Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Flavio de Souza Almeida

Controle Extremal com Equações Diferenciais Parciais de Difusão Distribuídas

Rio de Janeiro

2024

Flavio de Souza Almeida

Controle Extremal com Equações Diferenciais Parciais de Difusão Distribuídas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Silva Coutinho

Rio de Janeiro

2024

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

A447 ALMEIDA, Flavio de Souza.

Controle extremal com equações diferenciais parciais de difusão distribuídas / Flavio de Souza Almeida. – 2024.

69 f.

Orientadores: Tiago Roux Oliveira,Pedro Henrique Silva Coutinho

Dissertação(Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de controle inteligente - Teses. 3. Equações diferenciais parciais - Teses. 4. Sistemas de parâmetros distribuídos - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Coutinho, Pedro Henrique Silva. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 517:935

Bibliotecária: Júlia Vieira - CRB7/6022

Flavio de Souza Almeida

Controle Extremal com Equações Diferenciais Parciais de Difusão Distribuídas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 27 de Dezembro de 2024

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Pedro Henrique Silva Coutinho (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Iury Valente de Bessa
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Prof. Dr. Victor Hugo Pereira Rodrigues
Faculdade de Engenharia – UERJ

Rio de Janeiro

2024

DEDICATÓRIA

Dedico à minha esposa, Maria Cândida, pelo seu amor incondicional, paciência e apoio inabalável ao longo de toda esta jornada. Seu encorajamento e compreensão foram essenciais para que eu pudesse me dedicar plenamente a este trabalho.

Aos meus filhos, Felipe e Flávia, cujo amor e alegria são a maior fonte de inspiração e motivação. Vocês são a luz que ilumina meu caminho e a razão pela qual me esforço todos os dias.

Com carinho e gratidão,

[Flavio Almeida]

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus queridos orientadores, Tiago Roux e Pedro Coutinho, cuja dedicação e empenho foram fundamentais para o desenvolvimento deste projeto. Suas buscas incessantes pelo conhecimento e suas paixões pela pesquisa são verdadeiramente inspiradoras. Também desejo expressar minha profunda gratidão ao Programa de Engenharia Elétrica (PEL) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) pelo apoio e recursos proporcionados ao longo deste projeto. A infraestrutura, o ambiente acadêmico e a orientação recebida foram essenciais para a realização deste trabalho.

Agradeço especialmente ao professor José Paulo cuja dedicação e entusiasmo pelo ensino me fizeram prosseguir nessa jornada, além de todos os professores de excelência desse curso, agradeço aos colegas e funcionários do PEL da UERJ (secretaria), cujas contribuições e apoio foram inestimáveis.

Não nos é permitido saber se lograremos êxito ou não.
Não há desonra em falhar. Só existe uma vergonha definitiva:
a covardia de não ter tentado.

Stan Lee, escritor.

RESUMO

ALMEIDA, Flavio de Souza. *Controle Extremal com Equações Diferenciais Parciais de Difusão Distribuídas.* 69 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2024.

O controle de sistemas descritos por equações diferenciais parciais (PDEs) é um tema usual na engenharia, especialmente em processos industriais onde o comportamento das variáveis pode ser descrito de forma distribuída no tempo e no espaço. Esses problemas são críticos e desafiadores devido à natureza infinita dimensional e às dificuldades em modelar ou controlar esses sistemas com precisão, pois nem sempre é possível obter um modelo exato para representar o seu comportamento devido a incertezas, não linearidades e variações ambientais. Nesses cenários, o Controle Extremal (extremum seeking - ES) se torna uma ferramenta relevante, pois permite realizar otimização em tempo real, buscando o ponto ótimo sem exigir um modelo detalhado do sistema. Contudo, a aplicação do ES em sistemas governados por PDEs de difusão distribuída apresenta desafios, principalmente no que diz respeito à garantia de estabilidade do sistema, uma vez que o ES, por si só, não oferece uma solução direta para a estabilidade de sistemas com múltiplas variáveis distribuídas. Este trabalho aborda o problema de ES para PDEs de difusão distribuída, propondo uma estratégia que combina a metodologia do ES com o método de backstepping, uma técnica conhecida por sua capacidade de garantir estabilidade em sistemas não lineares e distribuídos. Esse método permite projetar controladores que asseguram a estabilidade exponencial do sistema médio através de uma análise por funcional de Lyapunov, ao mesmo tempo em que o ES ajusta dinamicamente os parâmetros do controlador, adaptando-se às variações e incertezas do sistema. Desse modo, utilizando a teoria da média para sistemas de dimensão infinita, demonstra-se que as trajetórias convergem para uma vizinhança pequena em torno do ponto ótimo.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais; Método backstepping; Teoria da média; Sistemas de dimensão infinita.

ABSTRACT

ALMEIDA, Flavio de Souza. *Extremal Control with Distributed Diffusion Partial Differential Equations*. 69 p. Dissertation (Master in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2024.

The control of systems described by partial differential equations (PDEs) is a common topic in engineering, especially in industrial processes where the behavior of variables can be described in a distributed manner in time and space. These problems are critical and challenging due to the infinite-dimensional nature and the difficulties in modeling or controlling these systems accurately since it is not always possible to obtain an exact model to represent their behavior due to uncertainties, nonlinearities, and environmental variations. In these scenarios, Extremal Control (ES) becomes a relevant tool, since it allows real-time optimization, seeking the optimum point without requiring a detailed model of the system. However, the application of ES in systems governed by distributed diffusion PDEs presents challenges, especially concerning ensuring system stability, since ES, by itself, does not offer a direct solution for the stability of systems with multiple distributed variables. This work addresses the ES problem for distributed diffusion PDEs, proposing a strategy that combines the ES methodology with the backstepping method, a technique known for its ability to ensure stability in nonlinear and distributed systems. This method allows the design of controllers that ensure the exponential stability of the average system through a Lyapunov functional analysis, while the ES dynamically adjusts the controller parameters, adapting to the system variations and uncertainties. In this way, using the averaging theory for infinite-dimensional systems, it is demonstrated that the trajectories converge to a small neighborhood around the optimum point.

Keywords: Partial differential equations; Bacstepping method; Mean theory; Infinite dimensional sytems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\partial_x u(x,t)$	Derivada parcial de $u(x,t)$ em relação a x
$\partial_t u(x,t)$	Derivada parcial de $u(x,t)$ em relação a t
$u_x(x,t)$ ou u_x	Forma compacta para $\partial_x u(x,t)$
$u_t(x,t)$ ou u_t	Forma compacta para $\partial_t u(x,t)$
av	Subscrito para denotar o valor médio de uma variável periódica
$\lvert X(t)\rvert$	Norma Euclidiana de uma ODE com vetor de estado $X(t)$
$\lVert u(t)\rVert_{L^2([0,L])}$	Norma espacial L^2 do estado da PDE $u(x,t)$
$\lVert \cdot \rVert$	Norma $L^2([0,L])$ implícita, assumida como $\lVert \cdot \rVert = \lVert \cdot \rVert_{L^2([0,L])}$
$f(t,\epsilon) \in \mathbb{R}^n$	Função vetorial de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ sobre um intervalo $[t_1,t_2]$
$\mathcal{O}(\epsilon)$	Ordem de magnitude para um escalar suficientemente pequeno ϵ
k,ϵ	Constantes para definir a ordem de $\mathcal{O}(\epsilon)$ sobre o intervalo $[t_1,t_2]$

LISTA DE SIGLAS

ESC	Extremum Seeking Control
ODE	Ordinary Differential Equations
PDE	Partial Differential Equations
MPPT	Maximum Power Point Tracking

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Parciais (PDEs, do inglês *Partial Differential Equations*) são equações matemáticas que descrevem a evolução de uma variável dependente (como temperatura, pressão ou velocidade) em função de múltiplas variáveis independentes, como o tempo e o espaço. Ao contrário das equações diferenciais ordinárias (ODEs, do inglês *Ordinary Differential Equations*), que consideram derivadas em relação a uma única variável, as PDEs envolvem derivadas parciais em relação a mais de uma variável. Essa característica permite que as PDEs sejam usadas para modelar sistemas em que uma variável de interesse muda de forma contínua ao longo de uma dimensão espacial e temporal [1].

Em [2], é destacada a versatilidade das PDEs para descrever uma ampla gama de fenômenos físicos, como a condução de calor, a difusão de substâncias químicas, o movimento de fluidos e a elasticidade de materiais sólidos. Esses fenômenos são complexos porque as variáveis se distribuem em todo o espaço, exigindo uma análise detalhada em cada ponto ao longo de um domínio contínuo. As PDEs permitem uma representação precisa dessas dinâmicas distribuídas, capturando as interações e variações ao longo de todo o sistema.

No campo da engenharia de controle e automação, o controle preciso e eficiente de sistemas dinâmicos é crucial para a otimização de processos e a melhoria da performance de diversas aplicações industriais e científicas. Entre os desafios complexos enfrentados por engenheiros e pesquisadores, o controle de sistemas descritos por PDEs de difusão distribuída tem se destacado devido à sua relevância e complexidade. As PDEs de difusão, que incluem equações como a de calor, são fundamentais para modelar uma vasta gama de processos físicos, como a condução de calor e a difusão de substâncias, que ocorrem em sistemas distribuídos no espaço e no tempo.

Em [3], explora-se a teoria de sistemas de dimensão infinita, como aqueles descritos por PDEs. Essa teoria é fundamental para o controle de sistemas distribuídos, pois permite desenvolver abordagens específicas para lidar com as complexidades dos sistemas que possuem um número infinito de graus de liberdade. Em particular, a teoria de controle para sistemas distribuídos busca garantir que variáveis críticas, como temperatura e pressão, se mantenham dentro de limites aceitáveis ao longo do espaço e do tempo, minimizando riscos e maximizando otimizações de desempenho.

Nesse contexto, sistemas de controle de temperatura que operam de forma precisa, eficiente e inteligente são cada vez mais valiosos. A saber, do ponto de vista industrial, pode-se mencionar o interesse em se alcançar uma temperatura desejada ou um perfil de concentração em regiões variantes no tempo ao longo do processo, a fim de alcançar, por exemplo, um certo grau de pureza desejado, ou assegurar propriedades estruturais no produto final para que, com isso, se tenha uma redução nos custos operacionais. Sob essas perspectivas, justifica-se a utilização de modelos matemáticos a parâmetros distribuídos para representar o processo [4]. Em particular, a distribuição de temperatura pode ser modelada por uma equação diferencial parcial de difusão.

Todavia, o método de otimização que visa minimizar ou maximizar uma função de desempenho ao longo do tempo, tem mostrado ser uma ferramenta poderosa para lidar com essas complexidades, ou seja, a técnica do controle de busca extremal (ESC, do inglês *Extremum Seeking Control*). Essa abordagem de controle adaptativo se distingue do paradigma clássico de controle baseado em modelos de referência, já que ao invés de focar na estabilização do erro entre a saída medida e uma trajetória de referência, o ESC pode identificar e alcançar um ponto ótimo de uma dada função objetivo sem a necessidade de conhecimento explícito da função [5, 6].

Assim, desde a publicação da primeira prova de estabilidade do ESC [7], diversos artigos foram publicados sobre este tópico, apresentando novos desenvolvimentos teóricos e aplicações. Uma prova que expande a validade de busca de extremos da estabilidade local para global foi publicada em [8]. O livro [9] apresenta versões estocásticas dos algoritmos, onde as senoides são substituídas por pertubações de ruído branco. Logo, existem muitas versões de busca de extremos, com várias abordagens para seu estudo de estabilidade.

Por isso, esse método tem se tornado cada vez mais popular na literatura recente [10]. Ele é especialmente útil em cenários onde há não-linearidades intrínsecas nos problemas de controle. Além disso, o ESC pode ser aplicado tanto para ajustar o sinal de entrada com o objetivo de otimizar a saída, quanto para calibrar os parâmetros de uma lei de controle.

Dessa forma, essa técnica oferece uma solução robusta para otimização em tempo real em sistemas de controle complexos e não-lineares. Conforme mencionado anteriormente, o ESC é uma técnica de otimização em tempo real usada para encontrar e manter um ponto ótimo (extremo) em um sistema, mesmo quando não se tem um modelo preciso do mesmo [7]. Por isso, nessa investigação, aborda-se o problema de controle extremal para PDEs de difusão distribuídas. Haja visto, esta classe de PDEs poder ser aplicada para modelar, por exemplo, problemas de regulação de temperatura.

Soma-se a isso que o ESC é especialmente útil quando não é possível se obter um modelo preciso do sistema ou quando o sistema está sujeito a perturbações, incertezas ou variações imprevisíveis [11]. Inicialmente, o problema baseado nessa técnica foi introduzido por [12] no contexto de maximização de transferência de potência. Posteriormente, em especial com a formulação proposta por [7] para sistemas com mapeamentos de saída desconhecidos em sistemas estáveis, o fato é que esse método ficou esquecido após algumas décadas de uso prático e tentativas de estudo teórico, entretanto retornou à vida quando a estabilidade de sua operação foi comprovada em [7] e a partir daí tem sido aplicado em diversos problemas [13, 14, 15] não apenas para mapas de entrada-saída estáticos, mas para sistemas dinâmicos modelados por ODEs não lineares gerais.

Particularmente, [16, 17] abordaram o problema de ESC para PDEs, propondo-se a análise e síntese de mapeamentos estáticos multivariáveis na presença de retardos no tempo arbitrariamente longos. Com esse propósito, a influência do retardo foi modelada como uma PDE hiperbólica de transporte [18]. No entanto, o problema de ESC para PDEs de difusão distribuídas não foi abordado na literatura.

A partir do exposto, este trabalho trata do problema de ESC para PDEs de difusão distribuídas. Para isso, um compensador da PDE de difusão distribuída é projetado para garantir a estabilidade assintótica do sistema médio [19, 20]. Então, utilizando argumentos da teoria da média para sistemas de dimensão infinita governados por PDEs, garante-se que a trajetória real converge para uma vizinhança suficientemente pequena do ponto ótimo [17].

Objetivos e Contribuições

1. **Desenvolver uma estratégia de Controle Extremal com PDE de difusão distribuída**:

   Criar uma abordagem sistemática que permita a aplicação do ESC em sistemas distribuídos modelados por PDEs de difusão, com ênfase na *equação de calor*. A metodologia proposta visa adaptar o ESC para lidar com as particularidades e desafios de sistemas descritos por PDEs de difusão distribuídas, levando em consideração o controle ao longo do domínio espacial contínuo.

2. **Projetar o sinal de perturbação do ESC com PDE de difusão distribuída:**

   O sinal de perturbação do ESC deve ser projetado de forma adequada para que seja possível construir um erro de estimação apropriado. O sinal de perturbação é projetado a partir da solução de um problema de geração de trajetórias de PDEs levando em consideração o efeito de difusão distribuída. Esta é uma contribuição deste trabalho, visto que demais trabalhos relacionados não levam em conta o efeito de difusão distribuída.

3. **Projetar um compensador para PDE de difusão distribuída:**

   O controlador proposto neste trabalho deve levar em conta o efeito de difusão distribuída para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Contudo, projetar o sinal de controle neste contexto envolve desafios significativos, dado que o projeto do compensador precisa considerar a dimensionalidade infinita do problema. Para isso, adotou-se o método *backstepping* para realizar o projeto.

4. **Analisar a estabilidade do sistema em malha fechada**:

   A estabilidade do sistema em malha fechada com o sinal de perturbação e a lei de compensação projetados foi realizada por meio de uma análise teórica rigorosa utilizando argumentos da Teoria de Estabilidade de Lyapunov.

5. **Realizar experimentos numéricos para ilustrar a efetividade da estratégia de controle proposta:**

   Implementar a metodologia desenvolvida e realizar experimentos numéricos para verificar o desempenho do sistema ao utilizar o método de controle extremal proposto. A implementação visa demonstrar o potencial prático da metodologia em otimizar o controle e o desempenho de sistemas distribuídos de difusão, oferecendo uma solução viável para aplicações industriais e científicas.

Estrutura da Dissertação

O Capítulo 1 trata dos fundamentos do Controle Extremal e do problema que consiste em determinar a função de control que leva a saída de uma certa função para um valor desejado,

Já o Capítulo 2 descreve o processo de geração de uma trajetória para um sinal de perturbação aditiva em um problema de controle extremal que envolve uma equação diferencial parcial de difusão distribuída. Este processo é parte de um esquema de controle extremal onde a geração da trajetória do sinal de perturbação é crucial para garantir que a PDE de difusão seja satisfeita e, ao mesmo tempo, a função de custo do controle extremal seja maximizada de acordo com os requisitos do sistema.

Os resultados principais desta dissertação são apresentados no Capítulo 3 que discute o desenvolvimento de um compensador para o sistema governado por uma PDE de difusão distribuída. O objetivo principal do compensador é garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, ou seja, assegurar que os erros de estimação se reduzam exponencialmente ao longo do tempo. Por conseguinte, o compensador proposto é baseado em um controlador linear com realimentação do erro de estimação e do estado do sistema.

Assim, a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada é garantida, o que significa que o sistema é robusto e responderá de maneira estável às perturbações. Ainda se discute nesse capítulo o projeto de um compensador para o sistema médio, com foco em tornar o compensador implementável.

Os resultados numéricos são apresentados no Capítulo 4. Eles ilustram a efetividade da metodologia proposta para o controle de sistemas descritos por PDEs de difusão distribuída em assegurar a convergência do sistema para o valor ótimo. Isso valida a abordagem teórica fornecida nesta dissertação.

1 FUNDAMENTOS DO CONTROLE EXTREMAL

Este capítulo fornece uma visão geral das versões básicas do controle extremal explorando os algorítimos de Gradiente e Newton para sistemas dinâmicos. O Algoritmo Gradiente, que ajusta parâmetros para minimizar erros, e o algoritmo de Newton, que utiliza aproximações mais precisas e geralmente convergindo mais rapidamente para o ponto ótimo. Ao final, faz uma análise dos avanços e aplicações do ESC em mais de um século de existência.

1.1 Ideia básica do controle extremal

A versão mais comum emprega sinais de perturbação com a finalidade de estimar o gradiente do mapa desconhecido que está sendo otimizado. Para entender a ideia básica do ESC, é melhor considerar primeiro o caso de um mapa estático de entrada única da forma quadrática, como mostrado na Figura 1.

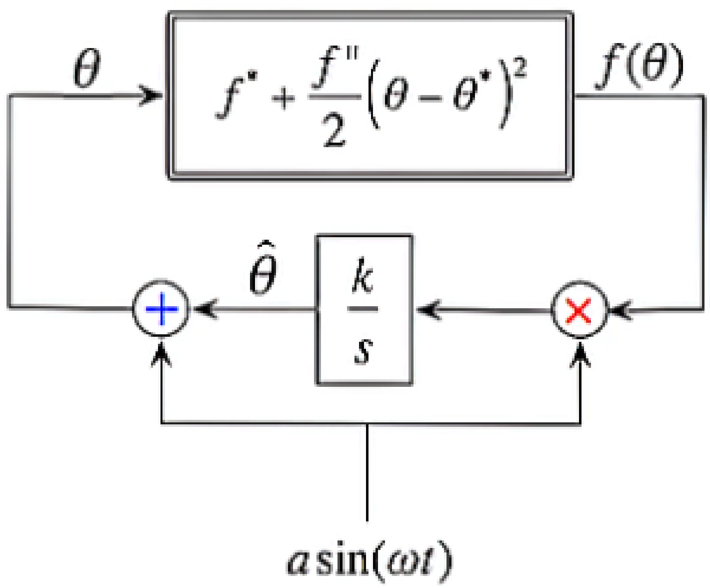


Figura 1: Mapa quadrático de controle extremal.

Considere o seguinte mapa quadrático

$$f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2 \tag{1}$$

onde θ^* é o otimizador desconhecido do mapa, $\hat{\theta}(t)$ é a estimativa em tempo real de θ^* e

$\theta(t)$ é a entrada real no mapa.

A entrada real $\theta(t)$ é baseada na estimativa $\hat{\theta}(t)$, mas é perturbada pelo sinal $a\,\mathrm{sen}(\omega t)$ com a finalidade de estimar o gradiente desconhecido $f''(\theta - \theta^*)$ do mapa $f(\theta)$. O sinal senoidal é apenas uma escolha para um sinal de perturbação, mas há outras possibilidade para escolha das perturbações, tais como ondas quadradas e ruído estocástico, que podem ser usadas no lugar de senoides, desde que sejam de média zero. A estimativa $\hat{\theta}(t)$ é gerada com o integrador $\frac{k}{s}$ com o ganho de adaptação k controlando a velocidade de estimativa.

O algoritmo de ESC é bem-sucedido se o erro entre a estimativa $\hat{\theta}(t)$ e o θ^* desconhecido, ou seja, o sinal $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*$, converge para zero. Com base na Figura 1, a estimativa $\hat{\theta}(t)$ é governada pela equação diferencial $\dot{\hat{\theta}} = k\,\mathrm{sen}(\omega t) f(\theta)$, o que significa que o erro de estimação é governado por

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = ka\,\mathrm{sen}(\omega t)\left[f^* + \frac{f''}{2}\left(\tilde{\theta} + a\,\mathrm{sen}(\omega t)\right)^2\right]. \tag{2}$$

O esquema mais simples do ESC é baseado em perturbação para um mapa quadrático escalar $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$, onde f^*, f'' e θ^* são todos desconhecidos. O projetista precisa conhecer somente o sinal de f'', ou seja, saber se o mapa quadrático tem um máximo ou um mínimo, e deve escolher o ganho de adaptação k tal que $\mathrm{sgn}(k) = -\mathrm{sgn}(f'')$. O projetista também deve escolher a frequência ω e amplitude a do sinal de perturbação. Expandindo o lado direito, obtém-se:

$$\frac{d\tilde{\theta}(t)}{dt} = kaf^* \underbrace{sen(\omega t)}_{\text{média=0}} + ka^3\frac{f''}{2}\underbrace{sen^3(\omega t)}_{\text{média=0}} + ka\frac{f''}{2}\underbrace{sen(\omega t)}_{\text{rápido,média=0}}\underbrace{\tilde{\theta}(t)^2}_{\text{lento}} + ka^2 f''\underbrace{sen^2(\omega t)}_{\text{rápido, média=}\frac{1}{2}}\underbrace{\tilde{\theta}(t)}_{\text{lento}} \tag{3}$$

Um procedimento de média temporal teoricamente rigoroso permite substituir os sinais senoidais acima por seus valores médios, produzindo o chamado "sistema médio" que é exponencialmente estável [21], dado que o sinal do ganho k seja oposto ao sinal de f''.

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{ave}}}{dt} = \frac{\overbrace{kf''}^{<0}\, a^2}{2}\tilde{\theta}_{\text{ave}} \tag{4}$$

A teoria da média [21] garante que existe um ω suficientemente grande tal que, se a estimativa inicial $\hat{\theta}(0)$ for suficientemente próxima do θ^* desconhecido, então

$$|\theta(t) - \theta^*| \leq |\theta(0) - \theta^*|e^{\frac{kf"a^2}{2}t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) + \mathcal{O}(a), \quad \forall t \geq 0. \tag{5}$$

Para o projetista, a desigualdade em (5) garante que se a for escolhido pequeno e ω for escolhido grande, a entrada $\theta(t)$ converge exponencialmente para um pequeno intervalo de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ em torno do ponto desconhecido θ^* e, consequentemente, a saída $f(\theta(t))$ converge para a vizinhança da saída ótima f^*.

1.2 ESC para sistemas dinâmicos

O ESC se estende de uma maneira relativamente direta de mapas estáticos para sistemas dinâmicos, desde que a dinâmica seja estável e os parâmetros do algoritmo sejam escolhidos de forma que a dinâmica do algoritmo seja mais lenta do que a da planta.

1.2.1 Algoritmo do gradiente para sistemas dinâmicos

O algoritmo de ESC baseado em gradiente é mostrado na Figura 2.

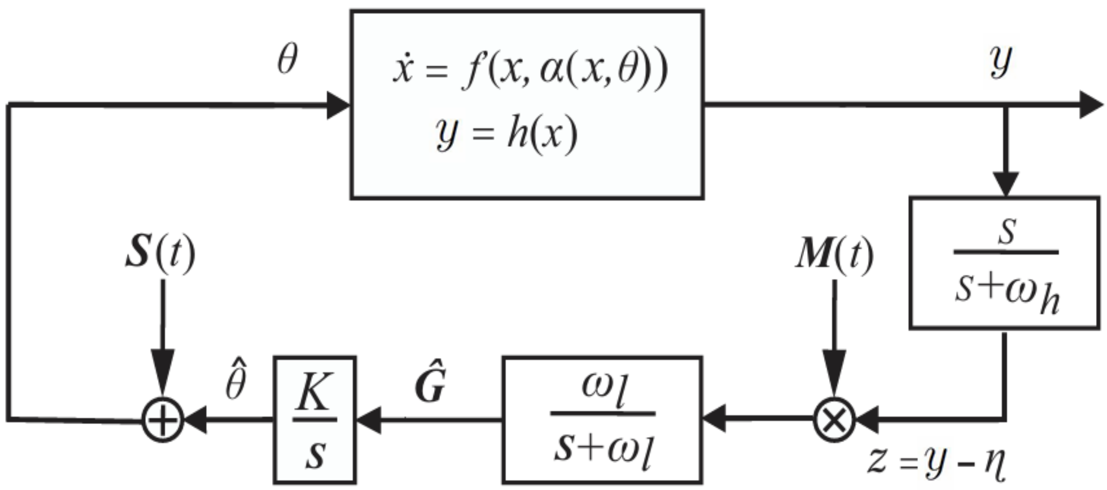


Figura 2: Controle Extremal na presença de mapeamentos dinâmicos.

.

Se a dinâmica for estável e o projetista empregar parâmetros no algoritmo ESC que tornem a dinâmica do algoritmo mais lenta do que a dinâmica da planta [3], a convergência paramétrica é garantida (pelo menos localmente). O filtro passa-altas $s/(s + w_h)$ e o filtro passa-baixas $w_l/(s + w_l)$, com frequências de corte $w_h > 0$ e $w_l > 0$, são úteis na implementação para reduzir o efeito adverso dos sinais de perturbação no desempenho assintótico, mas não são necessários na análise de estabilidade.

Considere a equação dinâmica

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta)), \tag{6}$$

onde $\alpha(x, \theta)$ é a lei de controle de um laço de realimentação interno parametrizada por θ. As condições para convergência na presença de dinâmica são os equilíbrios $x = l(\theta)$ do sistema serem localmente exponencialmente estáveis uniformemente em θ e que, dado o mapa de saída $y = h(x)$, existe pelo menos um $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(h \circ l)(\theta^*) = 0 \tag{7}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(h \circ l)(\theta^*) = H < 0, \tag{8}$$

com $H = H^T$.

A análise de estabilidade na presença de dinâmica emprega os conceitos de perturbações médias e singulares, em uma ordem específica [11]. A ideia consiste em assegurar que a dinâmica da planta esteja em uma escala de tempo rápida, as perturbações estejam em uma escala de tempo média e o algoritmo de ESC esteja em uma escala de tempo lenta. Isso garante que diferentes componentes do sistema (dinâmica da planta, perturbações e algoritmo) estejam sincronizados com suas respectivas escalas de tempo para alcançar um desempenho adequado.

1.2.2 Algoritmo de Newton para sistemas dinâmicos

Considere um modelo não linear geral de múltiplas entradas e saídas únicas (MISO)

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{9}$$

$$y = h(x), \tag{10}$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^n$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída, e $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são ambos suaves (contínuos e diferenciáveis). Suponha que se conhece uma lei de controle suave $u = \alpha(x, \theta)$ parametrizada por um vetor de parâmetros $\theta \in \mathbb{R}^n$. O sistema em malha fechada $\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta))$ então possui equilíbrios parametrizados por θ. Faz-se as seguintes suposições sobre o sistema em malha fechada, como em [11].

Hipótese 1.2.1 *Existe uma função suave* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que* $f(x, \alpha(x, \theta)) = 0$ *se e somente se* $x = l(\theta)$.

Hipótese 1.2.2 *Para cada* $\theta \in \mathbb{R}^n$*, o equilíbrio* $x = l(\theta)$ *do sistema* $\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta))$ *é localmente exponencialmente estável, com constantes de decaimento e superação uniformes em* θ.

Hipótese 1.2.3 *Existe* $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(h \circ l)(\theta^*) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(h \circ l)(\theta^*) = H < 0, \quad H = H^T. \tag{12}$$

O objetivo é desenvolver um mecanismo de realimentação que alcance o valor ótimo de y, mas sem exigir o conhecimento de θ^* ou das funções h e l. O projeto de ESC baseado em gradiente que atinge esse objetivo, adequadamente adaptado de [11] para o caso multivariável é mostrado esquematicamente na Figura 2.

Paralelamente, apresenta-se o esquema generalizado para o ESC baseado em Newton para múltiplas variáveis, conforme mostrado na Figura 3.

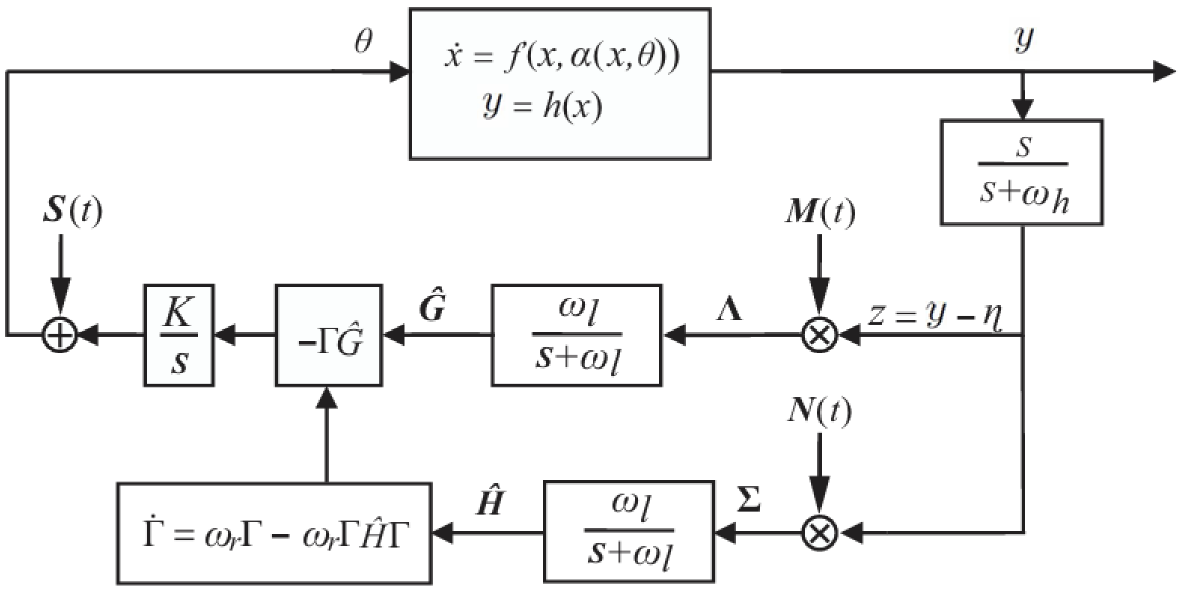


Figura 3: O algoritmo ESC baseado em Newton na presença de dinâmica com um equilíbrio, mapa $\theta \to y$ que satisfaz as mesmas condições do caso estático.

Os sinais de perturbação $S(t)$, $M(t)$ e $N(t)$ são definidos pelas seguintes equações (13)–(16).

$$S(t) = [a_1 \sin(\omega_1 t) \dots a_n \,\mathrm{sen}(\omega_n t)]^T, \tag{13}$$

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t) \dots \frac{2}{a_n}\,\mathrm{sen}(\omega_n t)\right]^T, \tag{14}$$

$$N_{ii}(t) = \frac{16}{a_1^2}\left(\mathrm{sen}(\omega_i t) - \frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

$$N_{ij}(t) = \frac{4}{a_i a_j}\,\mathrm{sen}(\omega_i t)\,\mathrm{sen}(\omega_j t), \quad i \neq j, \quad i,j \in \{1,\dots,n\}. \tag{16}$$

As frequências de sondagem $\omega_i' s$, os coeficientes do filtro ω_h, ω_l e ω_r, e o ganho de adaptação K são selecionados como:

$$\omega_i = \omega\omega_i' = \mathcal{O}(\omega), \quad i \in \{1,2,\dots,n\}, \tag{17}$$

$$\omega_h = \omega\omega_H = \omega\delta\omega_H' = \mathcal{O}(\omega\delta), \tag{18}$$

$$\omega_l = \omega\omega_L = \omega\delta\omega_L' = \mathcal{O}(\omega\delta), \tag{19}$$

$$\omega_r = \omega\omega_R = \omega\delta\omega_R' = \mathcal{O}(\omega\delta), \tag{20}$$

$$K = \omega K' = \omega K'' = \mathcal{O}(\omega\delta). \tag{21}$$

onde ω e δ são constantes positivas pequenas, ω_i' é um número racional, ω_H', ω_L' e ω_R' são constantes positivas $\mathcal{O}(1)$, K'' é uma matriz diagonal $n \times n$ com elementos positivos $\mathcal{O}(1)$, e $K' = \delta K''$. A análise de [11] e [13] mostra que, no esquema baseado em gradiente, para *"suficientemente pequenos"* ω e $|\alpha|$, onde $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n]^T$, e δ suficientemente pequeno, o que implica em pequenas frequências de corte do filtro ω_h e ω_l, os estados $(x, \hat{\theta})$ do sistema em malha fechada convergem exponencialmente para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega + \delta + |\alpha|)$ de $l(\theta^*), \theta^*$ e a saída y converge para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega + \delta + |\alpha|)$ do $y^* = (h \circ l)(\theta^*)$ ótimo.

Na Seção 1.2.4, provamos que o valor médio do sinal $\sum(t)$ (na Figura 3) sobre o período

$$\Pi := 2\pi \times \mathrm{MMC}\left\{\frac{1}{\omega_i}\right\}. \tag{22}$$

é suficientemente próximo ao valor real do Hessiano, sob condições específicas em ω, δ, e α, onde MMC representa o mínimo múltiplo comum. Como está se integrando sobre um período de tempo finito e define-se a priori a fase dos sinais de perturbação periódicos iguais a zero, é possível excluir a condição $\omega_i \neq \omega_j + \omega_k$. As frequências de sondagem precisam satisfazer

$$\omega_i' \notin \{\omega_j', \frac{1}{2}(\omega_j' + \omega_k'), \omega_j' + 2\omega_k', \omega_j' + \omega_k' \pm \omega_l'\} \tag{23}$$

para todos os distintos i, j, k e l. Como será visto na seção 1.2.4. ignorar as condições (23) estão deslocando a estimativa do parâmetro para longe de seu valor verdadeiro e levando as estimativas imprecisas do vetor gradiente e da matriz Hessiana.

1.2.3 Estabilidade do sistema de malha fechada com algoritmo de controle extremal

Resume-se o sistema em malha fechada na Figura 3 como:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{G} \\ \tilde{\Gamma} \\ \tilde{H} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, \alpha(x, \theta^* + \tilde{\theta} + S(t))) \\ -K(\tilde{\Gamma} + H^{-1})\tilde{G} \\ -\omega_l \tilde{G} + \omega_l (y - h_\circ l(\theta^*) - \tilde{\eta}) M(t) \\ \omega_r (\tilde{\Gamma} + H^{-1})(I - (\tilde{H} + H)(\tilde{\Gamma} + H^{-1})) \\ -\omega_l \tilde{H} - \omega_l H + \omega_l (y - h \circ l(\theta^*) - \tilde{\eta}) N(t) \\ -\omega_h \tilde{\eta} + \omega_h (y - h \circ l(\theta^*)) \end{bmatrix} \tag{24}$$

onde I é a matriz identidade com dimensões apropriadas.

Para conduzir uma análise de estabilidade, introduzimos as variáveis de erro $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*, \theta = \hat{\theta} + S(t)$, $\tilde{\eta} = \eta - h \circ l(\theta^*)$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma - H^{-1}$, e $\tilde{H} = \hat{H} - H$, onde η é governado por

$$\dot{\eta} = -\omega_h \eta + \omega_h y. \tag{25}$$

Faz-se um leve abuso de notação empilhando quantidades matriciais $\tilde{\Gamma}$ e $\tilde{H}$ junto com quantidades vetoriais, pois escolhas de notação alternativas seriam mais incômodas. O principal resultado de estabilidade é declarado no seguinte teorema.

Teorema 1.2.1 *Considere o sistema de feedback (24) sob as Hipóteses 1.1 a 1.3. Existe* $\overline{\omega} > 0$ *e para qualquer* $\omega \in (0, \overline{\omega})$ *existe* $\overline{\delta}, \overline{a} > 0$ *tal que para o dado* ω *e qualquer* $|a| \in (0, \overline{a})$ *e* $\delta \in (0, \overline{\delta})$ *existe uma vizinhança do ponto* $(x, \hat{\theta}, \hat{G}, \Gamma, \hat{H}, \eta) = (l(\theta^*), \theta^*, 0, H^{-1}, H, h \circ l(\theta^*))$ *tal que qualquer solução do sistema (24) inicializada nesta vizinhança, converge exponencialmente para uma vizinhança* $\mathcal{O}(\omega + \delta + |a|)$ *daquele ponto. Além disso,* $y(t)$ *converge para uma vizinhança* $\mathcal{O}(\omega + \delta + |a|)$ *de* $h \circ l(\theta^*)$.

Para preparar a prova do Teorema 1.1, que é dada nas Seções 1.2.4 e 1.2.5, resume-se o sistema (24) na escala de tempo $\tau = \omega t$ como

$$\omega \frac{dx}{dr} = f(x, \alpha(x, \theta^* + \tilde{\theta} + \overline{S}(\tau))), \tag{26}$$

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}\\ \tilde{G}\\ \tilde{\Gamma}\\ \tilde{H}\\ \tilde{\eta}\end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix}-K"(\tilde{\Gamma}+H^{-1})\hat{G}\\ -\omega_L'(\hat{G}+\omega_L'(y-h\circ l(\theta^*)-\tilde{\eta})\overline{M}(\tau)\\ \omega_R'(\tilde{\Gamma}+H^{-1})(I-(\tilde{H}+H)(\tilde{\Gamma}+H^{-1}))\\ -\omega_L'(\tilde{H}+H)+\omega_L'(y-h\circ l(\theta^*)-\tilde{\eta})\overline{N}(\tau)\\ -\omega_H'\tilde{\eta}+\omega_H'(y-h\circ l(\theta^*))\end{bmatrix} \tag{27}$$

onde $\overline{S}(\tau)=S(\frac{t}{\omega}),\overline{M}(\tau)=M(\frac{t}{\omega}),e\overline{N}(\tau)=N(\frac{t}{\omega})$.

1.2.4 Análise de média

O primeiro passo na análise é estudar o sistema na Figura 3 foi “congelar” x, dado por (26), em seu equilíbrio $x=l(\theta^*+\tilde{\theta}+\overline{S}(\tau))$ e substituído em (27), obtendo o sistema reduzido.

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_\tau\\ \tilde{G}_\tau\\ \tilde{\Gamma}_\tau\\ \tilde{H}_\tau\\ \tilde{\eta}_\tau\end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix}-K"(\tilde{\Gamma}+H^{-1})\hat{G}_\tau\\ -\omega_L'(\hat{G}_\tau+\omega_L'(\upsilon(\tilde{\theta}_\tau+\overline{S}(\tau))-\tilde{\eta}_\tau)\overline{M}(\tau)\\ \omega_R'(\tilde{\Gamma}_\tau+H^{-1})(I-(\tilde{H}_\tau+H)(\tilde{\Gamma}_\tau+H^{-1}))\\ -\omega_L'(\tilde{H}_\tau-\omega_L'H+\omega_L'(\upsilon(\tilde{\theta}(\tau)+\overline{S}(\tau))-\tilde{\eta}_\tau)\overline{N}(\tau)\\ -\omega_H'\tilde{\eta}_\tau+\omega_H'(\upsilon(\tilde{\theta}(\tau)+\overline{S}(\tau))\end{bmatrix} \tag{28}$$

onde $\upsilon(z)=h\circ(\theta^*+z)|h\circ l(\theta^*)$. Em vista da Hipótese 1.3, $\upsilon(0)=0$, $\partial\upsilon(0)/\partial z=0$,e $\partial^2\upsilon(0)/\partial z^2=H<0$.

Para provar a estabilidade geral de (24), primeiro mostra-se que o sistema reduzido (28) tem solução periódica exponencialmente estável única em torno de seu equilíbrio.

Teorema 1.2.2 *Considere o sistema (28) sob a Hipótese 1.3. Existem* $\overline{\delta},\overline{a}>0$ *tais que para todos os* $\delta\in(0,\overline{\delta})$ *e* $|a|\in(0,\overline{a})$*, o sistema (28) tem uma única solução periódica exponencialmente estável* $\tilde{\theta}_\tau^\Pi(\tau),\hat{G}_\tau^\Pi(\tau),\tilde{H}_\tau(\tau),\tilde{\eta}_\tau^\Pi(\tau)$ *do período* Π *definido em (22) e esta solução satisfaz*

$$\left|\tilde{\theta}_{\tau,i}^\Pi(\tau)-\sum_{j=1}^{n}c_{jj}^i a_j^2\right|\leq\mathcal{O}(\delta+|a|^3), \tag{29}$$

$$\left|\hat{G}_{\tau}^{\Pi}(\tau)\right| \leq \mathcal{O}(\delta), \tag{30}$$

$$\left|\tilde{\Gamma}_{\tau}^{\Pi}(\tau) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H^{-1}W^{i}H^{-1}c_{jj}^{i}a_{j}^{2}\right| \leq \mathcal{O}(\delta + |a|^{3}), \tag{31}$$

$$\left|\tilde{H}_{\tau}^{\Pi}(\tau) - \sum_{i=j}^{n}\sum_{j=1}^{n} W^{i}a_{j}^{n}c_{jj}^{i}a_{j}^{2}\right| \leq \mathcal{O}(\delta + |a|^{3}), \tag{32}$$

$$\left|\tilde{\eta}_{\tau}^{\Pi}(\tau) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} H_{ii}a_{i}^{2}\right| \leq \mathcal{O}(\delta + |a|^{4}), \tag{33}$$

para todo $\tau \geq 0$, onde:

$$\begin{bmatrix} c_{jj}^{1} \\ \vdots \\ c_{jj}^{i-1} \\ c_{jj}^{i} \\ c_{jj}^{i+1} \\ \vdots \\ c_{jj}^{n} \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}H^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\partial^{3}\nu}{\partial z_{j}\partial z_{1}^{2}}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{3}\nu}{\partial z_{j}\partial z_{j-1}^{2}}(0) \\ \frac{\partial^{3}\nu}{\partial z_{j}\partial z_{j}^{3}}(0) \\ \frac{\partial^{3}\nu}{\partial z_{j}\partial z_{j+1}^{2}}(0) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{3}\nu}{\partial z_{j}\partial z_{n}^{2}}(0) \end{bmatrix} \quad \forall\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{34}$$

$$(W^{i})_{jk} = \frac{\partial^{3}\nu(0)}{\partial z_{i}\partial z_{j}\partial z_{k}} \quad \forall\ i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{35}$$

1.3 Análise de perturbação singular

Agora, analisa-se a escala de tempo do sistema completo na Figura 3, cujo modelo em espaço de estados é dado por (26) e (27) na escala de tempo $\tau = \omega t$. Para tornar a notação na análise futura mais compacta, escreve-se (27) como:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\varepsilon(\tau, x, \xi), \tag{36}$$

onde $\xi = (\tilde{\theta}, \hat{G}, \tilde{\Gamma}, \tilde{H}, \tilde{\eta})$.. Pelo Teorema 1.2, existe uma solução periódica exponencialmente estável $\xi_\tau^\Pi(\tau)$ tal que:

$$\frac{d\xi_\tau^\Pi(\tau)}{d\tau} = \delta E(\tau, L(\tau, \xi_\tau^\Pi(\tau)), \xi_\tau^\Pi(\tau), \tag{37}$$

onde $L(\tau, \xi) = l[(\theta^* + \tilde{\theta} + \overline{S}(\tau))$. Para trazer o sistema (26) e (36) para esta forma de perturbação, desloca-se o estado ξ usando a transformação $\tilde{\xi} = \xi - \xi_\tau^\Pi(\tau)$ e

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\tau} = \delta\tilde{E}(\tau, x, \tilde{\xi}), \tag{38}$$

$$w\frac{dx}{d\tau} = \tilde{F}(\tau, x, \tilde{\xi}), \tag{39}$$

onde

$$\tilde{E}(\tau, x, \tilde{\xi}) = E(\tau, x, \tilde{\xi} + \xi_\tau^\Pi(\tau)) - E(\tau, L(\tau, \xi_\tau^\Pi(\tau)), \xi_\tau^\Pi(\tau), \tag{40}$$

$$\tilde{F}(\tau, x, \tilde{\xi}) = f(x, \alpha(x, \tilde{\xi}_1 + \theta^* + \tilde{\theta}_\tau^\Pi(\tau) + \overline{S}(\tau))) \tag{41}$$

Observa-se que $x = L(\tau, \tilde{\xi} + \tilde{\xi}_\tau^\Pi(\tau))$ é o estado quase-estacionário, e que o modelo reduzido

$$\frac{d\tilde{\xi}_\tau}{d\tau} = \delta\tilde{E}(\tau, L(\tau, \tilde{\xi}_\tau^\Pi(\tau)), \tilde{\xi}_\tau + \xi_\tau^\Pi(\tau)) \tag{42}$$

do sistema tem um ponto de equilíbrio na origem $\tilde{\xi}_\tau = 0$. Esse equilíbrio foi mostrado na Seção 1.2.4 como exponencialmente estável para $|a|$ pequeno.

Para completar a análise de perturbação singular, também estuda-se o modelo de camada limite (na escala de tempo $t - t_0 = \tau/\omega$):

$$\frac{d\tilde{\xi}_\tau}{d\tau} = \tilde{F}(\tau, x_b + L(\tau, \tilde{\xi} + \xi_\tau^\Pi(\tau)), \tilde{\xi}) \tag{43}$$

$$= f(x_b + l(\theta), \alpha(x_b + l(\theta), \theta)), \tag{44}$$

onde $\theta = \theta^* + \tilde{\theta} + \overline{S}(\tau)$ deve ser visto como um parâmetro independente da variável temporal t. Como $f(l(\theta), \alpha(l(\theta), \theta)) \equiv 0$, então $x_b \equiv 0$ é um ponto de equilíbrio de (44). Pela Hipótese 1.2, esse equilíbrio é localmente exponencialmente estável de forma uniforme em θ (e, portanto, em $l(\theta)$).

Combinando a estabilidade exponencial do modelo reduzido (42) com a estabilidade exponencial do modelo de camada limite (44), usando o teorema de Tikhonov's no Intervalo Infinito (Teorema 9.4 em [21]), concluímos o seguinte:

(a) A solução $\xi(\tau)$ de (36) é $\mathcal{O}(\omega)$-próxima à solução $\xi(\tau)$ de (42), e portanto ela converge exponencialmente para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega)$ da solução periódica $\xi_\tau^\Pi(\tau)$, que é $\mathcal{O}(\delta)$-próxima ao equilíbrio $\xi_\tau^{a,e}$. Isso, por sua vez, implica que a solução $\tilde{\theta}(\tau)$ de (27) converge exponencialmente para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega + \delta)$

$$\sum_{j=1}^{n} [c_{jj}^1 c_{jj}^2 \dots c_{jj}^n]^T a_j^2 + [\mathcal{O}(|a^3|)]_{n\times 1} \tag{45}$$

Segue então que $\theta(\tau) = \theta^* + \tilde{\theta} + \overline{S}(\tau)$ converge exponencialmente para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega + \delta + |a|)$ de θ^*.

(b) A solução $x(\tau)$ de (39) satisfaz

$$x(\tau) - l(\theta^* + \tilde{\theta}_\tau(\tau) + \overline{S}(\tau)) - x_b(t) = \mathcal{O}(\omega), \tag{46}$$

onde $\tilde{\theta}_\tau(\tau)$ é a solução do modelo reduzido (28) e x_b é a solução do modelo de camada limite (44).

A partir de (46), obtém-se:

$$x(\tau) - l(\theta^*) = \mathcal{O}\omega + l(\theta^*)_\tau(\tau) + \overline{S}(t)) - l(\theta^*) + x_b(t). \tag{47}$$

Como $\theta_\tau^*(\tau)$ converge exponencialmente para a solução periódica $\mathcal{O}_\tau^\Pi(\tau)$, que está

$\mathcal{O}(\delta)$-próxima ao equilíbrio médio (45), e como a solução $x_b(t)$ de (44) está em decaimento exponencial, então, de acordo com (47), $x(\tau) - l(\theta^*)$ converge exponencialmente para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega + \delta + |a|)$ de zero. Consequentemente, $y = h(x)$ converge exponencialmente para uma vizinhança $\mathcal{O}(\omega + \delta + |a|)$ de seu valor máximo de equilíbrio $h \circ l(\theta^*)$. Isso completa a prova do Teorema 1.1. Em termos simples, pode-se dizer que o sistema se autoajusta e conserta seus próprios erros.

1.4 Avanços e aplicações do algoritmo de controle extremal em otimização e controle em tempo real

Conforme discutido brevemente até agora, o ESC é um método poderoso para resolver problemas de otimização sem o conhecimento do mapa operacional, usando apenas as medições da saída do mapa. Lidando com problemas semelhantes aos algoritmos evolucionários genéticos, o ESC foi inventado meio século antes dentro da comunidade de controle inicial e é bem adequado para a implementação em tempo real em plantas com dinâmicas significativa. Algoritmos ESC modernos, desenvolvidos desde 2000, são capazes de garantir estabilidade e até mesmo taxas prescritas de convergência, apesar do modelo da planta e da função de índice de desempenho serem desconhecidos.

Alguns resultados fundamentais do ESC, incluindo algoritmos determinísticos para jogos não cooperativos e extensões do ESC de atualizações baseadas em Gradiente para Newton, foram desenvolvidos. Uma prova que expande a validade do ESC da estabilidade local para a semi global foi publicada em [8]. O livro [22] apresenta versões estocásticas dos algoritmos onde as senoides são substituídas por sinais de perturbação de ruído branco filtrados. Diversas aplicações de ESC também surgiram desde 2000, como busca de fonte para veículos autônomos em ambientes sem GPS [23], MPPT para fontes de energia solar e eólica [24], modelo computacional de laser de frequência estabilizada para ajuste de parâmetros do controlador de busca extrema [25].

Pouco mais de um século desde suas primeiras aplicações e mais de duas décadas desde sua prova formal de convergência [11], o algoritmo de busca de extremos foi reconhecido como uma das mais importantes ferramentas de otimização em tempo real sem modelo. No entanto, até recentemente, o ESC era restrito a sistemas dinâmicos, representados por conexões de EDOs e mapas convexos não lineares com pontos extremos desconhecidos.

Neste contexto, o livro [10] apresenta os primeiros resultados sobre a teoria e o design de estratégias do ESC para sistemas governados por PDEs. As principais ideias para o design dos métodos gradiente-Newton e a análise de estabilidade para sistemas de dimensão infinita são discutidas considerando uma ampla classe de PDEs parabólicas e hiperbólicas, equações de atraso, equação de onda em modelos de reação advecção, difusão.

Além disso, aplicações de engenharia são apresentadas, incluindo problemas de jogos não cooperativos, estimulação elétrica neuromuscular, reatores biológicos, sistemas de perfuração de Petróleo e controle de fluxo de tráfego para mobilidade urbana, sempre utilizando o ESC como ferramenta principal reforça que o ESC continua a ser reconhecido como uma das abordagens mais poderosas para otimização sem modelo, com um impacto crescente em diversas áreas tecnológicas .

Portanto, desde sua invenção em 1922, o ESC evoluiu consideravelmente, com importantes desenvolvimentos teóricos, como a prova de estabilidade e extensões de atualização para gradiente e Newton. Suas aplicações práticas, que vão desde veículos independentes e fontes de energia renováveis até sistemas complexos de controle, comprovam sua importância. A recente expansão do ESC para sistemas governados por PDEs ampliou ainda mais seu alcance, permitindo o tratamento de problemas mais complexos, como os citados do livro em [10].

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Aqui, apresenta-se a descrição detalhada do problema, abordando inicialmente o controle extremal em sistemas sem o uso de PDEs. Em seguida, discute-se o ESC com PDEs, focando especificamente em modelos de difusão distribuída. A geração de trajetórias para sinais de perturbação aditiva é abordada como um aspecto crucial para testar a robustez do controle. Além disso, o capítulo explora o erro de estimação, que avalia a precisão do modelo em relação à realidade, e analisa as dinâmicas dos erros, observando como esses erros evoluem e impactam o sistema ao longo do tempo.

2.1 Motivação do problema

Considere uma PDE de difusão dada por

$$\partial_t \alpha(x,t) = \epsilon \partial_{xx} \alpha(x,t), \tag{48}$$

$$\alpha(L,t) = \theta(t), \tag{49}$$

onde $\alpha(x,t)$ é o estado, $\epsilon > 0$ é o coeficiente de difusão, $x \in [0,L]$, sendo L o domínio da PDE. A representação geométrica das equações (48)–(49) é ilustrada na Figura 4.

Neste caso, $\theta(t)$ serve como uma fonte de fluxo de calor/frio, que varia com o tempo. Em particular, o gradiente de temperatura $\alpha(x,t)$ varia também ao longo da distância x. Assim, o fluxo de calor que entra é difundido para a ventilação de retorno $\alpha(0,t)$. Além disso, a temperatura média ao longo do domínio espacial é dada por

$$\Theta(t) = \int_0^L \alpha(y,t)dy. \tag{50}$$

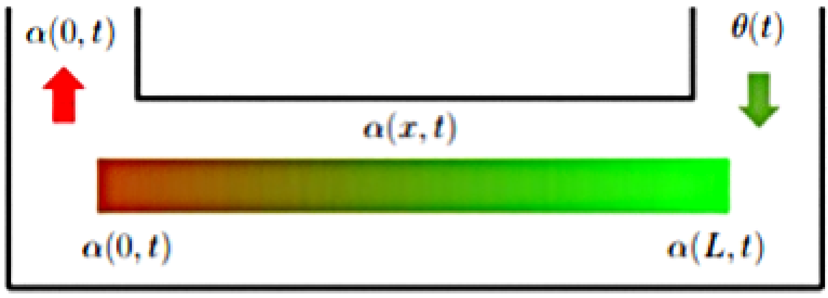


Figura 4: Representação geométrica do perfil de temperatura modelado pela PDE de difusão dada por (48)–(49), onde $\theta(t)$ é a fonte de fluxo de calor/frio.

Assim, especificando-se uma temperatura média desejada Θ^*, o problema de controle a ser tratado diz respeito ao projeto de um compensador tal que $\Theta(t)$ convirja para uma vizinhança de Θ^*. Neste trabalho, este objetivo será alcançado utilizando uma estratégia baseada em ES.

2.2 Controle extremal sem PDEs

O objetivo do ESC é otimizar um mapa estático desconhecido $y = Q(\Theta)$ resolvendo-se uma otimização em tempo real com saída desconhecida ideal y^*, um otimizador Θ^*, saída mensurável $y(t)$ e entrada $\Theta(t)$. O esquema do ESC padrão sem PDE é ilustrado na Figura 5.

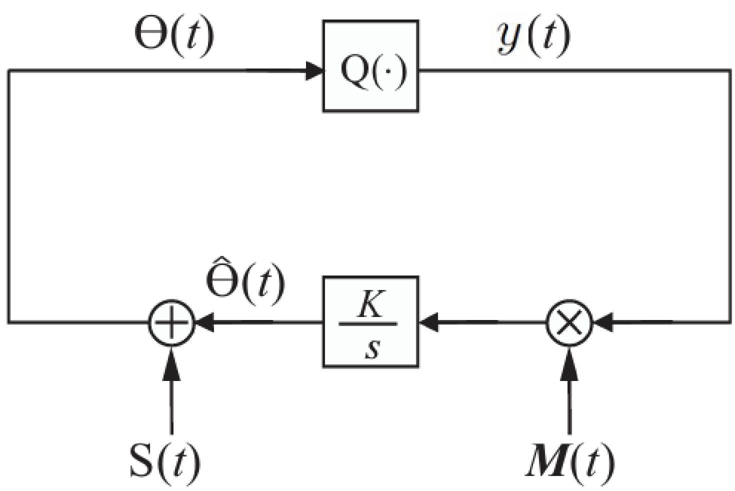


Figura 5: Esquema de ESC padrão sem PDE.

O método do ESC apresentado por [7] utiliza um sinal de perturbação senoidal e um sinal de demodulação dados, respectivamente, por

$$S(t) = a \operatorname{sen}(\omega t) \;\text{ e }\; M(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t), \tag{51}$$

com amplitude $a > 0$ e frequência $\omega > 0$. Ambos os sinais são escolhidos de modo a obter estimativas do gradiente desconhecido $\partial Q(\Theta)/\partial\Theta$ e da Hessiana negativa $H := \partial^2 Q(\Theta)/\partial\Theta^2 < 0$ do mapa não linear $Q(\Theta)$ a ser maximizado. A entrada real $\Theta(t) := \hat{\Theta}(t) + S(t)$ é derivada da estimativa em tempo real $\hat{\Theta}(t)$ de Θ^*, mas é perturbada por $S(t)$. A estimativa $\hat{\Theta}(t)$ é gerada com o integrador $\dot{\hat{\Theta}}(t) = KM(t)y(t)$ que aproxima localmente a lei de atualização de gradiente, ajustando $\hat{\Theta}(t)$ para Θ^*. Portanto, ao definir o erro de estimativa $\vartheta(t) = \hat{\Theta}(t) - \Theta^*$, a dinâmica média do erro torna-se $\dot{\vartheta}_{av} = kH\vartheta_{av}$, sendo exponencialmente estável, onde $k > 0$ é um ganho de adaptação. Isso significa que $\dot{\vartheta}_{av}$ diminui exponencialmente com o tempo.

Este sistema é estático, sem as complexidades adicionais que as PDEs trazem (como a dependência de variáveis espaciais e temporais), entretanto, falar de ESC sem PDEs é importante para demonstrar a aplicabilidade da técnica em contextos onde a complexidade matemática é menor, mas o desafio de otimizar em tempo real ainda está presente, principalmente quando a relação exata entre a entrada e a saída não é conhecida.

2.3 Controle extremal com PDE de difusão distribuída

Aborda-se agora o problema de controle extremal com PDE de difusão distribuída. Neste caso, a dinâmica de atuação é descrita por uma equação de difusão distribuída com coeficiente de amortecimento $\epsilon = 1$ (sem perda de generalidade). Aqui será abordado o caso escalar, em que $\theta(t) \in \mathbb{R}$ e $\Theta \in \mathbb{R}$, tal que

$$\Theta(t) = \int_0^L \alpha(y,t)dy \tag{52}$$

$$\partial_t \alpha(x,t) = \partial_{xx}\alpha(x,t), \tag{53}$$

$$\partial_x \alpha(0,t) = 0, \tag{54}$$

$$\alpha(L,t) = \theta(t), \tag{55}$$

onde $\alpha : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $L > 0$ é uma constante conhecida. O sinal de saída medido com o sensor é representado pelo mapa estático desconhecido

$$y(t) = Q(\Theta(t)), \tag{56}$$

onde $\Theta(t)$ dado em (52) é a entrada do mapa.

Considere o mapa não linear desconhecido localmente quadrático, dado por

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \tag{57}$$

onde Θ^*, $y^* \in \mathbb{R}$ e $H < 0$ é a Hessiana do mapa. Assim, segue de (56) e (57) que a saída do mapa é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \tag{58}$$

A partir do esquema proposto em [16] e da combinação de (52)–(55) com o esquema de controle extremal discutido na Seção 2.2, o sistema do ESC em malha fechada com a dinâmica de atuação governada pela PDE de difusão distribuída é ilustrado na Figura 6.

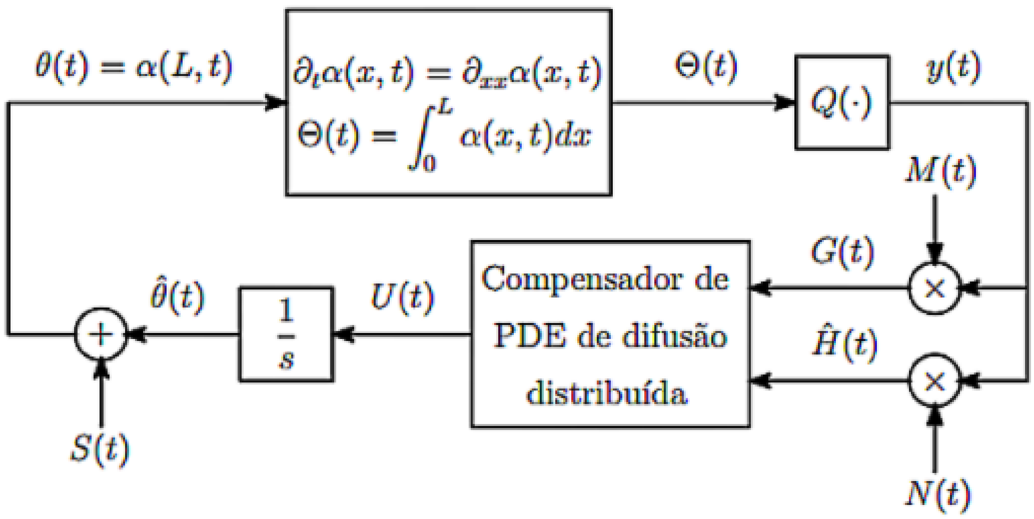


Figura 6: Esquema de ESC com PDE de difusão distribuída.

2.4 Geração de trajetória para o sinal de perturbação aditiva

Para especificar a perturbação aditiva $S(t)$ no Controle Extremal para PDE de Difusão Distribuída, deve-se resolver o chamado problema de geração de trajetória, conforme descrito em [20]. Primeiro, considera-se a equação de difusão

$$u_t = u_{xx} \tag{59}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{60}$$

com o seguinte sinal de referência

$$u^r(0,t) = Ae^{\alpha t + j\phi}, \tag{61}$$

onde A e ϕ são constantes a serem projetadas.

O objetivo é determinar a entrada de referência $u^r(L,t)$. Para isso, considera-se que a resposta completa da trajetória pode ser escrita como

$$u^r(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \frac{x^k}{k!} \tag{62}$$

De (61) e (60), segue que

$$a_0(t) = u^r(0,t) = Ae^{\alpha t + j\phi}, \quad a_1(t) = u_x^r(0,t) = 0. \tag{63}$$

Em seguida, substitui-se (62) em (59), tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{a}_k(t) \frac{x^k}{k!} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \frac{x^k}{k!}, \tag{64}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t) \frac{k(k-1)x^{k-2}}{k!}, \tag{65}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k(t) \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}, \tag{66}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(t) \frac{x^k}{k!}. \tag{67}$$

Com isso, obtém-se a seguinte relação recursiva

$$a_{k+2}(t) = \dot{a}_k(t). \tag{68}$$

Essas condições resultam então em

$$a_2(t) = \dot{a}_0(t) = A\alpha e^{\alpha t + j\phi} \tag{69}$$

$$a_3(t) = \dot{a}_1(t) = 0 \tag{70}$$

$$a_4(t) = \dot{a}_2(t) = A\alpha^2 e^{\alpha t + j\phi} \tag{71}$$

$$a_5(t) = \dot{a}_3(t) = 0 \tag{72}$$

$$a_6(t) = \dot{a}_4(t) = A\alpha^3 e^{\alpha t + j\phi} \tag{73}$$

$$\vdots \tag{74}$$

ou seja,

$$a_{2k+1}(t) = 0 \tag{75}$$

$$a_{2k}(t) = A\alpha^k e^{\alpha t + j\phi} \tag{76}$$

para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, tal que a trajetória do estado é

$$u^r(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(t)\frac{x^k}{k!}, \tag{77}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{78}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A\alpha^k e^{\alpha t + j\phi}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{79}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A e^{\alpha t + j\phi}\frac{(\sqrt{\alpha}x)^{2k}}{(2k)!}, \tag{80}$$

$$= A e^{\alpha t + j\phi}\cosh(\sqrt{\alpha}x). \tag{81}$$

Para o caso em que

$$u^r(0,t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi), \tag{82}$$

tem-se que

$$A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi) = \mathrm{Im}\{A e^{j(\omega t + \phi)}\}. \tag{83}$$

Assim, fazendo $\alpha = j\omega$ em (81), a trajetória pode ser obtida diretamente de (81) fazendo o seguinte

$$u^r(x,t) = \mathrm{Im}\left\{Ae^{j\omega t + j\phi}\cosh\left(\sqrt{j\omega}x\right)\right\}. \tag{84}$$

Note que

$$\sqrt{j} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = e^{j\pi/4} = \cos\pi/4 + j\,\mathrm{sen}\,\pi/4 = \frac{1+j}{\sqrt{2}}. \tag{85}$$

Fazendo essa substituição, resulta em

$$u^r(x,t) = \mathrm{Im}\left\{Ae^{j(\omega t+\phi)}\cosh\left((1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\right\}, \tag{86}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{Ae^{j(\omega t+\phi)}\left(\frac{e^{(1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} + e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}}{2}\right)\right\}, \tag{87}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{Ae^{j(\omega t+\phi)}\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x+j\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x-j\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}}{2}\right)\right\}, \tag{88}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{A}{2}\left(e^{j(\omega t+\phi)}e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x+j\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} + e^{j(\omega t+\phi)}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x-j\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\right)\right\}, \tag{89}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{A}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x+j\left(\omega t+\phi+\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)} + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x+j\left(\omega t+\phi-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)}\right)\right\}, \tag{90}$$

$$= \frac{A}{2}e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\phi+\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right) + \frac{A}{2}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\phi-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right). \tag{91}$$

Calculando-se a integral de $u^r(x,t)$ em relação a x (termo distribuído), tem-se que

$$I = \int_0^L u^r(x,t)dx \tag{92}$$

$$I = \int_0^L \left[\frac{A}{2}e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\phi+\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right) + \frac{A}{2}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\phi-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\right]dx \tag{93}$$

$$I = \int_0^L \left[\frac{A}{2}e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\phi+\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\right]dx + \int_0^L \left[\frac{A}{2}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\phi-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\right]dx \tag{94}$$

$$I = I_1 + I_2, \tag{95}$$

onde

$$I_1 = \int_0^L \left[\frac{A}{2} e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + \sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\right] dx. \tag{96}$$

$$I_2 = \int_0^L \left[\frac{A}{2} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x} \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi - \sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right)\right] dx. \tag{97}$$

Resolvendo as integrais I_1 e I_2, tem-se que

$$\begin{aligned} I_1 = {} & \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \cos\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right] \\ & - \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right) - \cos\left(\omega t + \phi\right)\right]. \end{aligned} \tag{98}$$

e

$$\begin{aligned} I_2 = {} & \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\cos\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right] \\ & + \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right) - \cos\left(\omega t + \phi\right)\right]. \end{aligned} \tag{99}$$

Daí, tem-se que a integral $I = I_1 + I_2$ é dada por

$$\begin{aligned} I = {} & \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \cos\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right] \\ & - \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right) - \cos\left(\omega t + \phi\right)\right] \\ & + \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\cos\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right] \\ & + \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi\right) - \cos\left(\omega t + \phi\right)\right], \end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} I = {} & \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\operatorname{sen}\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \cos\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right] \\ & + \frac{A}{2\sqrt{2\omega}}\left[e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\cos\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \operatorname{sen}\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{101}$$

Como

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{102}$$

então

$$I = \frac{A}{2\sqrt{\omega}}\left[e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\text{sen}\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right]$$
$$- \frac{A}{2\sqrt{\omega}}\left[e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\left(\text{sen}\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)\right)\right]. \tag{103}$$

Como

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,(a)\cos(b) - \text{sen}\,(b)\cos(a). \tag{104}$$

segue que

$$I = \frac{A}{2\sqrt{\omega}}\left[e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{A}{2\sqrt{\omega}}\left[e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{105}$$

$$I = \frac{A}{2\sqrt{\omega}}\left[e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi + L\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\,\text{sen}\left(\omega t + \phi - L\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{106}$$

Sejam

$$A_1 = e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}, \quad A_2 = -e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}}, \tag{107}$$

$$\phi_1 = L\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = -L\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{\pi}{4}. \tag{108}$$

Pode-se reescrever I como

$$I = \frac{A}{2\sqrt{\omega}}\left[A_1\,\text{sen}\,(\omega t + \phi + \phi_1) + A_2\,\text{sen}\,(\omega t + \phi + \phi_2)\right]. \tag{109}$$

Realizando a soma fasorial, tem-se que :

$$I = \frac{A}{2\sqrt{\omega}} B sen(\omega t + \phi + \psi). \tag{110}$$

A partir disso, o sinal de perturbação $S(t)$ é adaptado do esquema de controle extremal básico descrito na Seção 2.2. O problema de geração de trajetória a ser resolvido é definido a seguir:

$$S(t) = \beta(L,t), \tag{111}$$

$$\partial_t \beta(x,t) = \partial_{xx}\beta(x,t), \tag{112}$$

$$\partial_x \beta(0,t) = 0, \tag{113}$$

$$\int_0^L \beta(y,t)dy = asen(\omega t), \tag{114}$$

onde $\beta : [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. A solução explícita de (111) é obtida da trajetória de referência

$$\begin{aligned} \beta^r(0,t) &= Asen(\omega t + \phi), \\ \beta(L,t) &:= \beta^r(L,t) = S(t), \\ \int_0^L \beta(y,t)dy &:= \int_0^L \beta^r(y,t)dy = asen(\omega t). \end{aligned} \tag{115}$$

Logo, o problema de geração de trajetória consiste em determinar $\beta(L,t)$ tal que as equações (112)–(114) sejam satisfeitas. A solução para esse problema é:

$$S(t) = \frac{A}{2}e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}L}}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \phi + \sqrt{\frac{\omega}{2}L}\right) + \frac{A}{2}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}L}}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \phi - \sqrt{\frac{\omega}{2}L}\right). \tag{116}$$

desde que a amplitude A e o ângulo de fase ϕ sejam escolhidos da seguinte maneira:

$$A = 2a\sqrt{\omega}/B \quad \text{e} \quad \phi = -\psi, \tag{117}$$

onde

$$B = \left[e^{L\sqrt{2\omega}} + e^{-L\sqrt{2\omega}} - 2\cos\left(L\sqrt{2\omega}\right)\right]^{1/2}, \tag{118}$$

$$\psi = \begin{cases} \mathrm{sign}(\psi_1)\frac{\pi}{2}, & \text{se } \psi_2 = 0, \\ \arctan\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right), & \text{se } \psi_2 > 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right), & \text{se } \psi_2 < 0, \end{cases} \tag{119}$$

sendo

$$\psi_1 = e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \operatorname{sen}\left(L\sqrt{\tfrac{\omega}{2}} - \tfrac{\pi}{4}\right) - e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \operatorname{sen}\left(-L\sqrt{\tfrac{\omega}{2}} - \tfrac{\pi}{4}\right), \tag{120}$$

$$\psi_2 = e^{L\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \cos\left(L\sqrt{\tfrac{\omega}{2}} - \tfrac{\pi}{4}\right) - e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \cos\left(-L\sqrt{\tfrac{\omega}{2}} - \tfrac{\pi}{4}\right). \tag{121}$$

Por outro lado, os sinais de demodulação $M(t)$ e $N(t)$ utilizados, respectivamente, para estimar o gradiente e a Hessiana do mapa estático multiplicando-os pela saída $y(t)$, são definidos da seguinte forma [14]:

$$G(t) = M(t)y(t) \text{ com } M(t) = \frac{2}{a} sen(\omega t). \tag{122}$$

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \text{ com } N(t) = -\frac{8}{a^2}\cos(2\omega t). \tag{123}$$

2.5 Erros de estimação e dinâmicas dos erros

Como o objetivo é determinar Θ^*, que corresponde ao sinal de atuação desconhecido ótimo $\theta(t)$, consideram-se as seguintes variáveis de estimativa e erros de estimação:

$$\hat{\theta}(t) = \theta(t) - S(t), \quad \hat{\Theta}(t) = \Theta(t) - a\operatorname{sen}(\omega t), \tag{124}$$

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \Theta^*, \quad \vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*. \tag{125}$$

Seja $\bar{\alpha} : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida como $\bar{\alpha}(x,t) = \alpha(x,t) - \beta(x,t) - \Theta^*$. A partir de (52)–(55) e (111)–(114), juntamente com (124)–(125), resulta em:

$$\vartheta(t) = \int_0^L \bar{\alpha}(y,t)dy + (L-1)\Theta^*. \tag{126}$$

$$\partial_t \bar{\alpha}(x,t) = \partial_{xx}\bar{\alpha}(x,t), \tag{127}$$

$$\partial_x \bar{\alpha}(0,t) = 0, \tag{128}$$

$$\bar{\alpha}(L,t) = \tilde{\theta}(t). \tag{129}$$

Finalmente, a dinâmica do erro é obtida tomando-se a derivada temporal de (126)–(129) e utilizando $\dot{\hat{\theta}} = \dot{\tilde{\theta}}(t) = U(t)$ e $u(x,t) = \bar{\alpha}_t(x,t)$, tal que:

$$\dot{\vartheta}(t) = \int_0^L u(y,t)dy, \tag{130}$$

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), \tag{131}$$

$$\partial_x u(0,t) = 0, \tag{132}$$

$$u(L,t) = U(t). \tag{133}$$

Note que a expressão em (130) é obtida da aplicação da regra de Leibniz para derivadas integrais. Note que o erro de estimação propagado $\vartheta(t)$, a entrada $\Theta(t)$, e o otimizador do mapa estático Θ^* relacionam-se da seguinte forma:

$$\vartheta(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*. \tag{134}$$

Isso mostra como o erro de estimação varia ao longo do tempo em relação a uma função senoidal e ao valor ótimo.

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

O presente capítulo apresenta o projeto do compensador para sistemas com PDEs de distribuição distribuídas. O projeto do compensador visa otimizar a resposta do sistema, levando em consideração a dinâmica espacial e temporal da difusão. Em seguida, ele trata do desenvolvimento do compensador para o sistema médio, buscando simplificar a modelagem e o controle sem perder a precisão nos resultados. Por fim, a estabilidade do sistema original é comprovada, verificando-se as condições para garantir que a implementação do compensador mantenha o sistema estável e funcional ao longo do tempo.

3.1 Projeto do compensador de PDE de difusão distribuída

Considere a dinâmica do erro dado por (130)–(133). O teorema a seguir assegura a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada com o compensador proposto.

Teorema 3.1. Considere o sistema em malha fechada dado pela interconexão da planta (130)–(133) com o controlador

$$U(t) = \bar{K}Z(t), \tag{135}$$

onde

$$Z(t) = \vartheta(t) + \int_0^L g(y)u(y,t)\,dy, \tag{136}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(L^2 - x^2). \tag{137}$$

Se $\bar{K}$ for escolhido tal que

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} = \bar{K}L < 0,$$

$$\mathbf{A}_{\text{cl}} \neq -(2\kappa+1)^2\frac{\pi^2}{4L^2}, \quad \kappa \in \mathbb{N},$$

então, para qualquer condição inicial $u(\cdot,0) \in L^2(0,L)$, o sistema em malha fechada possui solução única dada por $(\vartheta(t), u(\cdot,t)) \in C([0,\infty], \mathbb{R}^n \times L^2(0,L))$, que é exponencialmente estável. Logo, existem constantes positivas η e ν tais que

$$\Omega(t) \leq \eta\Omega(0)e^{-\nu t} \tag{138}$$

$$\Omega(t) = |\vartheta(t)|^2 + \int_0^L u(x,t)^2\,dx. \tag{139}$$

Demonstração. Considere a transformação do estado de dimensão finita $\vartheta(t)$, $Z(t)$ dada em (136) e a transformação de dimensão infinita do estado do atuador $u(x,t)$ dada por [26] :

$$w(x,t) = u(x,t) - \gamma(x)\left(\vartheta(t) + \int_0^L g(y)u(y,t)dy\right) = u(x,t) - \gamma(x)Z(t), \tag{140}$$

onde a função de kernel $\gamma(\cdot)$ será especificada posteriormente.

Usando (136) e (140), mapeia-se a planta (130)–(133) para o "sistema alvo":

$$\dot{Z}(t) = A_{\mathrm{cl}}Z(t) \tag{141}$$

$$\partial_t w(x,t) = \partial_{xx} w(x,t) \tag{142}$$

$$\partial_x w(0,t) = 0 \tag{143}$$

$$w(L,t) = 0. \tag{144}$$

Para ver isso, primeiro diferenciamos $Z(t)$ em (136). Usando a relação (140), integração por partes e as relações em (141), (142) e (136), resulta em

$$\dot{Z}(t) = \int_0^L \left(1 + g''(y)\right) u(y,t)dy + g(L)\partial_y u(L,t) + g'(0)u(0,t) - g'(L)U(t). \tag{145}$$

Como $g(\cdot)$ em (137) é a solução do seguinte problema de valor limite:

$$g''(r) = -1,$$
$$g(L) = 0,$$
$$g'(0) = 0,$$

a relação (145) se torna $\dot{Z}(t) = LU(t)$. Portanto, com o controlador (135), chega-se a (141).

Para demonstrar (142)–(144), diferencia-se (140) em relação ao tempo e aplica-se integração por partes juntamente com as relações em (130)–(133) e o fato de que

$$\partial_t \left(\vartheta(t) + \int_0^L g(y)u(y,t)dy\right) = \dot{Z}(t) = A_{\mathrm{cl}}Z(t).$$

Isso resulta em:

$$\partial_t w(x,t) = \partial_{xx} u(x,t) - \gamma(x) A_{\text{cl}} \times \left(\vartheta(t) + \int_0^L g(y) u(y,t) dy \right). \tag{146}$$

Tomando as derivadas espaciais de (140) e se o kernel $\gamma(\cdot)$ satisfaz a

$$\gamma''(r) = \gamma(r) A_{\text{cl}}, \tag{147}$$

$$\gamma(L) = \bar{K}, \tag{148}$$

$$\gamma'(0) = 0, \tag{149}$$

ou seja,

$$\gamma(x) = \bar{K} \Lambda^{-1} \left(e^{\sqrt{A_{\text{cl}}} x} + e^{-\sqrt{A_{\text{cl}}} x} \right), \tag{150}$$

onde

$$\Lambda = e^{\sqrt{A_{\text{cl}}} L} + e^{-\sqrt{A_{\text{cl}}} L}, \tag{151}$$

então, combinando-se (146) com as derivadas espaciais de (140) e (147), obtém-se (142). Além disso, tomando $x = 0$ em (140) e na sua primeira derivada espacial, e ainda considerando as relações em (132) e 149), chega-se a (144). Fazendo $x = L$ em (140) e utilizando as relações em (135) e (148), chega-se a (144). Para mostrar que $\Lambda \neq 0$, considere que $\overline{K} < 0$ tal que $A_{\text{cl}} = \overline{K} L$ seja negativo. Assim, pode-se definir um $\lambda > 0$ tal que

$$A_{\text{cl}} = -\lambda. \tag{152}$$

Logo, segue de (151) que

$$e^{i\sqrt{\lambda} L} + e^{-i\sqrt{\lambda} L} = e^{i2\sqrt{\lambda} L} + 1,$$

que é diferente de zero sempre que $\cos(2\sqrt{\lambda} L) \neq -1$ e $sen(2\sqrt{\lambda} L) \neq 0$, ou seja,

$$\sqrt{\lambda} L \neq \frac{(2\kappa + 1)\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{N}.$$

Assim, tem-se que $\lambda \neq \frac{(2\kappa+1)^2 \pi^2}{4L^2}$, para $\kappa \in \mathbb{N}$, ou ainda $A_{\text{cl}} \neq \frac{-(2\kappa+1)^2 \pi^2}{4L^2}$, para $\kappa \in \mathbb{N}$. Com isso, as condições de estabilidade de A_{cl} e invertibilidade de Λ são satisfeitas tomando $\overline{K} < 0$ tal que $A_{\text{cl}} < 0$ e A_{cl} seja diferente de $\frac{-(2\kappa+1)^2 \pi^2}{4L^2}$.

De maneira semelhante, as transformações inversas de (143)–(144) são dadas por

$$u(x,t) = w(x,t) + \gamma(x)Z(t), \tag{153}$$

onde $\gamma(\cdot)$ deve satisfazer as condições de contorno em (147)–(149). Finalmente, a transformação inversa de (136) é dada por:

$$\vartheta(t) = \left(1 - \int_0^L g(y)\gamma(y)\,dy\right) Z(t) - \int_0^L g(y)w(y,t)\,dy. \tag{154}$$

Considere a função de Lyapunov candidata

$$V(t) = \frac{1}{2}Z^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^L w(x,t)^2\,dx. \tag{155}$$

A partir de (142)-(152) e utilizando integração por partes, resulta em

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda Z^2(t) + w(x,t)\partial_x w(x,t)\big|_{x=L}^{x=0} - \int_0^L \partial_x w(x,t)^2\,dx. \tag{156}$$

Usando as condições de contorno (143)-(144) e a desigualdade de Poincaré, tem-se que

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda Z^2(t) - \frac{1}{4L^2}\int_0^L w(x,t)^2\,dx. \tag{157}$$

Portanto, tomando-se $\rho = \min\left\{-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2L^2}\right\}$ obtém-se que $\dot{V}(t) \leq -\rho V(t)$. Pelo lema da comparação, é possível mostrar que $V(t) \leq V(0)e^{-\rho t}$.

Para demonstrar a estabilidade nas variáveis originais $\vartheta(t)$ e $u(x,t)$, é suficiente mostrar que

$$\underline{\mathrm{M}}\Omega(t) \leq V(t) \leq \overline{M}\Omega(t) \tag{158}$$

para escalares positivos $\overline{M}$ e $\underline{\mathrm{M}}$ e o Teorema 3.1 é demonstrado com $\eta = \frac{\overline{M}}{\underline{\mathrm{M}}}$.

Para estabelecer os limitantes em (157), utilizam-se as expressões em (136)-(140)-(153) e (154), e aplica-se as desigualdades de Young e Cauchy-Schwartz. Com isso, os limitantes em (157) são dados por

$$\overline{M} = \left(3\omega + 9L \sup_{y\in[0,L]} \gamma(y)^2\omega\right) r. \tag{159}$$

onde $r = \frac{1}{2}$, $\omega = 1 + L\sup_{y\in[0,L]} g(y)^2$, $\underline{\mathrm{M}} = \frac{1}{2M}$, sendo:

$M = 9\left[1 + L\sup_{y\in[0,L]} g(y)^2\gamma(y)^2\right] + 6\sup_{y\in[0,L]} g_i(y)^2 + 3 + 9\sup_{y\in[0,L]}\gamma(y)^2$.

Além disso, conclui-se de (141) que $Z(t)$ é limitado e converge exponencialmente para zero. De (140), conclui-se que $w(\cdot,0) \in L^2(0,L)$, logo, segue de (143)–(144) que $w(\cdot,t) \in C(L^2(0,L))$. Utilizando a transformação inversa (153), pode-se concluir que $u(\cdot,t) \in C(L^2(0,L))$.

A unicidade da solução fraca é demonstrada utilizando a unicidade da solução fraca dos problemas de borda (142)–(144) (veja [26]; [2]). Isto conclui a demonstração.

3.2 Projeto do compensador para o sistema médio

Apesar do compensador em (135) ter sido efetivamente projetado na Seção 3.1, este compensador não pode ser diretamente implementado, pois ϑ não está disponível para medição. Para tratar este problema, nesta seção, propõe-se uma extensão do resultado de [14] para o caso de PDE de difusão distribuída, de modo que seja possível obter uma versão implementável de (135).

Considere a substituição da relação (134) em (58):

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t))^2. \tag{160}$$

Substituindo (160) em (122), tem-se:

$$G(t) = \frac{2}{a}\mathrm{sen}(\omega t)\left[y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t))^2\right] \tag{161}$$

$$= \frac{2}{a}y^*\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{H}{a}\vartheta^2(t)\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{H}{a}(2a\vartheta(t)\,\mathrm{sen}(\omega t) + a^2\,\mathrm{sen}^3(\omega t). \tag{162}$$

Além disso, substituindo-se (160) em (123), tem-se:

$$\hat{H}(t) = -\frac{8}{a}\cos(2\omega t)\left[y^* + \frac{H}{2}(\vartheta(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t))^2\right] \tag{163}$$

$$= -\frac{8}{a^2}y^*\cos(2\omega t) - \frac{4H}{a^2}\left[\vartheta(t)\cos(2\omega t) - 2a\vartheta(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(2\omega t) + a^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t)\cos(2\omega t)\right]. \tag{164}$$

Assim, calculando-se as médias de $G(t)$ e $\hat{H}(t)$, ou seja,

$$G_{\mathrm{av}}(t) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} G(t)$$

e

$$\hat{H}_{\mathrm{av}}(t) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \hat{H}(t)$$

obtém-se que as versões médias do gradiente e da estimativa da Hessiana são dadas, respectivamente, por

$$G_{\mathrm{av}}(t) = H\vartheta_{\mathrm{av}}(t), \quad \text{e} \quad \hat{H}_{\mathrm{av}}(t) = H, \tag{165}$$

para ω suficientemente grande tal que é possível assumir que $\vartheta(t)$ é aproximadamente constante.

Com isso, tomando-se $\overline{K} = KH$ em (135), para $K > 0$ (lembrando que $H < 0$), a versão média de (135) torna-se

$$U_{\mathrm{av}}(t) = KH\vartheta_{\mathrm{av}}(t) + KH \int_0^L g(y) u_{\mathrm{av}}(y,t)\, dy. \tag{166}$$

Daí, substituindo-se as relações (165) em (166), tem-se

$$U_{\mathrm{av}}(t) = KG_{\mathrm{av}}(t) + K\hat{H}_{\mathrm{av}}(t) \int_0^L g(y) u_{\mathrm{av}}(y,t)\, dy. \tag{167}$$

Além disso, o sistema médio de (130)–(133) é dado por

$$\dot{\vartheta}_{\mathrm{av}}(t) = \int_0^L u_{\mathrm{av}}(y,t)\, dy \tag{168}$$

$$\partial_t u_{\mathrm{av}}(x,t) = \partial_{xx} u_{\mathrm{av}}(x,t) \tag{169}$$

$$\partial_x u_{\mathrm{av}}(0,t) = 0 \tag{170}$$

$$u_{\mathrm{av}}(L,t) = U_{\mathrm{av}}(t) \tag{171}$$

onde $\vartheta_{\mathrm{av}}(t) \in \mathbb{R}$, $U_{\mathrm{av}}(t) \in \mathbb{R}$, e $x \in [0, L]$. Seguindo os mesmos passos do Teorema 3.1, pode-se concluir que o sistema médio será exponencialmente estável com o controlador (166) ou equivalentemente (167).

3.3 Estabilidade do sistema original

A seguir apresenta-se o teorema principal obtido quando a lei de controle $U(t)$ dada por

$$U(t) = KG(t) + K\hat{H}(t)\int_0^L g(y)u(y,t)\,dy, \quad K > 0, \tag{172}$$

inspirada por sua versão média dada em (167) e (136), é aplicada no sistema em malha fechada (130)–(133).

Teorema 3.2. Considere o sistema de controle na Figura 3, com a lei de controle $U(t)$ dada em (172). Existe $\omega^* > 0$ tal que, $\forall \omega \geq \omega^*$ suficientemente grande, o sistema em malha fechada (130)–(133) tem uma solução periódica localmente exponencialmente estável única em t com período $\Pi := \frac{2\pi}{\omega}$, denotada por $\vartheta^{\Pi}(t), u^{\Pi}(x,t)$. Esta solução satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\left(|\vartheta^{\Pi}(t)|^2 + \|u^{\Pi}(t)\|^2\right)^{1/2} \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \forall t \geq 0. \tag{173}$$

Além disso,

$$\limsup_{t\to\infty} |\theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}\left(A + \frac{1}{\omega}\right), \tag{174}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \tag{175}$$

$$\limsup_{t\to\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right). \tag{176}$$

Demonstração. A partir da estabilidade exponencial provada no Teorema 1 e da invertibilidade da transformação (136) dada em (154), segue que

$$\left(|\vartheta_{\text{av}}(t)|^2 + \|u_{\text{av}}(t)\|^2\right) \leq \overline{M}e^{-t/\bar{M}}\left(|\vartheta_{\text{av}}(0)|^2 + \|u_{\text{av}}(0)\|^2\right), \quad \bar{M} > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{177}$$

A partir de (177), a origem do sistema em malha fechada médio, representado na variável de estado original da PDE $u_{\text{av}}(x,t)$, é também exponencialmente estável. Em seguida, de acordo com a teoria da média em dimensões infinitas [27] (Veja Apêndice A), para ω suficientemente grande, o sistema em malha fechada (130)–(133), com $U(t)$ em (172), possui uma solução periódica exponencialmente estável única em torno de seu equilíbrio (origem), satisfazendo (173).

Por outro lado, a convergência assintótica para uma vizinhança do ponto extremo é provada ao tomar o valor absoluto da segunda expressão em (124) após substituir $\hat{\Theta}(t) = \vartheta(t) + \Theta^*$ de (125), resultando em:

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t)|. \tag{178}$$

Considerando (178) e escrevendo-a ao adicionar e subtrair a solução periódica $\vartheta^{\Pi}(t)$, segue

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = \left|\vartheta(t) - \vartheta^{\Pi}(t) + \vartheta^{\Pi}(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t)\right|. \tag{179}$$

Aplicando o teorema da média [27], pode-se concluir que $\vartheta(t) - \vartheta^{\Pi}(t) \to 0$, exponencialmente. Consequentemente,

$$\limsup_{t\to\infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \limsup_{t\to\infty} \left|\vartheta^{\Pi}(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t)\right|. \tag{180}$$

Finalmente, utilizando a relação (173), chega-se ao resultado apresentado em (175). Visto que $\theta(t) - \Theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)$ de (124) e (125), e relembrando que $S(t)$ é de ordem $\mathcal{O}(A)$, como mostrado em (174), finalmente obtêm-se, com

$$\limsup_{t\to\infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

o limite final dado em (174).

Para mostrar a convergência da saída $y(t)$, pode-se seguir os mesmos passos usados para $\Theta(t)$ ao inserir (175) em (58), de modo que

$$\limsup_{t\to\infty} |y(t) - y^*| = \limsup_{t\to\infty} \left|H\vartheta^2(t) + Ha^2\,\mathrm{sen}(\omega t)^2\right|. \tag{181}$$

Portanto, ao reescrever (181) em termos de $\vartheta^{\Pi}(t)$ e novamente com a ajuda de (173), finalmente obtêm-se (176).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esse capítulo aborda a estabilidade e a convergência para a vizinhança de valores ótimos (Θ^*, y^*) a partir das simulações do problema de PDE de difusão distribuídas como provado no capítulo anterior considerando o mapa estático (57). Assim, busca-se validar a metodologia empregada utilizando-se destas simulações com diferentes parâmetros.

4.1 Estudo de caso 1

Nesta seção, analisa-se um cenário inicial projetado na Tabela 1 que serve de referência para os demais estudo de casos subsequentes. O foco está em validar a capacidade do método proposto em garantir que o sistema convirja para o ponto ótimo.

Tabela 1: Parâmetros da simulação 1

Símbolo	**Descrição**	**Valor**
K	ganho do compensador	0.2
a	amplitude da perturbação	0.2
ω	frequência de perturbação	10
c	frequência do controlador	10
L	domínio espacial [m]	1
Θ^*	otimizador do mapa estático	2
y^*	valor ótimo do mapa estático	5
H	Hessiana do mapa estático	-2

A saída do mapa estático (57) do sistema em malha fechada é mostrada na Figura 7. Então, analisando esse gráfico que representa a resposta do sistema em função da variável de entrada é possível observar a convergência para o valor ótimo escolhido $y^* = 5$. Cabe lembra, que o mapa estático relaciona diretamente a entrada do sistema com a saída sem levar em conta as dinâmicas temporais.

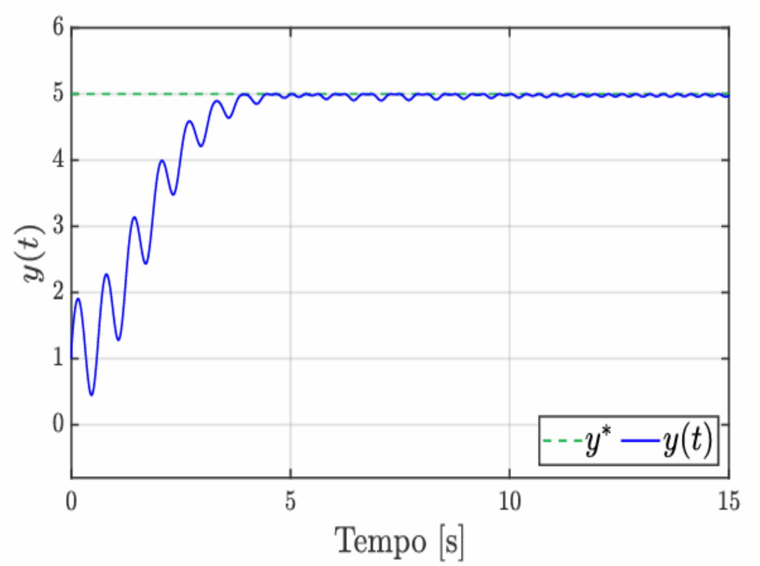


Figura 7: Saída do mapa estático $y(t)$.

Os sinais dos parâmetros $\theta(t)$ e $\Theta(t)$ estão apresentados na Figura 8, eles evoluem ao longo do tempo, permitindo a análise do comportamento dinâmico e da interação desses parâmetros. É possível notar que a convergência para a vizinhança do valor ótimo $\Theta^* = 2$ foi alcançada em um tempo relativamente curto de aproximadamente 5 segundos.

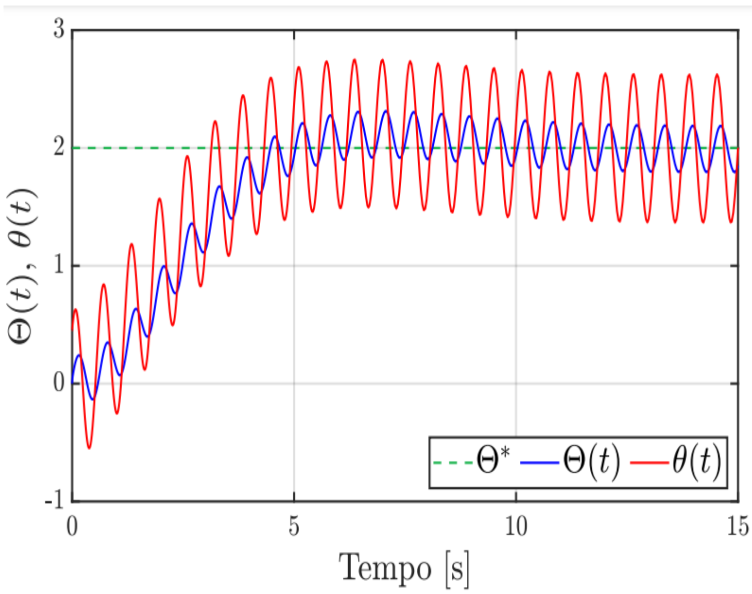


Figura 8: Sinais dos parâmetros $\theta(t)$ e $\Theta(t)$.

Finalmente, o sinal de compensação $U(t)$ do compensador de PDE de difusão distribuída implementado (172) é apresentado na Figura 9.

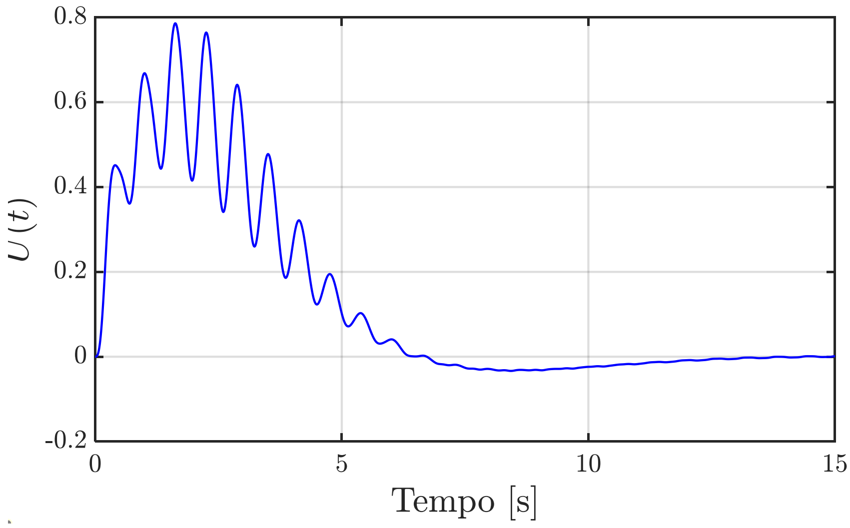


Figura 9: Saída do compensador de PDE de difusão distribuída $U(t)$.

Esse gráfico mostra como o compensador age para estabilizar o sistema ao longo do tempo, ajustando a entrada de controle U(t) de acordo com as variações dinâmicas do processo. Alguns pontos importantes a serem analisados:

- **Oscilações iniciais:** O sistema apresenta uma resposta oscilatória significativa no início, indicando um comportamento subamortecido.
- **Decaimento exponencial:** Após cerca de 5 segundos, as oscilações diminuem em amplitude, indicando que o sistema está se estabilizando.
- **Estabilização:** Por volta de $t = 10\,\mathrm{s}$, $U(t)$ aproxima-se de zero, sugerindo que o sistema atingiu o estado estacionário.

Pode-se dizer que a variação de U(t) ao longo do tempo reflete a adaptação contínua do compensador às condições do sistema compensando as perturbações e/ou incertezas que possam ocorrer.

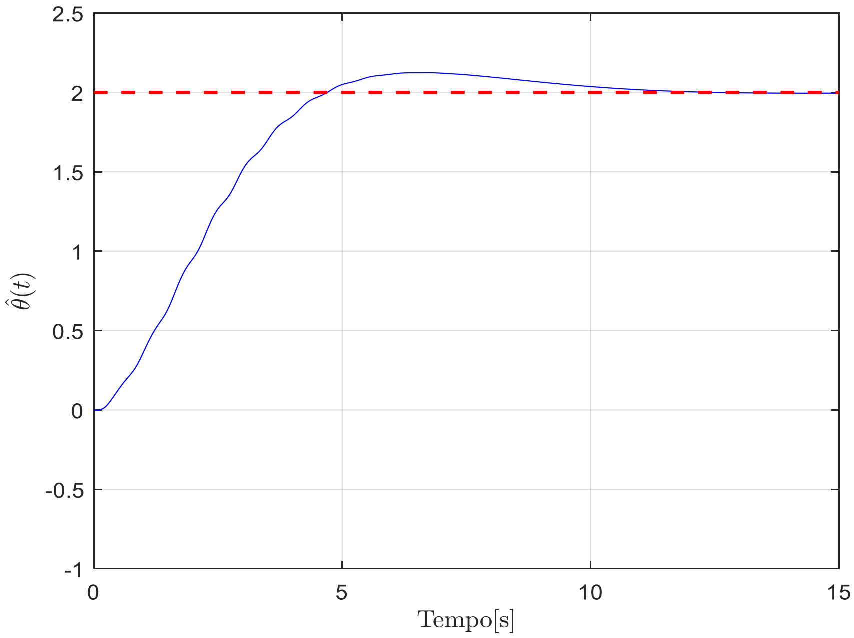


Figura 10: $\hat{\theta}$ estimado .

Esta Figura 10 é o sinal que estima o gradiente ao longo do tempo. Esse comportamento é fundamental para garantir que o estado desejado seja atingido.

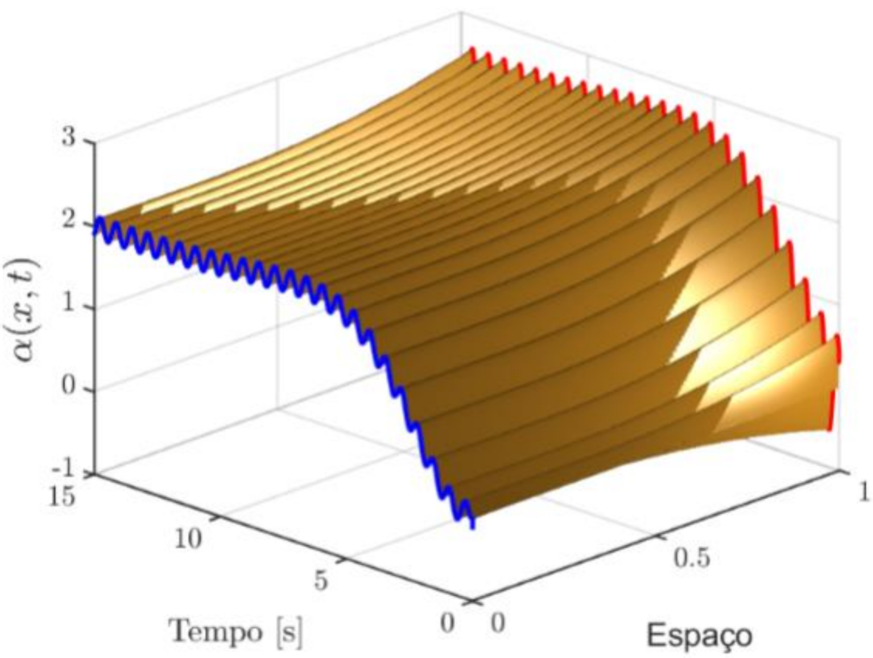


Figura 11: $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(0,t)$ (azul).

A representação da evolução do sistema modelado por uma PDE de difusão distribuída é vista nas Figura 11 e Figura 12, que possibilita visualizar a dinâmica proposta num ambiente tridimensional. Assim, o eixo temporal mostra a progressão da temperatura média $\Theta(t)$, enquanto os outros eixos representam a interação das variáveis espaciais associadas à difusão.

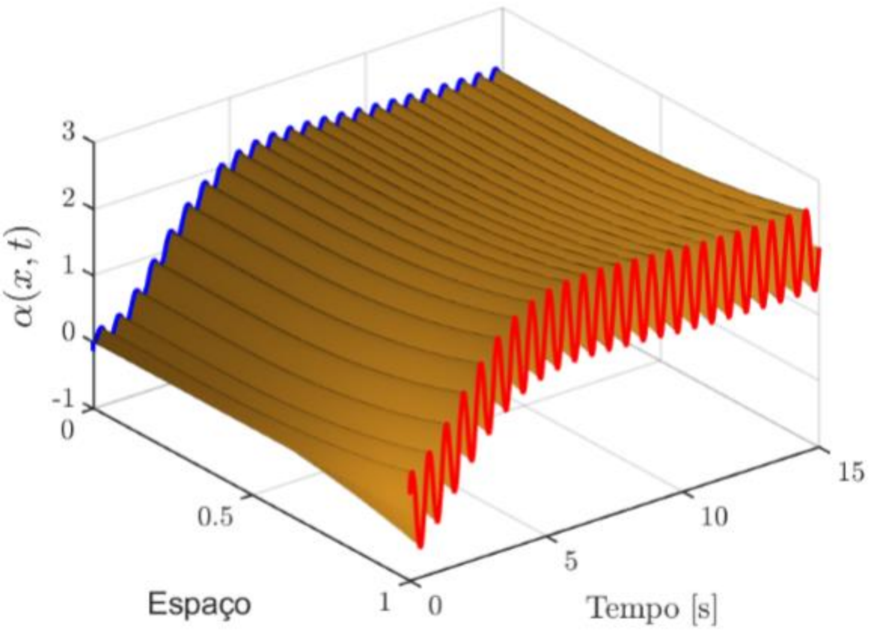


Figura 12: $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(l,t)$ (vermelho).

Portanto, a convergência do valor de y, do valor médio $\Theta(t)$ e de $U(t)$ para o valor ótimo y^* ,Θ^* e zero respectivamente, demostra a estabilização do sistema através dos resultados apresentados nesse estudo de caso, podendo observar claramente que o objetivo de controle foi alcançado não só com a estratégia proposta mas também, através da escolha adequada dos parâmetros.

4.2 Estudo de caso 2

Este experimento busca verificar a adaptabilidade do controlador diante do aumento do ganho k. Assim, manteve-se todos os parâmetros anteriores do estudo de caso 1 e alterou-se apenas o ganho do compensador de $k = 0.2$ para $k = 0.5$.

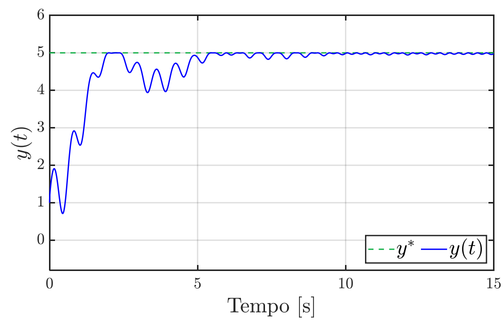
Tabela 2: Parâmetros da simulação 2.

Símbolo	**Descrição**	**Valor**
K	ganho do compensador	0.5
a	amplitude da perturbação	0.2
ω	frequência de perturbação	10
c	frequência do controlador	10
L	domínio espacial [m]	1
Θ^*	otimizador do mapa estático	2
y^*	valor ótimo do mapa estático	5
H	Hessiana do mapa estático	-2

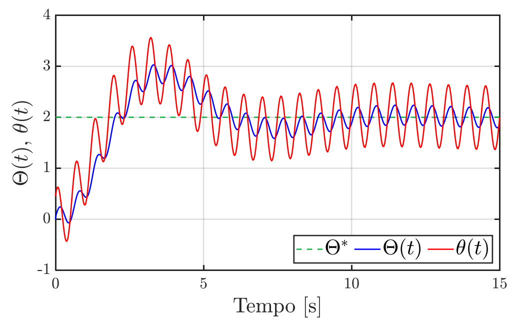
Analisando o sinal de saída do mapa estático $y(t)$ com $k = 0.5$, percebe-se que durante o instante transitório a saída rapidamente ficou oscilando um pouco abaixo do ponto ótimo y^* mas, a convergência aconteceu de fato cinco segundos aproximadamente. Em relação a figura Figura 13 (b)-(d)-(e) e (f) aparece em todas o fenômeno conhecido como:

- **Overshoot:** a resposta do sistema dinâmico excedeu temporariamente o valor final desejado antes de estabilizar. Provavelmente influenciado ganho de perturbação imposto.

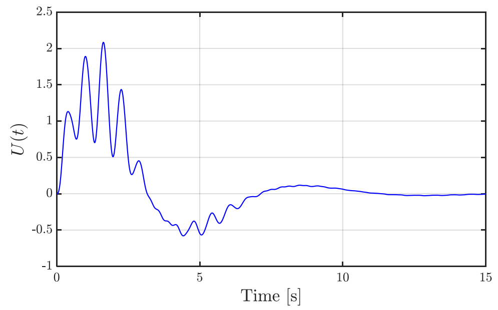
Ainda na figura Figura 13(e) e (f), pode-se analisar tridimensionalmente o impacto do aumento de k em sistemas de controle com PDEs, considerando as características específicas desse tipo de sistema.



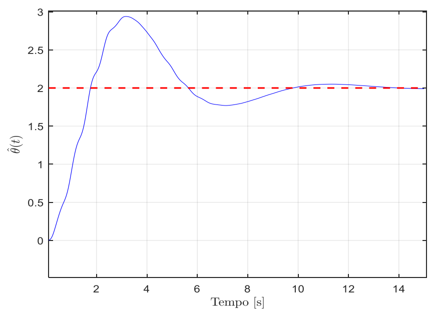
(a) Mapa estático $y(t)$ com $k = 0.5$



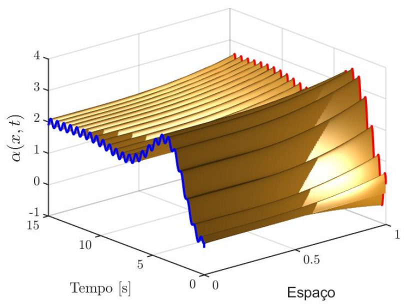
(b) Parâmetros $\theta(t)$ e $\Theta(t)$ com $k = 0.5$



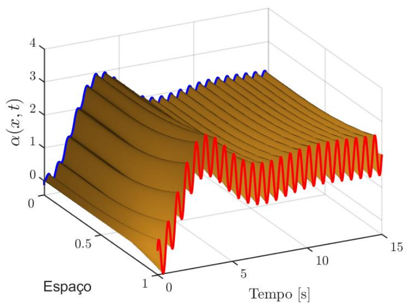
(c) Saída do compensador $U(t)$ com $k = 0.5$



(d) $\hat{\theta}$ estimado com $k = 0.5$



(e) $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(0,t)$ (azul) com $k = 0.5$



(f) $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(l,t)$ (vermelho) com $k = 0.5$

Figura 13: Simulação com os parâmetros da Tabela 2.

Os principais pontos observados no gráfico da Figura 13(c) são :

- **Maior amplitude inicial:** As oscilações iniciais possuem uma amplitude mais alta em comparação ao gráfico anterior, indicando maior intensidade na resposta inicial do sistema.
- **Oscilações amortecidas:** Como no gráfico anterior, as oscilações diminuem com o tempo, demonstrando comportamento amortecido.
- **Estabilização:** Por volta de $t = 10\,\text{s}$, $U(t)$ converge novamente para um valor próximo de zero, sugerindo que o sistema se estabiliza no estado estacionário.

Conforme verificado no estudo de caso 2, o sistema híbrido governado tanto por Equações Diferenciais Parciais quanto por Controle Extremal, levou o sistema a um overshoot que pode ser associado ao impacto de um ganho k alto no ajuste desse parâmetro. Um k elevado pode resultar em ajustes muito rápidos, ultrapassando o ponto ótimo antes de estabilizar. Isso é descrito por: $\dot{\hat{\Theta}}(t) = KH(\hat{\Theta}(t) - \Theta^*)$ discutido na seção 2.1 ou pela lei de controle (172). Todavia, tanto a saída do mapa estático Figura 13(a) quanto a saída do controlador Figura 13(c) demonstram que sistema continua exponencialmente estável apesar da saturação e de pequenas oscilações observadas no sinal de saída y e de um esforço maior do controlador $U(t)$.

4.3 Estudo de caso 3.

Esta seção explora a aplicação do método em um cenário em que a frequência de perturbação cai a metade. O objetivo é examinar sua capacidade de manter o desempenho e a estabilidade nessa condição.

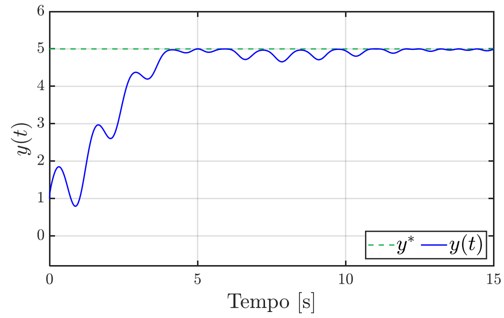
Tabela 3: Parâmetros da simulação 3

Símbolo	**Descrição**	**Valor**
K	ganho do compensador	0.2
a	amplitude da perturbação	0.2
ω	frequência de perturbação	5
c	frequência do controlador	10
L	domínio espacial [m]	1
Θ^*	otimizador do mapa estático	2
y^*	valor ótimo do mapa estático	5
H	Hessiana do mapa estático	-2

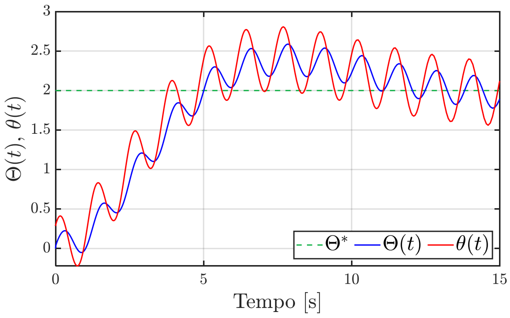
Analisando os gráficos da Tabela 3 percebe-se:

- **Aumento no tempo de acomodação** ultrapassando os 10 segundos;
- **Saída y mais oscilatória** entre 5 e 10 segundos;
- **Aumento da dinâmica do controlador**
- **Overshoot menor**

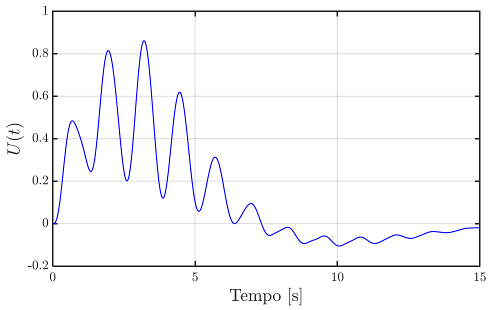
Todos esses casos são comparados com os resultados de referência e o estudo de caso 2. Assim, observa-se que perturbações de baixa frequência tendem a gerar transientes mais suaves no sistema, reduzindo picos de resposta, mas aumentando o tempo em regime transitório.



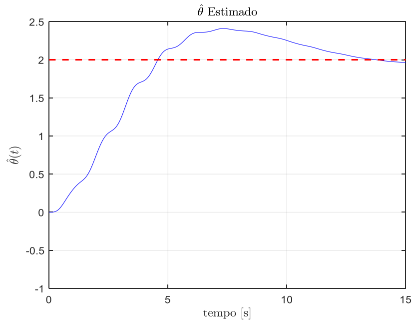
(a) Mapa estático $y(t)$ com $\omega = 5$



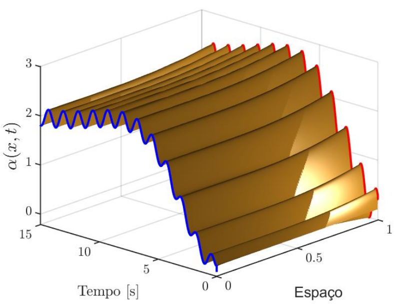
(b) Parâmetros $\theta(t)$ e $\Theta(t)$ com $\omega = 5$



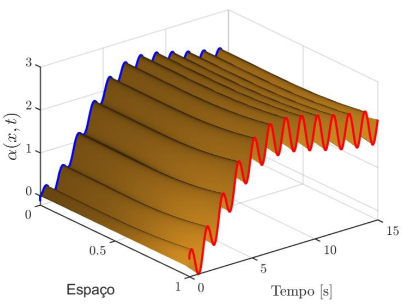
(c) Saída do compensador $U(t)$ com $\omega = 5$



(d) $\hat{\theta}$ estimado com $\omega = 5$



(e) $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(0,t)$ (azul) com $\omega = 5$



(f) $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(l,t)$ (vermelho) com $\omega = 5$

Figura 14: Simulação com os parâmetros da Tabela 3.

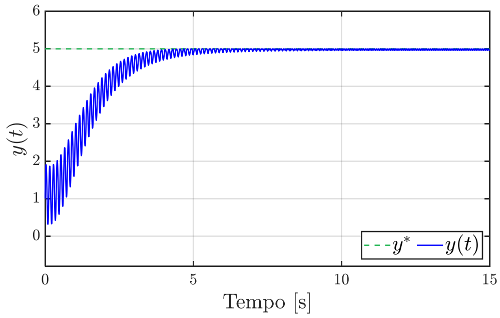
4.4 Estudo de caso 4

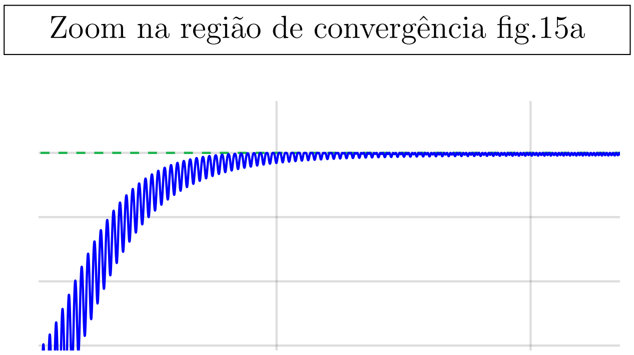
O último estudo apresentado, segue a mesma dinâmica da anterior alterando somente o valor de ω. Porém, essa explora um cenário mais desafiador, com a inclusão de perturbações significativas no sistema, ou seja, aumentou-se a frequência de perturbação em cinco vezes mais em relação a original.

Tabela 4: Parâmetros da simulação 4.

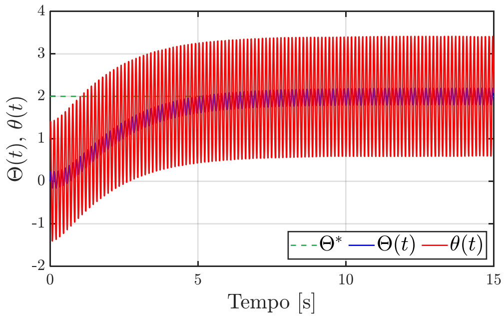
Símbolo	**Descrição**	**Valor**
K	ganho do compensador	0.2
a	amplitude da perturbação	0.2
ω	frequência de perturbação	50
c	frequência do controlador	10
L	domínio espacial [m]	1
Θ^*	otimizador do mapa estático	2
y^*	valor ótimo do mapa estático	5
H	Hessiana do mapa estático	-2

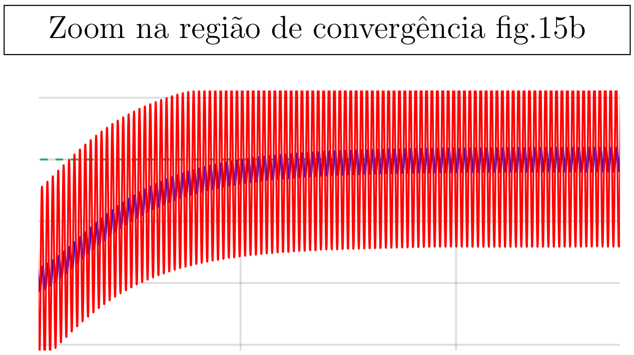
Vale destacar que o aumento da frequência de perturbação aumentou a amplitude do sinal $S(t)$. Todavia, tal fenômeno não interferiu na estabilidade, mantendo o tempo de estabilização praticamente inalterado. Assim, percebeu-se uma diminuição do esforço do controlador e a resposta não apresentou mais o *overshoot*.



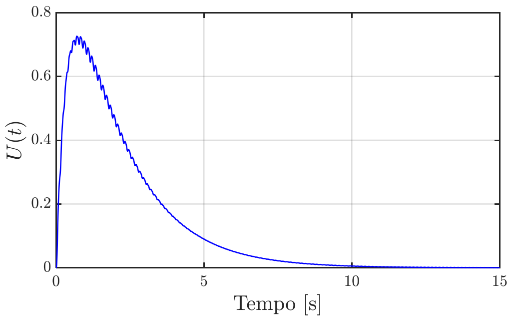


(a) Mapa estático $y(t)$ com $\omega = 50$

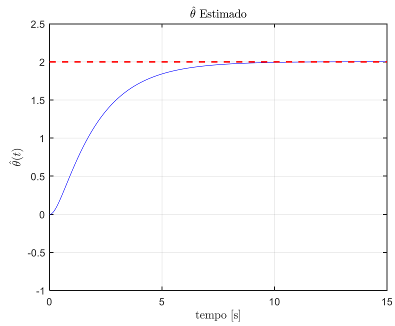




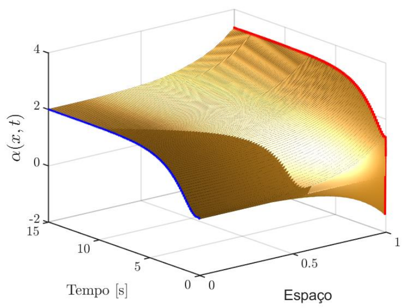
(b) Parâmetros $\theta(t)$ e $\Theta(t)$ com $\omega = 50$



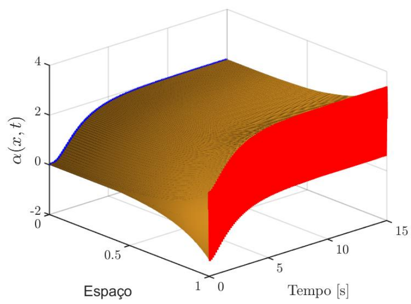
(c) Saída do compensador $U(t)$ com $\omega = 50$



(d) $\hat{\theta}$ estimado com $\omega = 50$



(e) $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(0,t)$ (azul) com $\omega = 50$



(f) $\Theta(t)$ convergindo para θ^* com $\alpha(l,t)$ (vermelho) com $\omega = 50$

Figura 15: Simulação com os parâmetros da Tabela 4.

Por fim, seria possível investigar uma gama de fenômenos e propriedades do sistema. Entretanto, sem perda de generalidade, este estudo limita-se a variar os parâmetros k e w para efeito da validação numéria. Portanto, esses resultados reforçam o potencial prático da abordagem desenvolvida, isto é, o esquema de Controle Extremal com PDEs de difusão distribuídas proposto para otimização em tempo real seguiu duas etapas triviais, primeiro o de resolver o problema do sinal de perturbação $S(t)$ e depois, o de projetar um controlador, tarefas que exigiram uma análise matemática rigorosa, mas que forneceu a base sólida para investigações futuras, pois verificou-se aqui que a metodologia proposta é capaz de garantir a estabilidade do sistema mesmo na presença de perturbações.

CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o problema de controle extremal para PDEs de difusão distribuídas. A partir da definição adequada dos erros de rastreamento, foi possível obter um sistema médio, cuja estabilidade exponencial foi garantida com o compensador de PDE de difusão distribuída projetado. Com isso, demonstrou-se que as trajetórias convergem para uma vizinhança pequena em torno do ponto ótimo. As simulações numéricas ilustraram claramente a efetividade da estratégia de controle extremal proposta, mesmo na presença de atuador com dinâmica dada pela PDE de difusão distribuída.

As principais contribuições deste trabalho incluem:

• Aplicação do Controle Extremal a PDEs do Calor: A metodologia proposta foi uma das primeiras a aplicar controle extremal a PDEs do calor com difusão distribuída, proporcionando uma nova perspectiva sobre o controle de sistemas que podem ser modelados por esta classe de modelos, como sistemas térmicos complexos.

• Desenvolvimento de um compensador de PDE de difusão distribuída: A lei de controle foi projetada para estabilizar o sistema em malha fechada e compensar o efeito de difusão distribuída utilizando estimativas de gradiente e Hessiana para ajustar o controlador conforme necessário.

• Validação Teórica e Experimental: O trabalho não apenas estabeleceu a estabilidade teórica do sistema com o controlador proposto, mas também confirmou a eficiência da metodologia proposta através de simulações numéricas.

Publicação

Um artigo relacionado com o tema desta dissertação foi publicado no XXV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2024):

ALMEIDA, F.; COUTINHO, P. H. S.; OLIVEIRA, T. R. **Controle extremal com equações diferenciais parciais de difusão distribuídas**. Anais do XXV Congresso Brasileiro de Automática Inteligente. In: XXV CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Rio de Janeiro, 2024.

Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões de trabalhos futuros, pode-se mencionar:

• Aplicação para outros tipos de PDEs: Estender a abordagem para PDEs não lineares ou outras PDEs distribuídas que descrevam processos físicos diversos.

• Consideração de atrasos no tempo: Investigar o controle extremal para PDEs considerando o efeito de atraso no tempo, que pode se induzido, por exemplo, em sistemas de controle em rede.

• Possibilidade de explorar observadores: Incluir o uso de observadores e ajustar o design conforme necessário.

REFERÊNCIAS

[1] SONTAG, E. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer New York, 2013. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 9781461205777. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=f9XiBwAAQBAJ>.

[2] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2022.

[3] CURTAIN, R. F.; ZWART, H. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

[4] NG, J.; DUBLJEVIC, S. Optimal boundary control of a diffusion–convection-reaction pde model with time-dependent spatial domain: Czochralski crystal growth process. *Chemical engineering science*, Elsevier, v. 67, n. 1, p. 111–119, 2012.

[5] ARIYUR, K. B.; KRSTIC, M. *Real-time optimization by extremum-seeking control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.

[6] ZHANG, C.; ORDÓÑEZ, R. *Extremum-Seeking Control and Applications: A Numerical Optimization-Based Approach*. Springer London, 2011. (Advances in Industrial Control). ISBN 9781447122241. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=JLWGXJzeWecC>.

[7] KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, v. 36, p. 595–601, 2000.

[8] TAN, Y.; NEšIć, D.; MAREELS, I. On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, v. 42, p. 889–903, 2006.

[9] LIU, S.-J.; KRSTIC, M. *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2012.

[10] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. *Extremum seeking through delays and PDEs*. [S.l.]: SIAM, 2022.

[11] KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.

[12] LEBLANC, M. Sur l'electrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de frequence elevee. *Revue Generale de l'Electricite*, v. 12, p. 275–277, 1922.

[13] ARIYUR, K.; KRSTIĆ, M. *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. [S.l.]: Wiley, 2003.

[14] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NESIĆ, D. Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, v. 48, p. 1759–1767, 2012.

[15] MANZIE, C.; KRSTIC, M. Extremum seeking with stochastic perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 54, p. 580–585, 2009.

[16] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 62, p. 1911–1926, 2017.

[17] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. *Extremum Seeking through Delays and PDEs*. [S.l.]: SIAM, 2022.

[18] CHAN, Y. T.; HO, K. C. A Simple and Efficient Estimator for Hiperbolic Location. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 8, p. 1905–1915, August 1994.

[19] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Springer London, 2013. (Communications and Control Engineering). ISBN 9781846286155. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=N9h5BgAAQBAJ>.

[20] KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. [S.l.]: SIAM, 2008.

[21] KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. W. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall, 2002.

[22] LIU, S.-J.; KRSTIC, M. Stochastic averaging in continuous time and its applications to extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 55, n. 10, p. 2235–2250, 2010.

[23] GHADIRI-MODARRES, M. A.; MOJIRI, M.; ZANGENEH, H. R. Z. New schemes for gps-denied source localization using a nonholonomic unicycle. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 25, n. 2, p. 720–727, March 2017.

[24] BAZZI, A. M.; KREIN, P. T. Concerning "maximum power point tracking for photovoltaic optimization using ripple-based extremum seeking control". *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 26, n. 6, p. 1611–1612, June 2011.

[25] NIETO, N. M.; RODRIGUEZ, C. F.; PORTELA, M. N. Computational model of frequency stabilized laser for extremum seeking controller parameter tuning. *IEEE Latin America Transactions*, v. 20, n. 3, p. 451–457, March 2022.

[26] BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIC, M. Compensating the distributed effect of diffusion and counter-convection in multi-input and multi-output LTI systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 56, n. 3, p. 637–643, 2011.

[27] HALE, J. K.; LUNEL, S. V. Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, v. 2, p. 463–494, 1990.

APÊNDICE A

Teorema da Média para Sistemas de Dimensão Infinita por [27]

O principal passo para a demonstração do Teorema 2 no capítulo 3 é o Teorema da Média para PDEs proposto por [27], o qual é apresentado a seguir por conveniência.

Teorema 4.4.1 *Considere o sistema de dimensão infinita definido no espaço de Banach* $\mathcal{X}$

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + J(\omega t, z) \tag{182}$$

com $z(0) = z_0 \in \mathcal{X}$ *e o operador* $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}$ *gera um semigrupo analítico. Além disso, a não linearidade* $J : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *com* $t \mapsto J(\omega t, z)$ *é Fréchet diferenciável em* z*, fortemente contínua e periódica em* t *uniformemente com relação a* z *em um subconjunto compacto de* $\mathcal{X}$*. Juntamente com* (182)*, o sistema médio*

$$\dot{z}_{av} = \mathcal{A}z_{av} + J_0(z_{av}) \tag{183}$$

com $J_0(z_{av}) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T J(\tau, z_{av})d\tau$ *é considerado. Suponha que* $z_{av} = 0 \in D \subset \mathcal{X}$ *é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio* (183)*, então para algum* $\bar{\omega} > 0$ *e* $\omega > \bar{\omega}$*, as seguintes proposições são satisfeitas:*

a) existe uma única solução periódica exponencialmente estável $t \mapsto \bar{z}(t, 1/\omega)$*, contínua em* t *e* $1/\omega$*, com* $\|\bar{z}(t, 1/\omega)\| \leq \mathcal{O}(1/\omega)$ *para* $t > 0$*,*

b) e com $\|z_0 - z_{av}(0)\| \leq \mathcal{O}(1/\omega))$*, a estimativa da solução de* (182) *é dada por*

$$\|z(t) - z_{av}\| \leq \mathcal{O}(1/\omega), \quad t > 0, \tag{184}$$

c) e para $\|z_0\| \leq \mathcal{O}(1/\omega)$*, e o teorema da variedade estável, segue que*

$$\|z(t) - \bar{z}(t, 1/\omega)\| \leq Ce^{-\gamma t}, \quad t > 0, \tag{185}$$

para algum $C,\ \gamma > 0$*.*