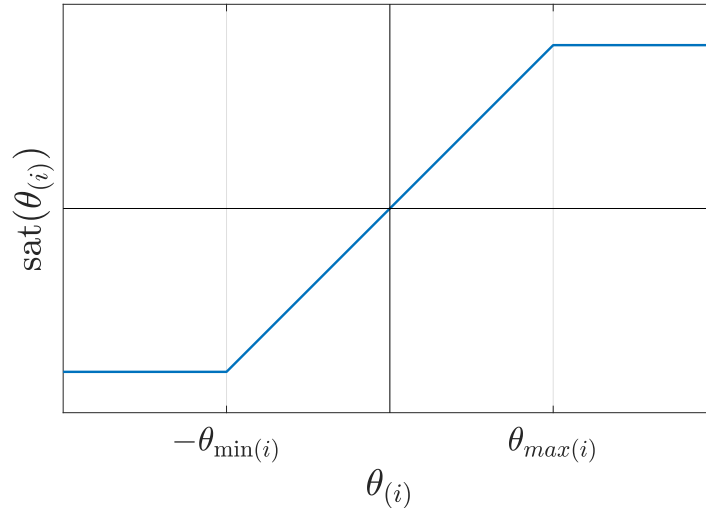


Figura 5: Ilustração da função de saturação definida em (68).

A partir de (3), a dinâmica do erro de estimação é dada por

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\theta}(t) = u(t). \quad (69)$$

Diferentemente do ESC sem efeito da saturação da Figura 1, para compensar o efeito da saturação na entrada do mapa, uma compensação AW foi acrescentada à entrada do integrador, de maneira que a lei de controle com compensação AW é dada por

$$u(t) = K\hat{G}(t) - K_{\text{aw}}\psi(\theta(t)), \quad (70)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o ganho de realimentação, que não é assumido diagonal, como usualmente feito nos trabalhos de ESC, $K_{\text{aw}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o ganho do compensador AW, e

$$\psi(\theta(t)) = \theta(t) - \text{sat}(\theta(t)) \quad (71)$$

é a função de zona morta não linear [12], ilustrada na Figura 6.

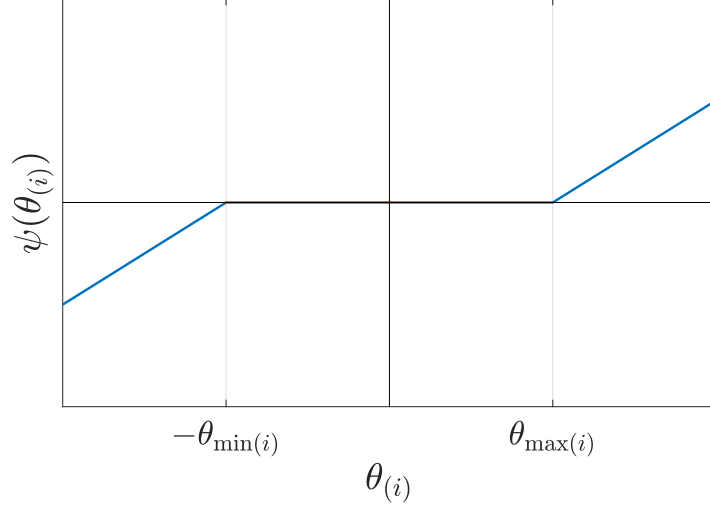


Figura 6: Representação gráfica da função de zona morta definida em (71).

A introdução de um compensador AW tem como objetivo direcionar a saída do mapa quadrático $y(t)$ para o ponto ótimo Q^* quando a entrada opera em uma região saturada. Nota-se que $\psi(\theta) \equiv 0$ quando a entrada encontra-se numa região de operação permitida, e (70) reduz-se à lei padrão do ESC.

Seguindo com a análise da estimação do gradiente, utiliza-se a relação

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t). \quad (72)$$

Junto com (3), (8) e (71), segue que

$$\text{sat}(\theta(t)) - \theta^* = S(t) + \tilde{\theta}(t) - \psi(\theta(t)). \quad (73)$$

Tomando o efeito da saturação em (66) e (73), a estimação do gradiente fica

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) = & M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)S^\top(t)HS(t) + M(t)S^\top(t)H\tilde{\theta}(t) - M(t)S^\top(t)H\psi(\theta(t)) \\ & + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) - M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\psi(\theta(t)) + \frac{1}{2}M(t)\psi^\top(\theta(t))H\psi(\theta(t)). \end{aligned} \quad (74)$$

Assim, reescreve-se (74) como

$$\hat{G}(t) = (H + \Delta(t)H)\tilde{\theta}(t) - (H + \Delta(t)H)\psi(\theta(t)) + w(t), \quad (75)$$

onde

$$\begin{aligned} w(t) = & M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)S^\top(t)HS(t) + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) - M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\psi(\theta(t)) \\ & + \frac{1}{2}M(t)\psi^\top(\theta(t))H\psi(\theta(t)). \end{aligned} \quad (76)$$

Para a obtenção da dinâmica do sistema em malha fechada, é utilizado a relação da dinâmica do erro de estimação (69), o sinal na entrada do integrador (70) e o gradiente expandido em (75):

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = u(t) = K\hat{G}(t) - K_{aw}\psi(\theta(t)) \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}(t) = & KH\tilde{\theta}(t) - KH\psi(\theta(t)) - K_{aw}\psi(\theta(t)) \\ & + K\Delta(t)H\tilde{\theta}(t) - K\Delta(t)H\psi(\theta(t)) + Kw(t). \end{aligned} \quad (78)$$

A análise da estabilidade de (75) pode ser realizada com base no Teorema da Média (veja o Apêndice **A**). Para isso, é necessário expressar (77) de forma adequada, por meio de uma transformação temporal, para avaliar o efeito da frequência ω sobre sua dinâmica.

Um aspecto interessante a ser observado em (77) é que a simples premissa de que a matriz KH é Hurwitz não necessariamente garante a estabilidade da origem do sistema saturado em malha fechada. Logo, é evidente a importância de desenvolver um método construtivo para projetar os ganhos de controle K e K_{aw} .

2.2 Mudança da escala temporal

Para a análise de estabilidade, realizou-se uma mudança na escala de tempo, exigindo que a razão entre as frequências dos sinais de excitação (10) seja racional. Assim, garante-se a existência de um período T .

$$T = 2\pi \times \text{MMC} \left\{ \frac{1}{\omega_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (79)$$

onde MMC denota o mínimo múltiplo comum. A mudança de escala de tempo do sistema em (77) consiste em uma transformação $\tau = \omega t$, onde

$$\omega := \frac{2\pi}{T}. \quad (80)$$

Vale lembrar que $\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + S(t) + \theta^*$ a partir de (3), o lado direito de (77) pode ser reescrito como uma função de $\tilde{\theta}$:

$$\frac{d\tilde{\theta}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \mathcal{F} \left(\tau, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega} \right), \quad (81)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\tau, \tilde{\theta}, \frac{1}{\omega} \right) &= KH\tilde{\theta}(\tau) - KH\psi(\theta(\tau)) - K_{\text{aw}}\psi(\theta(\tau)) \\ &+ K\Delta(\tau)H\tilde{\theta}(\tau) - K\Delta(\tau)H\psi(\theta(\tau)) + Kw(\tau). \end{aligned} \quad (82)$$

2.3 Sistema em malha fechada médio

Após realizar a mudança temporal, a versão média de (81)–(82) pode ser computada da seguinte forma

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{av}}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \mathcal{F}_{\text{av}}(\tilde{\theta}_{\text{av}}), \quad (83)$$

$$\mathcal{F}_{\text{av}}(\tilde{\theta}_{\text{av}}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{F}(\delta, \tilde{\theta}_{\text{av}}, 0) d\delta. \quad (84)$$

Portanto, da mesma forma feita no Capítulo anterior, “congelando” o estado médio de $\tilde{\theta}(t)$ e tratando isso como uma constante (84), usa-se o fato de

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Delta_{ij}(t) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T w_i(t) dt = 0, \quad (85)$$

resultando no sistema em malha fechada médio abaixo:

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t) = KH\tilde{\theta}_{\text{av}}(t) - KH\psi(\theta_{\text{av}}(t)) - K_{\text{aw}}\psi(\theta_{\text{av}}(t)). \quad (86)$$

O objetivo de obter a versão média do sistema em malha fechada é analisar o sistema linear e invariante no tempo sob saturação do atuador (86) e, em seguida, investigar a estabilidade do sistema não-autônomo e variante no tempo (77) utilizando o Teorema da Média para sistemas com lados direitos Lipschitz contínuos (veja Apêndice **A**).

2.4 Análise da estabilidade via teorema da média

Nesta seção, condições de estabilização são projetadas para os ganhos de controle $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $K_{\text{aw}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, desde que a origem do sistema médio em malha (86) é exponencialmente estável. Então, invocando o Teorema da média (veja o apêndice **A**), é mostrado que as trajetórias do ESC sob a saturação na entrada converge assintoticamente para uma vizinhança do ponto ótimo.

2.4.1 Estabilização do sistema médio em malha fechada

Para estabelecer a condição de projeto dos ganhos K e K_{aw} em (86), é explorada a condição de setor generalizada [12] da não linearidade da zona morta $\psi(\theta(t))$. Com base neste resultado, o seguinte lema é estabelecido.

Hipótese 2.1. *O otimizador desconhecido θ_ℓ^* precisa estar contido dentro da região sem restrição definida pelos limites de saturação de ordem ℓ do sinal de entrada:*

$$\Theta^* = \{\theta^* \in \mathbb{R}^n : |\theta_\ell^*| < \bar{\theta}_\ell, \ell = 1, \dots, n\}. \quad (87)$$

Lema 2.1. *A partir da Hipótese 2.1 garante-se então que θ_{av} e $\tilde{\theta}_{\text{av}}$ são elementos do seguinte conjunto*

$$\Theta = \{\theta_{\text{av}}, \tilde{\theta}_{\text{av}} \in \mathbb{R}^n : |\theta_{\text{av}(\ell)} - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)}| \leq \bar{\theta}_\ell, \ell = 1, \dots, m\}, \quad (88)$$

ao qual garante que a condição de setor

$$\psi^\top(\theta_{\text{av}}) \Lambda \left(\psi(\theta_{\text{av}}) - \tilde{\theta}_{\text{av}} \right) \leq 0, \quad (89)$$

seja válida para qualquer matriz diagonal positiva definida $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Demonstração. Sob a premissa (87), tem-se $-\bar{\theta}_\ell \leq \theta_\ell^* \leq \bar{\theta}_\ell$. Avaliando (73) no sentido médio, há $\theta_{\text{av}} - \tilde{\theta}_{\text{av}} = \theta^*$, porque $S(t)$ tem média zero ao longo do período T como em (80). Portanto, Hipótese 2.1 assegura que θ_{av} e $\tilde{\theta}_{\text{av}}$ são elementos de (88), ao qual implica em

$$-\bar{\theta}_\ell \leq \theta_{\text{av}(\ell)} - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} \leq \bar{\theta}_\ell. \quad (90)$$

Os 3 casos a seguir são considerados.

- **Caso 1:** $\theta_{\text{av}(\ell)} > \bar{\theta}_\ell$. Garante-se

$$\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) = \theta_{\text{av}(\ell)} - \bar{\theta}_\ell > 0. \quad (91)$$

A partir de (90)

$$\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} = \theta_{\text{av}(\ell)} - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} - \bar{\theta}_\ell \leq 0. \quad (92)$$

Logo, $\psi^\top(\theta_{\text{av}(\ell)})\Lambda_{(\ell,\ell)} \left(\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} \right) \leq 0$, visto que $\Lambda_{(\ell,\ell)} > 0$.

- **Caso 2:** $-\bar{\theta}_\ell \leq \theta_{\text{av}(\ell)} \leq \bar{\theta}_\ell$, a função da zona morta $\psi(\theta_{\text{av}(\ell)})$ é zero, desde $\text{sat}(\theta_{\text{av}(\ell)}) = \theta_{\text{av}(\ell)}$. Neste caso, obtém-se

$$\psi^\top(\theta_{\text{av}(\ell)})\Lambda_{(\ell,\ell)} \left(\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} \right) = 0, \quad \forall \Lambda_{(\ell,\ell)}.$$

- **Caso 3:** $\theta_{\text{av}(\ell)} < -\bar{\theta}_\ell$. O seguinte se aplica

$$\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) = \theta_{\text{av}(\ell)} + \bar{\theta}_\ell < 0. \quad (93)$$

Segue de (90) que

$$\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} = \theta_{\text{av}(\ell)} - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} + \bar{\theta}_\ell \geq 0. \quad (94)$$

Então, $\psi^\top(\theta_{\text{av}(\ell)})\Lambda_{(\ell,\ell)} \left(\psi(\theta_{\text{av}(\ell)}) - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} \right) \leq 0$, desde que $\Lambda_{(\ell,\ell)} > 0$.

Para os três casos apresentados, pode-se verificar que a desigualdade em (89) é satisfeita para todo θ_{av} e $\tilde{\theta}_{\text{av}}$ em (88). Isto conclui a demonstração. \square

Um aspecto interessante do resultado construído no Lema 2.1 é que a condição de setor $\psi(\theta_{\text{av}})$ estabelecida em (89) é em relação a $\tilde{\theta}_{\text{av}}$, que é a variável da dinâmica estudada em (86).

Com base no resultado estabelecido no Lema 2.1, apresenta-se, a seguir, uma condição de estabilização para projetar os ganhos da lei de controle (77), de modo a

garantir a estabilidade, ao menos assintótica, do sistema médio em malha fechada (86), na presença de saturação com compensação AW.

Lema 2.2. *Considere o sistema em malha fechada sujeito a saturação em (77) e assuma que as Hipóteses 1.2, 1.4 e 2.1 são atendidas. Dado um escalar positivo $\eta > 0$, se existir uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal positiva definida $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $Z, Z_{\text{aw}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que*

$$\begin{bmatrix} ZH_i + H_i^\top Z^\top + 2\eta P & \Lambda - Z_{\text{aw}} - H_i Z \\ \Lambda - Z_{\text{aw}}^\top - Z^\top H_i & -2\Lambda \end{bmatrix} < 0, \forall i = 1, \dots, N, \quad (95)$$

então, a origem do sistema médio em malha fechada (86), com $K = P^{-1}Z$ e $K_{\text{aw}} = P^{-1}Z_{\text{aw}}$, é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento η , isto é:

$$\|\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)\| \leq \kappa e^{-\eta t} \|\tilde{\theta}_{\text{av}}(0)\|, \quad (96)$$

onde $\kappa = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$. Além disso,

$$V(\tilde{\theta}_{\text{av}}) = \tilde{\theta}_{\text{av}}^\top P \tilde{\theta}_{\text{av}} \quad (97)$$

é uma função de Lyapunov que certifica a estabilidade exponencial da origem do sistema médio em malha fechada (86).

Demonstração. Suponha que as condições (95) sejam satisfeitas. Dado que $\alpha \in \Xi$, com Ξ definido em (34), segue de (95) e da Hipótese 1.4 que

$$\begin{bmatrix} ZH + H^\top Z^\top + 2\eta P & \star \\ \Lambda - Z_{\text{aw}}^\top - Z^\top H & -2\Lambda \end{bmatrix} < 0. \quad (98)$$

Substituindo $Z = PK$ e $Z_{\text{aw}} = PK_{\text{aw}}$ em (98), obtém-se

$$\begin{bmatrix} PKH + H^\top K^\top P + 2\eta P & \star \\ \Lambda - K_{\text{aw}}^\top P - K^\top PH & -2\Lambda \end{bmatrix} < 0. \quad (99)$$

Multiplicando (99) à esquerda por $[\tilde{\theta}_{\text{av}}^\top; \psi^\top(\theta_{\text{av}})]$ e à direita pelo seu transposto, resulta

que

$$\begin{aligned} & \left[KH\tilde{\theta}_{\text{av}} - (K_{\text{aw}} + KH)\psi(\theta_{\text{av}}) \right]^\top P\tilde{\theta}_{\text{av}} + \tilde{\theta}_{\text{av}}^\top P \left[KH\tilde{\theta}_{\text{av}} - (K_{\text{aw}} + KH)\psi(\theta_{\text{av}}) \right] \\ & + 2\eta\tilde{\theta}_{\text{av}}^\top P\tilde{\theta}_{\text{av}} - 2\psi^\top(\theta_{\text{av}})\Lambda \left(\psi(\theta_{\text{av}}) - \tilde{\theta}_{\text{av}} \right) < 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Assim, supondo que $\tilde{\theta}_{\text{av}}$ e θ_{av} sejam elementos de Θ em (88), sob a Hipótese 2.1, segue do Lema 2.1 que

$$\dot{V}(\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)) + 2\eta V(\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)) < 0, \quad (101)$$

onde $V(\tilde{\theta}_{\text{av}})$ é dado em (97). Pelo Lema da Comparação [25], segue de (101) que

$$V(\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)) \leq e^{-2\eta t} V(\tilde{\theta}_{\text{av}}(0)). \quad (102)$$

Além disso, como

$$\lambda_{\min}(P)|\tilde{\theta}_{\text{av}}|^2 \leq V(\tilde{\theta}_{\text{av}}) \leq \lambda_{\max}(P)|\tilde{\theta}_{\text{av}}|^2, \quad (103)$$

é possível demonstrar que (96) é satisfeita. Logo, a origem do sistema é exponencialmente estável. Isto conclui a demonstração. \square

Dado que as condições do Teorema 2.2 estabelecido sejam factíveis. A partir da condição de setor imposta pelo Lema 2.1, a origem do sistema, ou seja, o ponto de equilíbrio $\tilde{\theta}_{\text{av}} = 0$, pode ser caracterizado como globalmente e exponencialmente estável.

Demonstração. A partir do conjunto definido em (88), a análise do limite supremo para o sistema médio é feito da seguinte forma:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta_{\text{av}(\ell)}(t) - \tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)}(t)| \leq \bar{\theta}_\ell. \quad (104)$$

Afirmado pelo teorema acima que a origem é exponencialmente estável, logo $\tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Implicando assim na aproximação da entrada média ao ponto ótimo desejado, $\theta_{\text{av}(\ell)} \rightarrow \theta_{(\ell)}^*$. Dessa forma, o limite (104) é reescrito como

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta_{(\ell)}^*| \leq \bar{\theta}_\ell. \quad (105)$$

Finalmente, assumindo como válida a Hipótese 2.1, o limite acima sempre será verdadeiro.

Sendo assim, a partir de qualquer condição inicial $\tilde{\theta}_{\text{av}(\ell)}(0)$, o erro médio converge para a origem quando $t \rightarrow \infty$, e a entrada média alcançará o ponto extremal. À vista disso, evidencia-se a característica global de convergência a partir das hipóteses, lemas e do teorema propostos. Isto conclui a demonstração. \square

2.5 Convergência assintótica para uma vizinhança do extremo

O Lema 2.2 estabeleceu uma condição de projeto dos ganhos de controle que torna a origem do sistema médio em malha fechada (86) exponencialmente estável. Na sequência, constrói-se o resultado principal dessa seção, que fornece a convergência assintótica local para uma vizinhança do extremo aplicando o Teorema da Média (veja o Apêndice **A**).

Teorema 2.3. *Considere o sistema busca extremal na Figura 4 com um mapa quadrático não linear (66)–(67) sujeito à saturação na entrada e sua versão média correspondente da dinâmica em malha fechada (86) sob as Hipóteses 1.2, 1.4 e 2.1. Se as condições do Lema 2.2 são todas satisfeitas, então, para $\omega > 0$ suficientemente grande (10) e $a_i > 0$ suficientemente pequeno (8)–(9), então existem constantes $\eta > 0$ e κ em (96), tal que:*

$$\|\theta(t) - \theta^*\| \leq \kappa e^{-\eta t} \|\theta(0) - \theta^*\| + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \quad (106)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - Q^*| = \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right), \quad (107)$$

com $a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

Demonstração. Desde que a equação diferencial em (81) possui lado direito Lipschitz-contínuo, devido à presença da função de saturação, e o sistema médio em malha fechada (86) é exponencialmente estável a partir do Lema 2.2, pela aplicação do Teorema da Média [24] (veja também Apêndice **A**, com $\varepsilon := 1/\omega$), segue que:

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_{\text{av}}(t)\| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \forall t \geq 0, \quad (108)$$

para ω suficientemente grande. Então, aplicando a desigualdade triangular em (108), a

partir da relação (96), obtém-se

$$\|\tilde{\theta}(t)\| \leq \kappa e^{-\eta t} \|\tilde{\theta}(0)\| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (109)$$

Para obter (106), usa-se ((6)) desde que $S(t)$ em (8) de ordem $\mathcal{O}(a)$, com $a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

Agora, considere 66 para escrever o erro da saída

$$\tilde{y}(t) := y(t) - Q^*, \quad y(t) = Q(\text{sat}(\theta(t))). \quad (110)$$

Calculando sua norma, e usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz inequality

$$|\tilde{y}(t)| = |(\text{sat}(\theta(t)) - \theta^*)^\top H(\text{sat}(\theta(t)) - \theta^*)| \leq \|H\| \|\text{sat}(\theta(t)) - \theta^*\|^2. \quad (111)$$

Usando a definição da função de zona morta em (71), tem-se

$$|\tilde{y}(t)| \leq \|H\| \|\theta(t) - \psi(\theta(t)) - \theta^*\|^2. \quad (112)$$

A partir de (106), a desigualdade (112) é reformulada como

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|H\| \|\theta(t) - \theta^* - \psi(\theta(t))\|^2 \leq \\ &\limsup_{t \rightarrow \infty} \|H\| \left[\left\| \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right) \right\|^2 + \left\| \psi\left(\mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right) + \theta^*\right) \right\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (113)$$

Usando a Hipótese 2.1, a função de zona morta

$$\psi\left(\mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right) + \theta^*\right) = 0,$$

para ω suficientemente grande e a suficientemente pequeno, devido à condição (87), com $|\theta_\ell^*| \leq |\mathcal{O}(a + \frac{1}{\omega})| + |\theta_\ell^*| < \bar{\theta}_\ell$. Portanto, empregando a desigualdade de Young sobre o termo $\left\| \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right) \right\|^2$, obtém-se

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right), \quad (114)$$

resultando em (107), isso conclui a demonstração. \square

2.6 Resultados numéricos - ESC sob saturação na entrada

A eficácia das abordagem proposta é ilustrada por meio de um exemplo numérico apresentado a seguir.

Considere o ESC sob saturação na entrada com o mapa não linear (66) com uma matriz Hessiana desconhecida tomando valores em um domínio politópico dada no mesmo formato do exemplo do Capítulo anterior (62).

Além disso, para as simulações, os parâmetros desconhecidos são $Q^* = 10$ e $\theta^* = [2 \ 4]^\top$. Note que os parâmetros desconhecidos Q^* e θ^* não são utilizados no projeto dos ganhos. Para fins ilustrativos, assume-se que $\bar{\delta} = 0.1$. Então, os ganhos do controlador AW (70) foram projetados resolvendo as condições do Lema 2.2 com a taxa de decaimento $\eta = 1$ e níveis de saturação $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = 5$. Os ganhos de controle resultantes são os seguintes:

$$K = \begin{bmatrix} -0.0270 & 0.0361 \\ 0.0456 & -0.1492 \end{bmatrix}, K_{\text{aw}} = \begin{bmatrix} 2.2794 & 0.0824 \\ -0.0865 & 2.2804 \end{bmatrix}.$$

Para as simulações, os sinais de oscilação $S(t)$ e $M(t)$ dados em (8) e (9), respectivamente, são selecionados com a frequência $\omega_1 = 10$ rad/s e $\omega_2 = 70$ rad/s, e amplitudes $a_1 = a_2 = 0.1$. Além disso, as simulações foram realizadas considerando a condição inicial $\theta(0) = [2.5 \ 6]^\top$ e $\alpha = [0.6822 \ 0.3178]^\top$. As trajetórias do ESC em malha fechadas sob a saturação na entrada com o controlador AW desenvolvido em (70) são apresentados na Figura 7. Na Figura 7(a), é possível observar a convergência das entradas para uma vizinhança do ponto ótimo θ^* , mesmo na presença da saturação. Inclusive, a convergência da saída para uma vizinhança de Q^* é mostrada na Figura 7(b). Isso ilustra claramente as conclusões teóricas estabelecidas no Teorema 2.3.

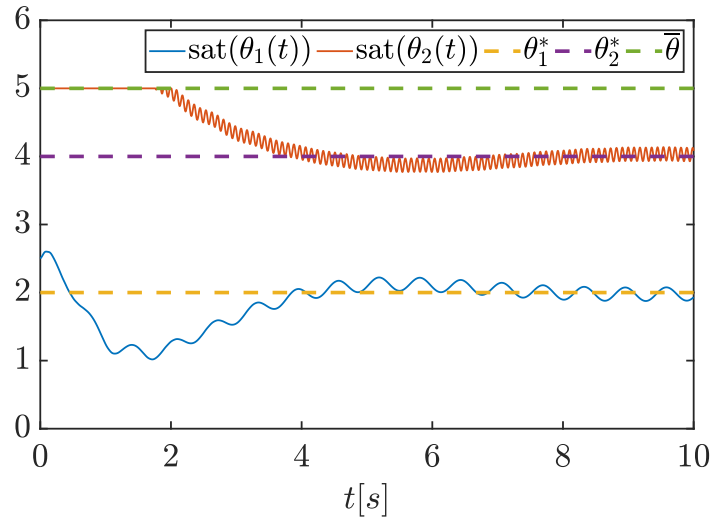
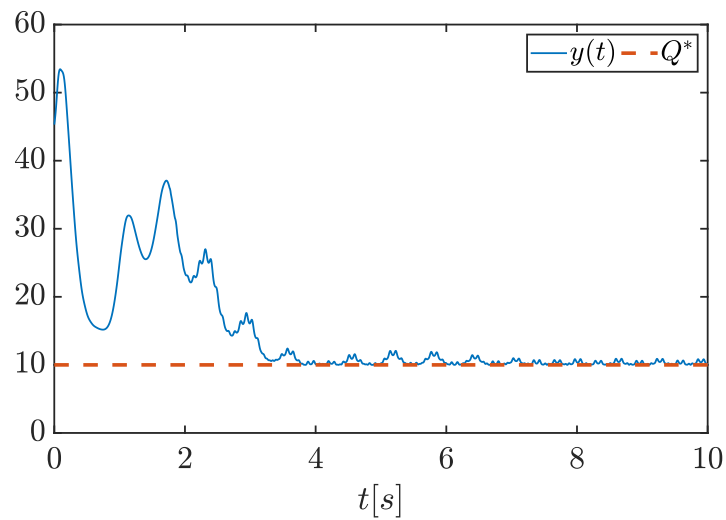
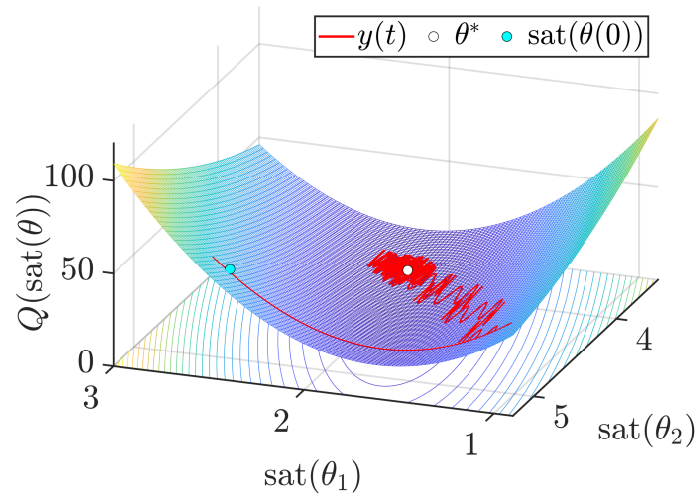
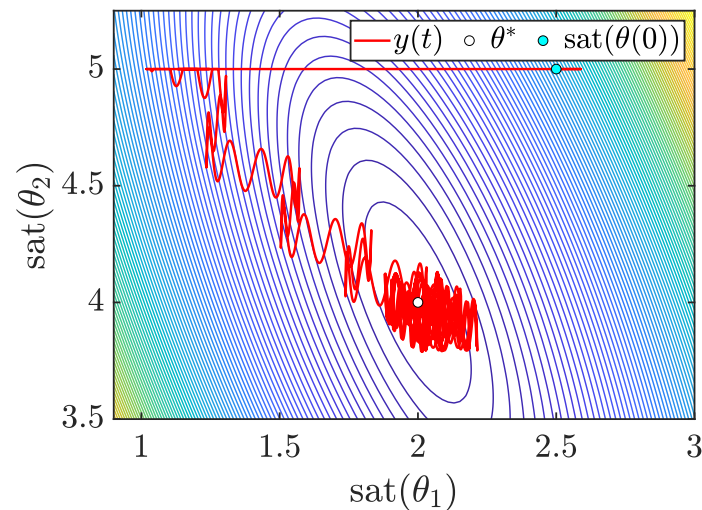
(a) Entrada saturada do mapa – $\text{sat}(\theta(t))$.(b) Saída do mapa – $y(t)$.

Figura 7: Trajetória do ESC em malha fechada sob saturação na entrada com o controlador *anti-windup* (70) projetado de acordo com Lema 2.2.

Ademais, a Figura 8(a) retrata a evolução de $y(t)$ ao longo da superfície do mapa quadrático com saturação de entrada $Q(\text{sat}(\theta))$ em (66). A trajetória de $\text{sat}(\theta(t))$ juntamente com vários conjuntos de níveis de $Q(\text{sat}(\theta))$ são apresentados na Figura 8(b).



(a) Trajetória $y(t)$ ao longo da superfície do mapa quadrático com saturação de entrada $Q(\text{sat}(\theta))$ em (66).



(b) Trajetória $\text{sat}(\theta(t))$ e os conjuntos de níveis do mapa quadrático com saturação de entrada $Q(\text{sat}(\theta))$ em (66).

Figura 8: Trajetória da saída $y(t)$ do ESC em malha fechada sob saturação na entrada com o controlador *anti-windup* (70) projetado conforme o Lema 2.2.

Considere a lei de controle (70) sem a compensação AW, isto é, $K_{\text{aw}} = 0$. O mesmo ganho de controle K é considerado. A simulação em malha fechada é mostrada na Figura 9. Na Figura 9, o ESC não converge para o extremo, ressaltando as vantagens da abordagem AW proposta na Figura 7, que garante a convergência.

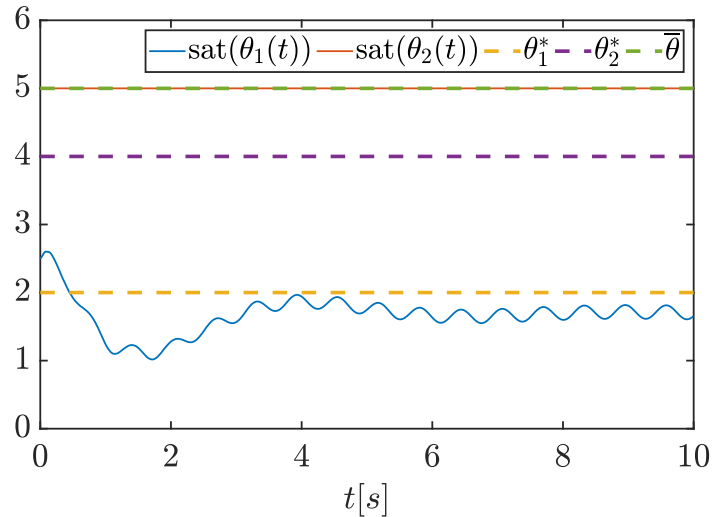
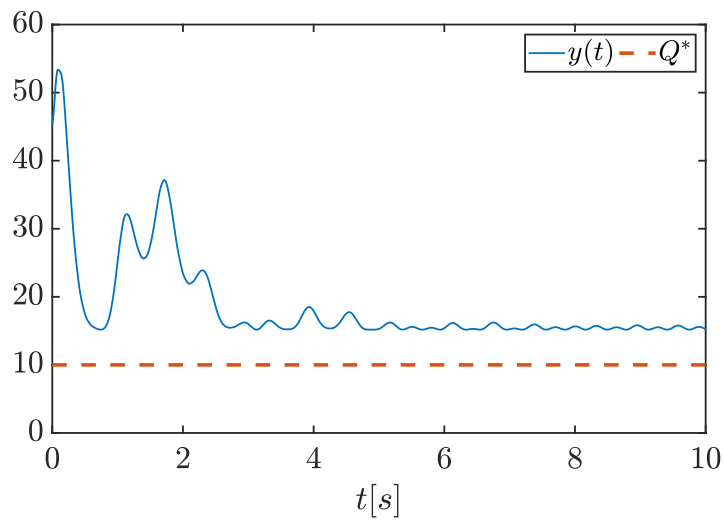
(a) Entrada saturada do mapa – $\text{sat}(\theta(t))$.(b) Saída do mapa – $y(t)$.

Figura 9: Trajetórias do sistema ESC em malha fechada sob saturação de entrada sem compensação *anti-windup*.

2.7 Conclusão

Este capítulo abordou o desafiador problema do controle extremal multivariável na presença de saturação dos atuadores. Por meio do uso de uma representação setorial, foram estabelecidas condições de estabilidade para o sistema médio sob os efeitos de saturação, ampliando assim a aplicabilidade do controle extremal a cenários mais realistas, nos quais as restrições de entrada não podem ser ignoradas.

Para justificar rigorosamente as afirmações de estabilidade, foi empregado o Teorema da Média para sistemas Lipschitz não diferenciáveis, garantindo que as trajetórias do

sistema em malha fechada convergem para uma vizinhança do ponto ótimo desconhecido, mesmo sob limites no atuador.

Além disso, ao assumir uma representação politópica incerta da matriz Hessiana, foram derivadas condições de LMI construtivas e verificáveis para o projeto dos ganhos controladores estabilizantes, fornecendo uma estrutura sistemática que pode ser aplicada a uma ampla classe de problemas de otimização não linear.

Simulações numéricas ilustraram ainda a praticidade e a eficácia dos controladores de realimentação propostos, demonstrando a convergência do sistema ao extremo e confirmando a robustez do projeto frente a incertezas e efeitos de saturação.

3 CONTROLE EXTREMAL SOB SATURAÇÃO NO GRADIENTE

Em contraste com o Capítulo 2, este capítulo considera a presença da saturação na estimação do gradiente. Nota-se que lidar com a saturação antes da integração também é um importante problema, pois isso resulta em uma malha de realimentação com taxas de atualização limitadas. Nesta configuração, a saturação não deve ser relacionada como uma limitação indesejada, mas sim como um possível mecanismo benéfico que possibilita a limitação de magnitude, como ocorre nas abordagens de busca de extremos limitadas por comutadores de Lie [31, 32] e [33, Ch. 6]. Parte dos resultados apresentados neste capítulo está publicada em [34].

3.1 Formulação do problema

Considere o controle extremal multivariável baseado no algoritmo do gradiente sob saturação do gradiente, apresentado na Figura 10.

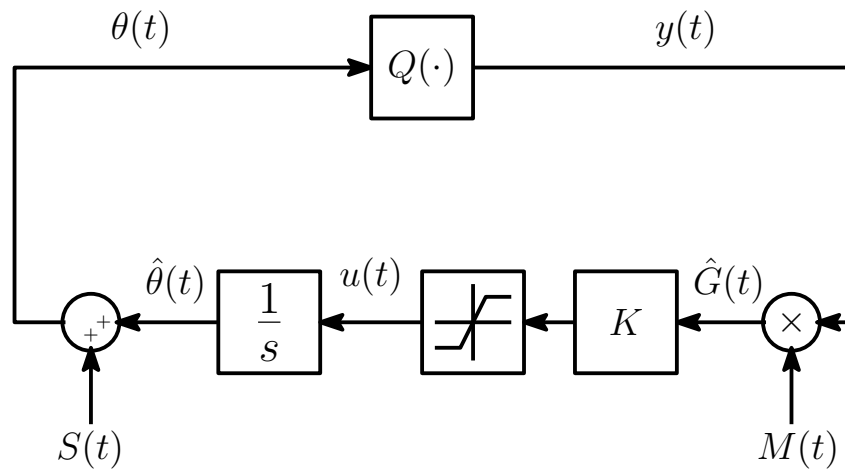


Figura 10: Sistema de controle extremal sob saturação no gradiente.

Neste sistema em malha fechada, assume-se que o mapeamento não linear multivariável e desconhecido satisfaz a Hipótese 1.1, de modo que

$$y(t) = Q(\theta(t)) \quad (115)$$

$$= Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t) - \theta^*)^\top H(\theta(t) - \theta^*) \quad (116)$$

onde Q^* , θ^* , e H do mapa são definidos conforme (2). Ademais, o vetor de entrada $\theta(t)$ aplicado ao mapa estático multivariável definido em (4) e o erro de estimação $\tilde{\theta}(t)$ é dado por (3). Consideram-se também os sinais de excitação e demodulação $S(t)$ e $M(t)$ de acordo com (8) e (9), respectivamente, satisfazendo a Hipótese 1.2.

3.2 Controle extremal com taxa de atualização limitada

Diferentemente da Seção 2, onde foi abordada a saturação na entrada do mapa, neste capítulo lida-se com a saturação na estimação do gradiente

$$u(t) = \text{sat}(K\hat{G}(t)). \quad (117)$$

Neste caso, a dinâmica para $\tilde{\theta}(t)$ é descrita a seguir:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) = u(t) = \text{sat}(K\hat{G}(t)), \quad (118)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o ganho de controle a ser projetado, $\hat{G}(t)$ é dado como (7), e $\text{sat}(\cdot)$ é a função de saturação definida elemento a elemento como em (68):

$$\text{sat}(K\hat{G}) = \begin{bmatrix} \text{sat}(K\hat{G}_1) \\ \vdots \\ \text{sat}(K\hat{G}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(K\hat{G}_1) \min(|K\hat{G}_1|, \bar{u}_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(K\hat{G}_n) \min(|K\hat{G}_n|, \bar{u}_n) \end{bmatrix}, \quad (119)$$

como $\bar{u}_\ell > 0$ sendo o limite da ℓ -ésimo estimação do gradiente.

Conforme mencionado anteriormente, o desenvolvimento da dinâmica do ESC segue os mesmos passos realizados no Capítulo 1. Entretanto, utiliza-se (117) e substituindo em (24)

$$\dot{\hat{G}}(t) = (H\text{sat} + \Delta(t)H)\text{sat}(K\hat{G}(t)) + \varsigma(t), \quad (120)$$

onde

$$\begin{aligned} \varsigma(t) = & \dot{M}(t)Q^* + \frac{1}{2}\dot{M}(t)S^\top(t)HS(t) + M(t)S^\top(t)H\dot{S}(t) + \dot{M}(t)S(t)^\top H\tilde{\theta}(t) \\ & + M(t)\dot{S}(t)^\top H\tilde{\theta}(t) + \frac{1}{2}\dot{M}(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\tilde{\theta}(t) + M(t)\tilde{\theta}^\top(t)H\dot{\tilde{\theta}}(t). \end{aligned} \quad (121)$$

3.3 Definindo uma nova escala temporal para a análise média

Adotando o procedimento análogo ao do Capítulo 2 e verificando que $\zeta(t)$ em (121) tem média nula sob o período $T := 2\pi/\omega$ dado em (80), a seguinte dinâmica média é obtida para a nova escala temporal $\tau = \omega t$ de (120):

$$\dot{\hat{G}}_{av}(\tau) = \frac{1}{\omega} H u_{av}(\tau) = \frac{1}{\omega} H \text{sat}(K \hat{G}_{av}(\tau)). \quad (122)$$

Baseado na parametrização da zona morta para a não linearidade da saturação discutida em [12], (117) pode ser escrito na forma

$$\psi(K \hat{G}) = K \hat{G} - \text{sat}(K \hat{G}), \quad (123)$$

e a o sistema em malha fechada médio obtido em (122) é reescrito como

$$\dot{\hat{G}}_{av}(\tau) = \frac{1}{\omega} H K \hat{G}_{av}(\tau) - \frac{1}{\omega} H \psi(K \hat{G}_{av}(\tau)), \quad (124)$$

onde $u_{av} = \text{sat}(K \hat{G}_{av})$.

Similarmente, a matriz da Hessiana é assumida incerta e o seguinte politopo incerto é descrito para o sistema médio em malha fechada:

$$\dot{\hat{G}}_{av}(t) = H(\alpha) K \hat{G}_{av}(t) - H(\alpha) \psi(K \hat{G}_{av}(t)), \quad (125)$$

onde $H(\alpha)$ satisfaz a Hipótese 1.4 e a parametrização é dada em (33)–(34).

3.4 Estudo da estabilidade em malha fechada

Nesta seção, fonece-se uma condição de estabilização para projetar o ganho de controle $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que a origem do sistema em malha fechada médio (124), ou equivalentemente (125), seja exponencialmente estável. Então, invocando o Teorema da Média (veja também o apêndice **A**), mostra-se que as trajetórias do ESC sob saturação no gradiente convergem exponencialmente para uma vizinhança do extremo.

3.4.1 Estabilização do sistema médio em malha fechada

O seguinte Lema revisita a condição de setor usada em [12, Lemma 1.6] para a não linearidade da zona morta $\psi(K\hat{G})$.

Lema 3.1. *Considere uma matriz $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se \hat{G}_{av} é um elemento do conjunto*

$$\mathcal{G} = \left\{ \hat{G}_{\text{av}} \in \mathbb{R}^n : |(K - L)_{(\ell)} \hat{G}_{\text{av}}| \leq \bar{u}_\ell, \ell = 1, \dots, n \right\}, \quad (126)$$

então

$$\psi^\top(K\hat{G}_{\text{av}}) \Upsilon \left(\psi(K\hat{G}_{\text{av}}) - L\hat{G}_{\text{av}} \right) \leq 0, \quad (127)$$

para alguma matriz definida diagonal positiva definida $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos que o Lema 2.1 e o [12, Lemma 1.6]. \square

Com o Lema 3.1, desenvolveu-se a condição de estabilização para o projeto do ganho de controle K que torna a origem do sistema médio em malha fechada (124) exponencialmente estável em um contexto regional. Essa condição de estabilização é apresentada no seguinte Lema.

Lema 3.2. *Considere a dinâmica média em malha fechada do ESC sujeito à saturação do gradiente (124) sob as Hipóteses 1.2 e 1.4. Sejam $\eta > 0$ e $\epsilon > 0$ escalares positivos. Se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal positiva definida $\tilde{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e modo que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} H_i Z + Z^\top H_i + 2\eta W & \star & \star \\ W - X^\top + \epsilon H_i Z & -\epsilon(X^\top + X) & \star \\ Y - \tilde{\Upsilon} H_i & -\epsilon \tilde{\Upsilon} H_i & -2\tilde{\Upsilon} \end{bmatrix} < 0, \quad (128)$$

para todo $i = 1, \dots, N$ and

$$\begin{bmatrix} W & Z_{(\ell)}^\top - Y_{(\ell)}^\top \\ \star & \bar{u}_\ell^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, n, \quad (129)$$

então, a origem do sistema médio em malha fechada (124) com $K = ZX^{-1}$ é exponencialmente estável e a região

$$\mathcal{E} = \{\hat{G}_{av} \in \mathbb{R}^n : V(\hat{G}_{av}) \leq 1\}, \quad (130)$$

é um subconjunto \mathcal{G} em (126) com $L = YX^{-1}$, onde

$$V(\hat{G}_{av}) = \hat{G}_{av}^\top P \hat{G}_{av}, \quad (131)$$

com $P = X^{-\top} W X^{-1}$, é a função de Lyapunov que certifica a estabilidade exponencial da origem de (124). Logo, qualquer trajetória em $\hat{G}_{av}(t)$ com condição inicial $\hat{G}_{av}(0) \in \mathcal{E}$ satisfaz

$$\|\hat{G}_{av}(t)\| \leq \kappa_g e^{-\eta t} \|\hat{G}_{av}(0)\|, \quad (132)$$

onde $\kappa_g = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$.

Demonstração. Admita que as condições (128) e (129) são verdadeiras. Fornecido que $\alpha \in \Xi$, com Ξ dado em (34), segue de (128) e do conjunto apresentado em (32) que

$$\begin{bmatrix} HZ + Z^\top H + 2\eta W & \star & \star \\ W - X^\top + \epsilon HZ & -\epsilon(X^\top + X) & \star \\ Y - \tilde{\Upsilon}H & -\epsilon\tilde{\Upsilon}H & -2\tilde{\Upsilon} \end{bmatrix} < 0. \quad (133)$$

A partir de (128), tem-se $X + X^\top > 0$, ao qual assegura que X é invertível. Ainda, como a matriz $\tilde{\Upsilon}$ é positiva definida, também é invertível. Isso permite multiplicar (133) por $\text{diag}(X^{-\top}, X^{-\top}, \tilde{\Upsilon}^{-1})$ à esquerda e sua transposta à direita, o que resulta em

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \star & \star \\ \Psi_{21} & -\epsilon(X^{-\top} + X^{-1}) & \star \\ \Upsilon L - HX^{-1} & -\epsilon HX^{-1} & -2\Upsilon \end{bmatrix} < 0, \quad (134)$$

onde $\Psi_{11} = X^{-\top} H K + K^\top H X^{-1} + 2\eta P$, $\Psi_{21} = P - X^{-1} + \epsilon X^{-\top} H K$, $K = ZX^{-1}$, $P = X^{-\top} W X^{-1}$, $L = YX^{-1}$, and $\Upsilon = \tilde{\Upsilon}^{-1}$.

Aplicando o Lema de Finsler [35], considere:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ HK & -H \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (135)$$

Multiplicando (134) no lado esquerdo por \mathcal{B}^\top e sua transposta no lado direito, obtém-se

$$\begin{bmatrix} PHK + K^\top HP + 2\eta P & L^\top \Upsilon - PH \\ \Upsilon L - HP & -2\Upsilon \end{bmatrix} < 0. \quad (136)$$

Multiplicando (136) no lado esquerdo por $[\hat{G}_{\text{av}}^\top(t) \psi^\top(K\hat{G}_{\text{av}}(t))]$ e sua transposta no lado direito, implica em

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{\text{av}}^\top(t) (PHK + K^\top HP) \hat{G}_{\text{av}}(t) - 2\hat{G}_{\text{av}}^\top PH \psi(K\hat{G}_{\text{av}}(t)) \\ & - 2\psi^\top(K\hat{G}_{\text{av}}) \Upsilon \left(\psi(K\hat{G}_{\text{av}}) - L\hat{G}_{\text{av}} \right) \\ & + 2\eta \hat{G}_{\text{av}}^\top(t) Q \hat{G}_{\text{av}}(t) < 0. \end{aligned} \quad (137)$$

Agora, multiplicando as desigualdades em (129) no lado esquerdo por $\text{diag}(X^{-\top}, 1)$ e sua transposta no lado direito, conduz em

$$\begin{bmatrix} P & K_{(\ell)}^\top - L_{(\ell)}^\top \\ K_{(\ell)} - L_{(\ell)} & \bar{u}_\ell^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (138)$$

A partir do Lema complemento de Schur, tem-se que (138) implica

$$P - \frac{1}{\bar{u}_\ell^2} (K_{(\ell)} - L_{(\ell)})^\top (K_{(\ell)} - L_{(\ell)}) \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (139)$$

Multiplicando (139) no lado esquerdo por \hat{G}_{av}^\top e sua transposta no lado direito, chega-se em

$$V(\hat{G}_{\text{av}}) \geq \frac{|(K - L)_{(\ell)} \hat{G}_{\text{av}}|^2}{\bar{u}_{(\ell)}^2}, \quad \ell = 1, \dots, n. \quad (140)$$

Então, contanto que $\hat{G}_{\text{av}} \in \mathcal{E}$, garante-se $\hat{G}_{\text{av}} \in \mathcal{G}$, istov é, $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$, e as condições do

Lema 3.1 são satisfeitas. Isso permite obter a partir de (136) e (127) que

$$\dot{V}(\hat{G}_{\text{av}}(t)) \leq -2\eta V(\hat{G}_{\text{av}}(t)) < 0, \forall \hat{G}_{\text{av}}(t) \neq 0, \quad (141)$$

onde $V(\hat{G}_{\text{av}})$, definido em (131), é uma função de Lyapunov que assegura a estabilidade exponencial da origem do sistema médio. A partir do Lema da comparação, segue de (141) que

$$V(\hat{G}_{\text{av}}(t)) \leq e^{-2\eta t} V(\hat{G}_{\text{av}}(0)). \quad (142)$$

Além disso, como

$$\lambda_{\min}(P) \|\hat{G}_{\text{av}}\|^2 \leq V(\hat{G}_{\text{av}}) \leq \lambda_{\max}(P) \|\hat{G}_{\text{av}}\|^2, \quad (143)$$

obtem-se

$$\|\hat{G}_{\text{av}}(t)\| \leq \kappa_g e^{-\eta t} \|\hat{G}_{\text{av}}(0)\| \quad (144)$$

onde $\kappa_g = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)}$. Isto conclui a demonstração. \square

3.4.2 Estabilidade exponencial prática via teorema da média

O Lema 3.2 fornece uma condição de projeto do ganho de controle que assegura a estabilidade exponencial regional do sistema médio em malha fechada (125). Depois disso, apresenta-se o resultado principal, demonstrando a convergência exponencial local para uma vizinhança do extremo por meio da Teoria da Média (veja também o Apêndice **A**).

Teorema 3.3. *Considere o ESC apresentando na Figura 10 com o mapa não linear quadrático localmente (115) e as Hipóteses 1.1, 1.2 e 1.4 como também a correspondente média da dinâmica em malha fechada guiando a estimação do gradiente sujeito à saturação em (124). Se as condições do Lema 3.2 são satisfeitas, então, para $\omega > 0$ suficientemente*

grande em (10), então existem constantes $\bar{\kappa}_\theta, \bar{\kappa}_y, \eta > 0$, tais que:

$$\|\theta(t) - \theta^*\| \leq \bar{\kappa}_\theta e^{-\eta t} + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \quad (145)$$

$$|y(t) - Q^*| \leq \bar{\kappa}_y e^{-2\eta t} + \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right), \quad (146)$$

onde $a = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, com a_i definido em (8)–(9), e $\bar{\kappa}_\theta$ e $\bar{\kappa}_y$ são constante que dependem da condição inicial $\theta(0)$.

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos do Teorema 1.3 do Capítulo 1. Entretanto, utiliza-se o Teorema da Média de [24] (veja também o Apêndice **A**) para a comprovação da estabilidade em virtude da presença da função descontínua da zona morta. \square

3.5 Resultados numéricos - ESC sob saturação no gradiente

Considere o ESC sob saturação no gradiente discutido no Capítulo 3. Considere o mapa não linear em (115) com três entradas e parâmetros desconhecidos $Q^* = 5$ e $\theta^* = [-1 \quad -2 \quad -3]^\top$. Neste caso, considere a matriz Hessiana incerta tomada no domínio politópico com 4 vértices negativos definidos gerados aleatoriamente $H \in \text{co}\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$, onde

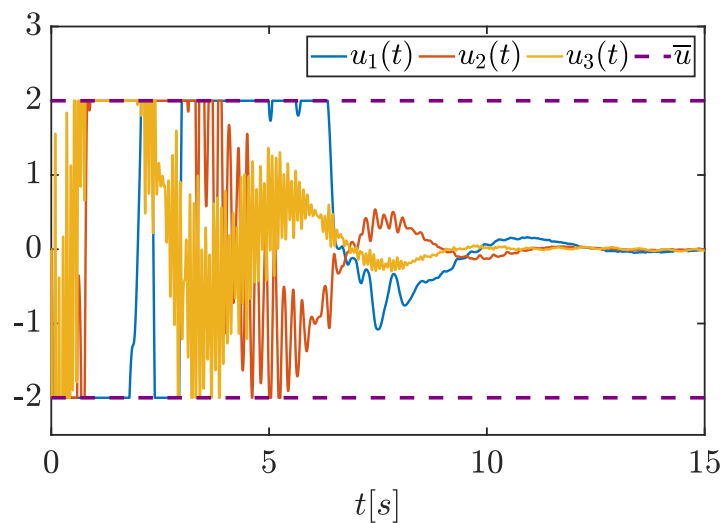
$$H_1 = \begin{bmatrix} -6.7828 & 0.8480 & -1.3462 \\ 0.8480 & -6.0017 & -0.7825 \\ -1.3462 & -0.7825 & -3.2421 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -3.9159 & -0.8122 & 1.4150 \\ -0.8122 & -5.7484 & -0.0047 \\ 1.4150 & -0.0047 & -4.6956 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -3.9141 & -0.3951 & 0.5802 \\ -0.3951 & -3.6059 & 1.0325 \\ 0.5802 & 1.0325 & -4.0962 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} -6.1443 & 0.0911 & -0.7984 \\ 0.0911 & -5.9879 & -2.3066 \\ -0.7984 & -2.3066 & -3.9025 \end{bmatrix}.$$

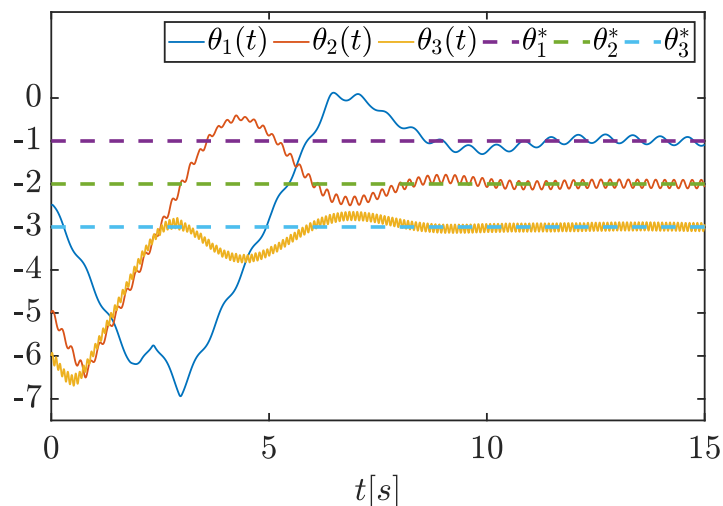
O ganho de controle projetado pela solução das condições do Lema 3.2 com $\epsilon = 0.5$, taxa de decaimento $\eta = 1$ e níveis de saturação $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 2$ é

$$K = \begin{bmatrix} 0.5009 & -0.0094 & -0.0018 \\ -0.0104 & 0.5312 & -0.0881 \\ 0.0006 & -0.0856 & 0.7352 \end{bmatrix}.$$

Para realizar a simulação em malha fechada, considera-se que as frequências de excitação são $\omega_1 = 10$ rad/s, $\omega_2 = 30$ rad/s e $\omega_3 = 70$ rad/s, com amplitudes $a_1 = a_2 = a_3 = 0,1$, e a condição inicial é $\theta(0) = [-2,5 \ -5 \ -6]^\top$. Os resultados obtidos com a simulação em malha fechada são apresentados na Figura 11. Em particular, a Figura 11(a) mostra a trajetória de $u(t)$. Observa-se que o sinal $u(t)$ converge exponencialmente para zero, indicando a convergência da estimação do gradiente para zero, mesmo na presença de saturação. Como consequência, a entrada do mapa quadrático converge para a vizinhança do ponto desconhecido θ^* , conforme mostrado na Figura 11(b), e a saída $y(t)$ converge para a vizinhança do ponto ótimo $Q^* = 5$, conforme mostrado na Figura 11(c).



(a) Sinal de controle com saturação no gradiente – $u(t) = \text{sat}(K\hat{G}(t))$.



(b) Vetor de entrada do mapa – $\theta(t)$.

Figura 11: Trajetórias do ESC em malha fechada sujeito à saturação no gradiente com o controlador (117) projetado de acordo com o Lema 3.2 (continua).

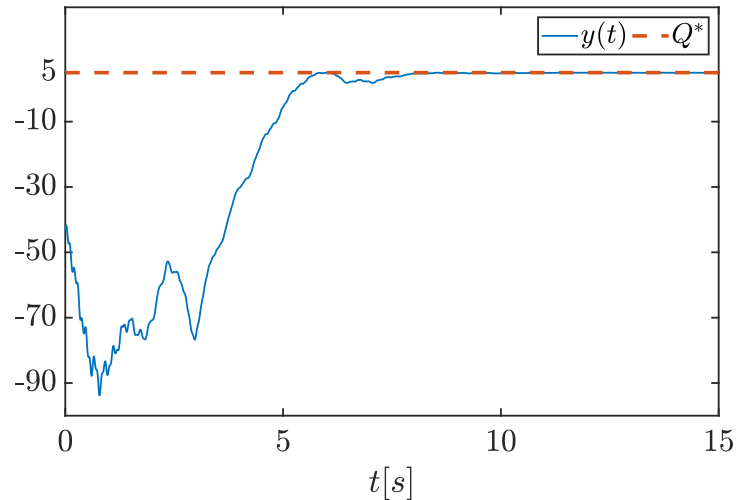
(c) Saída do mapa – $y(t)$.

Figura 11: Trajetórias do ESC em malha fechada sujeito à saturação no gradiente com o controlador (117) projetado de acordo com o Lema 3.2 (continuação).

3.6 Conclusão

Este capítulo abordou o problema do controle extremal multivariável na presença de saturação antes da integração do algoritmo, interpretado como um limitante da taxa de atualização da estimação da entrada do mapa.

De forma análoga ao apresentado no Capítulo 2, empregou-se uma condição de setor que permitiu estabelecer critérios de estabilidade para o sistema médio sob a restrição de atualização. Para assegurar a estabilidade, recorreu-se ao Teorema da Média para sistemas Lipschitz não diferenciáveis, o que possibilitou demonstrar que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para uma vizinhança do extremo desconhecido, mesmo na presença de limitações na taxa de atualização. Ademais, adotou-se uma representação politópica incerta da matriz Hessiana, a partir da qual foram derivadas condições de projeto baseadas em LMIs, permitindo a síntese de um ganho de controle estabilizante.

A Simulação numérica, mesmo com a presença da saturação no sinal de controle $u(t)$ apresentada na Figura 11(a), ilustrou que o controle extremal permitiu que a entrada do mapa convergisse para a vizinhança do ponto ótimo e saída para o extremo desejado.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, o controle extremal foi estudado em três casos: (i) o controle extremal clássico multivariável baseado no algoritmo do gradiente, (ii) o controle extremal com saturação na entrada do mapa não linear estático e (iii) o controle extremal com saturação no sinal da estimativa do gradiente.

No Capítulo 1, estudou-se o caso clássico do controle extremal. Sem a presença de não-linearidades no diagrama do algoritmo, a dinâmica foi desenvolvida. A partir do sistema médio, condições de projeto foram elaboradas para a síntese do ganho de controle não diagonal estabilizante. Adicionalmente, a Hessiana foi considerada incerta e pertencente a um politopo. Dessa forma, a partir de um número finito de vértices que definissem esse politopo, qualquer matriz contida nesse politopo convexo é admissível, flexibilizando a necessidade de conhecimento completo da Hessiana. Com isso, tornou-se possível, por meio da otimização convexa baseada em LMIs, obter o ganho estabilizante a partir das condições de projeto propostas, distinguindo-se da literatura clássica, na qual o ganho de controle precisa ser diagonal e contrário ao sinal da Hessiana. A convergência do sistema original para o ótimo foi provada com base no Teorema da Média de Khalil [25].

A partir da revisão da literatura, constatou-se a limitação de estudos que utilizam técnicas AW aplicadas ao controle extremal em casos multivariáveis. Visto isso, no Capítulo 2, destrinchou-se o efeito da não-linearidade de uma função zona morta, decorrente da saturação na entrada do mapa, na dinâmica média da planta do controle extremal. Uma condição de setor foi estabelecida, a fim de delimitar a trajetória do sistema e respeitar os efeitos da saturação. Por meio de LMIs e considerando a Hessiana incerta, foi possível projetar os ganhos de controle e do compensador AW que assegurassem a estabilização global do sistema, devido à condição do setor utilizada e às hipóteses assumidas. Finalmente, a convergência do sistema original foi demonstrada por meio do Teorema da Média com sistemas com lados direitos Lipschitz contínuos (veja Apêndice A).

Por fim, no Capítulo 3, estendeu-se a presença da saturação, contudo, posicionada na entrada do integrador do algoritmo. Interpretando assim, como uma saturação na estimação do gradiente, que pode ser entendida como uma taxa de limitação da atualização da estimação da entrada do mapa. Da mesma forma que nos outros capítulos, assume-se a Hessiana incerta e calcula-se o sistema médio. A condição de setor construída que

respeite os limites da saturação garantirá uma estabilização ao mínimo local, necessitando, assim, de uma região de atração para que a trajetória respeite as restrições impostas a partir da condição inicial. Portanto, a síntese do ganho de controle é derivada da dinâmica do controle extremal e das restrições impostas pela saturação e pela região de atração elaborada. Da mesma forma que o Capítulo 2, invocou-se o Teorema da Média com Sistemas com Lados Direitos Lipschitz Contínuos para assegurar a convergência do sistema original (veja Apêndice **A**).

Conforme as simulações numéricas apresentadas, os lemas desenvolvidos, em conjunto com os teoremas estabelecidos, garantiram a estabilidade da planta. Destaca-se o modo sistemático e robusto de obtenção do ganho de controle, obtido por meio de otimização convexa computacional, dispensando ajustes empíricos. Além disso, destaca-se a estrutura não diagonal do ganho de controle encontrado, relaxando a restrição clássica da literatura de controle extremal que impõe a condição de um ganho K diagonal contrário ao sinal da matriz Hessiana desconhecida.

Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestões de continuidade para este trabalho, propõe-se:

- O estudo da saturação tanto no atuador quanto no gradiente, bem como na saída do mapa não linear.
- A investigação mais detalhada da construção da representação politópica da matriz Hessiana e de sua relação com o conservadorismo das condições de síntese propostas, bem como do desempenho do sistema de controle extremal.
- O desenvolvimento de técnicas de otimização em sistemas multiagentes por meio de métodos de busca e de equilíbrio de Nash, conforme discutido em [36, 37].

APÊNDICE

A Teorema da média para sistemas com lados direitos Lipschitz contínuos

Esta seção apresenta uma versão do Teorema da Média para sistemas com lados direitos Lipschitz contínuos. Os resultados abaixo podem ser vistos como um caso particular do Teorema de Média mais geral, aplicável a sistemas com lados direitos descontínuos, apresentado em [24].

Considere o sistema na forma

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0,$$

onde $\varepsilon > 0$ é um pequeno parâmetro, e $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é T -periódica no tempo, contínua em t , e Lipschitz global em x com uma constante $L > 0$, uniforme em t . Defina o vetor de campo médio

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x, 0) ds$$

e considere o sistema médio correspondente

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y), \quad y(0) = x_0.$$

Embora a função f pode não ser diferenciável em respeito a x a qualquer momento, como é o caso com funções saturadas, a abordagem da média permanece válida sob a condição Lipschitz. Ao expressar as soluções dos sistemas original e médio na forma integral,

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t f(s, x(s), \varepsilon) ds, \quad y(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(y(s)) ds,$$

e definindo a diferença $z(t) := x(t) - y(t)$, obtém-se

$$z(t) = \varepsilon \int_0^t [f(s, x(s), \varepsilon) - \bar{f}(y(s))] ds.$$

Esta diferença pode ser dividida em dois termos:

$$\begin{aligned} & f(s, x(s)) - \bar{f}(y(s)) \\ &= [f(s, x(s), \varepsilon) - f(s, y(s), \varepsilon)] + [f(s, y(s), \varepsilon) - \bar{f}(y(s))]. \end{aligned}$$

O primeiro termo é controlado usando a propriedade de Lipschitz de f , enquanto o segundo termo, corresponde à parte oscilatória, que tem média zero ao longo de um período e admite uma primitiva uniformemente limitada no tempo. Seja $M > 0$ denota um limite uniforme. A combinação de ambas as estimativas leva a

$$\|z(t)\| \leq \varepsilon L \int_0^t \|z(s)\| ds + 2M\varepsilon,$$

e aplicando a desigualdade de Grönwall's

$$\|x(t) - y(t)\| \leq 2M\varepsilon e^{\varepsilon L t}.$$

Portanto, para todo tempo t até $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$, as soluções do sistema original permanecem próximas das do sistema médio, com

$$\|x(t) - y(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Este resultado depende somente da continuidade de Lipschitz de f em x , e não da diferenciabilidade em si, permitindo a aplicabilidade direta em sistemas com não linearidades no formato de saturação ou em sistemas com o lado direito suave por partes.

Outrossim, se o sistema médio $\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y)$ tem um equilíbrio assintoticamente estável, então existe $0 < \varepsilon^* < \varepsilon_0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ (suficientemente pequeno) a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\sup_{t \geq 0} \|x(t) - y(t)\| \leq C\varepsilon, \quad C > 0,$$

significando que a aproximação de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ permanece válida em todo o intervalo de tempo, mesmo que o lado direito seja não diferenciável, desde que seja Lipschitz contínuo, como ocorre em funções de saturação.

REFERÊNCIAS

- [1] TAN, Y.; LI, Y.; MAREELS, I. M. Y. Extremum seeking for constrained inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 58, n. 9, p. 2405–2410, 2013.
- [2] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. *Extremum Seeking through Delays and PDEs*. USA: SIAM, 2022.
- [3] SCHEINKER, A. 100 years of extremum seeking: A survey. *Automatica*, Elsevier, v. 161, p. 111481, 2024.
- [4] KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general non-linear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.
- [5] OLIVEIRA, T. R.; TSUBAKINO, D.; KRSTIĆ, M. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 4, p. 1911–1926, 2017.
- [6] COUTINHO, P. H. S.; OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. Extremum seeking control for scalar maps with distributed diffusion PDEs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 70, n. 7, p. 4865–4872, 2025.
- [7] GALVÃO, M. L.; OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M. Extremum seeking for Stefan PDE with moving boundary and delays. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 55, n. 36, p. 222–227, 2022.
- [8] SILVA, P. C. S. et al. Extremum seeking for a class of wave partial differential equations with Kelvin-Voigt damping. *IEEE Control Systems Letters*, IEEE, v. 8, p. 43–48, 2023.
- [9] RODRIGUES, V. H. P. et al. Sliding-mode nash equilibrium seeking for a quadratic duopoly game. In: IEEE. *2024 17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. [S.l.], 2024. p. 99–106.
- [10] RODRIGUES, V. H. P. et al. Nash equilibrium seeking for noncooperative duopoly games via event-triggered control. *arXiv preprint arXiv:2404.07287*, 2024.
- [11] RODRIGUES, V. H. P. et al. Event-triggered and periodic event-triggered extremum seeking control. *Automatica*, Elsevier, v. 174, p. 112161, 2025.

- [12] TARBOURIECH, S. et al. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London: Springer, 2011.
- [13] COUTINHO, P. H. S. et al. A multiple-parameterization approach for local stabilization of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems with nonlinear consequents. *Information Sciences*, Elsevier, v. 506, n. January, p. 295–307, 2020.
- [14] PEIXOTO, M. L. C. et al. Static output-feedback stabilization of discrete-time linear parameter-varying systems under actuator saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 32, n. 9, p. 5799–5809, 2022.
- [15] FRIHAUF, P.; KRSTIC, M.; BAŞAR, T. Finite-horizon LQ control for unknown discrete-time linear systems via extremum seeking. *European Journal of Control*, Elsevier, v. 19, n. 5, p. 399–407, 2013.
- [16] ELEIWI, F.; LALEG-KIRATI, T. M. Observer-based perturbation extremum seeking control with input constraints for direct-contact membrane distillation process. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 91, n. 6, p. 1363–1375, 2018.
- [17] GUAY, M.; BURNS, D. J. Extremum seeking control for discrete-time with quantized and saturated actuators. *Processes*, MDPI, v. 7, n. 11, p. 831, 2019.
- [18] LU, X. et al. Hardware-in-the-loop multiobjective extremum-seeking control of mineral grinding. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 29, n. 3, p. 961–971, 2020.
- [19] HAZELEGER, L.; NEŠIĆ, D.; WOUW, N. van de. Sampled-data extremum-seeking framework for constrained optimization of nonlinear dynamical systems. *Automatica*, Elsevier, v. 142, p. 110415, 2022.
- [20] KARIMI, F. et al. Anti-windup higher derivative Newton-based extremum seeking under input saturation. *International Journal of Systems Science*, v. 56, n. 8, p. 1834–1846, 2025.
- [21] GALEANI, S. et al. A tutorial on modern anti-windup design. *European Journal of Control*, v. 15, n. 3, p. 418–440, 2009.

- [22] GRIMM, G. et al. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis. *IEEE Transactions on Automatic control*, IEEE, v. 48, n. 9, p. 1509–1525, 2003.
- [23] TARBOURIECH, S.; TURNER, M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *IET Control Theory & Applications*, v. 3, n. 1, p. 1–19, 2009.
- [24] PLOTNIKOV, V. A. Averaging of differential inclusions. *Ukrainian Mathematical Journal*, Springer, v. 31, n. 5, p. 454–457, 1979.
- [25] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 2002.
- [26] TAN, Y.; NEŠIĆ, D.; MAREELS, I. On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, Elsevier, v. 42, n. 6, p. 889–903, 2006.
- [27] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NEŠIĆ, D. Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 8, p. 1759–1767, 2012.
- [28] STEWART, J. Fundamental theorem of calculus. In: *Calculus: Early Transcendentals*. Belmont, California: Thomson/Brooks/Cole, 2003.
- [29] WEILAND, S.; SCHERER, C. Linear matrix inequality in control. *Lecture Notes*, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, v. 3, 01 2000.
- [30] BENZAOUIA, A.; SAYDY, L.; AKHRIF, O. Stability and control synthesis of switched systems subject to actuator saturation. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 6, p. 5818–5823 vol.6.
- [31] DÜRR, H.-B. et al. Lie bracket approximation of extremum seeking systems. *Automatica*, Elsevier, v. 49, n. 6, p. 1538–1552, 2013.
- [32] SCHEINKER, A.; KRSTIĆ, M. Extremum seeking with bounded update rates. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 63, n. 1, p. 25–31, 2014.
- [33] SCHEINKER, A.; KRSTIĆ, M. *Model-Free Stabilization by Extremum Seeking*. [S.l.]: Springer, 2017.

- [34] SILVA, E. F. T.; COUTINHO, P. H. S.; OLIVEIRA, T. R. Controle extremal multi-variável com atuadores saturantes. In: *XVII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*. São João del Rei, Minas Gerais: SBA, 2025. p. 1–6.
- [35] PIPELEERS, G. et al. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 58, n. 7, p. 510–518, 2009.
- [36] OLIVEIRA, T. R. et al. Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, v. 21, p. 692–707, 2007.
- [37] OLIVEIRA, T. R. et al. Nash equilibrium seeking in quadratic noncooperative games under two delayed information-sharing schemes. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 191, p. 700–735, 2021.