



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Allan de Oliveira Fontes


Avaliação comparativa de métodos de reconstrução inversa

Rio de Janeiro

2023

Allan de Oliveira Fontes

Avaliação comparativa de métodos de reconstrução inversa



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Redes de Telecomunicações, Linha de Pesquisa: Sinais e Sistemas de Comunicações.

Orientador: Prof. Dr. Lisandro Lovisolo
UERJ - Faculdade de Engenharia

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

F683 Fontes, Allan de Oliveira.
Avaliação comparativa de métodos de reconstrução inversa /
Allan de Oliveira Fontes. – 2023.
416 f.

Orientador: Lisandro Lovisolo.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Algoritmos - Teses. 3.
Processamento de imagens - Teses. 4. Desempenho - Avaliação -
Teses. I. Lovisolo, Lisandro. II. Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 621.397.331

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Allan de Oliveira Fontes

Avaliação comparativa de métodos de reconstrução inversa

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Redes de Telecomunicações, Linha de Pesquisa: Sinais e Sistemas de Comunicações.

Aprovada em 30 de Maio de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Lisandro Lovisolo
UERJ - Faculdade de Engenharia (Orientador)

Prof. Dr. Michel Pompeu Tcheou
UERJ - Faculdade de Engenharia

Prof. Dr. Felipe da Rocha Henriques
CEFET/RJ - Campus Petrópolis

Rio de Janeiro

2023

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Graziela e ao meu filho Joaquim. Minha família é a parte mais relevante de mim. Amo vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Lisandro Lovisolo por me incentivar, orientar e apoiar nesta longa e significativa jornada de contribuição, criação e desenvolvimento pessoal.

Agradeço ao Professor Prof. Dr. Michel Pompeu Tcheou pelas aulas de Análise Tempo-Frequência de Sinais ministradas ao longo do curso e por compartilhar novas direções de desenvolvimento para este trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Jorge Luís Machado do Amaral pelas aulas de Reconhecimento de Padrões e Redes Neurais Artificiais ministradas ao longo do curso.

Agradeço ao Professor Prof. Dr. Felipe da Rocha Henriques por compartilhar apontamentos significativos para a melhor apresentação deste trabalho.

Agradeço ao meu amigo Rogério Ferreira pelos debates e sugestões sobre desenvolvimento em Python e operação do sistema operacional Linux.

Agradeço ao meu amigo Wagner Ferreira pelo apoio e presença durante a defesa dessa dissertação.

Agradeço a todos os profissionais do sistema público de ensino superior do Brasil. Fiz o possível para honrar o serviço que vocês nos oferecem.

A ciência conhece um único comando: contribuir com a ciência.

Bertolt Brecht

RESUMO

DE OLIVEIRA FONTES, AOF *Avaliação comparativa de métodos de reconstrução inversa*. 416 f. Dissertação (Mestrado em Eletrônica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Esta dissertação compara algoritmos de reconstrução tomográfica. Dezesesseis algoritmos de reconstrução advindos de cinco classes, com modelos e princípios de funcionamento distintos foram estudados e comparados por meio de critérios descritivos, quantitativos e qualitativos. Na comparação descritiva, os algoritmos foram agrupados de acordo com seus elementos comuns, isto é, as classes, e suas características fundamentais são apresentadas. O conjunto de dados usado para a avaliação quantitativa é gerado a partir de três (3) imagens base íntegras, que apresentam características qualitativas distintas de forma a considerar grupos de aplicação não correlacionados entre si: saúde, arquitetura e indústria. Um grupo de 60 projeções (*sinogramas*) é obtido à partir das 03 imagens-base, por meio de um processo de aquisição simulada com corrupção progressiva. A corrupção ocorre pela adição direta de ruído gaussiano em uma única parte do processo de aquisição por vez, seja na imagem íntegra do objeto-alvo ou no sinograma íntegro. A primeira abordagem visa acomodar aplicações onde o erro mostra-se associado a fenômenos de propagação e interação dos feixes de sondagem com o objeto-alvo, já a segunda abordagem visa acomodar aplicações onde o erro mostra-se associado ao processo de medição. Para cada iteração de um algoritmo de reconstrução, obtém-se a imagem de reconstrução correspondente a cada um dos sinogramas do conjunto. Quando aplicável ao algoritmo, 50 iterações são utilizadas. Na análise quantitativa, diferentes medidas de qualidade de imagem são utilizadas para comparar as reconstruções. Um Índice de Qualidade Agregado é proposto de forma a condensar as informações obtidas. Aferimos o custo computacional da reconstrução, a partir do tempo de processamento de uma iteração (a primeira). Por último, a comparação qualitativa avalia cortes das reconstruções das imagens obtidas na sequência de iterações do algoritmo. Avalia-se o discernimento das estruturas (mudanças de valores, velocidade ou inclinação, e oscilações quando elas ocorrem) por inspeção e por índices estatísticos: Média, Desvio Padrão e limiar de Otsu. A avaliação indica que os algoritmos baseados maximização da função de verossimilhança são mais eficazes (qualidade) e estáveis (a tendência de qualidade conforme as iterações avançam e erro é adicionado mostra-se monótona), com um bom compromisso de eficiência (custo computacional). Os resultados permitem ainda sugerir critérios de escolha dos métodos de reconstrução apropriados para diferentes cenários de aplicação e sugestões de direções para aperfeiçoamento de alguns algoritmos.

Palavras-chave: tomografia. reconstrução inversa. análise de desempenho. comparação de desempenho.

ABSTRACT

DE OLIVEIRA FONTES, AOF *Comparative Evaluation of Inverse Reconstruction Methods*. 2023. 416 f. Dissertação (Mestrado em Eletrônica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

This dissertation compares tomographic reconstruction algorithms. Sixteen reconstruction algorithms from five classes, with different models and operating principles, were studied and compared using descriptive, quantitative, and qualitative criteria. Firstly, in the descriptive comparison, the algorithms were grouped according to their common elements. That is, the classes and their fundamental characteristics are presented. The data set used for the quantitative evaluation is generated from three (3) complete base images, which have different qualitative characteristics to consider application groups that are not correlated with each other: health, architecture, and industry. We obtain a group of 60 projection sets (*sinograms*) from the 03 base images through a simulated acquisition process with progressive corruption. Corruption occurs by directly adding Gaussian noise to a single part of the acquisition process at a time, either in the full image of the target object or in the full image of the sinogram. The first approach accommodates applications where the error is associated with propagation phenomena and the interaction of the probe beams with the target object. In contrast, the second approach accommodates applications where the error is associated with the measurement process. For each algorithm iteration, a reconstruction image corresponding to a sinogram of the set is obtained. When applicable to the algorithm, 50 iterations are used. The quantitative analysis uses different image quality measures to compare the reconstructions. An Aggregate Quality Index is proposed in order to condense the information obtained. We assess the computational cost of the reconstruction based on the processing time of one iteration (the first). Finally, the qualitative comparison evaluates sections of the reconstructions of the images obtained in the sequence of iterations of the algorithm. The discernment of structures (changes in values, speed or inclination, and oscillations when they occur) is evaluated by inspection and statistical indices: Mean, Standard Deviation, and Otsu threshold. The evaluation indicates that algorithms based on likelihood function maximization are more effective (quality) and stable (the quality trend as iterations progress and error is added shows to be monotonous), with a reasonable efficiency compromise (computational cost). The results also suggest criteria for choosing the appropriate reconstruction methods for different application scenarios and suggestions for improving some algorithms.

Keywords: tomography. inverse reconstruction. performance analysis. performance comparison.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|--|----|
| Figura 1 | - Aquisição por feixes paralelos - PBG | 27 |
| Figura 2 | - Projeção por feixes paralelos - PBG | 32 |
| Figura 3 | - Teorema da Fatia de Fourier | 38 |
| Figura 4 | - Sobreposição dos pontos médios das transformadas de Fourier 1D das projeções (verde) e interpolação (roxo) | 40 |
| Figura 5 | - Exemplo do algoritmo de Kaczmarcz para um SEL de duas equações com uma variável independente. | 44 |
| Figura 6 | - Ilustração do método Gradiente Descendente. | 50 |
| Figura 7 | - Método de análise utilizando objeto-alvo e sinograma íntegros. | 66 |
| Figura 8 | - Método de análise utilizando o Sinograma corrompido pela adição de diferentes níveis de ruído Gaussiano. | 67 |
| Figura 9 | - Método de análise utilizando o Objeto-Alvo corrompido pela adição de diferentes níveis de ruído Gaussiano. | 68 |
| Figura 10 | - Objeto-alvo Engrenagem | 74 |
| Figura 11 | - Objeto Engrenagem; adição crescente de ruído gaussiano no objeto. | 75 |
| Figura 12 | - Sinograma Engrenagem; adição crescente de ruído gaussiano no objeto. | 76 |
| Figura 13 | - Sinograma Engrenagem; adição crescente de ruído gaussiano no Sino- grama. | 77 |
| Figura 14 | - Reconstruções a partir do sinograma íntegro do Objeto-alvo Engrena- gem. Têm-se as imagens reconstruídas com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não iterativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações) | 78 |
| Figura 15 | - Objeto-alvo Horus | 79 |
| Figura 16 | - Objeto Horus; adição crescente de ruído gaussiano no objeto. | 80 |
| Figura 17 | - Sinograma Horus; adição crescente de ruído gaussiano no objeto. | 81 |
| Figura 18 | - Sinograma Horus; adição crescente de ruído gaussiano no Sinograma. | 82 |
| Figura 19 | - Reconstruções a partir do sinograma íntegro do Objeto-alvo Horus. Têm-se as imagens reconstruídas com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não ite- rativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações) | 83 |
| Figura 20 | - Objeto-alvo Phantom | 84 |
| Figura 21 | - Objeto Phantom; adição crescente de ruído gaussiano no objeto. | 85 |
| Figura 22 | - Sinograma Phantom; adição crescente de ruído gaussiano no objeto. | 86 |
| Figura 23 | - Sinograma Phantom; adição crescente de ruído gaussiano no Sinograma. | 87 |

| | |
|---|-----|
| Figura 24 - Reconstruções a partir do sinograma íntegro do Objeto-alvo Phantom. Têm-se as imagens reconstruídas com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não ite- rativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações) | 88 |
| Figura 25 - Tempo de execução da primeira iteração dos algoritmos de reconstrução. | 94 |
| Figura 26 - Tempo de execução da primeira iteração dos algoritmos de reconstrução baseados em MLE. | 95 |
| Figura 27 - Erro Nível 00 no Objeto Engrenagem. | 108 |
| Figura 28 - Erro Nível 01 no Objeto Engrenagem | 109 |
| Figura 29 - Erro Nível 02 no Objeto Engrenagem | 110 |
| Figura 30 - Erro Nível 03 no Objeto Engrenagem | 111 |
| Figura 31 - Erro Nível 04 no Objeto Engrenagem | 112 |
| Figura 32 - Erro Nível 05 no Objeto Engrenagem | 113 |
| Figura 33 - Erro Nível 06 no Objeto Engrenagem | 114 |
| Figura 34 - Erro Nível 07 no Objeto Engrenagem | 115 |
| Figura 35 - Erro Nível 08 no Objeto Engrenagem | 116 |
| Figura 36 - Erro Nível 09 no Objeto Engrenagem | 117 |
| Figura 37 - Erro Nível 00 no Sinograma Engrenagem | 118 |
| Figura 38 - Erro Nível 01 no Sinograma Engrenagem | 119 |
| Figura 39 - Erro Nível 02 no Sinograma Engrenagem | 120 |
| Figura 40 - Erro Nível 03 no Sinograma Engrenagem | 121 |
| Figura 41 - Erro Nível 04 no Sinograma Engrenagem | 122 |
| Figura 42 - Erro Nível 05 no Sinograma Engrenagem | 123 |
| Figura 43 - Erro Nível 06 no Sinograma Engrenagem | 124 |
| Figura 44 - Erro Nível 07 no Sinograma Engrenagem | 125 |
| Figura 45 - Erro Nível 08 no Sinograma Engrenagem | 126 |
| Figura 46 - Erro Nível 09 no Sinograma Engrenagem | 127 |
| Figura 47 - Erro Nível 00 no Objeto Phantom | 128 |
| Figura 48 - Erro Nível 01 no Objeto Phantom | 129 |
| Figura 49 - Erro Nível 02 no Objeto Phantom | 130 |
| Figura 50 - Erro Nível 03 no Objeto Phantom | 131 |
| Figura 51 - Erro Nível 04 no Objeto Phantom | 132 |
| Figura 52 - Erro Nível 05 no Objeto Phantom | 133 |
| Figura 53 - Erro Nível 06 no Objeto Phantom | 134 |
| Figura 54 - Erro Nível 07 no Objeto Phantom | 135 |
| Figura 55 - Erro Nível 08 no Objeto Phantom | 136 |
| Figura 56 - Erro Nível 09 no Objeto Phantom | 137 |
| Figura 57 - Erro Nível 00 no Sinograma Phantom | 138 |

| | |
|---|-----|
| Figura 58 - Erro Nível 01 no Sinograma Phantom | 139 |
| Figura 59 - Erro Nível 02 no Sinograma Phantom | 140 |
| Figura 60 - Erro Nível 03 no Sinograma Phantom | 141 |
| Figura 61 - Erro Nível 04 no Sinograma Phantom | 142 |
| Figura 62 - Erro Nível 05 no Sinograma Phantom | 143 |
| Figura 63 - Erro Nível 06 no Sinograma Phantom | 144 |
| Figura 64 - Erro Nível 07 no Sinograma Phantom | 145 |
| Figura 65 - Erro Nível 08 no Sinograma Phantom | 146 |
| Figura 66 - Erro Nível 09 no Sinograma Phantom | 147 |
| Figura 67 - Erro Nível 00 no Objeto Horus | 148 |
| Figura 68 - Erro Nível 01 no Objeto Horus | 149 |
| Figura 69 - Erro Nível 02 no Objeto Horus | 150 |
| Figura 70 - Erro Nível 03 no Objeto Horus | 151 |
| Figura 71 - Erro Nível 04 no Objeto Horus | 152 |
| Figura 72 - Erro Nível 05 no Objeto Horus | 153 |
| Figura 73 - Erro Nível 06 no Objeto Horus | 154 |
| Figura 74 - Erro Nível 07 no Objeto Horus | 155 |
| Figura 75 - Erro Nível 08 no Objeto Horus | 156 |
| Figura 76 - Erro Nível 09 no Objeto Horus | 157 |
| Figura 77 - Erro Nível 00 no Sinograma Horus | 158 |
| Figura 78 - Erro Nível 01 no Sinograma Horus | 159 |
| Figura 79 - Erro Nível 02 no Sinograma Horus | 160 |
| Figura 80 - Erro Nível 03 no Sinograma Horus | 161 |
| Figura 81 - Erro Nível 04 no Sinograma Horus | 162 |
| Figura 82 - Erro Nível 05 no Sinograma Horus | 163 |
| Figura 83 - Erro Nível 06 no Sinograma Horus | 164 |
| Figura 84 - Erro Nível 07 no Sinograma Horus | 165 |
| Figura 85 - Erro Nível 08 no Sinograma Horus | 166 |
| Figura 86 - Erro Nível 09 no Sinograma Horus | 167 |
| Figura 87 - CGLS com erro no Objeto Engrenagem | 169 |
| Figura 88 - FBP com erro no Objeto Engrenagem | 170 |
| Figura 89 - GRIDREC com erro no Objeto Engrenagem | 171 |
| Figura 90 - ART com erro no Objeto Engrenagem | 172 |
| Figura 91 - SIRT com erro no Objeto Engrenagem | 173 |
| Figura 92 - BART com erro no Objeto Engrenagem | 174 |
| Figura 93 - SART com erro no Objeto Engrenagem | 175 |
| Figura 94 - MLEM com erro no Objeto Engrenagem | 176 |
| Figura 95 - OSEM com erro no Objeto Engrenagem | 177 |
| Figura 96 - TV com erro no Objeto Engrenagem | 178 |

| | |
|--|-----|
| Figura 97 - OSPML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem | 179 |
| Figura 98 - OSPML-Quad com erro no Objeto Engrenagem | 180 |
| Figura 99 - PML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem | 181 |
| Figura 100 - PML-Quad com erro no Objeto Engrenagem | 182 |
| Figura 101 - TIKH com erro no Objeto Engrenagem | 183 |
| Figura 102 - GRAD com erro no Objeto Engrenagem | 184 |
| Figura 103 - CGLS com erro no Sinograma Engrenagem | 185 |
| Figura 104 - FBP com erro no Sinograma Engrenagem | 186 |
| Figura 105 - GRIDREC com erro no Sinograma Engrenagem | 187 |
| Figura 106 - ART com erro no Sinograma Engrenagem | 188 |
| Figura 107 - SIRT com erro no Sinograma Engrenagem | 189 |
| Figura 108 - BART com erro no Sinograma Engrenagem | 190 |
| Figura 109 - SART com erro no Sinograma Engrenagem | 191 |
| Figura 110 - MLEM com erro no Sinograma Engrenagem | 192 |
| Figura 111 - OSEM com erro no Sinograma Engrenagem | 193 |
| Figura 112 - TV com erro no Sinograma Engrenagem | 194 |
| Figura 113 - OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem | 195 |
| Figura 114 - OSPML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem | 196 |
| Figura 115 - PML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem | 197 |
| Figura 116 - PML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem | 198 |
| Figura 117 - TIKH com erro no Sinograma Engrenagem | 199 |
| Figura 118 - GRAD com erro no Sinograma Engrenagem | 200 |
| Figura 119 - CGLS com erro no Objeto Phantom | 201 |
| Figura 120 - FBP com erro no Objeto Phantom | 202 |
| Figura 121 - GRIDREC com erro no Objeto Phantom | 203 |
| Figura 122 - ART com erro no Objeto Phantom | 204 |
| Figura 123 - SIRT com erro no Objeto Phantom | 205 |
| Figura 124 - BART com erro no Objeto Phantom | 206 |
| Figura 125 - SART com erro no Objeto Phantom | 207 |
| Figura 126 - MLEM com erro no Objeto Phantom | 208 |
| Figura 127 - OSEM com erro no Objeto Phantom | 209 |
| Figura 128 - TV com erro no Objeto Phantom | 210 |
| Figura 129 - OSPML-Hybrid com erro no Objeto Phantom | 211 |
| Figura 130 - OSPML-Quad com erro no Objeto Phantom | 212 |
| Figura 131 - PML-Hybrid com erro no Objeto Phantom | 213 |
| Figura 132 - PML-Quad com erro no Objeto Phantom | 214 |
| Figura 133 - TIKH com erro no Objeto Phantom | 215 |
| Figura 134 - GRAD com erro no Objeto Phantom | 216 |
| Figura 135 - CGLS com erro no Sinograma Phantom | 217 |

| | |
|---|-----|
| Figura 136 - FBP com erro no Sinograma Phantom | 218 |
| Figura 137 - GRIDREC com erro no Sinograma Phantom | 219 |
| Figura 138 - ART com erro no Sinograma Phantom | 220 |
| Figura 139 - SIRT com erro no Sinograma Phantom | 221 |
| Figura 140 - BART com erro no Sinograma Phantom | 222 |
| Figura 141 - SART com erro no Sinograma Phantom | 223 |
| Figura 142 - MLEM com erro no Sinograma Phantom | 224 |
| Figura 143 - OSEM com erro no Sinograma Phantom | 225 |
| Figura 144 - TV com erro no Sinograma Phantom | 226 |
| Figura 145 - OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom | 227 |
| Figura 146 - OSPML-Quad com erro no Sinograma Phantom | 228 |
| Figura 147 - PML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom | 229 |
| Figura 148 - PML-Quad com erro no Sinograma Phantom | 230 |
| Figura 149 - TIKH com erro no Sinograma Phantom | 231 |
| Figura 150 - GRAD com erro no Sinograma Phantom | 232 |
| Figura 151 - CGLS com erro no Objeto Horus | 233 |
| Figura 152 - FBP com erro no Objeto Horus | 234 |
| Figura 153 - GRIDREC com erro no Objeto Horus | 235 |
| Figura 154 - ART com erro no Objeto Horus | 236 |
| Figura 155 - SIRT com erro no Objeto Horus | 237 |
| Figura 156 - BART com erro no Objeto Horus | 238 |
| Figura 157 - SART com erro no Objeto Horus | 239 |
| Figura 158 - MLEM com erro no Objeto Horus | 240 |
| Figura 159 - OSEM com erro no Objeto Horus | 241 |
| Figura 160 - TV com erro no Objeto Horus | 242 |
| Figura 161 - OSPML-Hybrid com erro no Objeto Horus | 243 |
| Figura 162 - OSPML-Quad com erro no Objeto Horus | 244 |
| Figura 163 - PML-Hybrid com erro no Objeto Horus | 245 |
| Figura 164 - PML-Quad com erro no Objeto Horus | 246 |
| Figura 165 - TIKH com erro no Objeto Horus | 247 |
| Figura 166 - GRAD com erro no Objeto Horus | 248 |
| Figura 167 - CGLS com erro no Sinograma Horus | 249 |
| Figura 168 - FBP com erro no Sinograma Horus | 250 |
| Figura 169 - GRIDREC com erro no Sinograma Horus | 251 |
| Figura 170 - ART com erro no Sinograma Horus | 252 |
| Figura 171 - SIRT com erro no Sinograma Horus | 253 |
| Figura 172 - BART com erro no Sinograma Horus | 254 |
| Figura 173 - SART com erro no Sinograma Horus | 255 |
| Figura 174 - MLEM com erro no Sinograma Horus | 256 |

| | |
|---|-----|
| Figura 175 - OSEM com erro no Sinograma Horus | 257 |
| Figura 176 - TV com erro no Sinograma Horus | 258 |
| Figura 177 - OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Horus | 259 |
| Figura 178 - OSPML-Quad com erro no Sinograma Horus | 260 |
| Figura 179 - PML-Hybrid com erro no Sinograma Horus | 261 |
| Figura 180 - PML-Quad com erro no Sinograma Horus | 262 |
| Figura 181 - TIKH com erro no Sinograma Horus | 263 |
| Figura 182 - GRAD com erro no Sinograma Horus | 264 |
| Figura 183 - D_{qe} , Corrupção no Objeto Engrenagem | 266 |
| Figura 184 - D_{qe} , Corrupção no Sinograma Engrenagem | 267 |
| Figura 185 - D_{qe} , Corrupção no Objeto Phantom | 268 |
| Figura 186 - D_{qe} , Corrupção no Sinograma Phantom | 269 |
| Figura 187 - D_{qe} , Corrupção no Objeto Horus | 270 |
| Figura 188 - D_{qe} , Corrupção no Sinograma Horus | 271 |
| Figura 189 - Cortes CGLS com Original Engrenagem | 273 |
| Figura 190 - Cortes FBP com Original Engrenagem | 274 |
| Figura 191 - Cortes GRIDREC com Original Engrenagem | 275 |
| Figura 192 - Cortes ART com Original Engrenagem | 276 |
| Figura 193 - Cortes SIRT com Original Engrenagem | 277 |
| Figura 194 - Cortes BART com Original Engrenagem | 278 |
| Figura 195 - Cortes SART com Original Engrenagem | 279 |
| Figura 196 - Cortes MLEM com Original Engrenagem | 280 |
| Figura 197 - Cortes OSEM com Original Engrenagem | 281 |
| Figura 198 - Cortes TV com Original Engrenagem | 282 |
| Figura 199 - Cortes OSPML-Hybrid com Original Engrenagem | 283 |
| Figura 200 - Cortes OSPML-Quad com Original Engrenagem | 284 |
| Figura 201 - Cortes PML-Hybrid com Original Engrenagem | 285 |
| Figura 202 - Cortes PML-Quad com Original Engrenagem | 286 |
| Figura 203 - Cortes TIKH com Original Engrenagem | 287 |
| Figura 204 - Cortes GRAD com Original Engrenagem | 288 |
| Figura 205 - Cortes CGLS com erro no Objeto Engrenagem | 289 |
| Figura 206 - Cortes FBP com erro no Objeto Engrenagem | 290 |
| Figura 207 - Cortes GRIDREC com erro no Objeto Engrenagem | 291 |
| Figura 208 - Cortes ART com erro no Objeto Engrenagem | 292 |
| Figura 209 - Cortes SIRT com erro no Objeto Engrenagem | 293 |
| Figura 210 - Cortes BART com erro no Objeto Engrenagem | 294 |
| Figura 211 - Cortes SART com erro no Objeto Engrenagem | 295 |
| Figura 212 - Cortes MLEM com erro no Objeto Engrenagem | 296 |
| Figura 213 - Cortes OSEM com erro no Objeto Engrenagem | 297 |

| | |
|---|-----|
| Figura 214 - Cortes TV com erro no Objeto Engrenagem | 298 |
| Figura 215 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem | 299 |
| Figura 216 - Cortes OSPML-Quad com erro no Objeto Engrenagem | 300 |
| Figura 217 - Cortes PML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem | 301 |
| Figura 218 - Cortes PML-Quad com erro no Objeto Engrenagem | 302 |
| Figura 219 - Cortes TIKH com erro no Objeto Engrenagem | 303 |
| Figura 220 - Cortes GRAD com erro no Objeto Engrenagem | 304 |
| Figura 221 - Cortes CGLS com erro no Sinograma Engrenagem | 305 |
| Figura 222 - Cortes FBP com erro no Sinograma Engrenagem | 306 |
| Figura 223 - Cortes GRIDREC com erro no Sinograma Engrenagem | 307 |
| Figura 224 - Cortes ART com erro no Sinograma Engrenagem | 308 |
| Figura 225 - Cortes SIRT com erro no Sinograma Engrenagem | 309 |
| Figura 226 - Cortes BART com erro no Sinograma Engrenagem | 310 |
| Figura 227 - Cortes SART com erro no Sinograma Engrenagem | 311 |
| Figura 228 - Cortes MLEM com erro no Sinograma Engrenagem | 312 |
| Figura 229 - Cortes OSEM com erro no Sinograma Engrenagem | 313 |
| Figura 230 - Cortes TV com erro no Sinograma Engrenagem | 314 |
| Figura 231 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem | 315 |
| Figura 232 - Cortes OSPML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem | 316 |
| Figura 233 - Cortes PML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem | 317 |
| Figura 234 - Cortes PML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem | 318 |
| Figura 235 - Cortes TIKH com erro no Sinograma Engrenagem | 319 |
| Figura 236 - Cortes GRAD com erro no Sinograma Engrenagem | 320 |
| Figura 237 - Cortes CGLS com Original Phantom | 321 |
| Figura 238 - Cortes FBP com Original Phantom | 322 |
| Figura 239 - Cortes GRIDREC com Original Phantom | 323 |
| Figura 240 - Cortes ART com Original Phantom | 324 |
| Figura 241 - Cortes SIRT com Original Phantom | 325 |
| Figura 242 - Cortes BART com Original Phantom | 326 |
| Figura 243 - Cortes SART com Original Phantom | 327 |
| Figura 244 - Cortes MLEM com Original Phantom | 328 |
| Figura 245 - Cortes OSEM com Original Phantom | 329 |
| Figura 246 - Cortes TV com Original Phantom | 330 |
| Figura 247 - Cortes OSPML-Hybrid com Original Phantom | 331 |
| Figura 248 - Cortes OSPML-Quad com Original Phantom | 332 |
| Figura 249 - Cortes PML-Hybrid com Original Phantom | 333 |
| Figura 250 - Cortes PML-Quad com Original Phantom | 334 |
| Figura 251 - Cortes TIKH com Original Phantom | 335 |
| Figura 252 - Cortes GRAD com Original Phantom | 336 |

| | |
|--|-----|
| Figura 253 - Cortes CGLS com erro no Objeto Phantom | 337 |
| Figura 254 - Cortes FBP com erro no Objeto Phantom | 338 |
| Figura 255 - Cortes GRIDREC com erro no Objeto Phantom | 339 |
| Figura 256 - Cortes ART com erro no Objeto Phantom | 340 |
| Figura 257 - Cortes SIRT com erro no Objeto Phantom | 341 |
| Figura 258 - Cortes BART com erro no Objeto Phantom | 342 |
| Figura 259 - Cortes SART com erro no Objeto Phantom | 343 |
| Figura 260 - Cortes MLEM com erro no Objeto Phantom | 344 |
| Figura 261 - Cortes OSEM com erro no Objeto Phantom | 345 |
| Figura 262 - Cortes TV com erro no Objeto Phantom | 346 |
| Figura 263 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Objeto Phantom | 347 |
| Figura 264 - Cortes OSPML-Quad com erro no Objeto Phantom | 348 |
| Figura 265 - Cortes PML-Hybrid com erro no Objeto Phantom | 349 |
| Figura 266 - Cortes PML-Quad com erro no Objeto Phantom | 350 |
| Figura 267 - Cortes TIKH com erro no Objeto Phantom | 351 |
| Figura 268 - Cortes GRAD com erro no Objeto Phantom | 352 |
| Figura 269 - Cortes CGLS com erro no Sinograma Phantom | 353 |
| Figura 270 - Cortes FBP com erro no Sinograma Phantom | 354 |
| Figura 271 - Cortes GRIDREC com erro no Sinograma Phantom | 355 |
| Figura 272 - Cortes ART com erro no Sinograma Phantom | 356 |
| Figura 273 - Cortes SIRT com erro no Sinograma Phantom | 357 |
| Figura 274 - Cortes BART com erro no Sinograma Phantom | 358 |
| Figura 275 - Cortes SART com erro no Sinograma Phantom | 359 |
| Figura 276 - Cortes MLEM com erro no Sinograma Phantom | 360 |
| Figura 277 - Cortes OSEM com erro no Sinograma Phantom | 361 |
| Figura 278 - Cortes TV com erro no Sinograma Phantom | 362 |
| Figura 279 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom | 363 |
| Figura 280 - Cortes OSPML-Quad com erro no Sinograma Phantom | 364 |
| Figura 281 - Cortes PML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom | 365 |
| Figura 282 - Cortes PML-Quad com erro no Sinograma Phantom | 366 |
| Figura 283 - Cortes TIKH com erro no Sinograma Phantom | 367 |
| Figura 284 - Cortes GRAD com erro no Sinograma Phantom | 368 |
| Figura 285 - Cortes CGLS com Original Horus | 369 |
| Figura 286 - Cortes FBP com Original Horus | 370 |
| Figura 287 - Cortes GRIDREC com Original Horus | 371 |
| Figura 288 - Cortes ART com Original Horus | 372 |
| Figura 289 - Cortes SIRT com Original Horus | 373 |
| Figura 290 - Cortes BART com Original Horus | 374 |
| Figura 291 - Cortes SART com Original Horus | 375 |

| | |
|--|-----|
| Figura 292 - Cortes MLEM com Original Horus | 376 |
| Figura 293 - Cortes OSEM com Original Horus | 377 |
| Figura 294 - Cortes TV com Original Horus | 378 |
| Figura 295 - Cortes OSPML-Hybrid com Original Horus | 379 |
| Figura 296 - Cortes OSPML-Quad com Original Horus | 380 |
| Figura 297 - Cortes PML-Hybrid com Original Horus | 381 |
| Figura 298 - Cortes PML-Quad com Original Horus | 382 |
| Figura 299 - Cortes TIKH com Original Horus | 383 |
| Figura 300 - Cortes GRAD com Original Horus | 384 |
| Figura 301 - Cortes CGLS com erro no Objeto Horus | 385 |
| Figura 302 - Cortes FBP com erro no Objeto Horus | 386 |
| Figura 303 - Cortes GRIDREC com erro no Objeto Horus | 387 |
| Figura 304 - Cortes ART com erro no Objeto Horus | 388 |
| Figura 305 - Cortes SIRT com erro no Objeto Horus | 389 |
| Figura 306 - Cortes BART com erro no Objeto Horus | 390 |
| Figura 307 - Cortes SART com erro no Objeto Horus | 391 |
| Figura 308 - Cortes MLEM com erro no Objeto Horus | 392 |
| Figura 309 - Cortes OSEM com erro no Objeto Horus | 393 |
| Figura 310 - Cortes TV com erro no Objeto Horus | 394 |
| Figura 311 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Objeto Horus | 395 |
| Figura 312 - Cortes OSPML-Quad com erro no Objeto Horus | 396 |
| Figura 313 - Cortes PML-Hybrid com erro no Objeto Horus | 397 |
| Figura 314 - Cortes PML-Quad com erro no Objeto Horus | 398 |
| Figura 315 - Cortes TIKH com erro no Objeto Horus | 399 |
| Figura 316 - Cortes GRAD com erro no Objeto Horus | 400 |
| Figura 317 - Cortes CGLS com erro no Sinograma Horus | 401 |
| Figura 318 - Cortes FBP com erro no Sinograma Horus | 402 |
| Figura 319 - Cortes GRIDREC com erro no Sinograma Horus | 403 |
| Figura 320 - Cortes ART com erro no Sinograma Horus | 404 |
| Figura 321 - Cortes SIRT com erro no Sinograma Horus | 405 |
| Figura 322 - Cortes BART com erro no Sinograma Horus | 406 |
| Figura 323 - Cortes SART com erro no Sinograma Horus | 407 |
| Figura 324 - Cortes MLEM com erro no Sinograma Horus | 408 |
| Figura 325 - Cortes OSEM com erro no Sinograma Horus | 409 |
| Figura 326 - Cortes TV com erro no Sinograma Horus | 410 |
| Figura 327 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Horus | 411 |
| Figura 328 - Cortes OSPML-Quad com erro no Sinograma Horus | 412 |
| Figura 329 - Cortes PML-Hybrid com erro no Sinograma Horus | 413 |
| Figura 330 - Cortes PML-Quad com erro no Sinograma Horus | 414 |

| | |
|--|-----|
| Figura 331 - Cortes TIKH com erro no Sinograma Horus | 415 |
| Figura 332 - Cortes GRAD com erro no Sinograma Horus | 416 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela I - Elementos do SEL de aquisição | 30 |
| Tabela II - Elementos das equações da aquisição por geometria de feixes paralelos. | 34 |
| Tabela III - Elementos das equações do Teorema da Fatia | 39 |
| Tabela IV - Elementos do método de Kaczmarcz | 43 |
| Tabela V - Elementos do método GRAD | 49 |
| Tabela VI - Elementos do método CGLS | 52 |
| Tabela VII - Elementos do método de Tikhonov | 54 |
| Tabela VIII - Elementos do método de Variação Total | 56 |
| Tabela IX - Elementos do método MLEM | 59 |
| Tabela X - Variáveis utilizadas nas equações do MSE, MDA, PSNR e MSSIM. . . | 69 |
| Tabela XI - Variáveis das equações do SSIM | 70 |
| Tabela XII - Elementos da equação da distribuição gaussiana | 91 |
| Tabela XIII - Parâmetros e medidas de erro utilizadas neste trabalho | 91 |
| Tabela XIV - Parâmetros das funções dos métodos de reconstrução | 93 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---------|---|
| ART | <i>Algebraic Reconstruction Technique</i> |
| BART | <i>Block Algebraic Reconstruction Technique</i> |
| FBP | <i>Filtered Back-Projection</i> |
| FDP | Função Distribuição de Probabilidade |
| GCLS | <i>Conjugate Gradient Least Squares</i> |
| CG | <i>Conjugate Gradient</i> |
| GRAD | <i>Gradient descent method</i> |
| GRIDREC | <i>Fourier Grid Reconstruction</i> |
| MDA | Média da Diferença Absoluta |
| MLEM | <i>Maximum-Likelihood Expectation Maximization</i> |
| MSE | <i>Mean Squared Error</i> |
| MSSIM | <i>Mean Structural Similarity Index</i> |
| OSEM | <i>Ordered-Subset Expectation-Maximization</i> |
| OSPM-H | <i>Ordered-Subset Penalized Maximum Likelihood with weighted linear and quadratic penalties</i> |
| OSPML-Q | <i>Ordered-Subset Penalized Maximum Likelihood with Quadratic penalties</i> |
| PML-H | <i>Penalized Maximum Likelihood with weighted linear and quadratic penalties</i> |
| PML-Q | <i>Penalized Maximum Likelihood with Quadratic penalty</i> |
| PSNR | <i>Peak Signal to Noise Ratio</i> |
| SART | <i>Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique</i> |
| SEL | Sistema de Equações Lineares |
| SIRT | <i>Simultaneous Iterative Reconstruction technique</i> |
| TV | <i>Total Variation reconstruction technique</i> |
| VA | Variável Aleatória |
| VE | Valor Esperado |
| TIKH | <i>Tikhonov regularization with identity tikhonov matrix</i> |

SUMÁRIO

| | | |
|---------|--|----|
| | INTRODUÇÃO | 22 |
| 1 | RECONSTRUÇÃO A PARTIR DE PROJEÇÕES (TOMOGRÁFIA) | 27 |
| 1.1 | Aquisição de projeções | 28 |
| 1.1.1 | <u>Métodos de Aquisição</u> | 29 |
| 1.1.2 | <u>Medição e Informação</u> | 30 |
| 1.1.3 | <u>Geometria de Feixes Paralelos - PBG</u> | 31 |
| 1.1.3.1 | Implementação do Método de Aquisição PBG | 34 |
| 1.2 | Reconstrução de Imagens a partir de projeções | 35 |
| 1.2.1 | <u>Sistemas Mal-Condicionados</u> | 35 |
| 1.2.2 | <u>Desenvolvimento de Técnicas de Reconstrução Tomográfica</u> | 36 |
| 1.3 | Técnicas de reconstrução | 37 |
| 1.3.1 | <u>Baseados em Fourier</u> | 37 |
| 1.3.1.1 | FBP | 40 |
| 1.3.1.2 | GRIDREC | 41 |
| 1.3.2 | <u>Baseados em Kaczmarz</u> | 42 |
| 1.3.2.1 | ART | 45 |
| 1.3.2.2 | SIRT | 46 |
| 1.3.2.3 | BART | 47 |
| 1.3.2.4 | SART | 47 |
| 1.3.3 | <u>Baseados em Gradiente</u> | 49 |
| 1.3.3.1 | GRAD | 49 |
| 1.3.3.2 | GCLS | 51 |
| 1.3.4 | <u>Baseados em Regularização</u> | 53 |
| 1.3.4.1 | Regularização de Tikhonov com Matriz Identidade - TIKH | 53 |
| 1.3.4.2 | Variação Total - TV | 55 |
| 1.3.5 | <u>Baseados em MLE</u> | 57 |
| 1.3.5.1 | Métodos MLEM | 57 |
| 1.3.5.2 | Métodos PML | 62 |
| 2 | PROPOSTA PARA A AVALIAÇÃO DE TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO INVERSA EM TOMOGRAFIA | 65 |
| 2.1 | Metodologias de avaliação das técnicas de reconstrução | 65 |
| 2.1.1 | <u>Sem corrupção do Objeto-Alvo Original ou do Sinograma</u> | 65 |
| 2.1.2 | <u>Com corrupção por erro gradual no Sinograma</u> | 66 |
| 2.1.3 | <u>Com corrupção por erro gradual no Objeto-Alvo</u> | 67 |
| 2.2 | Índices de Qualidade | 68 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 2.2.1 | <u>Índice de Qualidade Agregado</u> | 72 |
| 2.3 | Conjunto de Dados dos Experimentos | 72 |
| 2.3.1 | <u>Objetos-Alvo</u> | 74 |
| 2.3.1.1 | Objeto-Alvo Engrenagem | 74 |
| 2.3.1.2 | Objeto-Alvo Horus | 79 |
| 2.3.1.3 | Objeto-Alvo Phantom | 84 |
| 2.3.2 | <u>Conjunto de Sinogramas Corrompidos</u> | 89 |
| 2.3.2.1 | Possíveis fontes de erro de um caso concreto genérico | 89 |
| 2.3.2.2 | Modelagem das fontes de erro | 90 |
| 3 | SIMULAÇÕES E RESULTADOS | 92 |
| 3.1 | Recursos Computacionais | 92 |
| 3.2 | Parâmetros das funções dos algoritmos de reconstrução | 93 |
| 3.3 | Análise do Custo Computacional das Técnicas de Reconstrução | 93 |
| 3.4 | Resultados Obtidos | 95 |
| 3.4.1 | <u>Qualidade em Função do Nível de Intensidade do Ruído</u> | 95 |
| 3.4.2 | <u>Qualidade da Reconstrução Por Algoritmo</u> | 96 |
| 3.4.3 | <u>Índices Agregados de Qualidade por Algoritmos</u> | 97 |
| 3.4.4 | <u>Cortes das Reconstruções Obtidas</u> | 97 |
| 3.5 | Análise dos Resultados: Qualidade, Estabilidade e Convergência das Técnicas de Reconstrução | 98 |
| 4 | CONCLUSÃO | 102 |
| | REFERÊNCIAS | 104 |
| A | CURVAS DE QUALIDADE POR ITERAÇÃO, AGRUPADAS POR NÍVEL DE CORRUPÇÃO | 107 |
| B | CURVAS DE QUALIDADE POR ITERAÇÃO, AGRUPADAS POR ALGORITMO | 168 |
| C | CURVAS DE DESEMPENHO POR NÍVEL DE CORRUPÇÃO | 265 |
| D | CORTES DAS RECONSTRUÇÕES OBTIDAS | 272 |

INTRODUÇÃO

O problema tomográfico consiste em obter uma imagem da seção-reta (*corte*) de um objeto-alvo a partir de um conjunto de projeções (KAK; SLANEY, 1988). Técnicas de tomografia possuem um amplo leque de aplicações: saúde, neurociência, indústria, arquitetura, arqueologia, biologia, física, astronomia, segurança, salvamento entre outras. (KAK; SLANEY, 1988).

O processo tomográfico é composto por duas etapas: *aquisição* e *reconstrução*. A *aquisição* tem por objetivo a obtenção do *sinograma* - o diagrama que representa a descrição do objeto-alvo no domínio de projeção. A partir do *sinograma*, uma imagem da seção-reta do objeto-alvo pode ser obtida por meio de um processo de *reconstrução* (KAK; SLANEY, 1988).

As referências consideradas para este trabalho trazem uma grande variedade de algoritmos de reconstrução tomográfica. Tal fato destaca a necessidade de um método comparativo para apoiar a seleção de um algoritmo de reconstrução para uma aplicação específica.

Objetivo

Em função da motivação acima, este trabalho tem como objetivos:

1. Desenvolver uma metodologia para a análise comparativa de algoritmos de reconstrução tomográfica.
2. Investigação e estudo dos algoritmos de reconstrução tomográfica mais citados na bibliografia;
3. Investigação e estudo de quatro métricas de qualidade aplicadas ao problema proposto.

Contribuição

Este trabalho oferece como contribuições:

1. Proposta de um método para comparar algoritmos de reconstrução tomográfica;
2. Proposta de um Índice de Qualidade Agregado, que sintetize as informações das curvas de qualidade das reconstruções fornecidas por cada algoritmo, ao longo das

iterações e para diferentes níveis de ruído;

3. Resultado da aplicação do método proposto na investigação e estudo de dezesseis algoritmos clássicos de reconstrução tomográfica;
4. Conclusões sobre a estabilidade, qualidade das reconstruções, tempo de convergência e custo computacional dos algoritmos avaliados.

Comparação Descritiva

A avaliação da bibliografia listada ao fim desse trabalho identificou dezesseis algoritmos de reconstrução tomográfica mais recorrentes. Eles compõem o grupo de algoritmos a ser estudado neste trabalho. No contexto da comparação descritiva, os algoritmos foram agrupados de acordo com seus princípios de funcionamento. Os dezesseis algoritmos de reconstrução tomográfica analisados são agrupados em cinco classe:

1. Algébricos (Baseados em *Kaczmarcz*)(KACZMARZ, 1937):
 - (a) ART (GORDON; BENDER; HERMAN, 1970),
 - (b) BART (KAK; SLANEY, 1988),
 - (c) SIRT (KAK; SLANEY, 1988),
 - (d) SART (ANDERSEN; KAK, 1984).
2. Freqüenciais (Baseados em *Fourier*):
 - (a) FBP (SHEPP; LOGAN, 1974),
 - (b) GRIDREC (DOWD et al., 1999).
3. Estatísticos (Baseados em *Maximum Likelihood Estimation*) :
 - (a) MLEM (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977),
 - (b) OSEM (HUDSON; LARKIN, 1994),
 - (c) PML-H (CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004),
 - (d) PML-Q (CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004),
 - (e) OSPML-H (CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004),
 - (f) OSPML-Q (CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004).
4. Regularizados (Baseados em *Tikhonov*):
 - (a) TV (CHAMBOLLE; POCK, 2011),

- (b) TIKH (YING; XU; LIANG, 2004).
- 5. Diferenciais (Baseados em Gradiente Descendente):
 - (a) CGLS (HESTENES; STIEFEL et al., 1952),
 - (b) GRAD (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

Comparação Quantitativa

No contexto da comparação quantitativa, os algoritmos processaram um conjunto comum de dados, composto por um total de sessenta imagens geradas por meio de adição progressiva de erro em duas etapas distintas do processo de aquisição simulada. Simulamos a aquisição de três (3) objetos-alvo (imagens base) advindos de diferentes áreas de aplicação, não correlacionadas e com características específicas:

1. Saúde,
2. Arquitetura,
3. Indústria.

As demais imagens são obtidas ao corromper progressivamente o processo de aquisição, por meio de adição de ruído gaussiano. As suas intensidades são medidas (e ajustadas) pela métrica *Peak Signal to Noise Ratio* (PSNR) experimentalmente (isto é, observacionalmente) considerando o seu impacto no discernimento de elementos/estruturas das imagens corrompidas.

A adição progressiva de ruído ocorre de duas formas distintas:

1. 50% das imagens degradadas são geradas pela adição de ruído à imagem íntegra do objeto-alvo;
2. 50% das imagens degradadas são geradas pela adição de ruído à projeção total (o sinograma) da imagem íntegra do objeto-alvo.

Adiciona-se o ruído em diferentes etapas do processo de aquisição visando simular preliminarmente as diferentes características dos problemas que podem ocorrer durante a aquisição do sinograma. Em geral, tais diferenças derivam dos fenômenos físicos associados à obtenção dos pontos de projeção em cada domínio de aplicação.

Cada imagem reconstruída obtida, ao longo de cinquenta iterações, em cada um dos dezesseis algoritmos, tem sua qualidade avaliada usando quatro métricas:

1. *Mean Squared Error* (MSE),

2. *Peak Signal to Noise Ratio* (PSNR),
3. *Mean Structural Similarity Index* (MSSIM),
4. Média da Diferença Absoluta (MDA).

Além disso, o tempo de processamento da primeira iteração de cada um dos dezesseis algoritmos é medido para avaliar o custo computacional da reconstrução.

Comparação Qualitativa

No contexto da comparação qualitativa, cortes das sequências de imagens reconstruídas por cada algoritmo são avaliados, tanto estruturalmente quanto por meio de índices estatísticos.

Organização

O Capítulo 1 aborda o problema tomográfico analisando suas etapas, dificuldades e abordagens de solução. Destaque especial é dado à aquisição por feixes paralelos e a dezesseis técnicas de reconstrução recorrentemente citadas na bibliografia deste trabalho, os quais foram agrupados em cinco (5) classes. O método de avaliação proposto é apresentado no Capítulo 2, por meio da explicação de sua estrutura geral, elementos constituintes, decisões de modelagem e métricas utilizadas. O Capítulo 3 traz as simulações e os resultados obtidos. Nele, têm-se uma descrição detalhada da aplicação do método proposto na análise dos dezesseis algoritmos de reconstrução, exemplos e uma discussão dos resultados obtidos são apresentados. O Capítulo 4 apresenta a síntese dos resultados e oferece apontamentos sobre a estabilidade, desempenho, eficácia e resiliência ao ruído dos algoritmos avaliados, oferecendo ao final algumas conclusões e sugestões de desdobramentos para este trabalho.

Além dos capítulos acima mencionados, este trabalho traz apêndices com todos os resultados gerados apresentados graficamente. Optou-se por apresentar esses gráficos em apêndices para melhor fluência de leitura. Os dois primeiros apêndices compõem a base para a análise quantitativa entre os algoritmos de reconstrução e apresentam as curvas de qualidade das reconstruções em função das iterações, para diferentes níveis de corrupção e medidas de qualidade. O Apêndice A apresenta as curvas de qualidade agrupadas por nível de corrupção. Enquanto isso, o Apêndice B apresenta as mesmas curvas de qualidade, mas agrupadas por algoritmo. O Apêndice C apresenta as curvas de desempenho sugeridas neste trabalho, formadas com base nos dados das curvas dos apêndices anteri-

ores. As curvas no Apêndice C propõem uma síntese do que contêm os dois apêndices anteriores. O Apêndice D traz cortes das reconstruções obtidas que servem de base para a análise qualitativa. Limiares estatísticos de média, desvio padrão e limiar de Otsu (OTSU, 1979) são traçados nas imagens de cortes das reconstruções para avaliar a capacidade de diferenciação das estruturas ao longo dos cortes.

1 RECONSTRUÇÃO A PARTIR DE PROJEÇÕES (TOMOGRAFIA)

A área de Tomografia é centrada no problema de obter uma imagem da seção-reta (*corte*) de um objeto-alvo, de forma indireta, não-invasiva, a partir de um conjunto de projeções. A primeira abordagem de formulação matemática para o problema da reconstrução de um objeto a partir de suas projeções remonta ao artigo de Radon, de 1917 (RADON, 1917). Quanto à primeira abordagem no campo da Engenharia, a invenção do escâner tomográfico computadorizado de raios-x por Hounsfield e a co-implementação dos algoritmos por Allan Cormack garantiram-lhes o prêmio Nobel de 1972 (KAK; SLANEY, 1988).

O processo tomográfico possui duas etapas fundamentais:

Aquisição: Consiste na obtenção da representação completa de um objeto-alvo por meio de um conjunto de pontos de projeção (medições). Trata-se de um problema de natureza direta. O objetivo é a obtenção do *sinograma* - o diagrama que representa a descrição do objeto-alvo no domínio de projeção (KAK; SLANEY, 1988). Esta etapa será abordada em detalhes na subseção seguinte.

Reconstrução: A partir do *sinograma*, uma imagem da seção-reta do objeto-alvo pode ser obtida por meio de um processo de reconstrução. Trata-se de um problema de natureza inversa. Este será o tema da maior parte deste trabalho; coberto em detalhes nas Seções 1.2 e 1.3.

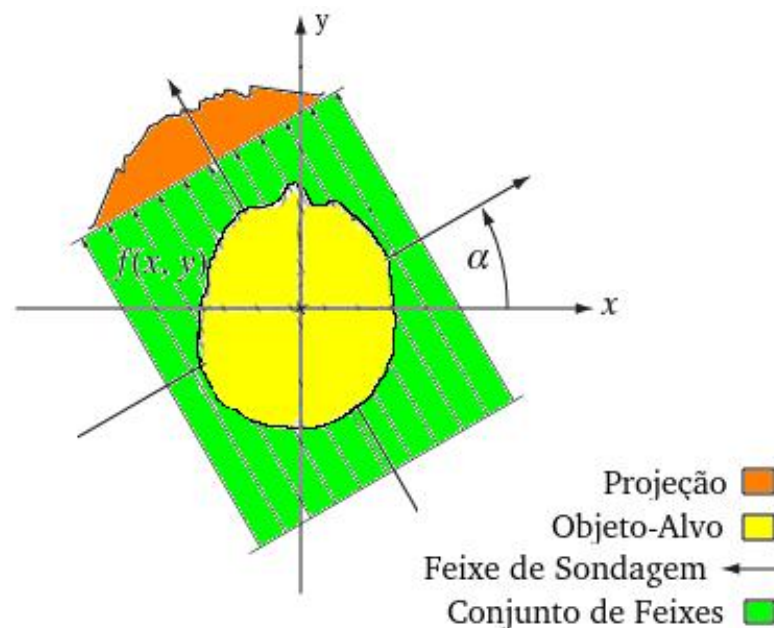


Figura 1 - Aquisição por feixes paralelos - PBG

Fonte: (KAK; SLANEY, 1988)

O *ponto de projeção* é o elemento base, fundamental, do processo de aquisição de dados sobre o objeto-alvo, visando sua posterior reconstrução. Equivale a amostragem individual, de uma medida pontual, do objeto-alvo (KAK; SLANEY, 1988). Um *ponto de projeção* é obtido a partir da integral de linha das interações de um *feixe de sondagem* ao longo do seu percurso linear. A interação é medida em função da interceptação de frações do objeto-alvo (Região em amarelo, Figura 1) no percurso do feixe de sondagem (Setas paralelas, Figura 1) (KAK; SLANEY, 1988).

O conjunto de *pontos de projeção* orientados de forma a fornecer a amostragem completa de um dos lados do objeto-alvo é chamado simplesmente de *projeção*. Didaticamente, é possível estabelecer uma analogia entre a projeção e uma sombra do objeto-alvo tomada em uma direção específica. Um exemplo de *projeção* pode ser observado na Figura 1 (Região laranja) (KAK; SLANEY, 1988).

Um conjunto de projeções do objeto-alvo, não correlacionadas, obtidas de diferentes direções, permite a descrição completa deste objeto-alvo na forma de um *sinograma*.

A partir deste, uma imagem da seção-reta (corte) de um objeto-alvo pode ser obtida por meio de um processo de reconstrução (KAK; SLANEY, 1988). O presente trabalho tem como escopo a etapa de reconstrução.

1.1 Aquisição de projeções

A *aquisição* é o processo de obtenção de um conjunto de *pontos de projeção* (medidas) de um objeto-alvo, de forma a descrevê-lo completamente no *domínio de projeção*. O processo completo de aquisição fornece um *sinograma*.

Usamos o termo *ponto de projeção* para referir a esse valor de medida do objeto-alvo neste documento. O conjunto total de *pontos de projeção* ordenados de forma a cobrir uma lateral completa do objeto-alvo chama-se, simplesmente, *projeção* (KAK; SLANEY, 1988). O *Sinograma* é a representação do objeto-alvo no *domínio de projeção*; cada pixel deste diagrama representa um *ponto de projeção*.

O valor medido em um *ponto de projeção* é a soma das interações de um feixe, equivalente a uma integral de linha ao longo de seu percurso linear na área de sondagem. A interceptação de frações de um *objeto-alvo* possivelmente presente na *área de sondagem* tem relação direta com a informação de interesse contida em cada *ponto de projeção* (KAK; SLANEY, 1988). A interação do feixe de sondagem com os pixels ao longo do seu percurso linear é uma grandeza que depende da técnica de sondagem e dos materiais presentes no objeto-alvo (KAK; SLANEY, 1988).

Dessa dependência da aplicação quanto a modelagem da interação, derivam famílias de abordagens de modelagem matemática distintas:

1. Abordagem Geométrica: o problema é modelado de forma discreta; define-se uma entidade (ou unidade) geométrica fundamental. A área de sondagem, o raio de sondagem (feixe), o percurso do raio de sondagem e o objeto-alvo são modelados como conjuntos da unidade geométrica fundamental. A interação é interpretada como a área da interseção entre os elementos geométricos (KAK; SLANEY, 1988).
2. Abordagem Algébrica: o problema é remodelado de forma a priorizar a aplicação de uma ferramenta matemática específica, afastando-se da representação geométrica literal. São exemplos de representação: as representações vetoriais e por séries de funções (KAK; SLANEY, 1988).
3. Abordagem Probabilística: variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade associadas ao processo de aquisição são identificadas e associadas aos objetos das abordagens anteriores. Em geral, essas formulações se originam dos fenômenos físicos específicos que influenciam a aquisição dos pontos de projeção na aplicação em questão (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977; HUDSON; LARKIN, 1994).

Num contexto físico, a abordagem clássica para a interpretação do processo de interação é considerá-lo uma medida de absorção da potência do raio de sondagem. A diferença entre a potência total emitida e a detectada no ponto de projeção define o valor do ponto de projeção (KAK; SLANEY, 1988).

1.1.1 Métodos de Aquisição

Quando falamos de método de aquisição fazemos referência à disposição geométrica dos feixes empregados para a aquisição das medidas. Pode-se dizer que as diferenças entre estes métodos residem principalmente em dois aspectos:

1. Geometria do feixe de sondagem.

O feixe pode ser interpretado como uma linha, uma faixa, ou um setor circular. A natureza física do feixe utilizado, as características da área de sondagem, os recursos técnicos disponíveis e a otimização do processo de implementação para a aplicação alvo influenciam a escolha da geometria do feixe (KAK; SLANEY, 1988).

2. Geometria da disposição dos feixes de sondagem.

A disposição dos feixes pode ser dividida em dois grandes grupos:

- (a) A geometria de feixes paralelos foi a primeira a ser desenvolvida e é largamente

utilizada para introdução ao tema (KAK; SLANEY, 1988). Por causa disso, o presente trabalho é desenvolvido com base no método de aquisição de geometria de feixes paralelos.

- (b) A abordagem com feixes oblíquos é a família de métodos de aquisição mais empregada hoje; seu desenvolvimento advém da predominância de estruturas circulares em diversas aplicações e da evolução dos projetos de equipamentos de tomografia (KAK; SLANEY, 1988).

Neste trabalho, consideramos aquisições de um único plano de corte. Isso restringe as análises a aplicações e métodos de aquisição em duas dimensões. Todos os feixes de sondagem, pontos de projeção e projeções são co-planares.

1.1.2 Medição e Informação

A intenção do processo de aquisição é obter um grupo de medidas da interação entre os feixes de sondagem e o objeto-alvo. Cada medida individual que compõe o processo de aquisição é chamado neste trabalho de *ponto de projeção*. Quando um conjunto de pontos de projeção fornece descrição completa de um lado do objeto, dizemos que obtemos uma *projeção* (KAK; SLANEY, 1988).

A medida da interação de um feixe com a área de sondagem define um subconjunto de incógnitas do problema, representável na forma de uma equação algébrica; a seção transversal (corte) da área de sondagem a ser reconstruída é representada por uma matriz de incógnitas (KAK; SLANEY, 1988). A modelagem matemática do problema de aquisição pode ser realizada usando o *sistema de equações lineares*, SEL,

$$p_i = \sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j ; i = 1, 2, \dots, I \text{ e } j = 1, 2, \dots, J, \quad (1.1.1)$$

onde os elementos que compõem este SEL de aquisição estão descritos na Tabela I.

Tabela I - Elementos do SEL de aquisição

| Parâmetro | Descrição |
|------------|--|
| θ | Vetor imagem (Objeto-Alvo) |
| a_{ij} | Iteração entre o raio de sondagem i e o pixel j do objeto-alvo |
| θ_j | Medida do pixel j do objeto-alvo |
| p_i | Ponto de projeção medido pelo feixe de sondagem i |
| I | Total de pontos de projeção p_i |
| J | Total de células da área de sondagem. θ_j |

A imagem de corte desejada, caso exista, estará contida no conjunto solução deste SEL (KAK;

SLANEY, 1988).

É necessário garantir que o número de feixes (equações) seja maior ou igual ao número de incógnitas (total de pixels que compõem o corte). Tal fato é uma exigência para a obtenção de um SEL com resolução possível. Além disso, a presença de erro nas projeções adquiridas adiciona demanda pelo aumento do número de feixes em relação ao número de incógnitas, para viabilizar a obtenção de um SEL com resolução possível (KAK; SLANEY, 1988).

Do exposto, a matriz de coeficientes do SEL, \mathbf{A} , que representa um processo de aquisição típico apresenta as seguintes características:

1. Tem ordem maior ou igual ao número de pixels que compõem a área de sondagem;
2. É uma matriz com um número grande de elementos;
3. É significativamente esparsa, pois a grande maioria dos seus elementos são iguais a zero;

A demanda por métodos de resolução de SEL com tais características orientou o desenvolvimento de distintos métodos de reconstrução, em geral baseados em algoritmos de resolução iterativa (KAK; SLANEY, 1988). Veremos alguns deles na Seção 1.3.

1.1.3 Geometria de Feixes Paralelos - PBG

O problema da aquisição é composto pelos seguintes elementos: *Área de Sondagem*, *Objeto-Alvo*, *Feixes de Sondagem*, *Pontos de Projeção*, *Projeção* e *Sinograma*

A *área de sondagem* é uma região que possivelmente contém um *objeto-alvo* (em amarelo da Figura 2), sendo a sua localização, seu contorno e sua descrição interna a motivação para aplicação do processo de aquisição (KAK; SLANEY, 1988). A unidade fundamental do processo de aquisição é o *ponto de projeção* (setas da Figura 2) onde se medem os efeitos da interação de um feixe de sondagem com a área de sondagem ao longo do percurso linear realizado pelo feixe (KAK; SLANEY, 1988). A Tabela II traz os elementos da modelagem do problema.

A equação da reta em coordenadas cartesianas (x e y) com sua representação clássica em função do coeficiente de inclinação (a) e de interseção (b) é

$$ax + b = y. \tag{1.1.2}$$

A implementação do processo de aquisição sugere a possibilidade de abordagens mais adequadas à representação do problema. A geometria de feixes paralelos (*Parallel Beam*

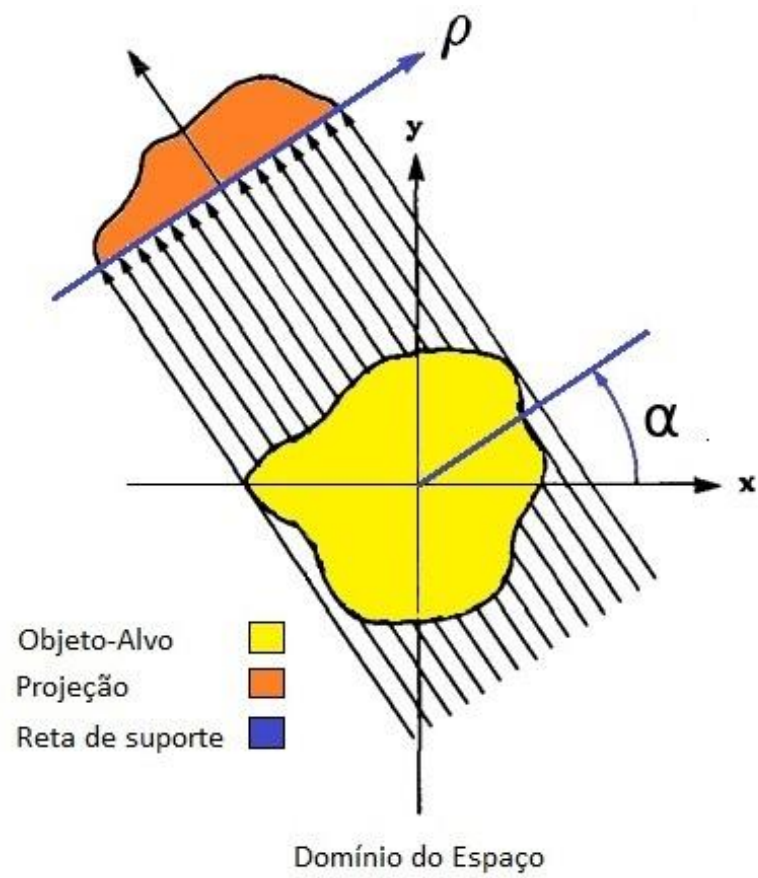


Figura 2 - Projeção por feixes paralelos - PBG

Fonte: (KAK; SLANEY, 1988)

Geometry - PBG) é ilustrada na Figura 2. Os elementos que compõem a PBG estão descritos na Tabela II.

No PBG, a área é sondada por K grupos de J feixes paralelos. Cada grupo é definido pelo ângulo (α) da reta normal de referência e ρ define a posição do feixe no grupo (k). A mudança do referencial cartesiano para o referencial normal fornece

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \rho, \quad (1.1.3)$$

que consiste em uma nova representação da reta, simplificando o processo ao utilizar variáveis diretamente associadas ao problema de aquisição. Os feixes de sondagem são representados pelas setas que atravessam o objeto alvo (amarelo) na Figura 2.

A expressão geral dos *pontos de projeção* da aquisição PBG obtidos na área de sondagem $\Theta(x, y)$ é dada pela transformada de Radon (RADON, 1917),

$$p(\alpha, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x, y) \delta(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho) dy dx, \quad (1.1.4)$$

e sua representação no domínio discreto é

$$p(\alpha, \rho) \approx \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \Theta(x, y) \delta(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho), \quad (1.1.5)$$

onde $p(\alpha, \rho)$ representa a interação entre um feixe e um possível objeto-alvo na área de sondagem. Para um ângulo α_k fixo, $p(\alpha_k, \rho)$ fornece a expressão geral dos pontos de projeção do grupo ou *projeção* (k). A Figura 2 apresenta a aquisição de uma projeção (laranja) do objeto-alvo (amarelo). O conjunto de K *projeções*, cada uma com J *pontos de projeção*, fornece um *sinograma* com dimensões $J \times K$.

Esse foi o primeiro método de aquisição e ainda é utilizado em muitas aplicações (KAK; SLANEY, 1988; CAMPOS; LOVISOLO; CAMPOS, 2018); assim o consideramos neste trabalho.

A *reconstrução* parte do *sinograma* para obter a seção-reta (corte) do objeto-alvo varrida pelos feixes co-planares (KAK; SLANEY, 1988; RADON, 1917) – uma imagem. Seguindo para uma modelagem algébrica, podemos representar o corte desejado como uma matriz (imagem); cada elemento dessa matriz irá depender de suas interações com todos os raios de sondagem que o atravessam (KAK; SLANEY, 1988). Dessa forma, temos o SEL

$$p_i = \sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j, \quad i = 1, \dots, I \text{ e } j = 1, \dots, J, \quad (1.1.6)$$

onde, p_i é o ponto de projeção (medida) correspondente ao raio de sondagem i , θ_j é o pixel

Tabela II - Elementos das equações da aquisição por geometria de feixes paralelos.

| Parâmetro | Descrição |
|---------------------|---|
| $\Theta(x, y)$ | Representação Cartesiana da área de sondagem |
| x | Primeira coordenada linear da área de sondagem |
| y | Segunda coordenada linear da área de sondagem |
| $p(\alpha, \rho)$ | Equação geral dos <i>Pontos de Projeção</i> |
| ρ_j | Coordenada linear de um <i>Ponto de Projeção</i> |
| J | Total de <i>Pontos de Projeção</i> por grupo ou <i>Projeção</i> . |
| α_k | Coordenada angular de um <i>Ponto de Projeção</i> |
| k | Índice dos grupos de feixes e das projeções k |
| K | Total de grupos de feixes e das projeções |
| $p(\alpha_k, \rho)$ | Equação geral dos <i>Pontos de Projeção</i> que compõem a <i>Projeção k</i> |
| $\delta(\cdot)$ | Função Impulso |

j da imagem e $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_J]$ é o vetor imagem e a_{ij} representa o coeficiente de interação entre o raio de sondagem i e o pixel j na área sondada (\mathbf{A} é o operador aquisição) (KAK; SLANEY, 1988).

Ao utilizar notação vetorial na Equação (1.1.6), obtemos uma apresentação mais compacta,

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^T, \quad (1.1.7)$$

onde \mathbf{p} é o conjunto de pontos de projeção que compõem o processo de aquisição (sinograma), $\boldsymbol{\theta}^T$ é o vetor imagem transposto que representa a área de sondagem (possivelmente contendo um objeto-alvo) e \mathbf{A} é o operador aquisição (KAK; SLANEY, 1988).

1.1.3.1 Implementação do Método de Aquisição PBG

Neste estudo, simulamos o processo de aquisição. A simulação é tal que:

1. Foi implementada em Python (versão 3.10.0);
2. Utiliza-se as funções da biblioteca TomoPy (GÜRSOY et al., 2014);
3. O processo de aquisição foi realizado apenas em duas dimensões, visando a obtenção de um corte;
4. A aresta do pixel define também a largura geométrica máxima de um feixe de sondagem;
5. Foram definidos 360 ângulos de projeção igualmente distribuídos no entorno do objeto alvo;

6. Cada ângulo, $\alpha_p = [0; 359]$, define a correspondente reta normal de referência, associada a uma projeção;
7. Cada projeção é composta por 128 pontos de projeção, onde $\rho_p = [0; 127]$ representa a posição do respectivo feixe de sondagem na reta normal de referência;
8. O resultado do processo de aquisição é normalizado para o intervalo $I = [0; 1]$.

1.2 Reconstrução de Imagens a partir de projeções

O problema da reconstrução a partir de projeções é considerado do tipo *inverso*, pois não há acesso direto aos dados desejados. Tal problema é ainda *mal-condicionado* (KIRSCH, 2021; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

1.2.1 Sistemas Mal-Condicionados

Segundo Hadamard, o sistema de equações lineares (SEL) que representa um problema mal-condicionado não apresenta alguma das seguintes características (KIRSCH, 2021) :

1. A solução depende continuamente dos dados (estabilidade): o requisito de estabilidade é o mais importante. Se um problema carece da propriedade de estabilidade, então sua solução é praticamente impossível de calcular, já que qualquer medição ou cálculo numérico apresentará erros significativos, imprevisíveis e inevitáveis. Se a solução de um problema não depende continuamente dos dados, então, em geral, a solução computada será inadequadamente distinta da verdadeira solução (KIRSCH, 2021; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).
2. Existe uma solução do problema (existência): a presença de erro nos dados de projeção pode tornar o problema insolúvel (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Matematicamente, sob tal condição, a existência de uma solução pode ser obtida com a ampliação adequada do espaço da solução (KIRSCH, 2021).
3. Existe no máximo uma solução do problema (unicidade): em geral, limitações do processo de aquisição e presença de ruído impedem a obtenção de uma única solução (KIRSCH, 2021; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

A obtenção de mais dados sobre o problema possui potencial de contribuir para a possível obtenção das características tais que o SEL seja bem-condicionado ou reduzir o impacto dessas dificuldades no desempenho de métodos iterativos de resolução de um SEL mal-condicionado. No caso estudado, a principal forma de obter mais informações na prática

é garantindo um número de pontos de projeção maior que o número de pixels (as dimensões) da imagem (matriz) reconstruída. No limite, tal abordagem leva a um SEL sobre-determinado (KIRSCH, 2021).

1.2.2 Desenvolvimento de Técnicas de Reconstrução Tomográfica

Com base em toda a bibliografia apresentada, os seguintes pontos podem ser observados sobre o cenário geral do desenvolvimento de técnicas de reconstrução tomográfica:

1. O problema de reconstrução tomográfica possui um conjunto significativo de dificuldades gerais;

O fato de ser um problema do tipo inverso e mal-condicionado garante dificuldade significativa ao desenvolvimento de técnicas de reconstrução tomográfica.

2. Alta demanda de desenvolvimento por técnicas de reconstrução tomográfica;

Com base em toda a bibliografia apresentada, foi possível observar que as possibilidades oferecidas pela tomografia nas mais variadas áreas de aplicação garantem alto valor agregado ao tema. As dificuldades inerentes ao problema tomográfico agregam ainda mais valor a quaisquer contribuições sugeridas neste campo de estudo.

3. As técnicas de reconstrução tomográfica possuem motivações de criação distintas;

Com base em toda a bibliografia apresentada, foi possível observar que cada técnica de reconstrução tomográfica estudada teve como fonte de motivação uma área de aplicação específica; as características de tal área de aplicação contribuem diretamente no conjunto de características do algoritmo. Essa contribuição é crescente ao longo do histórico de estudo do tema.

4. Área de aplicação potencialmente extensível para além da área de aplicação que motivou o desenvolvimento do referido algoritmo.

Com base em toda a bibliografia apresentada, foi possível observar que, em geral, a área de aplicação que motivou o desenvolvimento do algoritmo não impediu o seu uso em outras aplicações.

As distintas motivações de aplicação, modelagens matemáticas, estratégias de aproximações para a implementação computacional e ferramentas utilizadas estão diretamente relacionadas com o grau de eficiência de cada algoritmo de reconstrução. Não há impedimento quanto a utilização de uma técnica de reconstrução tomográfica fora da sua área de aplicação motivante, porém também não há garantias de que o algoritmo mais eficiente em uma área de aplicação específica também o seja para uma outras aplicações. Tal

fato destaca a relevância de dispor de um método de avaliação comparativa dos diferentes algoritmos de reconstrução.

1.3 Técnicas de reconstrução

A reconstrução é o processo de transformação dos dados do domínio de projeção para o domínio de imagem, obtendo como resultado uma seção-reta (corte) do objeto-alvo (KAK; SLANEY, 1988). Diversos algoritmos foram desenvolvidos para esse fim, contornando diferentes dificuldades e advogando diferentes vantagens. Em geral eles indicam os seguintes objetivos específicos (KAK; SLANEY, 1988) :

- Redução da quantidade total de pontos de projeção exigidos;
- Redução da exigência de distribuição uniforme, regular, dos pontos de projeção;
- Redução do tempo de convergência para obter uma solução ótima;
- Aumento da eficiência computacional;
- Aumento da qualidade da reconstrução (a imagem obtida);
- Aumento da tolerância a erros nas projeções;
- Melhoria da relação entre custo computacional e resolução.

A seguir, revisitamos os métodos de reconstrução inversa avaliados neste trabalho.

1.3.1 Baseados em Fourier

Todos os métodos ditos da família de Fourier compartilham as seguintes características (KAK; SLANEY, 1988; GABOR, 2009; NATTERER, 2001; SHEPP; LOGAN, 1974):

1. São baseados na transformada de Fourier e em especial no teorema da fatia de Fourier;
2. São métodos não-iterativos;
3. Demandam a aplicação de um método de interpolação em alguma etapa do processo;
4. Exige uma disposição de projeções uniformemente distribuídas ao longo do contorno do Objeto-Alvo.
5. Apresentam alta eficiência computacional;

6. Obtêm imagens reconstruídas com qualidade satisfatória;

A alta eficiência computacional desse grupo de métodos é justificada pela utilização da Transformada Rápida de Fourier, FFT, para resolver as operações de convolução (KAK; SLANEY, 1988; GABOR, 2009; NATTERER, 2001; SHEPP; LOGAN, 1974).

O teorema da fatia é um ponto comum de desenvolvimento dos algoritmos de reconstrução baseados em Fourier (KAK; SLANEY, 1988; GABOR, 2009; NATTERER, 2001; SHEPP; LOGAN, 1974). Os elementos do teorema da Fatia estão descritos na Tabela III.

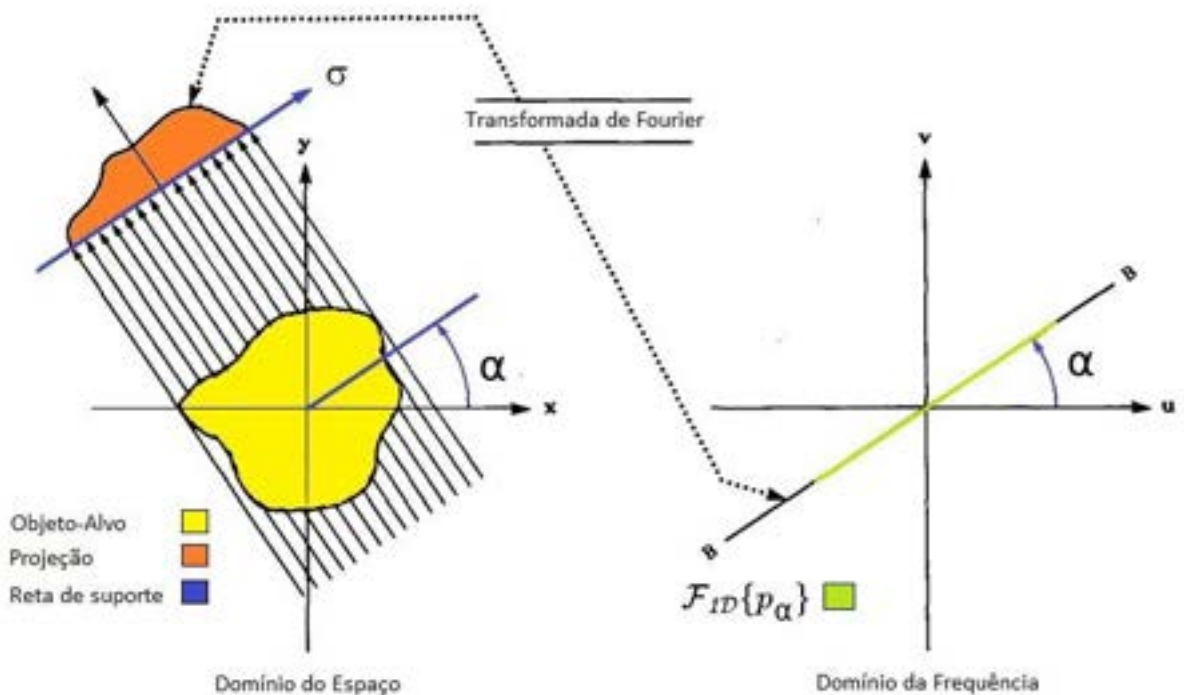


Figura 3 - Teorema da Fatia de Fourier

Fonte: (KAK; SLANEY, 1988)

Consideremos inicialmente a representação cartesiana da área de sondagem $\Theta(x, y)$ e sua transformada de Fourier 2D $F(u, v)$, da seguinte forma

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy, \quad (1.3.1)$$

onde o par ordenado $[x, y]$ representa as coordenadas espaciais da área de sondagem e $[u, v]$ representa as coordenadas espectrais. O objeto-alvo contido em $\Theta(x, y)$ esta representado em amarelo na Figura 3.

Consideremos agora uma projeção $p(\rho, \alpha_k)$, representada em laranja na Figura 3, e sua transformada de Fourier 1D $S(w, \alpha_k)$ da seguinte forma

$$S(w, \alpha_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\rho, \alpha_k) e^{-j2\pi w\rho} d\rho, \quad (1.3.2)$$

Tabela III - Elementos das equações do Teorema da Fatia

| Parâmetro | Descrição |
|---------------------|---|
| $p(\rho, \alpha_k)$ | Projeção com ângulo α_k . |
| ρ | Coordenada linear do feixe de um ponto de projeção. |
| α | Coordenada angular do feixe de um ponto de projeção. |
| $S(w, \alpha_k)$ | Transformada de Fourier 1D, de $p(\rho, \alpha_k)$. |
| w | Variável frequência; relacionada a ρ . |
| $\Theta(x, y)$ | Representação Cartesiana da área de sondagem; Domínio do Espaço |
| x | Primeira coordenada linear; Domínio do Espaço. |
| y | Segunda coordenada linear; Domínio do Espaço. |
| $F(u, v)$ | Transformada de Fourier 2D, de $\Theta(x, y)$. |
| u | Primeira coordenada linear ($u = w \cos \alpha$); Domínio de Fourier. |
| v | Segunda coordenada linear ($v = w \sin \alpha$); Domínio de Fourier. |

onde ρ é a variável independente que representa a posição linear do feixe associado ao respectivo ponto de projeção e α_k é um ângulo específico, que define uma projeção k , ou conjunto k de pontos de projeção (KAK; SLANEY, 1988).

Substituindo $p(\rho, \alpha_k)$ pela transformada de Radon, separando os termos e aplicando a propriedade do impulso, obtemos

$$S(w, \alpha_k) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \right]_{u=w \cos \alpha_k; v=w \sin \alpha_k}, \quad (1.3.3)$$

onde tornamos evidente uma relação entre a transformada de Fourier 2D de $\Theta(x, y)$ e a transformada de Fourier 1D de $p(\rho, \alpha_k)$, conforme

$$S(w, \alpha_k) = [F(u, v)]_{u=w \cos \alpha_k; v=w \sin \alpha_k} = F(w \cos \alpha_k, w \sin \alpha_k). \quad (1.3.4)$$

Dessa forma, vemos que a transformada de Fourier 1D de uma projeção é uma fatia da transformada de Fourier 2D da imagem alvo; uma fatia está representada em verde claro na Figura 3. Esta operação, aplicada para todos os valores de α , nos permite compor inteiramente a imagem original $\Theta(x, y)$ (KAK; SLANEY, 1988).

É possível obter $\Theta(x, y)$ diretamente pela transformada inversa de Fourier de $F(u, v)$, porém este método apresenta um alto custo computacional por demandar a inversão de uma transformada 2D. Além disso, a reconstrução obtida pela aplicação direta do método da fatia de Fourier original apresenta uma qualidade inaceitável para usos práticos (borramento). A busca por melhorar a qualidade das imagens reconstruídas e de reduzir o custo computacional levou ao desenvolvimento do algoritmo da próxima seção (KAK; SLANEY, 1988).

1.3.1.1 FBP

O FBP, *Filtered Back-Projection*, foi desenvolvido visando aplicação na área de saúde, especificamente, imageamento por raios-X (SHEPP; LOGAN, 1974). O FBP apresenta um grande histórico de aplicação, especialmente na área médica. Uma de suas principais vantagens é a baixa demanda computacional, quando comparado com métodos algébricos. Essa vantagem advém do uso do domínio de Fourier para implementar operações de convolução, através do Teorema da fatia de Fourier (KAK; SLANEY, 1988; GABOR, 2009; NATTERER, 2001; SHEPP; LOGAN, 1974).

A quantidade de projeções adquiridas em uma aplicação é sempre finita. Por causa disso, o diagrama de espectral obtido a partir da composição de projeções é sempre incompleto na prática, apresentando o aspecto de uma grade polar (linhas e pontos em verde na Figura 4). Visando corrigir essa limitação, um processo de interpolação é aplicado para obter a complementação necessária (região em roxo da Figura 4). Essa abordagem apresenta um erro intrínseco de alta frequência, originado da aplicação do método de interpolação em um diagrama com estrutura radial (Tabela III)(KAK; SLANEY, 1988; GABOR, 2009; NATTERER, 2001; SHEPP; LOGAN, 1974).

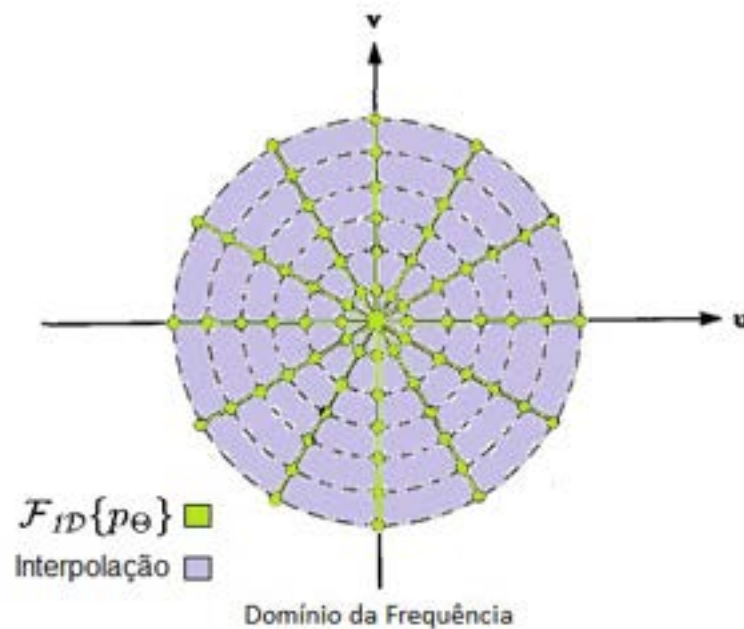


Figura 4 - Sobreposição dos pontos médios das transformadas de Fourier 1D das projeções (verde) e interpolação (roxo)

Fonte: (KAK; SLANEY, 1988)

Uma filtragem de cada ponto de projeção no domínio de Fourier é executada. A obtenção

da imagem reconstruída pelo FBP é dada por

$$\Theta(x, y) = \int_0^\pi \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |w| S(w, \alpha) e^{-j2\pi w \rho} dw \right]_{\rho=x \cos \alpha + y \sin \alpha} \right\} d\alpha, \quad (1.3.5)$$

onde $|w|$ representa uma função filtro unidimensional janelada no domínio de Fourier e o uso do tipo rampa é um exemplo clássico (KAK; SLANEY, 1988). O objetivo da filtragem é reduzir a ênfase das altas frequências que, em muitos casos, representam principalmente corrupções inerentes a aplicação do método da fatia de Fourier à modelagem do processo de aquisição PBG.

Operações de convolução possuem equivalência a operações de produto no domínio de Fourier, reduzindo assim o custo computacional da aplicação de processos de filtragem. Apresentando de forma matemática, temos

$$\Theta(x, y) = \int_0^\pi \left[s(\rho) \star p(\rho, \alpha) \right]_{\rho=x \cos \alpha + y \sin \alpha} d\alpha, \quad (1.3.6)$$

onde $s(\rho)$ é o filtro no domínio espacial e $p(\rho, \alpha)$ é a projeção no domínio espacial.

A implementação utilizada nos testes está presente na biblioteca ASTRA Toolbox (AARLE et al., 2016). Todos os algoritmos da família de Fourier utilizaram como parâmetro o filtro Sheep-Logan.

1.3.1.2 GRIDREC

O GIRIDREC, *Fourier grid reconstruction algorithm*, foi desenvolvido a partir de uma motivação proveniente dos escopos de aplicação da radioastronomia e imageamento por luz síncrotron (DOWD et al., 1999).

Como no FBP, a transformada de Fourier 1D de cada projeção é obtida e um conjunto de diagramas espectrais 1D é formado (KAK; SLANEY, 1988); e os diagramas espectrais 1D de cada projeção são dispostos, sobrepondo seus respectivos pontos médios, de forma a compor uma grade polar no domínio da frequência, formando um único diagrama espectral 2D (GABOR, 2009). E, também como no FBP, a grade polar formada no diagrama espectral 2D apresenta espacialidade radial (GABOR, 2009; KAK; SLANEY, 1988).

Para viabilizar a aplicação da FFT, e assim reduzir o custo computacional, a grade polar do diagrama espectral obtido precisa ser previamente convertida para uma grade cartesiana. Esta etapa caracteriza a principal proposta do GRIDREC (DOWD et al., 1999; GABOR, 2009). A solução mais tradicional para essa conversão do espaço de coordenadas polares para cartesianas no domínio da frequência é o uso de algum tipo de interpolação local. Essa abordagem possui uma fonte de erro associada ao caráter radial das projeções,

degradando informações contidas em elementos de alta frequência (DOWD et al., 1999).

O GRIDREC, visando aproveitar as peculiaridades do domínio da frequência, como a operação de convolução, sugere substituir a interpolação por um processo de filtragem (DOWD et al., 1999). O kernel do processo de filtragem proposto é composto por pesos de correção, os quais são obtidos em função das não-uniformidades das respectivas células polares do diagrama espectral dos dados de origem (DOWD et al., 1999). A obtenção da IFFT do diagrama espectral filtrado fornece a imagem de reconstrução, com erros provenientes da aplicação do filtro.

Assim, uma segunda filtragem, no domínio espacial, é aplicada de forma a corrigir os erros que resultam da filtragem no domínio da frequência, para fornecer a versão final da imagem de reconstrução.

A implementação utilizada nos testes está presente na biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014). Todos os algoritmos da família de Fourier utilizaram como parâmetro o filtro Sheep-Logan.

1.3.2 Baseados em Kaczmarz

No processo de aquisição das projeções de um objeto-alvo, contido em uma área de sondagem, cada conjunto de interações entre um feixe e o objeto-alvo, ao longo da trajetória do feixe em linha reta, é modelado por uma equação linear ou *hiperplano*. O conjunto total de iterações que compõem o processo de aquisição define o conjunto de I hiperplanos, representados no SEL

$$p_i = \sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j, \quad i = 1, 2, \dots, I, j = \{1, 2, \dots, J\} \quad (1.3.7)$$

no qual, a aquisição de cada ponto de projeção p_i é representada por um hiperplano i . A interação do objeto-alvo θ ao longo do hiperplano i é representada por θ_j , com $j = \{1, 2, \dots, J\}$ (KAK; SLANEY, 1988).

Como vimos, o problema da reconstrução a partir de um conjunto de projeções é do tipo inverso e apresenta características de mal-condicionamento; dessa forma o SEL obtido torna-se de solução difícil por meio de abordagem de resolução direta (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Uma abordagem comum para a solução de um SEL mal-condicionado é a aplicação de métodos de resolução iterativa (KIRSCH, 2021). O método de Kaczmarz (KACZMARZ, 1937) é a base de diversos métodos de resolução iterativa. A interpretação de Landweber, 1957, é um desenvolvimento do método de Kaczmarz bastante referenciado (NATTERER, 2001).

Tabela IV - Elementos do método de Kaczmarcz

| Parâmetro | Descrição |
|------------------|---|
| $\Theta(x, y)$ | Representação Cartesiana da área de sondagem (imagem) |
| θ | Representação vetorizada da área de sondagem $\Theta(x, y)$ |
| θ_j | Pixel j da área de sondagem |
| \mathbf{A} | Operador Aquisição |
| a_{ij} | Elemento de \mathbf{A} . Coeficiente de interação entre o feixe i e o pixel j . |
| \mathbf{a}_i | Vetor de interação entre o feixe i e θ ; representação do hiperplano i . |
| \mathbf{p} | Conjunto completo de pontos de projeção (sinograma) |
| p_i | Ponto de projeção medido, correspondente ao feixe i |
| y_i | Ponto de projeção estimado, correspondente ao feixe i (calculado) |
| i | Índice dos pontos de projeção e dos feixes (Linha de \mathbf{A}) |
| j | Índice dos pixels da área de sondagem (Coluna de \mathbf{A}) |
| k | Índice de iterações do algoritmo (01 processamento do sinograma) |
| J | Total de células na área de sondagem |
| I | Total de feixes no processo de aquisição |
| K | Total de iterações do algoritmo (01 processamento do sinograma) |
| $\theta^{(i)}$ | Vetor Atual. Entrada da interação i do algoritmo. |
| $\theta^{(i+1)}$ | Vetor Aprimorado. Saída da interação i do algoritmo. |
| J_i | Total de pixels que compõem o feixe i |
| L_i | Comprimento normalizado do feixe i |

O método consiste no rebatimento (projeção vetorial) do vetor de entrada $\theta^{(i)}$ no hiperplano $i+1$, visando obter um novo vetor aprimorado $\theta^{(i+1)}$, conforme

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} - [\langle \theta^{(i)}, \mathbf{a}_{(i+1)} \rangle - p_{(i+1)}] \left[\frac{\mathbf{a}_{(i+1)}}{\langle \mathbf{a}_{(i+1)}, \mathbf{a}_{(i+1)} \rangle} \right], \quad (1.3.8)$$

onde o termo $\langle \theta^{(i)}, \mathbf{a}_{(i+1)} \rangle$ é o produto interno entre o vetor de entrada (representação atual do objeto-alvo) e o vetor de coeficientes do hiperplano seguinte, pelo qual obtém-se a estimativa de ponto de projeção $y_{(i+1)}$, correspondente ao vetor de saída (representação aprimorada do objeto-alvo); o termo $[\langle \theta^{(i)}, \mathbf{a}_{(i+1)} \rangle - p_{(i+1)}]$ representa o erro da estimativa i , $e_i = y_{(i+1)} - p_{(i+1)}$; e o termo $\left[\frac{\mathbf{a}_{(i+1)}}{\langle \mathbf{a}_{(i+1)}, \mathbf{a}_{(i+1)} \rangle} \right]$ é o vetor unitário do hiperplano i , definidor da direção da projeção (vetor de saída).

A repetição iterativa da projeção vetorial serial nos demais hiperplanos do SEL de aquisição fornece um algoritmo que converge na direção da solução do problema tomográfico (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019; NATTERER, 2001).

É possível observar que a tendência à ortogonalidade entre os hiperplanos proporciona maior velocidade de convergência (o que é observável em verde claro, Figura 5) (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019; NATTERER, 2001).

Na prática, a implementação do algoritmo de Kaczmarcz demanda a consideração de aproximações para viabilizar sua execução no ambiente computacional (NATTERER,

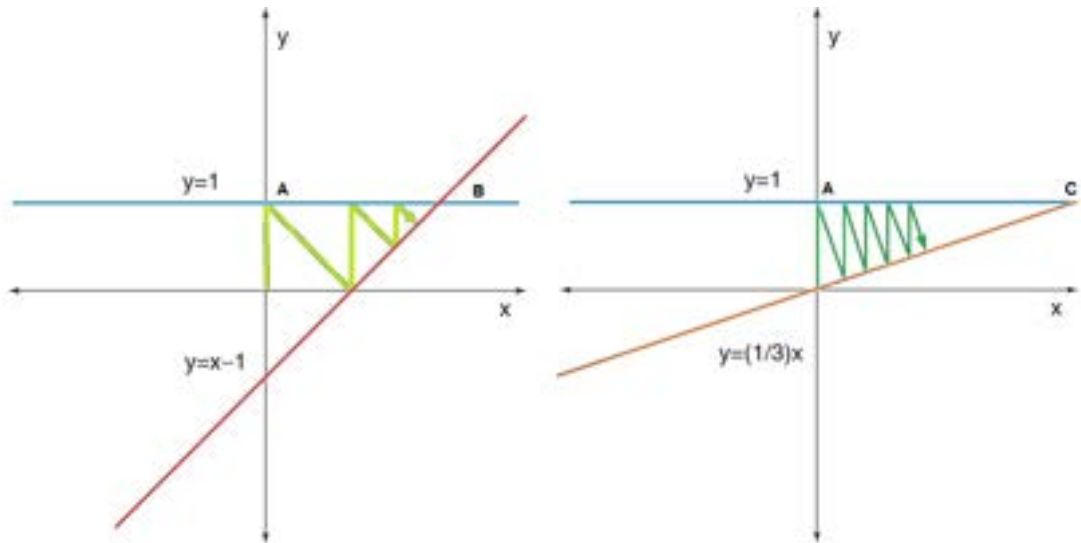


Figura 5 - Exemplo do algoritmo de Kaczmarcz para um SEL de duas equações com uma variável independente.

Fonte: (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019)

2001). Cada conjunto de estratégias de aproximação define um método de reconstrução da família algébrica.

Os algoritmos de reconstrução ditos algébricos apresentam abordagens interpretativas distintas do algoritmo de Kaczmarcs em aspectos como:

1. Estratégias de aproximações para o meio digital;
2. Abordagens interpretativas para o processo de interação entre o raio de sondagem e os pixels que compõem o seu percurso;
3. Regras de agrupamento das informações para o cálculo da correção;
4. Regras para aplicar as correções na imagem de entrada para obter a imagem de saída da iteração.

Em geral, os algoritmos desta família apresentam as seguintes características:

1. São iterativos;
2. Aceitam uma imagem inicial com informação sobre os dados (que inicialmente pode ser aleatória);
3. Possuem alta tolerância a conjuntos de pontos de projeção incompletos;
4. São significativamente mais custosos computacionalmente quando comparados com métodos baseados em Fourier.

Vejamos alguns deles.

1.3.2.1 ART

O ART, *Algebraic Reconstruction Technique*, foi desenvolvido a partir de uma motivação proveniente dos escopos de aplicação da microscopia eletrônica e imageamento por raios-X. O ART tem como característica principal gerar e aplicar uma correção para cada ponto de projeção, compondo assim uma interação (GORDON; BENDER; HERMAN, 1970).

No ART, precursor da aplicação do método de Kaczmarcz, um feixe é definido como uma região geométrica entre duas linhas paralelas. As interações de um feixe com todos os pixels em seu trajeto retilíneo permitem a obtenção de um ponto de projeção; processo este modelado na forma de uma equação linear, representando um hiperplano. Se o feixe cruza o centro do pixel, então este é interceptado pelo trajeto do feixe e irá contribuir para o valor da projeção. O conjunto de hiperplanos obtidos ao fim do processo de aquisição forma um sistema de equações lineares (KAK; SLANEY, 1988). Os elementos da modelagem ART estão listados na Tabela IV.

Os elementos do Operador Aquisição \mathbf{A} , a_{ij} , cujos elementos são os coeficientes do SEL, que representam o processo de aquisição, recebem uma aproximação binária; codificam a interceptação ou não do centro da j -ésima célula pelo i -ésimo feixe (KAK; SLANEY, 1988; GABOR, 2009; NATTERER, 2001). Esta simplificação permite uma aproximação do método de Kaczmarcz, conforme

$$\Delta\theta_j^{(i+1)} = \theta_j^{(i+1)} - \theta_j^{(i)} = \frac{(p^{(i+1)} - y^{(i+1)})}{\sum_{j=1}^J a_{(i+1)j}^2} a_{(i+1)j} \approx \frac{(p^{(i+1)} - y^{(i+1)})}{J_i} \approx \frac{p_i}{L_i} - \frac{y_i}{J_i}, \quad (1.3.9)$$

onde tanto o processo de cálculo de correção, quanto a aplicação da correção, ocorrem levando em consideração um hiperplano por vez; os pontos de projeção são processados de forma individual, o resultado do processamento numa iteração alimenta a seguinte. O ART apresenta baixo consumo computacional para alcançar uma solução quando comparado a outros algoritmos algébricos (KAK; SLANEY, 1988).

É importante destacar que o ART fornece uma reconstrução satisfatória após o processamento de I iterações, pois assim completa-se um processamento de todo o conjunto \mathbf{p} (sinograma) de pontos de projeção p_i . Os demais algoritmos iterativos estudados neste trabalho processam todo o sinograma \mathbf{p} para cada iteração k , apresentando assim uma imagem reconstruída satisfatória já na primeira iteração. Neste trabalho, visando padronizar o conceito e permitir a comparação, a iteração k de cada um dos algoritmos estudados só foi computada após o processamento de todo o sinograma \mathbf{p} .

A implementação utilizada nos testes está presente na biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014). Nesta implementação, uma iteração k do ART refere-se ao processamento de todo o sinograma \mathbf{p} .

1.3.2.2 SIRT

O SIRT, *Simultaneous Iterative Reconstruction Technique* se origina da microscopia eletrônica e imageamento por raios-X. O SIRT deriva-se do ART principalmente por gerar e aplicar uma única correção simultaneamente para o total de pontos de projeção por iteração (GORDON; BENDER; HERMAN, 1970). Obtém imagens com melhor qualidade que o ART, ao preço de uma convergência mais lenta (KAK; SLANEY, 1988).

No SIRT, as correções do ART são calculadas individualmente a cada ponto de projeção p_i , porém não são aplicadas computadas e sim armazenadas (KAK; SLANEY, 1988). Após a obtenção de todas as correções do conjunto de pontos de projeção (sinograma) \mathbf{p} , um valor médio de todas as correções é obtido para estabelecer uma única correção para a iteração k do SIRT, a qual é aplicada ao vetor anterior, $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ para gerar um novo vetor aprimorado $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ (KAK; SLANEY, 1988).

Os algoritmos ART e SIRT sofrem uma redução de eficácia no processo de convergência iterativa, causadas pelas aproximações computacionais aplicadas ao método de Kaczmarcz (KAK; SLANEY, 1988). Ao corrigir os valores das células após processar todos os hiperplanos do sistema, o SIRT resulta em reconstruções de melhor qualidade que o ART, pois reduz a manifestação de erros intatos à aproximação acima mencionada (KAK; SLANEY, 1988).

Observa-se que em função da presença de estruturas, pontos de projeção obtidos serialmente de um objeto-alvo apresentam alta correlação entre si decorrente da proximidade geométrica (os hiper-planos atravessam as mesmas estruturas). De fato, o processamento serial das medidas é o que apresenta pior desempenho (KAK; SLANEY, 1988).

Assim, uma ordenação apropriada dos feixes pode contribuir para a eficácia e eficiência da reconstrução. Tal potencial para melhora decorre de que diferentes medidas apresentam quantidades de informação distintas sobre o objeto. Processar primeiramente as medidas com mais informação contribui para a aceleração da tendência de convergência do algoritmo (KAK; SLANEY, 1988). Algoritmos mais sofisticados propõem a ordenação de forma a garantir um ângulo máximo entre as projeções, obtendo assim uma convergência mais rápida (KAK; SLANEY, 1988).

A implementação do SIRT utilizada nos testes está presente na biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014).

1.3.2.3 BART

O BART, *Block Algebraic Reconstruction Technique*, é um desdobramento do ART e do SIRT, visando inclusive a paralelização do algoritmo (GORDON; BENDER; HERMAN, 1970). O BART difere do SIRT por processar subgrupos, blocos, ou regiões da área de sondagem, definidos em função das coordenadas espaciais da área de sondagem, dos dados obtidos pela aquisição. Cada bloco é processado paralelamente usando o ART ou SIRT. O processamento de todos os blocos, de forma paralela e independente, compõe uma iteração completa do algoritmo BART.

A implementação do BART utilizada nos testes está presente na biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014). Neste trabalho, a implementação do algoritmo BART foi configurada para operar com 03 blocos.

1.3.2.4 SART

O SART, *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique*, é um desenvolvimento à partir do ART e do SIRT (ANDERSEN; KAK, 1984), visando aprimoramentos para as áreas de aplicação da microscopia eletrônica e imageamento por raios-X. Comparando as propostas SIRT, BART e SART, fica caracterizado que há mais propostas de mudança neste último. O SART se caracteriza por atingir o seu máximo de qualidade nas reconstruções com poucas iterações, vindo a perder qualidade nas iterações seguintes (KAK; SLANEY, 1988).

O SART abandona a reconstrução dos pixels em favor de elementos bilineares com o objetivo de reduzir erros de aproximação (KAK; SLANEY, 1988). Considere a modelagem algébrica tradicional do problema de reconstrução a partir de suas projeções na forma do SEL, conforme

$$p_i = \sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j; \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (1.3.10)$$

Considere a relação que define o conjunto de pontos que compõem o trajeto linear do feixe de sondagem r_i , onde uma vez que o par ordenado (x, y) pertença ao raio de sondagem i seu valor será zero

$$r_i(x, y) = 0. \quad (1.3.11)$$

Considere a projeção de r_i sobre a área de sondagem do objeto-alvo

$$p_i = R_i \Theta(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x, y) \delta(r_i(x, y)) dx dy \quad (1.3.12)$$

O SART propõe a representação de $\Theta(x, y)$ como uma soma finita de N funções bilineares é uma boa aproximação. Isto é,

$$\Theta(x, y) \approx \hat{\Theta}(x, y) \equiv \sum_{j=1}^J g_j b_j(x, y), \quad (1.3.13)$$

onde $b_j(x, y)$ é uma função bilinear que representa a interceptação ou não de um pixel da área de sondagem pelo feixe de sondagem, tal que

$$b_j(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se não há interceptação} \\ 1, & \text{se há interceptação} \end{cases}. \quad (1.3.14)$$

e g_j representa o grupo de coeficientes da expansão, representando um conjunto finito de pontos que descrevem a imagem $\Theta(x, y)$, relacionado ao conjunto de bases escolhido $b_j(X, y)$.

Aplicando a substituição $\Theta(x, y) \approx \hat{\Theta}(x, y)$ na equação de projeção p_i , tem-se

$$p_i = R_i \Theta(x, y) \approx R_i \hat{\Theta}(x, y) = \sum_{j=1}^J g_j R_i b_j(x, y) = \sum_{j=1}^J g_j a_{ij}. \quad (1.3.15)$$

Reinterpretando a geometria do problema, visando a simplicidade algébrica, os termos bilineares que compõem a projeção são equivalentes a soma de pontos, dois a dois, equidistantes. Assim,

$$p_i \approx \sum_{m=1}^{M_i} \hat{f}(S_{im}) \Delta S \quad (1.3.16)$$

$$\hat{f}(S_{im}) = \sum_{j=1}^J d_{ijm} g_j \text{ para } m = 1, 2, \dots, M_i \text{ e temos} \quad (1.3.17)$$

$$p_i \approx \sum_{m=1}^{M_i} \hat{\Theta}(S_{im}) \Delta S = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^{M_i} d_{ijm} g_j \Delta S, \quad 1 \leq i \leq J \quad (1.3.18)$$

Se a_{ij} representa o efeito líquido das transformações lineares do i -ésimo raio para a j -ésima célula

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{M_i} d_{ijm} \Delta S, \quad (1.3.19)$$

obtemos a aproximação de uma projeção

$$p_i = \sum_{m=1}^{M_i} a_{ij} g_j, \quad 1 \leq i \leq J. \quad (1.3.20)$$

Os hiperplanos, representação algébrica dos raios de sondagem, são reordenados de forma a maximizar os ângulos entre eles; condição esta que otimiza o desempenho do algoritmo. Os termos de correção são obtidos por raio e armazenados. Uma janela de Hamming longitudinal, ao longo de cada raio, é aplicada. O objetivo é enfatizar as correções aplicadas de forma decrescente a partir do centro do comprimento do feixe. Ao fim do processamento de todos os raios, uma média de correção é obtida e aplicada para todos os raios que compõem a projeção (KAK; SLANEY, 1988).

A implementação SART utilizada neste trabalho está presente na biblioteca Python Sci-Image (WALT et al., 2014).

1.3.3 Baseados em Gradiente

1.3.3.1 GRAD

O GRAD, *Gradient Descent*, é um método de reconstrução tomográfica que utiliza a técnica do gradiente descendente, GD. A partir do SEL que modela o processo de aquisição, uma função de custo é obtida. A otimização desta função de custo pelo GD oferece um conjunto de soluções para o referido SEL, uma delas é a imagem da seção-reta do Objeto-Alvo (LUENBERGER; YE et al., 1984). O processo é exemplificado qualitativamente na Figura 6. Os elementos da modelagem GRAD são apresentados na tabela V.

Tabela V - Elementos do método GRAD

| Parâmetro | Descrição |
|---------------------------------------|--|
| \mathbf{A} | Operador Aquisição (ou Operador Projeção) |
| k | Índice da iteração |
| $\mathbf{y}^{(k)}$ | Conjunto de projeções estimadas na iteração n |
| \mathbf{p} | Projeção medida (Projeção original, esperada) |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ | Estimativa anterior (imagem vetorizada) |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ | Estimativa aprimorada (imagem vetorizada) |
| $\mathbf{e}^{(k)}$ | Conjunto de Erros da iteração k |
| E | Erro resultante da rede para uma entrada de dado |
| η | Taxa de aprimoramento |
| $\nabla E(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$ | Gradiente da função de custo no ponto $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ |
| ∂ | Diferencial parcial |
| j | Índice dos pixels do objeto alvo $\boldsymbol{\theta}$, com j pixels totais |

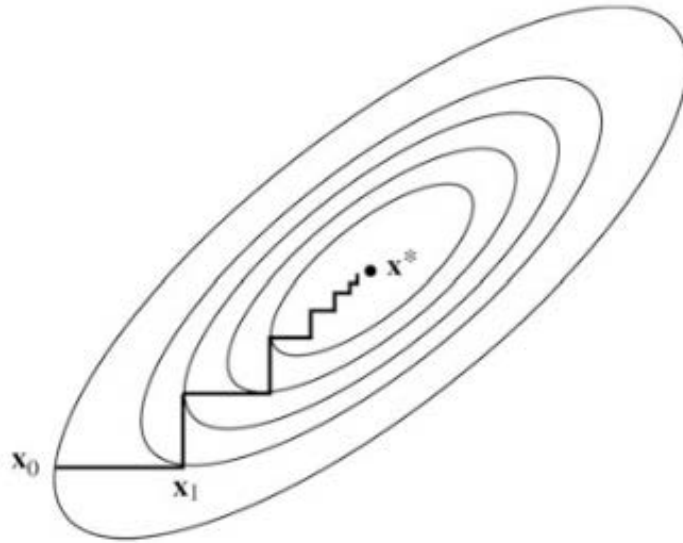


Figura 6 - Ilustração do método Gradiente Descendente.

Fonte: (LUENBERGER; YE et al., 1984)

Considere o Operador Aquisição, \mathbf{A} , atuando sobre uma representação estimada para o objeto-alvo, $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Como resultado temos um conjunto de projeções estimadas correspondentes $\mathbf{y}^{(k)}$, conforme

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{\theta}^{(k)}]^T. \quad (1.3.21)$$

O erro $\mathbf{e}^{(k)}$ entre o conjunto de pontos de projeção (sinograma), \mathbf{p} , provindo do processo de aquisição, e o conjunto de projeções estimadas, com base na imagem reconstruída na iteração k , $\mathbf{y}^{(k)}$, é

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{p} - \mathbf{y}^{(k)}. \quad (1.3.22)$$

A partir dela, podemos definir a função de custo clássica, o erro médio quadrático,

$$\text{MSE}(k) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (e_j^{(k)})^2 = E(k). \quad (1.3.23)$$

A derivada parcial da função custo $E(k)$ em função do hiper-ponto $\boldsymbol{\theta}$ é

$$\frac{\partial E(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}(k)} = \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{y}(k)} \frac{\partial \mathbf{y}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}(k)} = \frac{\partial E(k)}{\partial \mathbf{y}(k)} \frac{\partial \mathbf{y}(k)}{\partial \mathbf{j}(k)} \frac{\partial \mathbf{j}(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}(k)}. \quad (1.3.24)$$

De posse do gradiente, obtém-se o termo de correção (LUENBERGER; YE et al., 1984).

A etapa é formulada conforme

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^{(k)} = -\nabla E(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = -\eta \frac{\partial E(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}(k)} A(k). \quad (1.3.25)$$

Com isso, a aplicação da correção na reconstrução da iteração atual, $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$, permite a obtenção da estimativa aprimorada seguinte $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ (LUENBERGER; YE et al., 1984). O processo é dado por

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \eta \Delta\boldsymbol{\theta}^{(k)} A^{(k)}. \quad (1.3.26)$$

A implementação utilizada do GRAD nos testes advém da biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014).

1.3.3.2 GCLS

O CGLS, *Conjugate Gradient Least Squares*, é um método de otimização de problemas de mínimos quadrados. Na abordagem deste estudo, o CGLS é aplicado na modelagem do problema de reconstrução proposta e sua solução oferece a reconstrução do objeto-alvo desejada (HESTENES; STIEFEL et al., 1952; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

Nesta abordagem, o SEL que representa a modelagem do problema de reconstrução de um objeto-alvo a partir de suas projeções é convertido em um problema de otimização, centrado em uma função de custo de mínimos quadrados (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

O CGLS é um desenvolvimento do CG, *Conjugate Gradient*, adequado à resolução de problemas de mínimos quadrados (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

O CG é motivado pelo fato de que a otimização por gradiente descendente em um grupo de vetores mutualmente ortogonais (conjugados) ocorre de forma significativamente mais eficiente do que em um grupo de vetores quaisquer (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Dessa forma, o CG equivale a operação do método do Gradiente Descendente em uma representação dos vetores projeção do problema onde estes sejam ortogonais entre si (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Os elementos da modelagem CGLS são apresentados na Tabela VI.

Primeiramente, modelamos o SEL de aquisição da forma de um problema de mínimos quadrados (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

Ao aplicarmos o Operador Aquisição \mathbf{A} à estimativa do objeto-alvo $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ temos a projeção

Tabela VI - Elementos do método CGLS

| Parâmetro | Descrição |
|-------------------------------|--|
| $\ \cdot \ _2$ | Norma L_2 ou Euclidiana |
| k | Índice da iteração |
| \mathbf{A} | Operador Aquisição (ou Operador Projeção) |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ | Reconstrução anterior (variável) |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ | Reconstrução aprimorada (variável) |
| \mathbf{p} | Grupo de projeções do Objeto-Alvo (Sinograma) |
| \mathbf{y} | Grupo de projeções estimadas do Objeto-Alvo |
| \mathbf{e} | Grupo de valores de erro entre as projeções \mathbf{p} e \mathbf{y} do Objeto-Alvo |

estimada $\mathbf{y}^{(k)}$, conforme Equação (1.3.27).

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \quad (1.3.27)$$

A diferença entre o conjunto de pontos de projeção estimados $\mathbf{y}^{(k)}$ e o conjunto de pontos de projeção medidos (sinograma) \mathbf{p} fornece um correspondente conjunto de erros $\mathbf{e}^{(k)}$, conforme

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{p} - \mathbf{y}^{(k)}. \quad (1.3.28)$$

Considere o conjunto de erros $\mathbf{e}^{(k)}$ da diferença entre o conjunto de pontos de projeção medidos do objeto-alvo (sinograma) \mathbf{p} e o conjunto de pontos de projeção estimados desse objeto-alvo $\mathbf{y}^{(k)}$, conforme

$$\mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)}. \quad (1.3.29)$$

A melhor estimativa do Objeto-Alvo $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ é o valor que minimiza o erro quadrático $\| \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \|_2^2$, conforme

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{U}} \left\{ (1/2) \| \mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \|_2^2 \right\}, \quad (1.3.30)$$

onde a constante $(1/2)$ não altera a tendência geral da função e mostra-se conveniente para futuros desenvolvimentos algébricos.

Por questões didáticas, a equação acima é apresentada na forma de somatório, conforme

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{U}} \left\{ (1/2) \sum_{i=1}^I (p_i - \sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j^{(k)})^2 \right\}. \quad (1.3.31)$$

O problema pode ser apresentado na forma de erro quadrático, conforme

$$\| \mathbf{e}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \|_2^2 = \| \mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \|_2^2 = [\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)})(\mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)})}]^2. \quad (1.3.32)$$

Com o problema reformatado em uma função de custo de mínimos quadrados, a sua minimização está associada diretamente a busca da solução do SEL original (HESTENES; STIEFEL et al., 1952).

Observando a apresentação algébrica do problema na forma de erro quadrático, observa-se que o conjunto de resultados das interações sucessivas são comparáveis com a definição algébrica do espaço de Krylov, conforme

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{p} \simeq K_z(\mathbf{A}, \mathbf{p}) = \sum_{z=1}^{\infty} \mathbf{A}^{z-1} \mathbf{p}, \quad (1.3.33)$$

sendo esta representação útil ao longo do desenvolvimento do CGLS.

O método do Gradiente Conjugado, por meio do CGLS, é largamente utilizado para a solução de problemas de mínimos quadrados (HESTENES; STIEFEL et al., 1952; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

O CG consiste em obter uma nova base de vetores ortogonais entre si a partir dos vetores projeção obtidos do processo de aquisição, conforme

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{A} \mathbf{p}_l = 0, \quad i \neq l. \quad (1.3.34)$$

Com as ferramentas matemáticas apresentadas, o desenvolvimento leva a conclusão da aplicação do método CGLS, conforme

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{A}] \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \mathbf{A}^T \mathbf{p}. \quad (1.3.35)$$

A implementação utilizada do CGLS nos testes está presente na biblioteca ASTRA Toolbox.

1.3.4 Baseados em Regularização

1.3.4.1 Regularização de Tikhonov com Matriz Identidade - TIKH

O método de Tikhonov é um processo de regularização. A regularização visa corrigir problemas de instabilidade na solução iterativa de SELs mal-condicionados, como os de

natureza inversa (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Mais especificamente, o método de Tikhonov permite reduzir o número de soluções possíveis do SEL usando um critério matricial baseado em informação a priori sobre o sub-grupo de soluções desejadas (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). A Tabela VII apresenta os elementos do método de Tikhonov.

Tabela VII - Elementos do método de Tikhonov

| Parâmetro | Descrição |
|---|--|
| $\ \cdot\ _2$ | Norma L_2 ou Euclidiana |
| $\arg \min_{\theta \in \mathcal{U}}(\cdot)$ | Valor de θ que minimiza a expressão (\cdot) . |
| η | Termo Regularizador |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ | Reconstrução anterior (variável) |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ | Reconstrução aprimorada (variável) |
| \mathbf{A} | Operador de Aquisição (ou Operador Projeção) |
| \mathbf{p} | Grupo de projeções (Sinograma) |
| \mathbf{L} | Operador de Regularização |

Na regularização de Tikhonov, adiciona-se informação a priori sobre o grupo de dados, por meio de um novo termo, à função de custo baseada no método de mínimos quadrados. Assim, a estimativa regularizada é

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{U}} \{ \|\mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)}\|_2^2 + \eta^2 \|\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}^{(k)}\|_2^2 \}, \quad (1.3.36)$$

onde o primeiro termo é a norma L_2 do resíduo, que define a abordagem de penalidade de mínimos quadrados. O segundo termo é chamado de regularizador ou restrição lateral e representa o conhecimento a priori sobre os dados, impondo condições à reconstrução de $\boldsymbol{\theta}$. O fator regularizador η controla o balanceamento entre os dois termos (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

Existem diversos métodos para obter a solução de Tikhonov; o método de *Decomposição em Valores Singulares*, conforme

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{U}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \eta \mathbf{L}^T \mathbf{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2, \quad (1.3.37)$$

é um exemplo de uso recorrente (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). O minimizador da função de Tikhonov é a dado pela solução do SEL, conforme

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \eta^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L}] \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \mathbf{A}^T \mathbf{p}, \quad (1.3.38)$$

onde uma solução existe e será única se a localização dos termos nulos das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{L} forem distintos (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

Neste trabalho, o Operador de Regularização \mathbf{L} é a matriz identidade. Dessa forma, o termo regularizador $\eta^2 \|\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}^{(k)}\|_2^2$ na Equação (1.3.36) gera um efeito de penalização proporcional ao módulo dos valores de $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$. Essa abordagem básica de regularização tende a privilegiar soluções com valores pequenos.

Por consequência indireta, a regularização de Tikhonov tende a oferecer uma inevitável troca entre a redução de erro na reconstrução e a perda de componentes em alta frequência, com redução de definição nas bordas da imagem (YING; XU; LIANG, 2004). O balanceamento dessa troca é ajustado por meio do parâmetro de regularização, η (KIRSCH, 2021; YING; XU; LIANG, 2004). Um valor alto de η atribui ênfase ao termo de regularização em detrimento do ajuste aos dados; e, conseqüentemente, aumentará a estabilidade e reduzirá o erro, mas filtrará as componentes de alta frequência (KIRSCH, 2021; YING; XU; LIANG, 2004). Um valor baixo de η tende a reduzir o efeito do termo de regularização, reduzindo o algoritmo a um processo de resolução iterativa do SEL com base em mínimos quadrados; o CGLS é um exemplo disso (KIRSCH, 2021; YING; XU; LIANG, 2004). Neste trabalho, o termo de regularização ou matriz de Tikhonov utilizado equivale a uma matriz identidade. A escolha tem caráter didático e prático visando avaliar se há potencial de melhoria na reconstrução; obviamente, resta investigar matrizes de Tikhonov mais adequadas para uso em cada uma das aplicações.

Observa-se que a regularização de Tikhonov atua diretamente na solução do SEL, adicionalmente à regularização indireta que deriva do ajuste do número de iterações (KIRSCH, 2021; YING; XU; LIANG, 2004).

1.3.4.2 Variação Total - TV

A variação total ou TV, *Total Variation*, de um sinal é uma medida de sua variabilidade; ela visa mensurar a quantidade total de mudança (variação) que o sinal contém (CHAMBOLLE; POCK, 2011; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). A Tabela VIII apresenta os elementos do método de Variação Total.

O algoritmo de reconstrução tomográfica TV consiste na aplicação do TV como termo regularizador do método de Tikhonov (CHAMBOLLE; POCK, 2011; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). A regularização TV é definida por

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{U}}{\operatorname{argmin}} \{ \|\mathbf{p} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}^{(k)}\|_2^2 + \eta^2 \operatorname{TV}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \}. \quad (1.3.39)$$

Na prática, comparativamente à regularização Tikhonov, com a regularização TV, observa-se uma melhor reconstrução das bordas (CHAMBOLLE; POCK, 2011). A diferença no

Tabela VIII - Elementos do método de Variação Total

| Parâmetro | Descrição |
|---|--|
| k | Índice da iteração |
| $\ \cdot\ _2$ | Norma L_2 ou Euclidiana |
| $\arg \min_{\theta \in \mathcal{U}}(\cdot)$ | Valor de θ que minimiza a expressão (\cdot) . |
| η | Termo Regularizador |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ | Reconstrução anterior (variável) |
| $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ | Reconstrução aprimorada (variável) |
| \mathbf{A} | Operador de Aquisição (ou Operador Projeção) |
| \mathbf{p} | Grupo de projeções (Sinograma) |
| $TV(\cdot)$ | Operador Variação Total |

termo regularizador faz com que o TV possivelmente apresente gradientes localmente acentuados, uma vez que ele penaliza apenas o gradiente total da imagem e não a sua distribuição. Como resultado, as arestas são preservadas na reconstrução. Por tais razões, a TV tem sido sugerida como o regularizador mais adequado para problemas de reconstrução de imagens (CHAMBOLLE; POCK, 2011; ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

Cumprе mencionar que, algebricamente, o algoritmo TV pode ser apresentado como a função composta, conforme

$$(f \circ \nabla)(\boldsymbol{\theta}) = f(\nabla\boldsymbol{\theta}) = \text{TV}(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.3.40)$$

A abordagem isotrópica do TV, que emprega a norma L_2 , é dada por

$$\text{TV}(\boldsymbol{\theta}) = \|\nabla\boldsymbol{\theta}\|_{2,1} = \sum \|\nabla\boldsymbol{\theta}\|_2, \quad (1.3.41)$$

Enquanto, a abordagem anisotrópica, que emprega a norma L_1 , é dada por

$$\text{TV}(\boldsymbol{\theta}) = \|\nabla\boldsymbol{\theta}\|_{1,1} = \sum \|\nabla\boldsymbol{\theta}\|_1 \quad (1.3.42)$$

Diante do exposto, o minimizador da função de Variação Total é a solução do SEL

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \eta^2 \text{TV}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T \text{TV}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})] \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \mathbf{A}^T \mathbf{p}. \quad (1.3.43)$$

A implementação utilizada do TV nos testes está presente na biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014).

1.3.5 Baseados em MLE

Os algoritmos desta classe são baseados em estimação de máxima verossimilhança *Maximum Likelihood Estimate* (MLE). Técnicas MLE estimam os parâmetros de uma distribuição de probabilidade a partir de dados observados. Procura-se o máximo de uma função de verossimilhança (*likelihood*) tal que os dados observados sejam os mais prováveis a partir da distribuição obtida. O ponto no espaço de parâmetros (que define a distribuição) que maximiza a função de verossimilhança é chamado de estimativa de verossimilhança máxima (*Maximum Likelihood Estimate*). Esse princípio parece lógico, intuitivo e flexível; fato é que as técnicas MLE se tornaram dominantes em inferência estatística (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977).

Considera-se que as observações são amostras produzidas por um processo com distribuição de probabilidade (conjunta) desconhecida $p(\cdot)$. Assume-se que $p(\cdot)$ pode ser modelada usando um conjunto (vetor) de parâmetros $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \dots, \phi_K]$, isto é, tem-se uma família de distribuições $\{p(\cdot; \boldsymbol{\phi})\}$, $\boldsymbol{\phi} \in \Phi$, Φ é o espaço de parâmetros tal que $\Phi \subset \mathcal{R}^K$. Seja o conjunto de observações $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, podemos definir a densidade de probabilidade conjunta

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}), \quad (1.3.44)$$

que é a função de verossimilhança. O objetivo de algoritmos MLE é obter o $\boldsymbol{\phi}$ que a maximiza

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \arg \max_{\boldsymbol{\phi} \in \Phi} \mathbf{p}_n(\mathbf{y}, \boldsymbol{\phi}), \quad (1.3.45)$$

obtendo o vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ que torna os dados observados os mais prováveis. Ele é chamado de estimativa de verossimilhança máxima. Em geral, na prática, emprega-se o logaritmo da densidade acima definida devido a vantagens de implementação.

A seguir, comentamos algumas propostas tal princípio para a reconstrução de imagens a partir de sinogramas.

1.3.5.1 Métodos MLEM

MLEM

O MLEM, *Maximum-Likelihood Expectation Maximization*, usa o algoritmo conhecido como EM (*Expectation Maximization*) para obter a solução MLE (SHEPP; VARDI, 1982).

Um algoritmo de maximização de expectativa (EM) visa encontrar iterativamente a probabilidade máxima (local) ou estimativas máximas a posteriori (a partir de observações) de parâmetros em modelos estatísticos, onde o modelo depende ainda de variáveis latentes, não observadas diretamente (SHEPP; VARDI, 1982).

Cada iteração do EM alterna as etapas de expectativa (E), na qual se avalia a expectativa da probabilidade (de seu logaritmo) usando a estimativa corrente dos parâmetros, e uma etapa de maximização (M), que obtém novos parâmetros que maximizam a verossimilhança (seu logaritmo). A estimativa dos parâmetros é usada para determinar a distribuição das variáveis latentes na próxima etapa (E) e o algoritmo é iterado (SHEPP; VARDI, 1982).

As técnicas de reconstrução da família MLEM foram desenvolvidas para atender problemas da aplicação de tomografia por emissão de pósitrons, PET. Nessa aplicação, o próprio objeto-alvo (paciente) recebe tratamento médico que o torna um emissor de radiação (SHEPP; VARDI, 1982). O nível de radiação emitido é extremamente baixo, sendo seguro para o paciente. Por outro lado, a detecção das emissões em limiares tão baixos e a própria dinâmica do decaimento radioativo atribuem dificuldade extra para a aplicação.

Na aplicação PET, obtém-se de cada ponto de projeção i um *bin* i , grupo de medidas individuais, dentro de um período τ . Esse *bin* i serve de base para obtenção de uma média que representará o ponto de projeção i (BUZUG, 2008). A função de distribuição de probabilidade, *FDP*, do decaimento radioativo é modelada pela *distribuição de Poisson* (BUZUG, 2008).

Porém, neste trabalho, apenas uma medida é realizada por ponto de projeção no processo de aquisição. Assim, aqui, os algoritmos da família MLEM interpretam o valor único de cada ponto de projeção como uma média de um correspondente e suposto conjunto (bin) de medidas i . Anteriormente, em todos os algoritmos estudados, um pixel do sinograma era interpretado como uma medida de um ponto de projeção de um objeto-alvo; um valor constante, absoluto.

Os elementos dos algoritmos da família MLEM são apresentados na Tabela IX. As técnicas de reconstrução da família MLEM assumem um paradigma probabilístico para a interpretação do ponto de projeção; cada valor de um ponto de projeção é interpretado como a média de uma variável aleatória; isso deriva das características probabilísticas presentes na aplicação PET (BUZUG, 2008).

O MLEM é baseado na suposição de que o total de pacotes de radiação que atingiram um detector individualmente, medido em um momento τ , obedece a uma FDP de Poisson. Esta suposição é uma consequência direta das propriedades estatísticas do processo de decaimento radioativo (SHEPP; VARDI, 1982). O número de decaimentos por unidade

Tabela IX - Elementos do método MLEM

| Simbolo | Descrição |
|-----------------------|---|
| k | Índice da iteração |
| i | Índice serial do Pixel de um Sinograma. |
| j | Índice serial do Pixel de uma imagem. |
| $\boldsymbol{\theta}$ | Representação vetorizada do objeto; Imagem. |
| θ_j | Elemento de $\boldsymbol{\theta}$. |
| \mathbf{A} | Operador Aquisição de dimensões $I \times J$. |
| a_{ij} | Elemento de \mathbf{A} , proporcional à probabilidade de θ_j gerar p_i . |
| \mathbf{p}^* | Sinograma |
| p_i^* | Elemento do sinograma, cada ponto representa a média do bin i de medições. |
| \mathbf{p} | Conjunto de medições; cada ponto representa uma medida do bin i . |
| p_i | Uma medição que compõe o bin i |

de tempo no pixel j do objeto-alvo $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1 \dots \theta_j \dots \theta_J\}$ é dado por θ_j e representa uma VA com FDP de Poisson, com *valor esperado*, VE, θ_j^* (SHEPP; VARDI, 1982; BUZUG, 2008). Dessa forma a probabilidade de obter uma realização N_j da VA θ_j pode ser modelada por

$$P(N_j = \theta_j) = \frac{(\theta_j^*)^{\theta_j}}{\theta_j!} \exp(-\theta_j^*). \quad (1.3.46)$$

Considerando que os pixels do objeto-alvo são estatisticamente independentes entre si, observamos uma medida p_i resultante de qualquer combinação linear de $\boldsymbol{\theta}$ apresenta também uma FDP de Poisson e independência estatística entre si (BUZUG, 2008). Desta forma, e com base na linearidade do operador valor esperado, temos

$$p_i = \sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j \quad e \quad p_i^* = \sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j^*. \quad (1.3.47)$$

Por consequência, a descrição da FDP de Poisson da VA p_i é

$$P(M_i = p_i) = \frac{(p_i^*)^{p_i}}{p_i!} \exp(-p_i^*). \quad (1.3.48)$$

Como exposto anteriormente, todos os elementos do conjunto de projeções $\mathbf{p} = \{p_1 \dots p_i \dots p_I\}$ são estatisticamente independentes, ou seja, dado o sinograma \mathbf{p}^* , a probabilidade conjunta de observar o conjunto de projeções \mathbf{p} é obtida por meio da multiplicação das probabilidades individuais correspondentes a cada p_i (BUZUG, 2008). Descrevendo esta ideia matematicamente, temos

$$P(\mathbf{p}|\mathbf{p}^*) = \prod_{i=1}^I \frac{(p_i^*)^{p_i}}{p_i!} \exp(-p_i^*). \quad (1.3.49)$$

Aplicando a Equação (1.3.47) na Equação (1.3.49), obtemos

$$P(\mathbf{p}|\mathbf{p}^*) = \prod_{i=1}^I \frac{(\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^*)^{p_i}}{p_i!} \exp\left(-\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^*\right) = P(\mathbf{p}|\boldsymbol{\theta}^*), \quad (1.3.50)$$

onde temos $P(\mathbf{p}|\mathbf{p}^*)$ em função das variáveis que descrevem o problema. Analisando as variáveis do lado direito da Equação (1.3.50), é possível observar que \mathbf{p}^* não está presente, mas sim θ_j^* . Dessa forma, com base na equivalência das FDPs, podemos interpretar $P(\mathbf{p}|\mathbf{p}^*) = P(\mathbf{p}|\boldsymbol{\theta}^*)$ (BUZUG, 2008). Observamos também que $P(\mathbf{p}|\boldsymbol{\theta}^*)$ equivale à função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}^*)$, a qual quantifica o quanto o conjunto de realizações \mathbf{p} está associado ao conjunto de FDP representada por $\boldsymbol{\theta}^*$ (BUZUG, 2008). Descrevendo esta ideia matematicamente, temos

$$P(\mathbf{p}|\boldsymbol{\theta}^*) = L(\boldsymbol{\theta}^*) = \prod_{i=1}^I \frac{(\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^*)^{p_i}}{p_i!} \exp\left(-\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^*\right). \quad (1.3.51)$$

Aplicamos o logaritmo na Equação (1.3.51), visando converter operações de produto em soma. O logaritmo possui tendência estritamente monótona e, por causa disso, a localização do ponto de máximo da função não sofre mudança (BUZUG, 2008). Assim, obtemos

$$\ln(L(\boldsymbol{\theta}^*)) = l(\boldsymbol{\theta}^*) = \sum_{i=1}^I \left[p_i \ln \left(\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^* \right) - \ln(p_i!) - \left(\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^* \right) \right]. \quad (1.3.52)$$

Diante do exposto, o problema de otimização pode ser resumido por

$$\boldsymbol{\theta}^*_{max} = \max_{\boldsymbol{\theta}^* \in \Omega} \{l(\boldsymbol{\theta}^*)\}, \quad (1.3.53)$$

onde Ω é o conjunto de possíveis soluções (BUZUG, 2008).

Uma condição necessária para a maximização de $l(\boldsymbol{\theta}^*)$ é considerar nula a primeira derivada da Equação (1.3.52) (BUZUG, 2008), i.e,

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta}^*)}{\partial \theta_r^*} = \sum_{i=1}^I \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^J a_{ij}\theta_j^*} - \sum_{i=1}^I a_{ir}\theta_j^* = 0 \quad (1.3.54)$$

Entretanto, uma condição suficiente para a existência de um máximo global é a concavidade da função ser maximizada. Esta condição é normalmente verificada com a segunda derivada, o que é verificado pela *Hessiana* em relação a θ_j , com $j = \{1, \dots, J\}$. A Hessiana obtida é negativa e semi-definida, dessa forma $l(\boldsymbol{\theta}^*)$ é concava e o valor ótimo obtido é

um máximo global (BUZUG, 2008). Como isso, obtemos

$$\theta_r^* = \frac{\theta_r^*}{\sum_{i=1}^M a_{ir}} \sum_{i=1}^I \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j^*}. \quad (1.3.55)$$

O ponto de interseção entre uma reta de inclinação unitárias e o funcional do lado direito da Equação (1.3.55) deve ser encontrado. Esse ponto de interseção é obtido pela técnica de iteração de ponto fixo, que, ao mesmo tempo, representa a regra de iteração para a reconstrução da imagem, conforme

$$\theta_r^{*(k+1)} = \frac{\theta_r^{*(k)}}{\sum_{i=1}^I a_{ir}} \sum_{i=1}^I \frac{p_i a_{ir}}{\sum_{j=1}^J a_{ij} \theta_j^{*(k)}}, \quad (1.3.56)$$

e assim temos que a Equação (1.3.56) realiza a atualização EM (BUZUG, 2008).

OSEM

O OSEM, *Ordered-Subset Expectation Maximization Algorithm*, foi desenvolvido a partir do MLEM visando a redução do tempo de convergência (HUDSON; LARKIN, 1994). O Algoritmo OSEM aplica uma etapa inicial extra chamada de ordenação dos dados – OS, *Ordered Subset* (HUDSON; LARKIN, 1994). Os algoritmos de reconstrução normalmente processam todas as projeções de um escaneamento de forma conjunta. O OS propõe que cada iteração do algoritmo seja composta por uma série ordenada de subprocessos de reconstrução usando subgrupos ordenados das projeções (HUDSON; LARKIN, 1994). A reconstrução resultante de um subgrupo de projeções será o ponto de partida da reconstrução do subgrupo seguinte. A reconstrução sequencial de todos os subgrupos de projeções compõe uma iteração do algoritmo OSEM (HUDSON; LARKIN, 1994).

A distribuição dos dados em subgrupos pode seguir diferentes estratégias dependendo da implementação. Alguns exemplos são:

1. Ordenamento serial: Os subgrupos são ordenados na ordem em que são obtidos. Esta abordagem é a mais simples e com menor demanda computacional, porém apresenta o pior desempenho.
2. Ordenamento aleatório: Apresenta um pequeno aumento de custo computacional acompanhado de um aumento significativo de velocidade de convergência quando comparado a abordagem anterior.
3. Ordenamento ortogonal: Os ordenamentos e agrupamentos buscam garantir sequencialmente o maior ângulo possível entre as equações que definem os pontos de

projeção, maximizando as varreduras que contêm. Apresenta um significativo aumento de custo computacional e um sensível aumento de velocidade de convergência quando comparado às abordagens anteriores (HUDSON; LARKIN, 1994). É a que utilizamos neste trabalho.

O OS recebe como parâmetro o número de subgrupos de pontos de projeção que definem uma iteração. Neste trabalho, a implementação do algoritmo OSEM foi configurada para operar com 03 blocos.

As implementações MLEM e OSEM utilizadas nos testes advêm da biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014).

1.3.5.2 Métodos PML

Os métodos PML (*Penalized maximum likelihood*) inserem penalidades na busca da solução MLE.

PML-Q

O PML-Q, *Penalized maximum likelihood with quadratic penalty* aplica uma penalidade quadrática, a qual deve ser minimizada, pela solução MLE. A penalidade advém da solução do SEL que modela o problema de reconstrução (GABOR, 2009).

A penalidade quadrática é a mais comum e é dada por

$$P_q = \sum_{j=1}^J (y_j - \theta_j)^2, \quad (1.3.57)$$

onde P_q representa o erro quadrático total entre a estimativa \mathbf{y} e a imagem $\boldsymbol{\theta}$ (HASTIE et al., 2009).

Diante do exposto, inserindo a penalização no desenvolvimento MLEM, o problema de otimização PML-Q pode ser resumido por

$$\boldsymbol{\theta}^*_{max} = \max_{\boldsymbol{\theta}^* \in \Omega} \{l(\boldsymbol{\theta}^*) - \beta_q P_q\}, \quad (1.3.58)$$

onde Ω é o conjunto de possíveis soluções e β_q é o peso da penalidade quadrática (HASTIE et al., 2009; BUZUG, 2008).

PML-H

O PML-H, *Penalized maximum likelihood with weighted linear and quadratic penalties*, adiciona ao PML-Q uma função custo composta por termos lineares dependente da solução do SEL (CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004; GABOR, 2009). O acréscimo das penalidades lineares ponderadas gera um ganho de estabilidade e de qualidade da reconstrução em troca de custo computacional extra (CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004; GABOR, 2009).

A penalidade híbrida é dada por

$$P_h = P_q + P_l = \sum_{j=1}^J (y_j - \theta_j)^2 + \sum_{j=1}^J (y_j - \theta_j), \quad (1.3.59)$$

onde P_q representa o erro quadrático total e P_l representa o erro linear total entre a estimativa \mathbf{y} e a imagem $\boldsymbol{\theta}$ (HASTIE et al., 2009).

Diante do exposto, inserindo as penalizações no desenvolvimento MLEM, o problema de otimização PML-H pode ser resumido por

$$\boldsymbol{\theta}_{max}^* = \max_{\boldsymbol{\theta}^* \in \Omega} \{l(\boldsymbol{\theta}^*) - (\beta_q P_q + \beta_l P_l)\}, \quad (1.3.60)$$

onde Ω é o conjunto de possíveis soluções, β_q é o peso da penalidade quadrática e β_l é o peso da penalidade linear (HASTIE et al., 2009; BUZUG, 2008).

OSPML-Q

O OSPML-Q, *Ordered-Subset Penalized Maximum Likelihood with Quadratic penalties* aplica o ordenamento de subgrupos do OSEM no PML-Q (GABOR, 2009; HASTIE et al., 2009; BUZUG, 2008). Esse acréscimo gera um ganho de qualidade da reconstrução e de velocidade de convergência em troca um aumento no custo computacional (GABOR, 2009; HASTIE et al., 2009; BUZUG, 2008).

Neste trabalho, a implementação do algoritmo OSPML-Q foi configurada para operar com 03 blocos.

OSPML-H

O OSPML-H, *Ordered-Subset Penalized Maximum Likelihood with weighted linear and quadratic penalties* adiciona a etapa de ordenamento em subgrupos ao PML-H (GABOR, 2009; CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004; HASTIE et al., 2009). O acréscimo da etapa de separação das projeções em subgrupos ordenados gera um ganho de qualidade da reconstrução e de velocidade de convergência em troca de custo computacional adicional (GABOR, 2009; CHANG; ANDERSON; VOTAW, 2004; HASTIE et al., 2009).

Nos testes aqui apresentados, usou-se implementações dos métodos PML da biblioteca Python TomoPy (GÜRSOY et al., 2014).

Neste trabalho, a implementação do algoritmo OSPML-H foi configurada para operar com 03 blocos.

2 PROPOSTA PARA A AVALIAÇÃO DE TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO INVERSA EM TOMOGRAFIA

2.1 Metodologias de avaliação das técnicas de reconstrução

2.1.1 Sem corrupção do Objeto-Alvo Original ou do Sinograma

Em situações práticas reais, não dispomos do corte do objeto-alvo que desejamos reconstruir. Porém, se assumirmos conhecê-lo e avaliamos a reconstrução relativamente a ele podemos analisar características do processo de aquisição-reconstrução. A avaliação da reconstrução usando o objeto-alvo original, íntegro, permite:

1. Analisar erros intrínsecos dos algoritmos de reconstrução;
2. Analisar se há erros possivelmente associados às características do objeto-alvo;
3. Fornecer *benchmarks* comparativos para as avaliações de reconstrução em situações não-ideais.

A metodologia aplicada é apresentada na Figura 7, repara-se que não há adição de ruído; os objetos-alvo são simulações ideais de objetos reais. Dessa forma, as imprecisões apresentadas no processo de reconstrução só poderão ter duas origens possíveis e relevantes para esta primeira abordagem: associadas ao objeto-alvo em si e ao método de reconstrução utilizado.

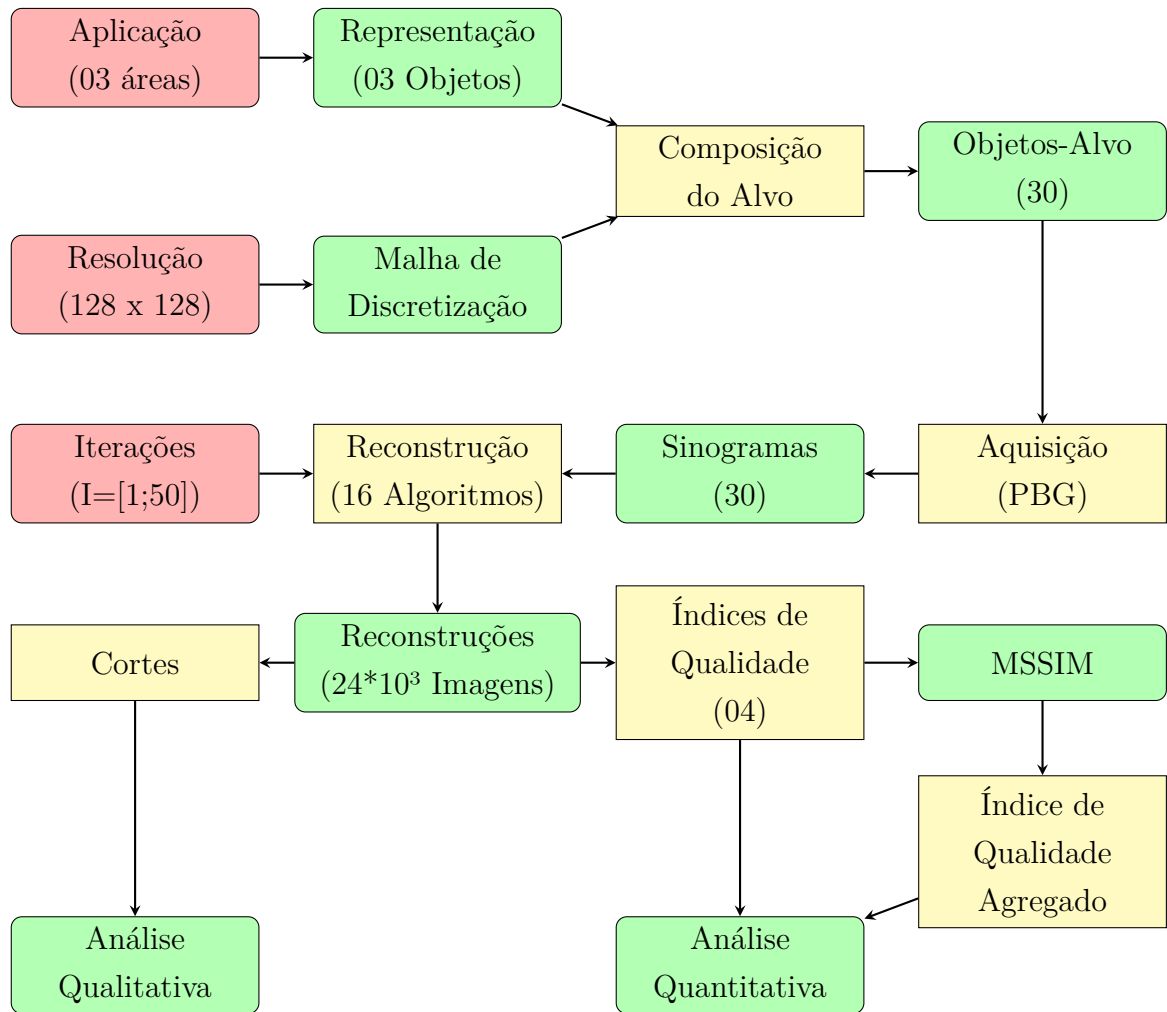


Figura 7 - Método de análise utilizando objeto-alvo e sinograma íntegros.

2.1.2 Com corrupção por erro gradual no Sinograma

A avaliação da reconstrução com corrupção por erro no sinograma tem por objetivo analisar o impacto de imprecisões no processo de aquisição: a medição dos efeitos da interação do feixe de sondagem com o objeto-alvo no desempenho dos algoritmos. A relevância desta análise está em representar de forma análoga, aproximada, a contribuição para o erro de fenômenos de natureza probabilística afetando cada projeção obtida. Esta abordagem é a mais recorrente e reflete o que se observa nas mais diversas aplicações tomográficas, como na área de exames clínicos por imageamento, por exemplo. A metodologia aplicada é apresentada na Figura 8, repara-se a adição de ruído (em nove diferentes níveis) aos sinogramas dos objeto-alvos resultantes da aplicação sucessiva do processo de aquisição PBG.

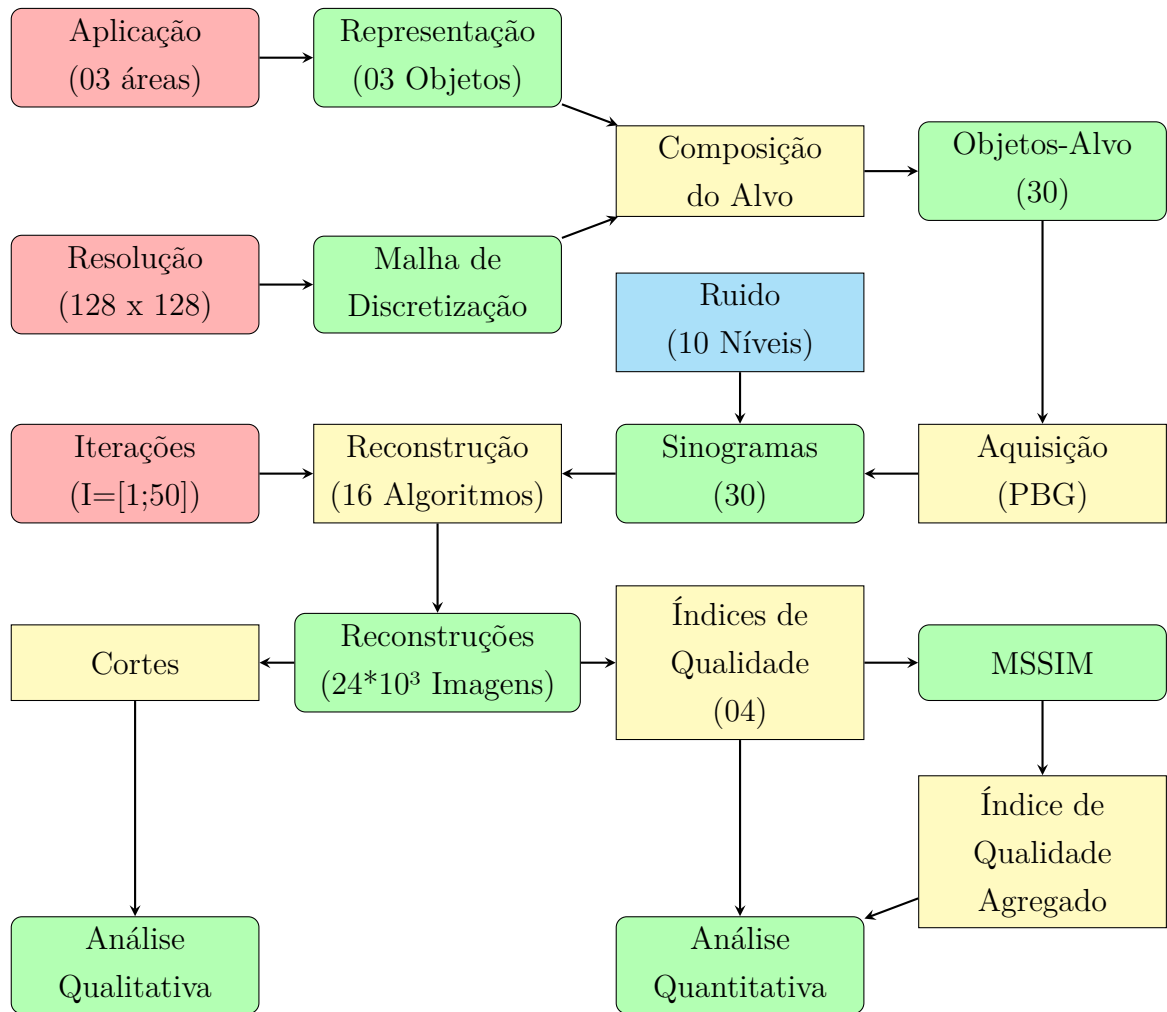


Figura 8 - Método de análise utilizando o Sinograma corrompido pela adição de diferentes níveis de ruído Gaussiano.

2.1.3 Com corrupção por erro gradual no Objeto-Alvo

A avaliação da reconstrução com adição de ruído diretamente ao objeto-alvo tem por objetivo permitir uma comparação preliminar do desempenho de diferentes algoritmos de reconstrução em aplicações onde há correlação entre o erro e as coordenadas espaciais da área de sondagem. Tal caso ocorre quando a absorção não pode ser considerada o único fenômeno relevante na modelagem da interação entre o feixe e objeto-alvo no processo de aquisição. Em tais aplicações, os fenômenos de reflexão, espalhamento, difração e refração contribuem significativamente para a ocorrência do multi-percurso; cópias com diferentes intensidades e fases do feixe de sondagem chegam ao sensor e contribuem para a intensidade e complexidade do erro presente no sinal medido (CAMPOS; LOVISOLO; CAMPOS, 2018). A modelagem adequada desse cenário demanda significativos recursos computacionais quando comparada a outras aplicações de tomografia, como por exemplo na aplicação em TWM, *Trought the Wall Mapping* (CAMPOS; LOVISOLO; CAMPOS,

2018). A metodologia aplicada é apresentada na Figura 9, repara-se a adição de ruído (em nove diferentes níveis) nos correspondentes objetos-alvo que serão processadas pela aquisição PBG.

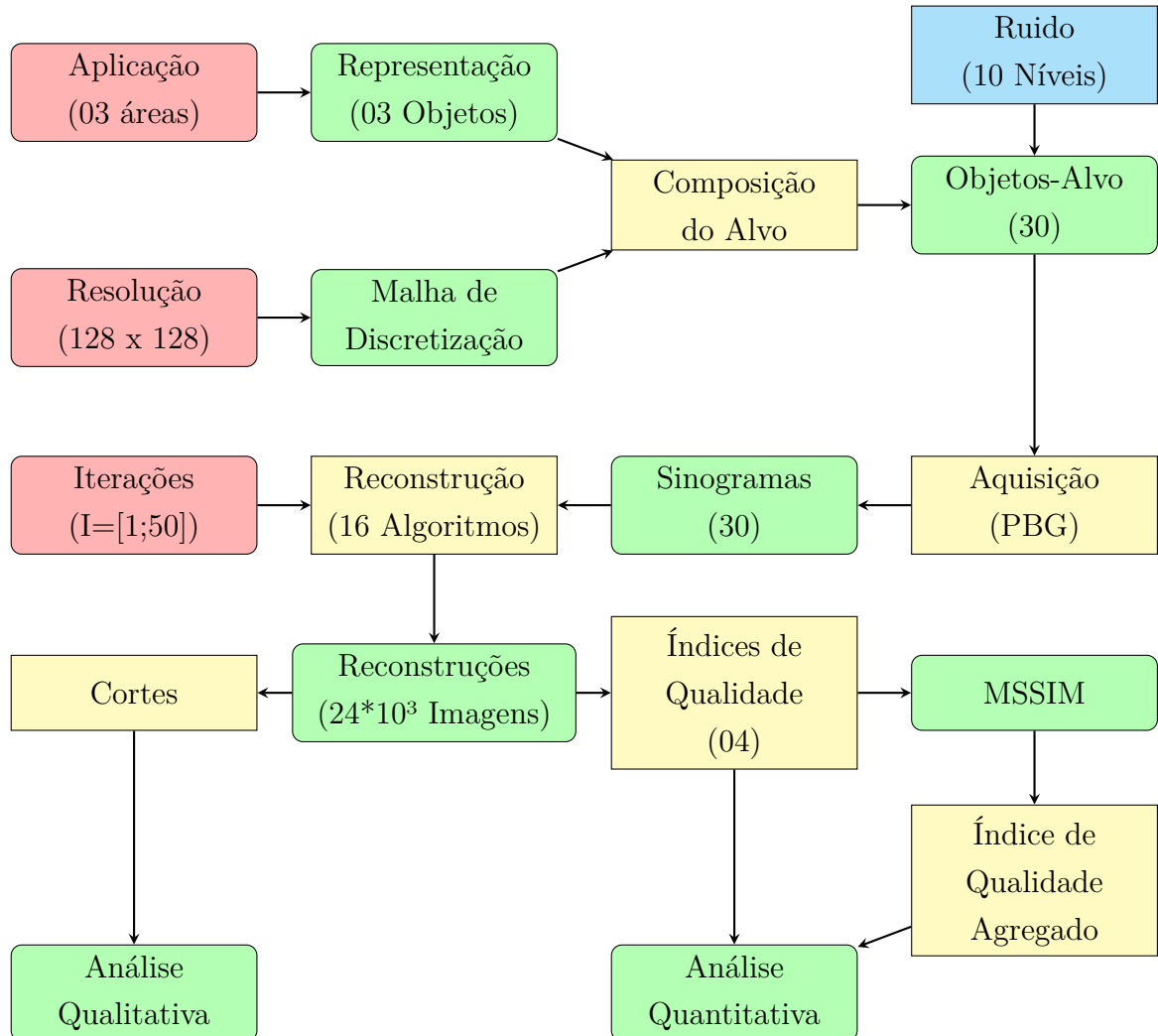


Figura 9 - Método de análise utilizando o Objeto-Alvo corrompido pela adição de diferentes níveis de ruído Gaussiano.

2.2 Índices de Qualidade

O MSE, *Mean Square Error*, é uma métrica de ampla utilização nas mais variadas áreas das ciências exatas. Dessa forma, sua escolha neste trabalho estabelece um canal amplo de comunicação entre engenheiros de sinais e sistemas e profissionais de exatas de outras áreas. Quanto maior o valor MSE, maior a diferença entre as imagens comparadas (GONZALEZ; WOODS, 2018).

O MSE tem como característica significativa uma penalização quadrática do erro médio dos sinais; quanto maior for o valor do erro médio entre os sinais, quadraticamente maior

será o valor do índice (GONZALEZ; WOODS, 2018). A apresentação matemática do conceito é dada por

$$\text{MSE}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [x_{ij} - y_{ij}]^2, \quad (2.2.1)$$

onde é possível observar que o MSE é uma métrica do tipo quantitativa; realiza uma comparação numérica, entre todas as duplas de pontos correspondentes de dois sinais; não levando em consideração informações associadas à localização e vizinhança da informação medida (Tabela X).

Tabela X - Variáveis utilizadas nas equações do MSE, MDA, PSNR e MSSIM.

| Parâmetro | Descrição |
|-----------|----------------------------|
| m | Total de linhas da imagem |
| n | Total de colunas da imagem |
| i | Linha da imagem |
| j | Coluna da imagem |
| x | Imagem Original |
| y | Imagem Corrompida |
| x_{ij} | Pixel da imagem Original |
| y_{ij} | Pixel da imagem Corrompida |

O MDA, *Média da Diferença Absoluta*, é uma métrica derivada do MSE onde a operação quadrática foi desconsiderada. Objetivo é garantir uma relevância igualitária das medições de erro. Seu uso neste trabalho tem por objetivo comparar o impacto da penalização quadrática do MSE na avaliação dos algoritmos. Quanto maior o seu valor, maior a diferença entre as imagens comparadas (Tabela X) (GONZALEZ; WOODS, 2018).

O MDA é uma métrica do tipo quantitativa; realiza uma comparação numérica, entre todas as duplas de pontos correspondentes de dois sinais; não leva em consideração informações associadas à localização e vizinhança da informação medida (GONZALEZ; WOODS, 2018). A apresentação matemática do conceito é dada por

$$\text{MDA}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |[x_{ij} - y_{ij}]|. \quad (2.2.2)$$

O PSNR, *Peak to Signal Noise Ratio*, é uma métrica de qualidade derivada do MSE.

Possui ampla utilização na área de processamento de imagem, estabelecendo assim uma linguagem comum entre engenheiros de sinais e sistemas.

Quanto maior o valor PSNR, maior a semelhança entre as imagens comparadas. O PSNR

é uma métrica logarítmica e recebe como parâmetro o MSE (GONZALEZ; WOODS, 2018).

A apresentação matemática do conceito é dada por

$$\text{PSNR}(x, y) = 10 \log_{10} \frac{[\max(x_{ij})]^2}{\text{MSE}(x, y)} = 20 \log_{10} \frac{\max(x_{ij})}{\sqrt{\text{MSE}(x, y)}}, \quad (2.2.3)$$

onde é possível perceber que o PSNR também é uma métrica do tipo quantitativa; realiza uma comparação numérica, entre todas as duplas de pontos correspondentes de dois sinais; não leva em consideração informações associadas à localização e vizinhança da informação medida.

O SSIM, *Structural Similarity Index*, é uma métrica objetiva desenvolvida visando alta correlação com a percepção da qualidade subjetiva (por pessoas) (WANG et al., 2004). Neste trabalho, ele é usado para comparar a qualidade estrutural das imagens reconstruídas.

Tabela XI - Variáveis das equações do SSIM

| Parâmetro | Descrição |
|---------------|---------------------------------------|
| μ_x | Média dos pixels da imagem original |
| μ_y | Média dos pixels da imagem corrompida |
| σ_x | Desvio Padrão da imagem original |
| σ_y | Desvio Padrão da imagem corrompida |
| σ_{xy} | Função Covariância |

O SSIM é uma métrica de percepção de qualidade, por meio da comparação estrutural; a aplicação de ferramentas estatísticas permite a consideração de informações associadas à localização e vizinhança da informação medida (WANG et al., 2004).

A proposta do MSSIM de oferecer uma ferramenta de comparação estrutural entre imagens é ratificada nos resultados no anexo x deste trabalho. Este resultado baseou a escolha do MSSIM para a composição do Índice de Qualidade Agregado apresentado em xx.

O SSIM leva em consideração três (3) características da imagem para gerar seu resultado: luminância, contraste e estrutura (Tabelas X e XI) (WANG et al., 2004).

De forma aproximada, a variação da luminância pode ser estimada por meio de uma relação entre as médias (μ_x e μ_y) das respectivas imagens comparadas, conforme

$$l(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)}. \quad (2.2.4)$$

De forma aproximada, a variação do contraste pode ser estimada por meio de uma relação entre os desvios padrão individuais (σ_x e σ_y) das respectivas imagens comparadas, conforme

$$c(x, y) = \frac{(2\sigma_x\sigma_y + C_2)}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}. \quad (2.2.5)$$

E, a variação da estrutura pode ser estimada por meio de uma relação entre os desvios padrão individuais (σ_x e σ_y) e conjunto (σ_{xy}) das respectivas imagens comparadas, conforme

$$s(x, y) = \frac{(\sigma_{xy} + C_3)}{(\sigma_x\sigma_y + C_3)}. \quad (2.2.6)$$

Nas equações anteriores, os termos C_1 , C_2 , C_3 são constantes de pequeno valor. O termo L representa o domínio de valores do pixel da imagem. Os termos K_1 e K_2 representam constantes muito menores que 1; valores pequenos diferentes de zero (WANG et al., 2004).. Em geral, faz-se conforme

$$C_1 = (K_1L)^2, \quad C_2 = (K_2L)^2, \quad \text{e } C_3 = C_2/2. \quad (2.2.7)$$

A forma geral do SSIM consiste num produto entre os módulos da diferença da luminância, contraste e estrutura da imagem original e a sua versão corrompida, conforme (WANG et al., 2004).

$$SSIM(x, y) = |l(x, y)|^\alpha \cdot |c(x, y)|^\beta \cdot |s(x, y)|^\gamma, \quad (2.2.8)$$

onde os expoentes α , β e γ representam a relativa importância dos três (3) termos para o resultado final do SSIM, conforme Equação (2.2.8). Para abordagens em geral, temos $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (WANG et al., 2004). Esta decisão, quando permitida pela aplicação, permite uma expressão simplificada do SSIM, conforme

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}. \quad (2.2.9)$$

É usual computar o SSIM médio (MSSIM – Mean SSIM) visando obter um indicador que concentre toda a informação de similaridade estrutural da comparação executada, conforme

$$MSSIM(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n SSIM(x, y)_{ij}. \quad (2.2.10)$$

2.2.1 Índice de Qualidade Agregado

As referências sobre métodos de reconstrução tomográfica já mencionadas apresentam três (3) critérios para escolha do método a empregar: qualidade das reconstruções, velocidade de convergência e estabilidade. Entende-se por velocidade de convergência a quantidade de iterações até atingir um patamar de qualidade que varia pouco à medida que mais iterações são realizadas. E, entende-se por estabilidade um comportamento monotônico na relação entre nível de ruído e qualidade das reconstruções. Isto é, o aumento do nível de ruído não pode estar associado a uma melhoria do desempenho. Quando há alterações nesse comportamento, podemos dizer que o desempenho do algoritmo apresenta instabilidade.

Assim, propõe-se um índice que seja capaz de agregar os três (3) fatores numa única curva para cada técnica de reconstrução. Propomos uma curva de desempenho em função do nível de corrupção (Tabela XIII) do sinograma. Cada ponto dessa curva representa a área da curva MSSIM de uma técnica de reconstrução (q), para um nível de corrupção (e) e para todas as iterações ($K = 50$). A agregação apresenta um compromisso entre sua capacidade de síntese e a capacidade de distinguir o quanto de cada qualidade está presente na respectiva técnica de reconstrução. Com base nesse conhecimento, definimos

$$D_{q,e} = \sum_{k=1}^K \text{MSSIM}_{q,e,k} = \sum_{k=1}^K \text{MSSIM}(I, \hat{I}_{q,e,k}), \quad (2.2.11)$$

na qual, $\hat{I}_{q,e,k}$ é a imagem reconstruída a partir do sinograma com nível e de corrupção (Tabela XIII) usando o algoritmo q com k iterações. $D_{q,e}$ agrega as qualidades das reconstruções ao longo das iterações (velocidade de convergência). Se o algoritmo q é estável na qualidade, a sequência $D_{q,e}$, $e = 1 \dots E$ dever ser decrescente, i.e., se o ruído (e) aumenta, a qualidade decresce (ou se mantém).

2.3 Conjunto de Dados dos Experimentos

As análises foram realizadas com base no seguinte grupo de dados:

1. Imagem do Objeto-Alvo Engrenagem:
 - (a) Adição de erro à imagem do Objeto-Alvo;
 - (b) Adição de erro ao Sinograma da imagem do Objeto-Alvo;
2. Imagem do Objeto-Alvo Phantom:
 - (a) Adição de erro à imagem do Objeto-Alvo;
 - (b) Adição de erro ao Sinograma da imagem do Objeto-Alvo;

3. Imagem do Objeto-Alvo Horus:

- (a) Adição de erro à imagem do Objeto-Alvo;
- (b) Adição de erro ao Sinograma da imagem do Objeto-Alvo;

Os objetos escolhidos são apresentados em ordem de complexidade estrutural, de forma a avaliar as técnicas de análise aplicadas neste estudo.

As seguintes características são comuns aos objetos-alvo estudados:

1. São arranjos de 128×128 pixels;
2. Possuem apenas um canal, descrevendo um domínio de intensidade luminosa definido por $I = \{0; 1\}$
3. A resolução da intensidade luminosa e dos pontos de projeção foi definida como "float 32", equivalente a 2^{32} níveis;
4. A escala de representação do arranjo de pixels é inversamente proporcional às dimensões reais do objeto; isto é, as dimensões reais da área correspondente a um pixel são proporcionais ao tamanho real do objeto;
5. A aresta do pixel define também a largura geométrica máxima do feixe de sondagem;

2.3.1 Objetos-Alvo

2.3.1.1 Objeto-Alvo Engrenagem

Pensando em aplicações industriais da tomografia, especificamente na análise não invasiva de peças, um corte de uma estrutura equivalente a uma engrenagem foi utilizado. Essa estrutura é um objeto simulado (Figura 10).

As seguintes características do objeto em questão, que pode ser visto também no canto superior esquerdo na Figura 11, são relevantes para sua escolha:

1. A escala de amostragem escolhida foi de um (1) pixel da imagem representando 1 mm^2 do objeto simulado;
2. O objeto-alvo Engrenagem apresenta informação exclusivamente estrutural, definida por valores 0 ou 1;
3. O quadrante superior direito de Engrenagem apresenta um padrão de rachadura com um pixel de largura;

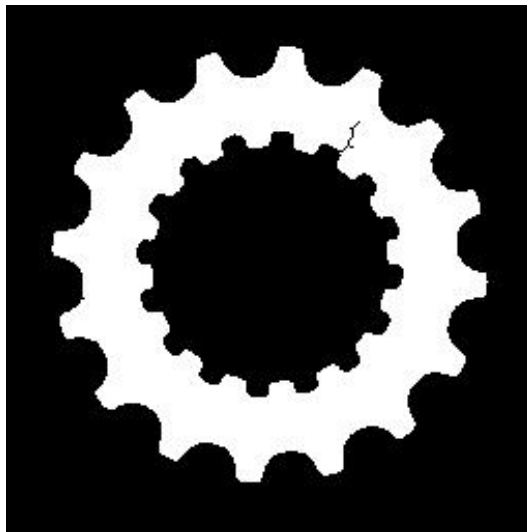


Figura 10 - Objeto-alvo Engrenagem

A Figura 11 apresenta o objeto-alvo Engrenagem íntegro e mais nove versões com adição gradual de ruído gaussiano diretamente no objeto. Todas as imagens foram normalizadas após a adição de ruído. A Figura 12 apresenta os respectivos sinogramas dos objetos da Figura 11. A Figura 13 apresenta o sinograma do objeto-alvo Engrenagem íntegro e mais nove versões com adição gradual de ruído gaussiano diretamente no sinograma. Os níveis de ruído podem ser consultados na Tabela XIII.

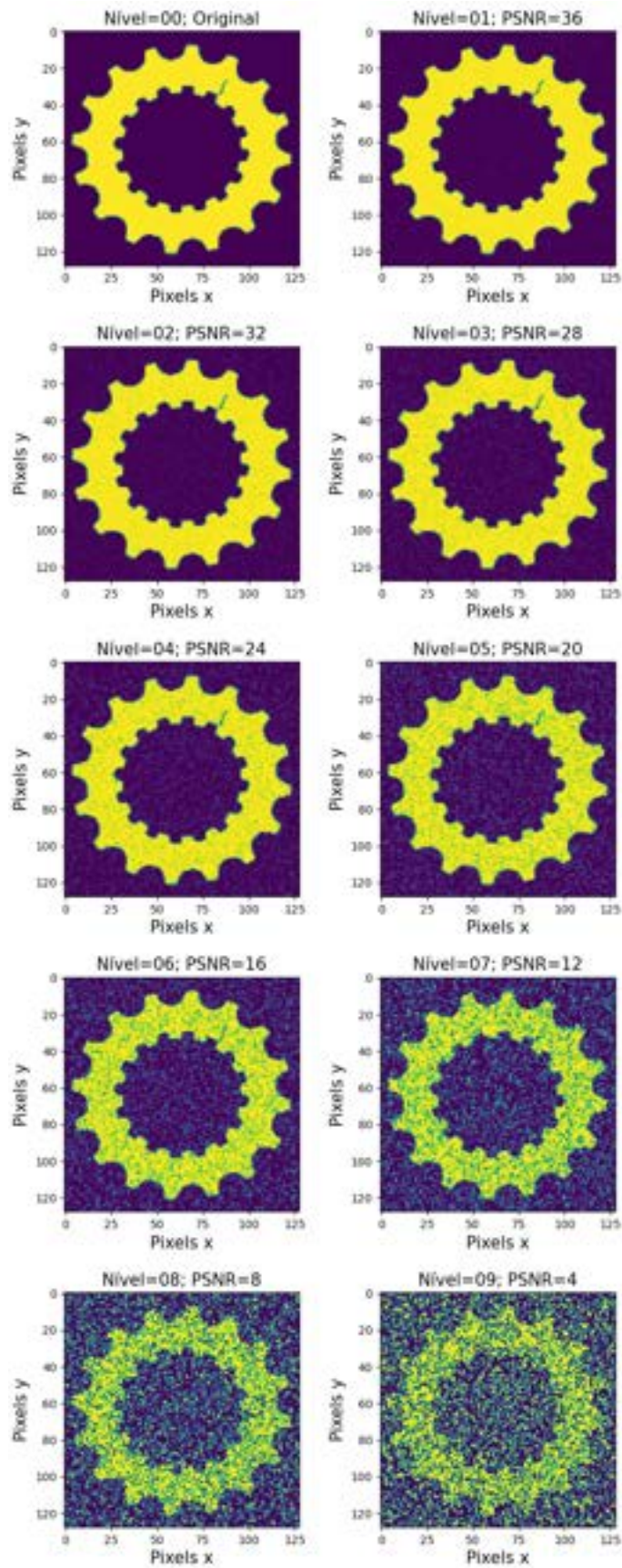


Figura 11 - Objeto Engrenagem; adição crescente de ruído gaussiano no objeto.

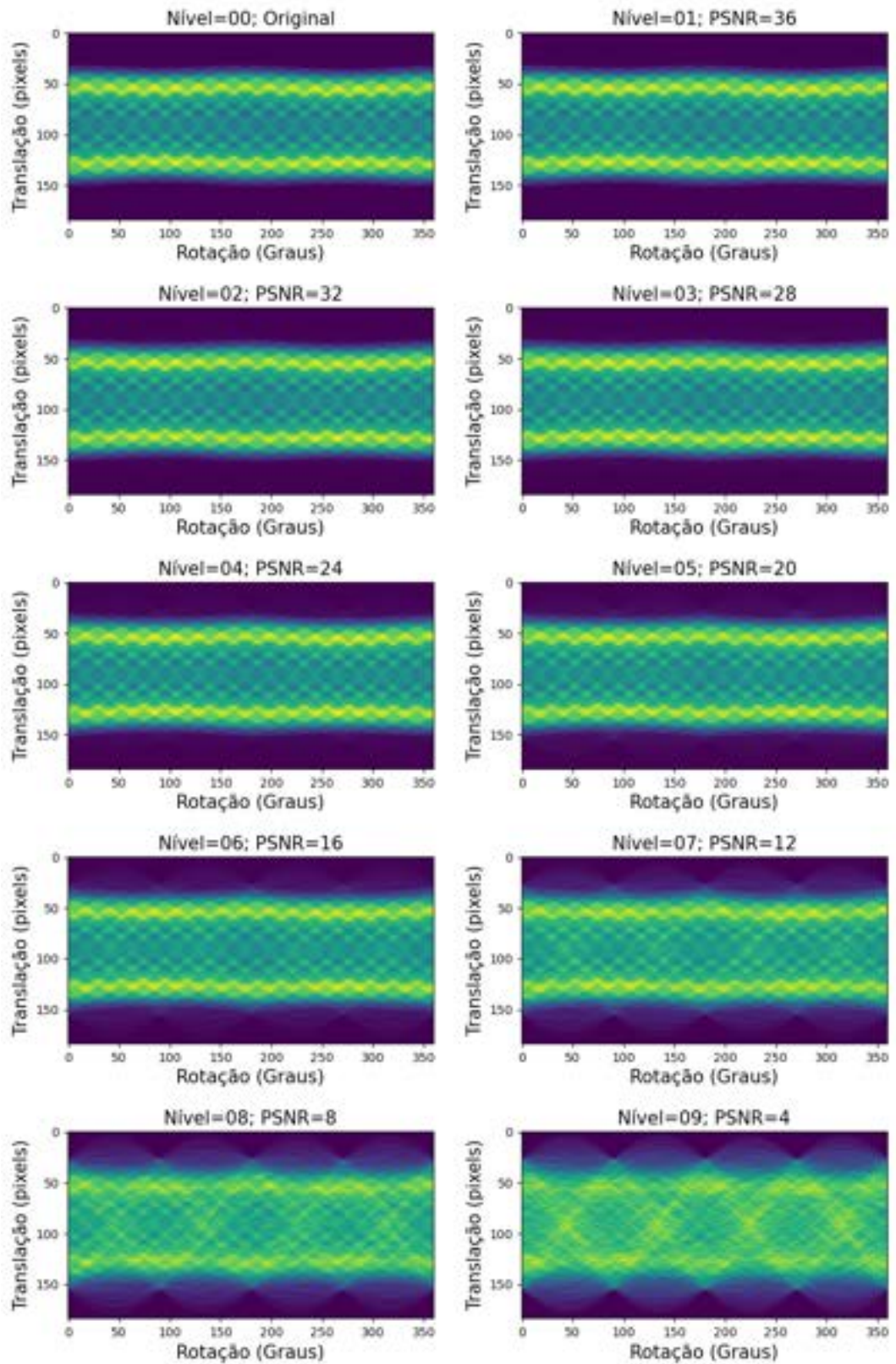


Figura 12 - Sinograma Engrenagem; adição crescente de ruído gaussiano no objeto.

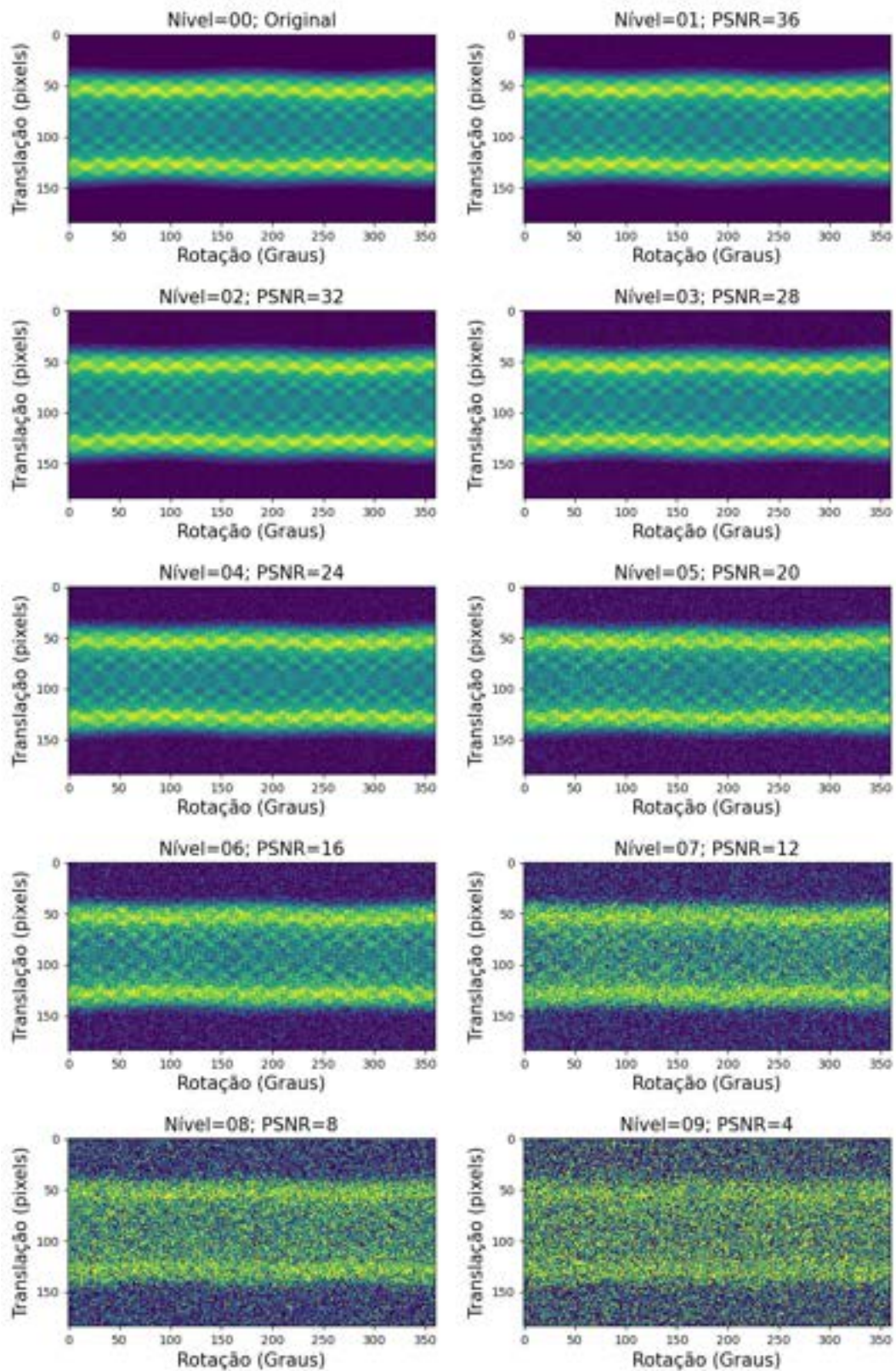


Figura 13 - Sinograma Engrenagem; adição crescente de ruído gaussiano no Sinograma.

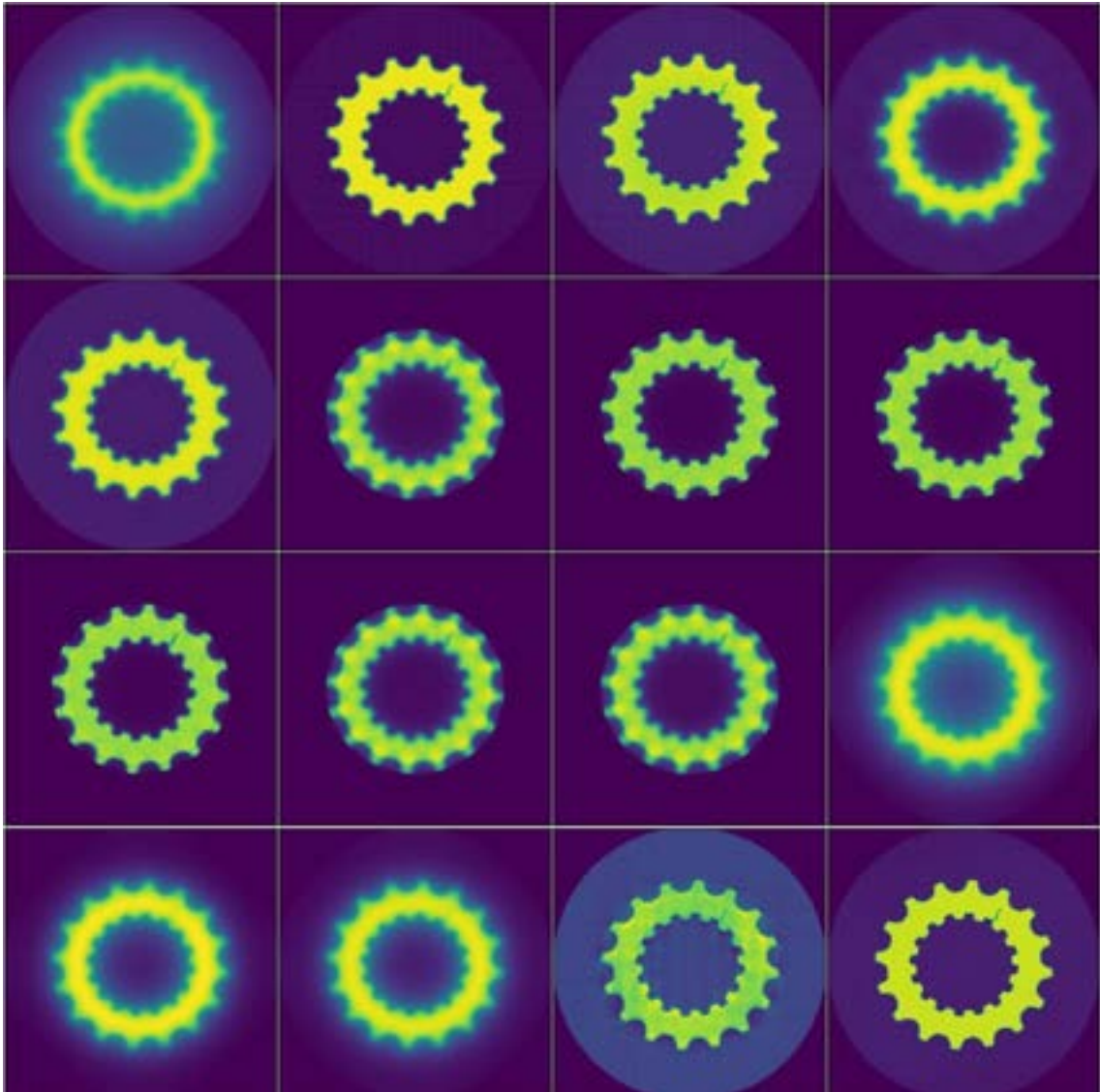


Figura 14 - Reconstruções a partir do sinograma íntegro do Objeto-alvo Engrenagem. Têm-se as imagens reconstruídas com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não iterativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações)

A Figura 14 apresenta uma amostra do total de imagens de reconstrução obtidas neste trabalho para os 16 algoritmos estudados. Este grupo de reconstruções foi obtido a partir do sinograma íntegro do Objeto-Alvo Engrenagem, presente no canto superior esquerdo das Figuras 12 e 13. Nos casos dos algoritmos iterativos, a vigésima quinta (25^o) iteração foi obtida, de um total de 50 iterações. Nos casos dos algoritmos não-iterativos e do CGLS, a única reconstrução obtida foi exibida.

2.3.1.2 Objeto-Alvo Horus

Representando a aplicação de tomografia na área de arquitetura, sondagem de estruturas edificadas, e TWM (*Trought the Wall Mapping*) (CAMPOS, 2017), dentre outras, um croqui do templo de Horus foi escolhido (Imagem 15).

As seguintes características do objeto em questão, que também pode ser visto na Figura 16, são relevantes:

1. Cada pixel da imagem do croqui do Templo de Horus representa uma área de 1,56 m² da estrutura real;
2. Cada pixel da imagem do croqui do Templo de Horus tem uma aresta de 1,25m da estrutura real;
3. O objeto-alvo Horus apresenta informação exclusivamente estrutural, definida por valores 0 ou 1;
4. O objeto-alvo Horus apresenta maior densidade de informação estrutural que os outros objetos-alvo estudados;
5. Apresenta uma alta incidência de ângulos retos e de linhas retas;

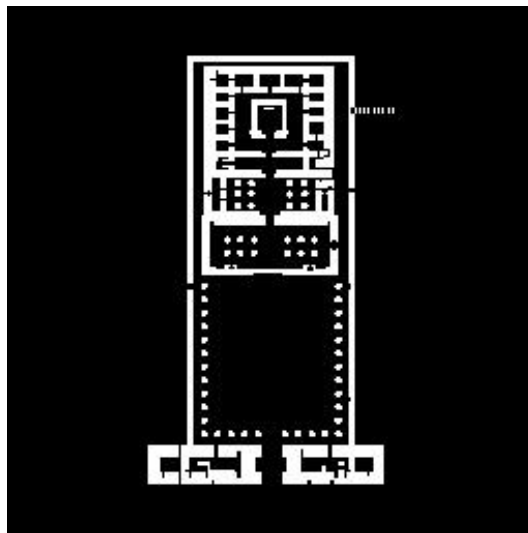


Figura 15 - Objeto-alvo Horus

A Figura 16 apresenta o objeto-alvo Horus íntegro e mais nove versões com adição gradual de ruído gaussiano diretamente no objeto. Todas as imagens foram normalizadas após a adição de ruído. A Figura 17 apresenta os respectivos sinogramas dos objetos da Figura 16. A Figura 18 apresenta o sinograma do objeto-alvo Horus íntegro e mais nove versões com adição gradual de ruído gaussiano diretamente no sinograma. Os níveis de ruído podem ser consultados na Tabela XIII.

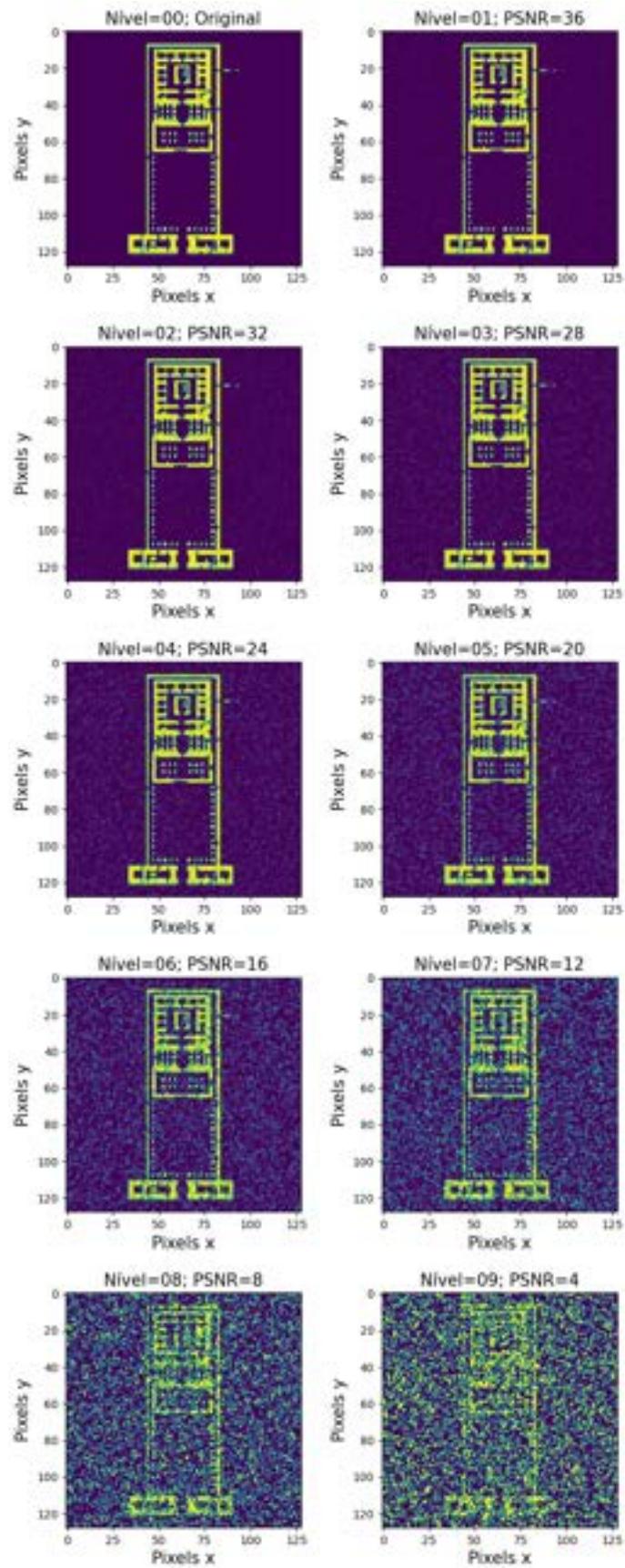


Figura 16 - Objeto Horus; adição crescente de ruído gaussiano no objeto.

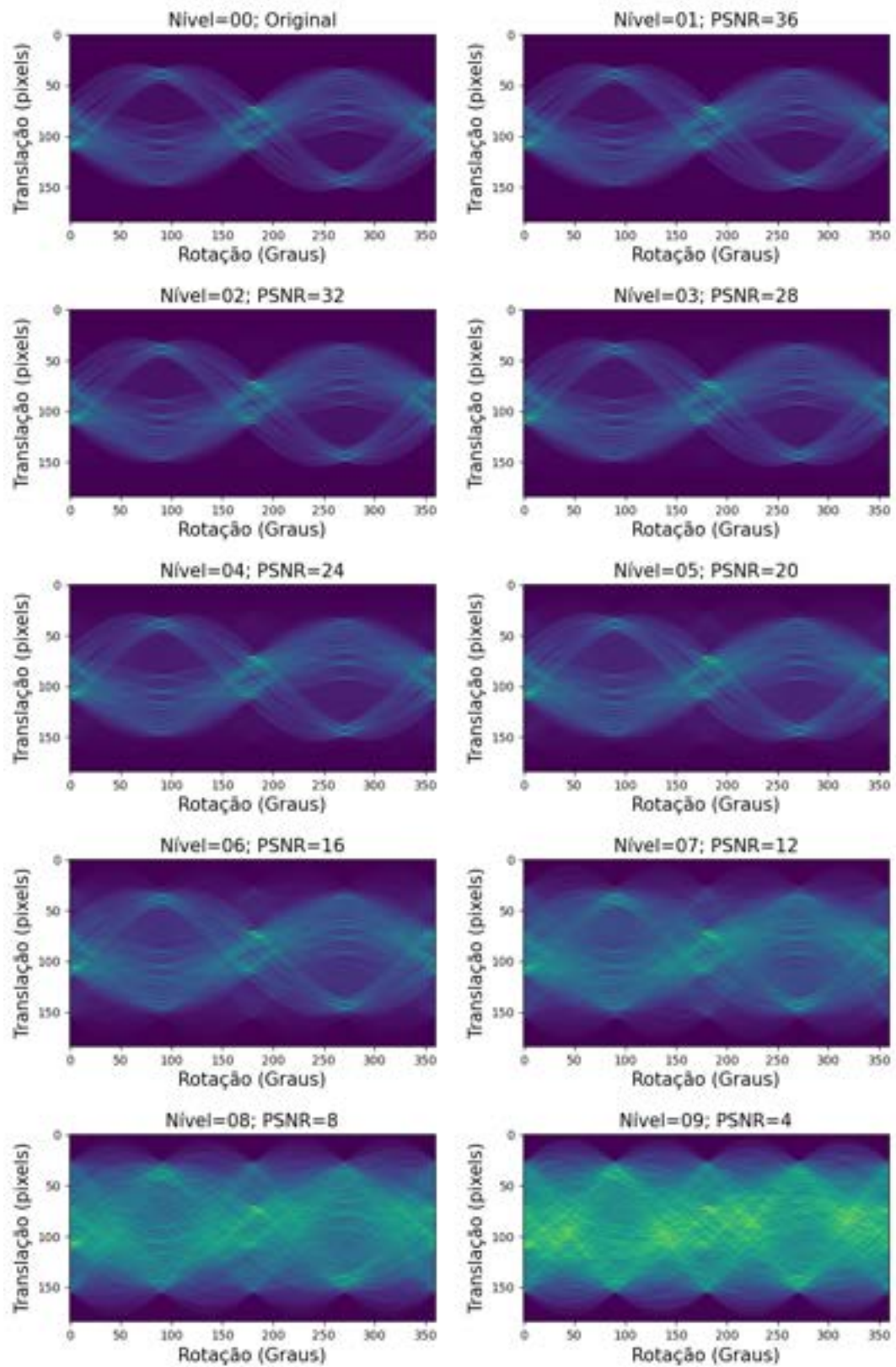


Figura 17 - Sinograma Horus; adição crescente de ruído gaussiano no objeto.

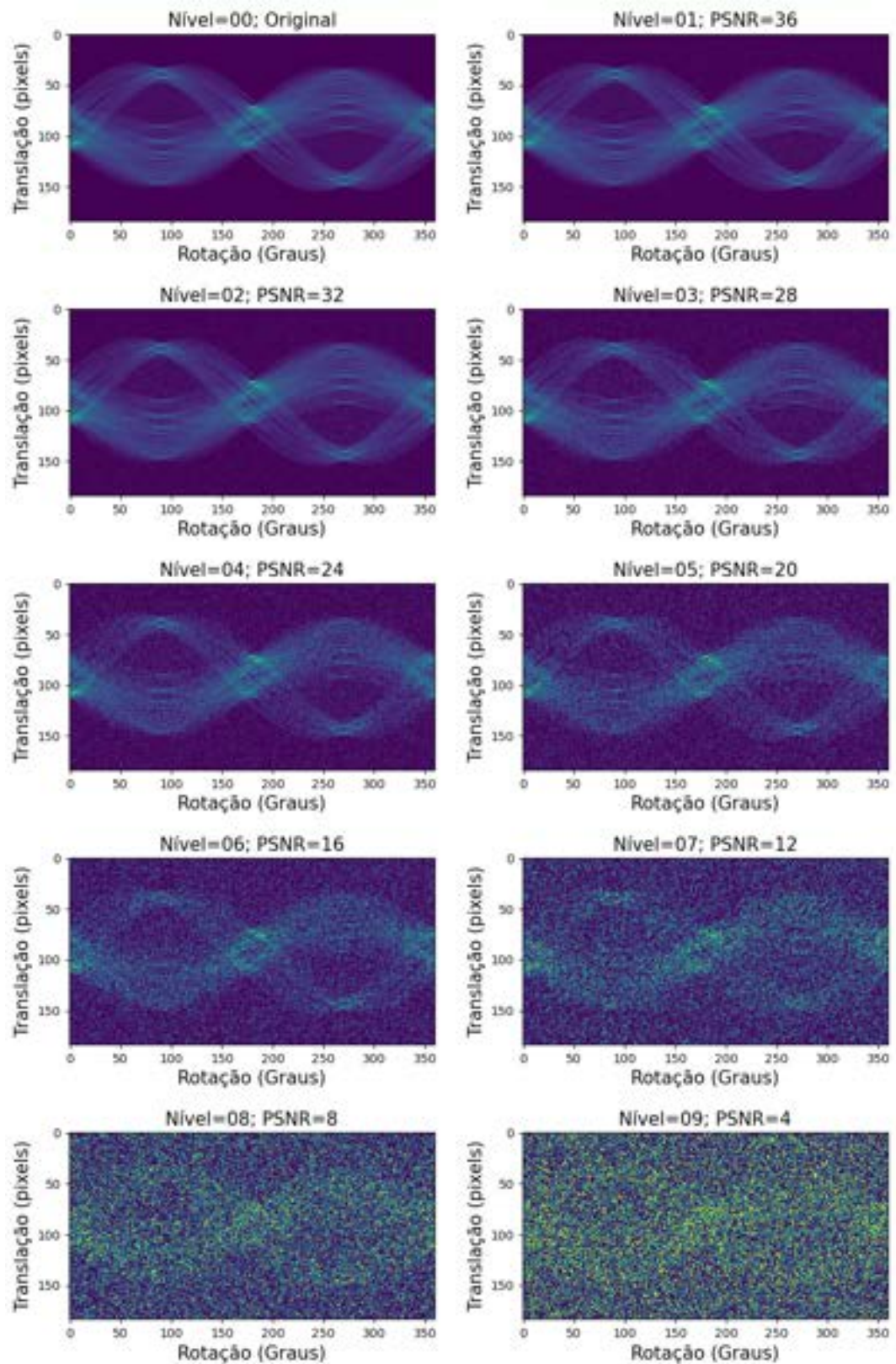


Figura 18 - Sinograma Horus; adição crescente de ruído gaussiano no Sinograma.

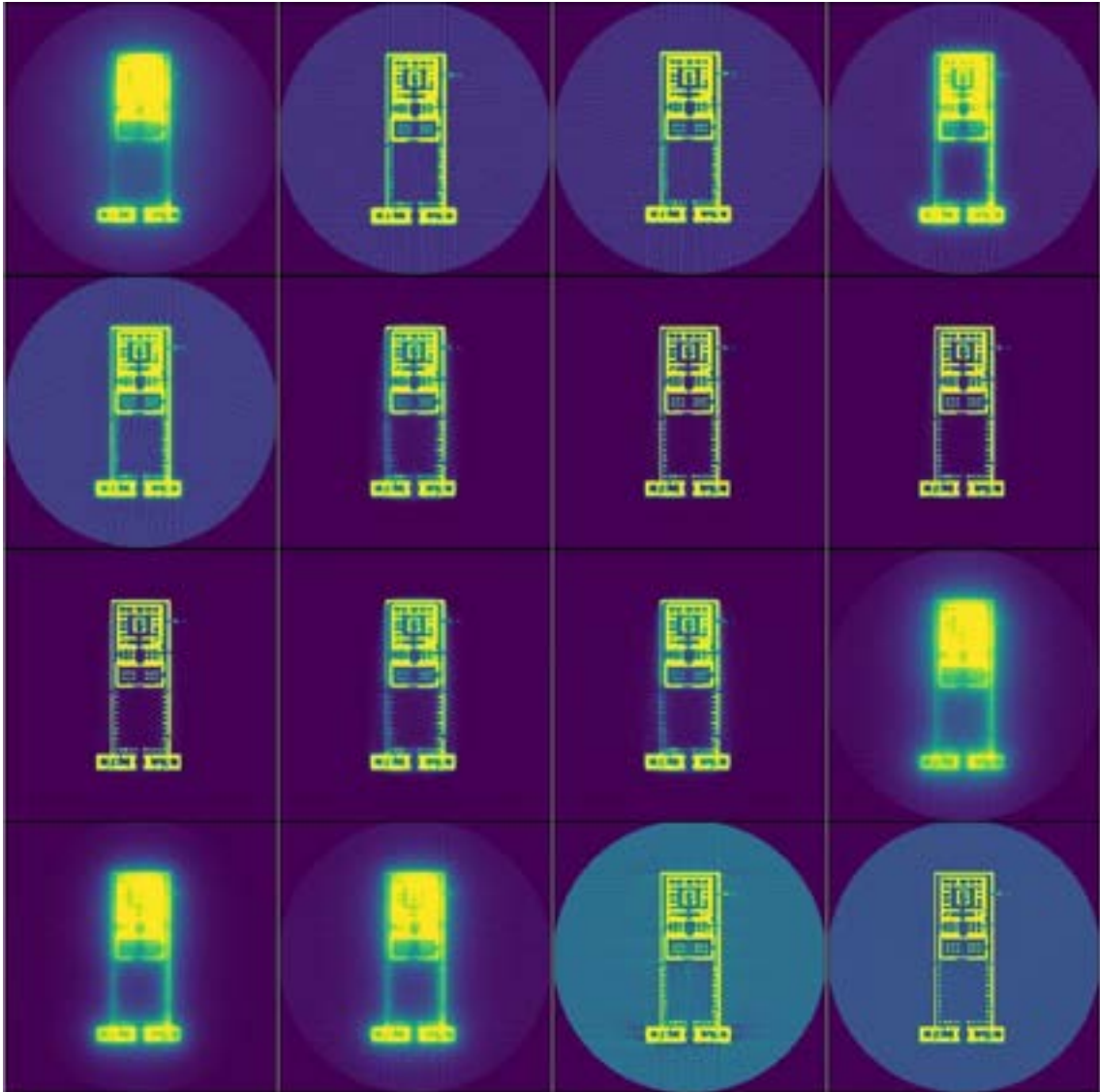


Figura 19 - Reconstruções a partir do sinograma íntegro do Objeto-alvo Horus. Têm-se as imagens reconstruídas com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não iterativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações)

A Figura 19 apresenta uma amostra do total de imagens de reconstrução obtidas neste trabalho para os 16 algoritmos estudados. Este grupo de reconstruções foi obtido a partir do sinograma íntegro do Objeto-Alvo Horus, presente no canto superior esquerdo das Figuras 17 e 18. Nos casos dos algoritmos iterativos, a vigésima quinta (25^o) iteração foi obtida, de um total de 50 iterações. Nos casos dos algoritmos não-iterativos e do CGLS, a única reconstrução obtida foi exibida.

2.3.1.3 Objeto-Alvo Phantom

Representando a aplicação de tomografia na área de saúde, uma fatia de uma estrutura Phantom (SHEPP; LOGAN, 1974) foi utilizada.

Essa estrutura, largamente utilizada nessa área de saúde, é um objeto simulado com base em parâmetros típicos de estudos empíricos de imagens de tomografia da área de saúde. Sua estrutura e distribuição de intensidades é inspirada em um crânio (Figura 20).

As seguintes características do objeto em questão, que pode ser visto também no canto superior esquerdo na Figura 21, são relevantes para sua escolha:

1. A escala de amostragem escolhida foi de 1 (um) pixel da imagem representando $0,05 \text{ cm}^2$ do objeto simulado;
2. O objeto-alvo Phantom, ou, simplesmente, Phantom, apresenta informação estrutural, na forma de bordas e regiões distintas;
3. O Phantom apresenta uma faixa de intensidade de pixels mais ampla (maior faixa dinâmica) que os outros dois objetos-alvo estudados;



Figura 20 - Objeto-alvo Phantom

A Figura 21 apresenta o objeto-alvo Phantom íntegro e mais nove versões com adição gradual de ruído gaussiano diretamente no objeto. Todas as imagens foram normalizadas após a adição de ruído. A Figura 22 apresenta os respectivos sinogramas dos objetos da Figura 21. A Figura 23 apresenta o sinograma do objeto-alvo Phantom íntegro e mais nove versões com adição gradual de ruído gaussiano diretamente no sinograma. Os níveis de ruído podem ser consultados na Tabela XIII

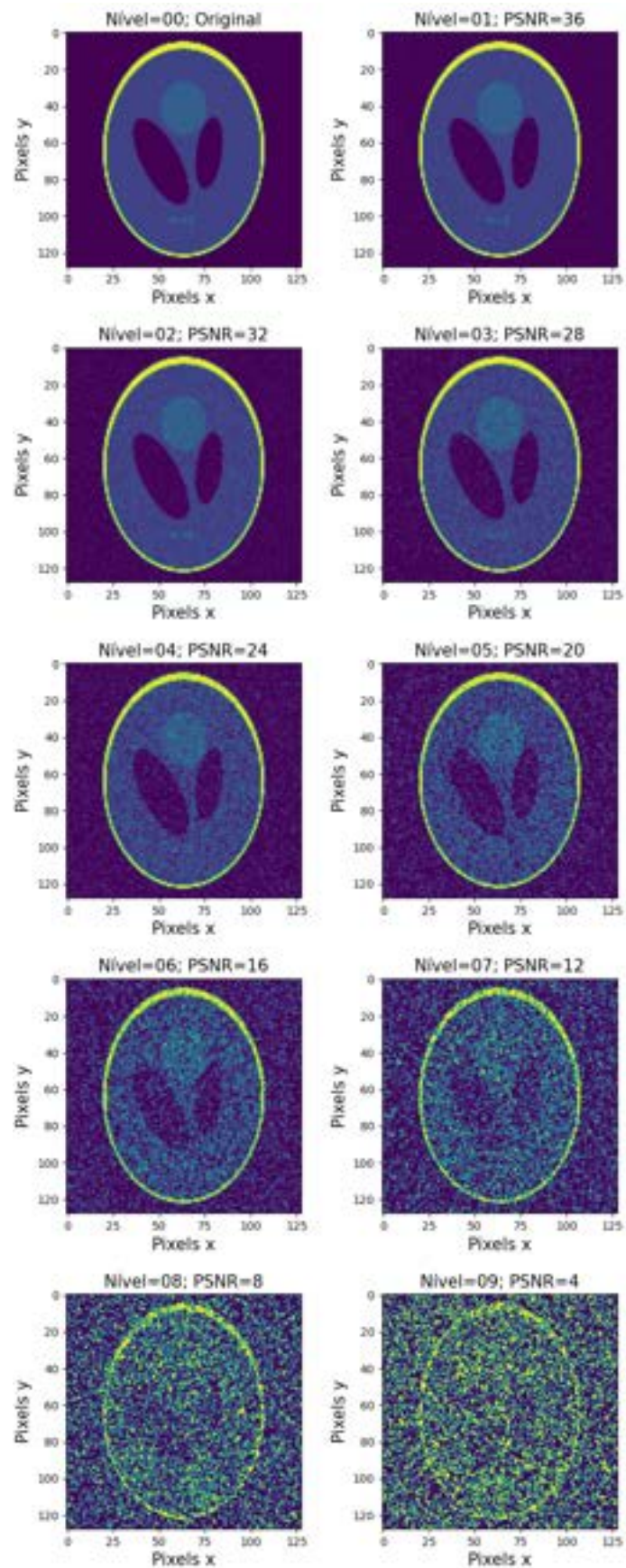


Figura 21 - Objeto Phantom; adição crescente de ruído gaussiano no objeto.

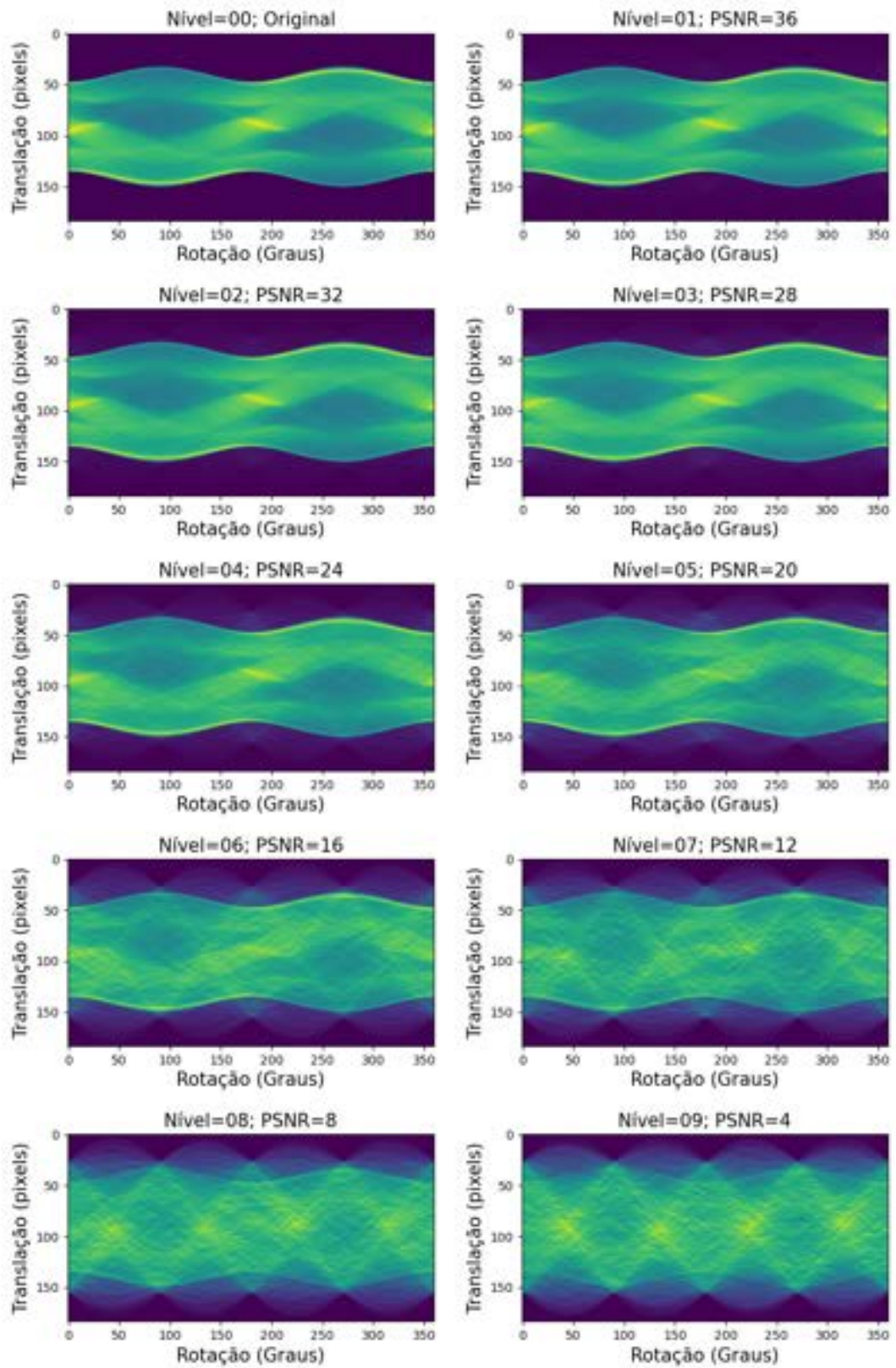


Figura 22 - Sinograma Phantom; adição crescente de ruído gaussiano no objeto.

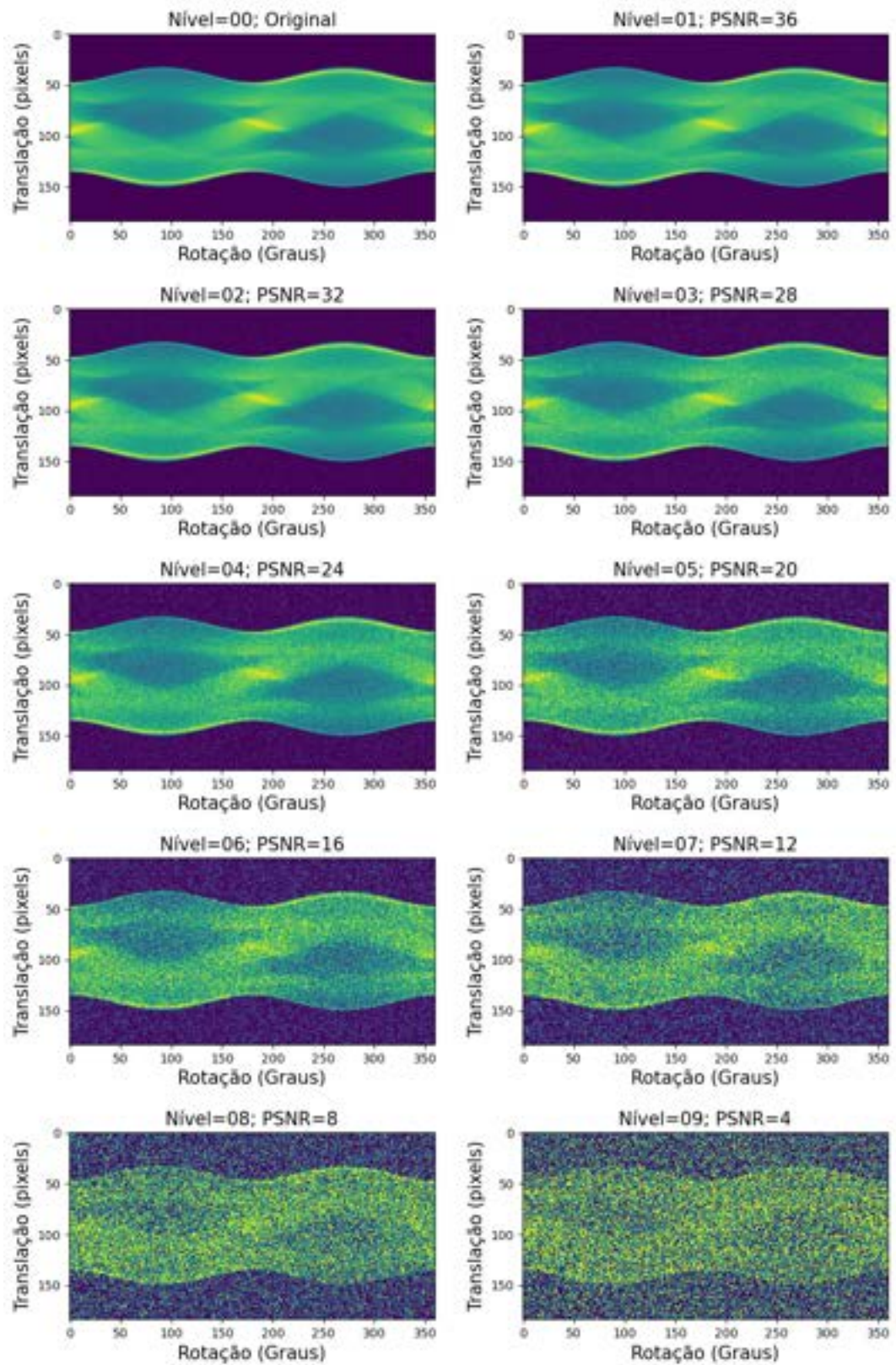


Figura 23 - Sinograma Phantom; adição crescente de ruído gaussiano no Sinograma.

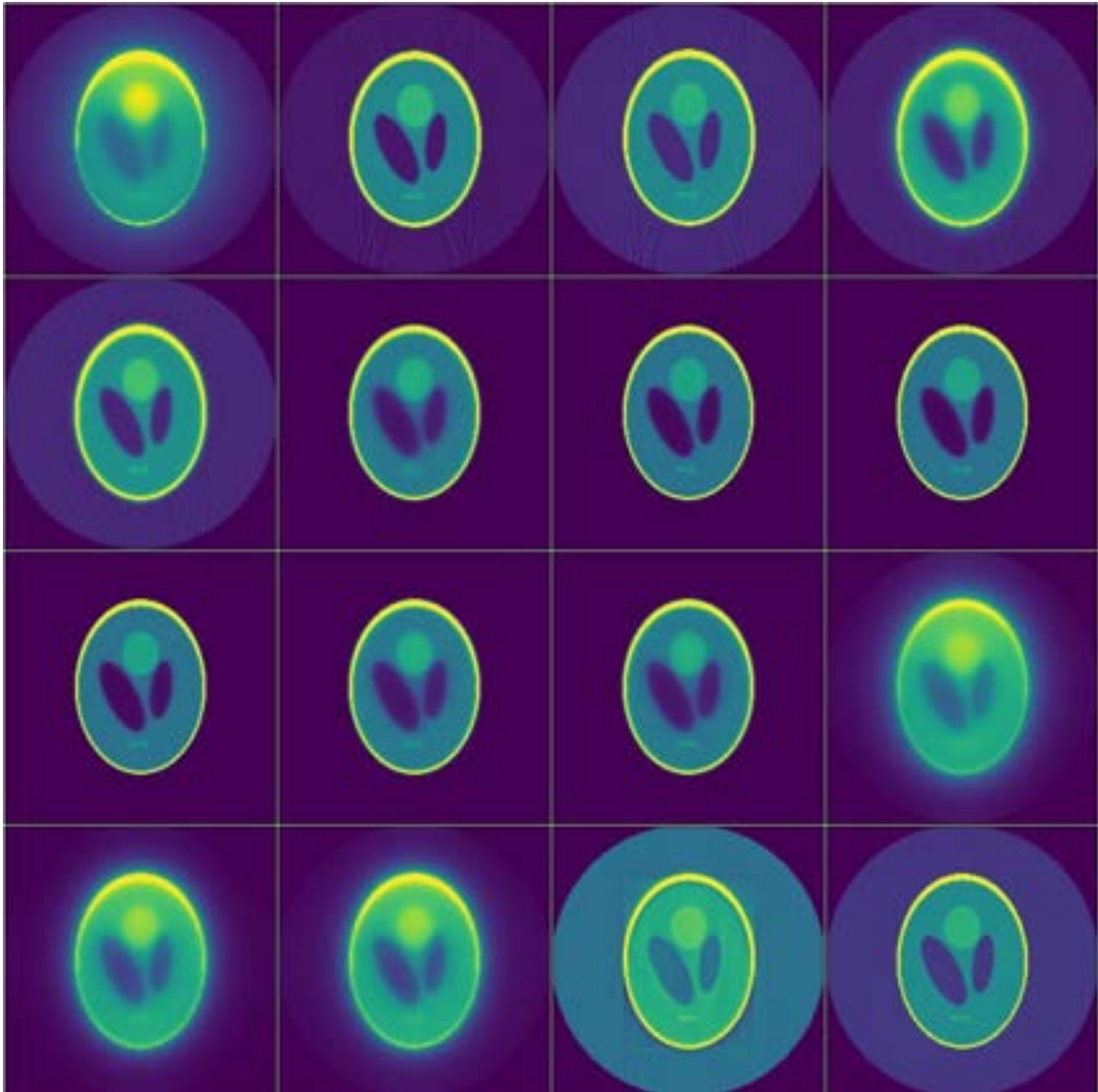


Figura 24 - Reconstruções a partir do sinograma íntegro do Objeto-alvo Phantom. Têm-se as imagens reconstruídas com os 16 algoritmos avaliados. Por ordem de escrita: CGLS (01 iteração); FBP e GRIDREC (não iterativos); SIRT, BART, MLEM, OSEM, TV, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H, PML-Q, TIKH, GRAD, SART e ART (todos com 25 iterações)

A Figura 24 apresenta uma amostra do total de imagens de reconstrução obtidas neste trabalho para os 16 algoritmos estudados. Este grupo de reconstruções foi obtido a partir do sinograma íntegro do Objeto-Alvo Phantom, presente no canto superior esquerdo das Figuras 22 e 23. Nos casos dos algoritmos iterativos, a vigésima quinta (25^o) iteração foi obtida, de um total de 50 iterações. Nos casos dos algoritmos não-iterativos e do CGLS, a única reconstrução obtida foi exibida.

2.3.2 Conjunto de Sinogramas Corrompidos

A adição de ruído simulado nos objetos-alvo base, proposta neste trabalho, ocorre de duas formas distintas, formando dois grupos para cada objeto-alvo base: erro antes do processo de aquisição (Figuras 22, 17 e 12) e erro depois do processo de aquisição (Figuras 23, 18 e 13). Em todas as adições de erro simulado, a imagem é normalizada antes e depois do processo de corrupção. Uma inspeção visual em ambos os grupos de sinogramas citados acima permite perceber qualitativamente a diferença estrutural do erro simulado presente.

2.3.2.1 Possíveis fontes de erro de um caso concreto genérico

As fontes de erro de maior destaque em um sistema de reconstrução são:

1. Imprecisões relacionados ao processo de medida (ruído).

Limitações de projeto, de instalação, de operação ou da tecnologia disponível representam os principais exemplos de fontes de erro relacionadas ao processo de medida. Um exemplo é a contribuição do efeito térmico dos componentes para a degradação dos sinais registrados.

2. Imprecisões relacionadas à modelagem matemática do problema.

A modelagem matemática é um resumo da descrição de um fenômeno real. O nível de resumo dessa modelagem é definido principalmente pelos recursos disponíveis. O ato de resumir representa um risco de perda de algum aspecto relevante do fenômeno. A modelagem mais adequada para uma dada aplicação oferece uma escolha equilibrada entre demanda computacional e precisão.

3. Imprecisões relacionadas às aproximações necessárias para a viabilidade de implementação.

Viabilizar a utilização dos recursos computacionais exige que a modelagem não só possa ser transformada para o domínio discreto como também apresente viabilidade de processamento com os recursos de computação disponíveis. Modelagens desenvolvidas com essa característica em mente possuem maior chance de apresentarem erros irrelevantes, ignoráveis, na sua implementação no domínio discreto. Um exemplo de operação matemática que é significativamente custosa computacionalmente é a transposição de matrizes.

4. Imprecisões relacionadas ao projeto do equipamento.

A arquitetura do equipamento, especialmente a disposição geométrica dos feixes e sensores, bem como a densidade desses, apresenta potencial de representar limites

de precisão no processo de escaneamento. Se esse limite não estiver de acordo com as características do problema, haverá erros de aquisição derivados.

5. Imprecisões relacionadas à física do feixe de sondagem.

Os feixes de sondagem disponíveis operam com emissão de partículas ou ondas eletromagnéticas. Cada grupo citado é composto por subgrupos de emissões; cada um com suas próprias características físicas e potenciais fontes de interferências. Como exemplo, fontes de interferências associadas aos diversos pontos da área de sondagem podem apresentar maior relevância para feixes de micro-ondas, devido a forte ocorrência de fenômenos como reflexão, difração e, por consequência, multi-percurso; a mesma relevância não é válida para feixes de maior frequência, como raios-X ou Gama.

6. Imprecisões relacionadas às características do objeto de estudo da referida área de aplicação.

A dimensão do objeto, e por consequência da área de sondagem, representa um fator crítico no processo por ser diretamente proporcional à dificuldade de garantir a eficácia do processo. Um objeto de pequenas proporções pode ser inserido em uma máquina com uma área controlada, sem exposição à fontes externas de erro, por exemplo. A distribuição da informação do objeto ao longo das medidas de intensidade obtidas pelo processo de sondagem é diretamente proporcional à facilidade de implementação do processo. A complexidade da estrutura do objeto é diretamente proporcional ao total de feixes de sondagem necessários para um processo de aquisição eficaz.

2.3.2.2 Modelagem das fontes de erro

A rigor, uma interpretação possível do problema do erro é admitir sua incidência no sinal apenas no ato de medida em si. Essa abordagem mostra-se adequada ao captar e avaliar um sinal de uma aplicação real, contendo uma imprecisão mensurável. Porém, quando há a necessidade de simular outros fenômenos, uma consideração mais ampla de fontes de erro pode ajudar. Assim, testamos também o erro no domínio dos pixels para tentar avaliar as consequências de diversos efeitos que podem atrapalhar a aquisição das projeções.

Ao longo desse trabalho, o erro é gerado com base na distribuição normal, tendo média zero, $\mu = 0$ (Tabela XII), isto é, via

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \quad (2.3.1)$$

o desvio padrão, σ é o fator ajustado para obter os distintos PSNR alvo, seja no sinograma do Objeto-Alvo ou diretamente no Objeto-Alvo (Coluna 02 da Tabela XIII).

A corrupção das imagens geradas à partir das imagens base ocorreu de forma crescente, gerando uma escala decrescente de valores de medida PSNR (Colunas 01 e 03 da Tabela XIII). O espaçamento de quatro (4) unidades PSNR entre os níveis de ruído e o intervalo entre 36 e 04 PSNR foram estabelecidos por observação; tomou-se como referência a capacidade de identificação visual de diferenças entre as imagens através dos níveis de ruído (Coluna 03 da Tabela XIII).

Tabela XII - Elementos da equação da distribuição gaussiana

| Simbolo | Descrição |
|---------------|---|
| μ | Média |
| σ | Desvio Padrão |
| σ^2 | Variância |
| x | Variável aleatória qualquer |
| \mathcal{N} | Distribuição normal ou Gaussiana |
| \mathcal{X} | Distribuição de probabilidade da V.A. x |

Tabela XIII - Parâmetros e medidas de erro utilizadas neste trabalho

| Nível de Ruído | Desvio padrão; σ | Medida PSNR obtida |
|----------------|-------------------------|--------------------|
| 1 | 0.0224 | 36 |
| 2 | 0.0352 | 32 |
| 3 | 0.056 | 28 |
| 4 | 0.089 | 24 |
| 5 | 0.16 | 20 |
| 6 | 0.22 | 16 |
| 7 | 0.355 | 12 |
| 8 | 0.62 | 8 |
| 9 | 1.0 | 4 |

3 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Este capítulo descreve o teste do método de análise proposto por este trabalho. Os recursos utilizados para permitir esse teste. Apresenta os resultados obtidos e oferece uma discussão visando basear uma conclusão.

É importante destacar que os gráficos que servem de base para as análises apresentadas nesta seção encontram-se nos apêndices. O Apêndice A e o Apêndice B apresentam as curvas da qualidade da reconstrução em função da iteração, por nível de ruído (todos os algoritmos conjuntamente) e para os diferentes algoritmos (todos os níveis de ruído conjuntamente), respectivamente. O Apêndice C traz as curvas do índice de desempenho agregado e o Apêndice D apresenta os cortes de seções retas que balizam a análise qualitativa dos métodos de reconstrução.

3.1 Recursos Computacionais

As simulações foram executadas por programas em linguagem Python 3.x. Fez-se uso das seguintes bibliotecas de Tomografia: SciImage (WALT et al., 2014) para implementação do algoritmo de reconstrução SART, ASTRA Toolbox (AARLE et al., 2016), para implementação dos algoritmos de reconstrução FBP e CGLS, e Tomopy (GÜRSOY et al., 2014) para implementação da aquisição por feixes paralelos e demais algoritmos de reconstrução. Para a definição de entidades matemáticas e implementação computacional de operadores matemáticos específicos, usam-se as bibliotecas Numpy (HARRIS et al., 2020) para Operações com matrizes, métodos de álgebra linear, Scikit-Learn (PEDREGOSA et al., 2011) para obter o índices de qualidade e OpenCV (BRADSKI, 2000) para as operações das imagens e limiares estatísticos. Empregam-se ainda a biblioteca Pandas (MCKINNEY et al., 2010) para ordenamento, formatação e processamento dos dados ao longo da implementação do método de avaliação proposto. Os gráficos são produzidos com o auxílio das bibliotecas Matplotlib (HUNTER, 2007) para ordenamento, formatação e processamento dos gráficos de desempenho dos algoritmos de reconstrução e Seaborn (WASKOM et al., 2017); para ordenamento e formatação dos mosaicos de imagens de objetos-alvo e sinogramas.

As simulações foram executadas usando a plataforma de desenvolvimento Jupyter Notebook (KLUYVER et al., 2016) sobre o sistema operacional Ubuntu 20.04 (SOBELL, 2015). Os equipamentos empregados para as simulações foram um Notebook I5 com 8GB de RAM, e um Desktop AMD Ryzen 5 com 64 GB de RAM.

3.2 Parâmetros das funções dos algoritmos de reconstrução

Os parâmetros utilizados nas implementações dos algoritmos de reconstrução estudados neste trabalho estão listados na Tabela XIV. Os valores foram encontrados de forma empírica, visando garantir a funcionalidade das implementações e buscar, dentro da viabilidade, a utilização de valores iguais ou da mesma ordem de grandeza.

Tabela XIV - Parâmetros das funções dos métodos de reconstrução

| Algoritmo | Parâmetro | Biblioteca |
|------------------|-------------------------------------|------------|
| <i>ART</i> | Nenhum | Tomopy |
| <i>SIRT</i> | Nenhum | Tomopy |
| <i>BART</i> | "blocks=3" | Tomopy |
| <i>SART</i> | Nenhum | Sci-Image |
| <i>FBP</i> | "filter_name='shepp-logan'" | Sci-Image |
| <i>GRIDREC</i> | "filter_name='sheep'" | Tomopy |
| <i>TV</i> | "reg_par=1e-3" | Tomopy |
| <i>TIKH</i> | "reg_par=5e-2" | Tomopy |
| <i>GRAD</i> | "reg_par=1e-1" | Tomopy |
| <i>CGLS</i> | Nenhum | ASTRA |
| <i>OSEM</i> | "num_block=3" | Tomopy |
| <i>MLEM</i> | Nenhum | Tomopy |
| <i>OSPLM - H</i> | "num_block=3"; "reg_par=[10.0,0.1]" | Tomopy |
| <i>OSPML - Q</i> | "num_block=3"; "reg_par=0.1" | Tomopy |
| <i>PML - H</i> | "reg_par=[10.0,0.1]" | Tomopy |
| <i>PML - Q</i> | "reg_par=0.1" | Tomopy |

A escolha do parâmetro 'num_block' teve como premissa a busca de um valor único para todas as implementações que o utilizam. Dentre os valores testados, apenas o 'num_block=3' permitiu um funcionamento correto de todas as implementações que utilizam este parâmetro. Todas as implementações que usam este parâmetro são da biblioteca Tomopy.

As implementações dos algoritmos 'MLEM', 'OSEM', 'OSPML-Q', 'PML-Q', 'PML-H', 'OSPML-H' apresentaram problemas de funcionamento ao receber como entrada da primeira iteração uma imagem com todos os valores iguais a zero. O problema foi resolvido ao adicionar um valor residual de 10^{-6} a todos os pixels da imagem.

3.3 Análise do Custo Computacional das Técnicas de Reconstrução

Medimos o tempo de execução da primeira (ou única para os algoritmos não iterativos) reconstrução de cada algoritmo. A Figura 25 apresenta um gráfico comparativo desses tempos para os 16 algoritmos.

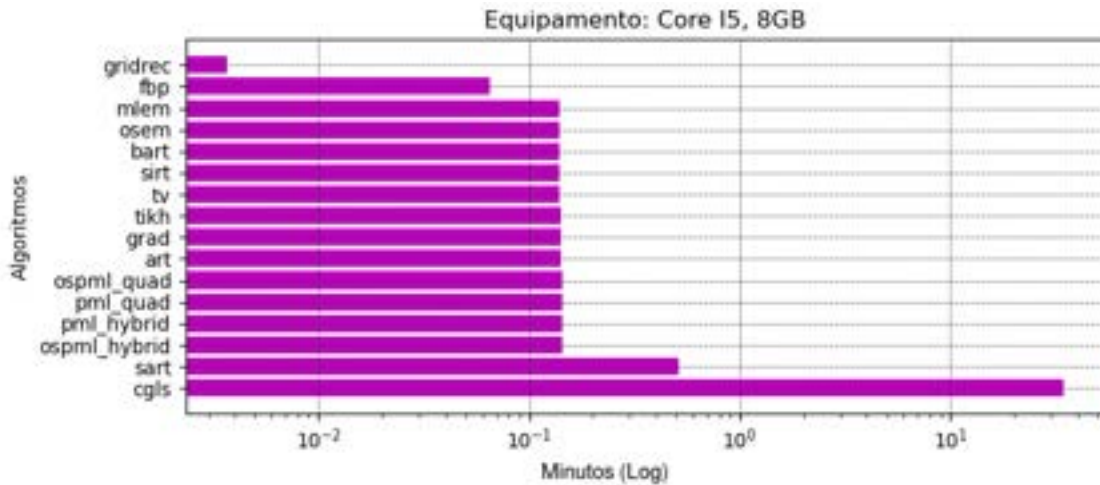


Figura 25 - Tempo de execução da primeira iteração dos algoritmos de reconstrução.

No gráfico comparativo dos 16 algoritmos, vemos que os métodos baseados em Fourier apresentaram a menor demanda computacional e dentre todos o GRIDREC apresentou a menor demanda computacional – duas ordens de grandeza menos exigente que a média dos outros algoritmos. Por outro lado, o algoritmo CGLS apresentou a maior demanda computacional, sendo duas ordens de grandeza mais exigente que a média dos outros algoritmos. Todos os algoritmos de reconstrução algébrica, com exceção do CGLS, apresentaram uma demanda computacional similar. Devido à alta demanda computacional do algoritmo CGLS observada no teste, apenas uma iteração desse algoritmo foi utilizada ao longo deste estudo.

Ao avaliar as qualidades das reconstruções dos diferentes algoritmos, como é feito na próxima seção, constata-se que os algoritmos baseados em MLE desempenham melhor. Dessa forma, torna-se interessante comparar a demanda de recursos computacionais desse grupo de algoritmos. A Figura 26 traz a comparação dos tempos de execução da primeira iteração dos algoritmos baseados em MLE. Podemos observar que os algoritmos da subfamília PML apresentam a menor demanda computacional e dentre eles, o do tipo “hybrid”, com coeficientes para termos linear e quadrático, apresenta uma demanda computacional estimada entre 5% a 6% maior que sua versão “quad”, o PML-QUAD, que aplica apenas a restrição quadrática e apresenta a menor demanda computacional. Por outro lado, os algoritmos da subfamília EM apresentam a maior demanda computacional. Em geral, o uso de OS demanda em torno de 2% a 5% de aumento na demanda computacional. Por fim, vemos que o OSEM apresentou a maior demanda computacional.

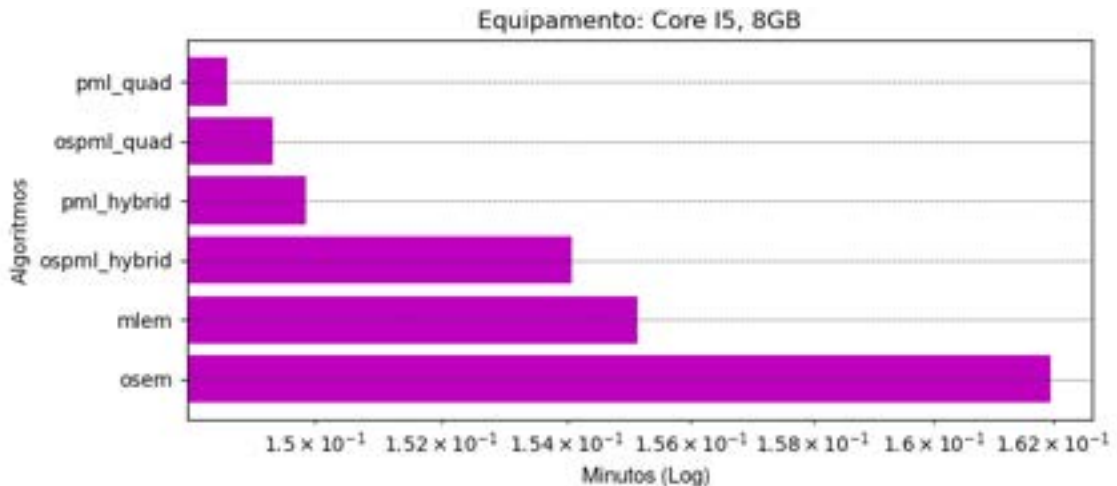


Figura 26 - Tempo de execução da primeira iteração dos algoritmos de reconstrução baseados em MLE.

3.4 Resultados Obtidos

As abordagens de análise utilizadas nesta parte do trabalho apresentam as seguintes características:

1. As três (3) imagens base utilizadas nos testes descrevem uma imagem tomográfica simulada de uma cabeça humana (Phantom), um diagrama do Templo de Horus e um diagrama de uma engrenagem vazada, contendo uma rachadura. Os objetos-alvo foram abordados na Subseção 2.3.1.
2. A partir de cada imagem cria-se um grupo de sinogramas degradados. O processo de degradação ocorre de duas formas (antes e durante a aquisição do sinograma) e com diferentes intensidades de ruído. Os detalhes sobre o processo de obtenção dos sinogramas são abordados na Subseção 2.3.2.
3. Os algoritmos de reconstrução avaliados foram FBP, GRIDREC, ART, SIRT, BART, SART, GRAD, CGLS, TIKH, TV, MLEM, OSEM, PML-H, PML-Q, OSPML-H e OSPML-Q; Mais detalhes sobre estes algoritmos foram abordados na Seção 1.3.
4. Os índices de qualidade aplicados para avaliar as imagens reconstruídas a partir dos sinogramas foram MSE, MDA, PSNR e MSSIM; Mais detalhes sobre estes índices de qualidade são abordados na Seção 2.2.

3.4.1 Qualidade em Função do Nível de Intensidade do Ruído

A análise de qualidade organizada por nível de intensidade do ruído adicionado agrupa as curvas de desempenho dos processos de reconstrução iterativa de cada um dos 16

algoritmos avaliados. As curvas obtidas nesta etapa estão no Apêndice A.

A abordagem permite a comparação direta entre os desempenhos dos algoritmos para um dado nível de intensidade do ruído adicionado. Isto é, podemos observar os desempenhos comparativamente e identificar as curvas com melhor e pior desempenhos, e de desempenhos similares para um dado nível de intensidade do ruído adicionado em função do número de iterações. Podemos ainda identificar se com as iterações os desempenhos dos algoritmos mudam e os pontos em que isso ocorre – os pontos de interseção entre as curvas dos diferentes algoritmos.

Podemos também comparar a estabilidade dos algoritmos à medida que o nível de intensidade do ruído adicionado varia.

As curvas apresentadas no Apêndice A permitem observar que o aumento do nível de corrupção gera redução da área sob a curva, redução do valor médio, redução do valor máximo e redução do total de iterações necessário para a curva atingir o respectivo valor máximo. Também é possível observar que os algoritmos produzem resultados, isto é, qualidades distintas. Além disso, vemos que o aumento do nível de corrupção gera uma suavização das curvas de qualidade, isto é, os máximos locais e joelhos (mudanças de tendências) se tornam menos evidentes quanto maior é a intensidade da corrupção.

3.4.2 Qualidade da Reconstrução Por Algoritmo

A análise de qualidade organizada por algoritmo agrupa em gráficos os desempenhos dos processos de reconstrução iterativa de um mesmo algoritmo sob diferentes níveis de intensidade de ruído adicionado. As curvas obtidas nesta etapa estão no Apêndice B.

Esse formato de curva traz uma visão diferente dos gráficos discutidos na subseção anterior. Essa vista de outro referencial permite avaliar o grau de sensibilidade de um algoritmo à adição progressiva de erro, por meio do gradiente (ou da variação) de desempenho observável no conjunto de curvas. Essa análise permite identificar os níveis de intensidade de ruído adicionado críticos, isto é, a partir dos quais o algoritmo desempenha insatisfatoriamente do ponto de vista da qualidade da reconstrução e da estabilidade do algoritmo.

As curvas apresentadas no Apêndice B permitem observar que o aumento do nível de corrupção gera redução da área sob a curva, redução do valor médio, redução do valor máximo e redução do total de iterações necessário para a curva atingir o respectivo valor máximo. Também é possível observar que os algoritmos produzem resultados com distintos níveis de qualidade. Além disso, vemos que o aumento do nível de corrupção gera uma suavização das curvas de qualidade, isto é, os máximos locais e joelhos (mudanças

de tendências) se tornam menos evidentes quanto maior é a intensidade da corrupção.

3.4.3 Índices Agregados de Qualidade por Algoritmos

O Apêndice C traz curvas de desempenho da qualidade da reconstrução a partir dos índices agregados de qualidade. Cada gráfico apresentado nesse apêndice está estruturado da seguinte forma: Índice Agregado de Qualidade nas Ordenadas, Nível de Ruído nas Abcissas, e o Algoritmo é indicado pela Cor da Curva. De tal sorte que cada seção traz as curvas obtidas para uma imagem base. A primeira traz as qualidades das reconstruções quando a adição de ruído ocorre no objeto em si e a segunda no sinograma. Em cada subseção, as curvas são apresentadas na mesma sequência de medida de qualidade integrada. Nota-se que essas curvas sintetizam as informações presentes nas curvas de qualidade dos dois apêndices anteriores, com preservação significativa do potencial de análise.

A partir das curvas apresentadas no Apêndice C para adição de ruído no sinograma, é possível observar que, apesar da maior queda de desempenho, o grupo de algoritmos MLE supera o desempenho dos algoritmos das outras classes para a faixa de níveis de corrupção $e < 8$. Por outro lado, para a adição de ruído no objeto-alvo, é possível observar que o grupo de algoritmos MLE supera os de outras classes, apesar da maior queda de desempenho quando a intensidade do ruído aumenta. Observa-se que o desempenho dos algoritmos OSPML-Q e PML-Q apresenta instabilidade quando o ruído corrompe diretamente os objetos-alvo Horus e Engrenagem.

3.4.4 Cortes das Reconstruções Obtidas

No Apêndice D apresentam-se os cortes das reconstruções de cada imagem ao longo de iterações para cada algoritmo. Em cada corte, temos a curva que representa a estrutura do objeto ao longo do corte a qual superpomos a estrutura do objeto original. Além disso, avalia-se a interceptação dos cortes por limiares estatísticos. O apêndice apresenta análises para quatro (4) cortes das reconstruções através das 50 iterações de cada um dos 16 algoritmos para cada um dos 3 objetos-alvo.

Apresentam-se conjuntos de gráficos com 16 diagramas de corte, em um padrão de quatro (4) linhas por quatro (4) colunas. Cada coluna representa um dos quatro cortes fundamentais Horizontal (H), Vertical (V), Diagonal Principal (Dp), e Diagonal Secundária (Ds).

Em cada conjunto de figuras, em cada coluna (corte) temos que:

1. A primeira linha de figuras apresenta as imagens sobrepostas de todos os cortes, ao longo das (no máximo) 50 iterações do algoritmo. Esta abordagem permite analisar o gradiente de correção (como o corte muda conforme as alterações) de cada algoritmo em função das iterações.

Para facilitar o entendimento, as curvas de cada corte são traçadas usando cores distintas: Horizontal (H) em vermelho, Vertical (V) em verde, Diagonal Principal (Dp) em azul, Diagonal Secundária (Ds) em laranja. Mas, em todos os cortes o corte obtido do objeto original está apresentado tracejado preto. Esse corte serve de comparativo na avaliação da qualidade dos cortes dos objetos reconstruídos.

2. A segunda linha de figuras apresenta a sobreposição das linhas de corte inicial e final (após a última iteração do algoritmo). O corte obtido após a primeira reconstrução está em azul, o corte obtido após a última reconstrução está em vermelho. A extensão da correção resultante do processo iterativo é realçada pelas áreas hachuradas em amarelo. E, por fim, tem-se o corte do objeto original em tracejado preto para referência.

Esta abordagem visa realçar a correção conseguida por cada algoritmo ao longo das reconstruções iteradas.

3. A terceira e quarta linhas desmembram as linhas de cortes inicial das figuras na terceira linha, respectivamente, usando o mesmo código de cores (mas, o hachurado em amarelo serve somente para enfatizar os cortes). E, superpõem a elas métricas estatísticas. A média do corte está em magenta, e linhas correspondentes à média mais ou menos um desvio padrão, em laranja, já o limiar de Otsu (OTSU, 1979) está em ciano.

Esta abordagem traz a análise de índices estatísticos representativos da possibilidade de separação das estruturas presentes nos cortes, que indicam a possibilidade de separação de classes.

Os gráficos no Apêndice D permitem observar que a adição de ruído desloca os limiares estatísticos de suas posições ótimas (obtidas para o nível 00); em muitos casos, e à medida que a intensidade do ruído aumenta, o deslocamento é suficiente para tornar a separação das estruturas por limiar estatístico pouco eficaz.

3.5 Análise dos Resultados: Qualidade, Estabilidade e Convergência das Técnicas de Reconstrução

A análise dos resultados de tempo de processamento da primeira iteração permite-nos observar alguns fatos quanto ao custo computacional dos algoritmos estudados. Os algorit-

mos baseados no Teorema da Fatia de Fourier apresentam o menor custo computacional – uma ordem de grandeza menor que os demais. O GRIDREC apresentou o menor custo computacional dentre todos. O CGLS foi o algoritmo que apresentou o maior custo computacional – duas ordens de grandeza superior ao SART, o qual foi o segundo de maior em custo computacional. A mesma análise restrita ao grupo de algoritmos MLE permite observar que adicionar a sub-etapa de processamento OS, “Ordered Subset”, tende a aumentar o custo computacional de 2% a 5%; e que o uso de termos lineares e quadráticos, característica do subgrupo híbrido do grupo MLE, tende a aumentar o custo computacional de 3% a 6%.

Da análise da qualidade da reconstrução vemos ainda que os algoritmos pertencentes ao grupo MLE (MLEM, OSEM, OSPML-H, OSPML-Q, PML-H e PML-Q) estão ranqueados sempre na primeira metade em todos os testes realizados. Observa-se que a vantagem do grupo MLE mostra-se quase absoluta – porém, a ordem da classificação dos algoritmos do grupo MLE varia, e em poucos casos, observa-se a participação de outros algoritmos nas primeiras classificações. Sob altos níveis de ruído, a qualidade de reconstrução apresenta desempenhos competitivos ocasionais/pontuais para os seguintes algoritmos CGLS, TV, TIKH e GRAD, em ordem decrescente de frequência. Já sob baixos níveis de ruído observamos alguns casos de desempenho competitivo do algoritmos FBP e GRIDREC.

A análise da qualidade da reconstrução permite-nos observar que os algoritmos que apresentam um correspondência monótona, isto é, com maior previsibilidade do impacto no desempenho em função da intensidade do ruído, por ordem decrescente, são:

1. OSEM;
2. OSPML-H;
3. MLEM;
4. PML-H;

Considerando as diferentes imagens-alvo base, a forma de inserção e do nível de intensidade do ruído adicionado é possível dizer que os algoritmos que mais se destacam, em ordem decrescente, são:

1. OSEM;
2. OSPML-H;
3. PML-H e MLEM.

Dessa forma, ficou caracterizado que o grupo MLE apresentou vantagem significativa sobre os demais algoritmos quanto a qualidade das reconstruções. Essa vantagem diminui significativamente com o aumento progressivo dos níveis de ruído.

Em tempo, mesmo que os resultados sugiram a possibilidade de uma classificação recorrentemente superior dos algoritmos do grupo MLE perante os demais grupos, é claro que o estudo prévio do caso da aplicação concreta pode contribuir para a escolha do algoritmo mais adequado.

A análise do desempenho dos algoritmos por meio dos diferentes métodos de inserção e o aumento progressivo da intensidade do ruído adicionado permite algumas observações. A adição de ruído no sinograma se mostra mais crítica quanto ao valor dos índices de qualidade; foi observado que os valores dos índices de qualidade obtidos são menores do que na análise com adição de ruído no objeto-alvo. Esta característica se estende por todos os algoritmos, sendo que no grupo MLE o efeito restringiu-se a afetar o MSSIM.

Já a adição de ruído no objeto-alvo se mostra mais crítica para a avaliação da estabilidade dos algoritmos; foram observadas mais instabilidades (e com maiores variações nos índices) de algoritmos do grupo MLE com restrição quadrática. O OSPML-Q apresentou instabilidades significativas em algumas iterações com a adição de ruído no objeto-alvo mesmo para os menores níveis de ruído, porém funcionou adequadamente nos demais casos. O PML-Q apresentou instabilidades pontuais, para alguns níveis de ruído iniciais, porém funcionou adequadamente nos demais casos. A adição de ruído no sinograma também gerou instabilidades nos algoritmos MLE do subgrupo quadrático para os menores níveis de ruído iniciais, porém com variações significativamente menores.

Além do acima exposto, considerando as múltiplas avaliações com a adição gradual de erro, vemos que os algoritmos FBP e GRIDREC se destacam em alguns casos quando a intensidade do ruído adicionado é baixa ou intermediária. Por outro lado, os algoritmos CGLS, TIKH, TV e GRAD o fazem, em alguns casos, em iterações iniciais, para níveis de ruído alto ou intermediário.

A comparação dos cortes das reconstruções permite observar que a distinção das estruturas melhora conforme a iteração aumenta. Porém, vê-se que também para alguns algoritmos, há uma quantidade de iterações na qual se alcança o melhor desempenho, a partir da qual o desempenho cai.

Quanto ao erro médio qualitativo avaliado nos cortes ao longo das iterações com nível 05 de ruído: TV, TIKH e GRAD apresentaram os melhores resultados. Os algoritmos do grupo algébrico apresentaram os piores resultados. E os algoritmos do grupo MLE apresentaram resultados intermediários.

Verifica-se uma diferença significativa da média do erro de fundo das reconstruções. Os algoritmos que apresentaram maiores manifestações desse fenômeno foram, por ordem: SART, SIRT, ART, BART e TIKH. Os algoritmos que apresentaram menores manifestações do fenômeno foram os algoritmos do grupo MLE, com destaque para os algoritmos,

por ordem: OSEM, OSPML-Q e OSPML-H. O acréscimo na intensidade do ruído adicionado aumenta a intensidade do fenômeno, sendo ainda mais intenso quando o erro é adicionado no sinograma.

Em alguns métodos, o erro da reconstrução apresenta componentes de alta frequência. A adição de ruído intensifica esse comportamento, com aumento significativo quando o erro corrompe o sinograma. Nos algoritmos da classe MLE, essas componentes aumentam em intensidade com as iterações, apesar da melhoria da qualidade da reconstrução.

Verifica-se ainda que a distribuição espacial das componentes de alta frequência presentes no erro de reconstrução varia entre os algoritmos. Os algoritmos do grupo MLE tendem a apresentar componentes de alta frequência nas áreas de maior intensidade da imagem. Os algoritmos ART, SART e BART tendem a apresentar componentes de alta frequência nas áreas da imagem de menor intensidade. Para o algoritmo SIRT não identificamos regiões da imagem preferenciais para o surgimento de componentes de alta frequência.

Conclui-se que a quantidade de iterações a empregar deve considerar que o seu aumento vem acompanhado de um aumento de componentes de alta frequência na imagem reconstruída. Tal fato pode ser crítico em aplicações onde a textura do objeto alvo é relevante ou em situações em que haja ruído de intensidade significativa.

O traçado de limiares estatísticos sobre os cortes de imagens reconstruídas com adição de ruído nível 5 (Tabela XIII) permite concluir que eles são deslocados de suas posições ótimas devido à presença do ruído. Observa-se que esse deslocamento é tal que pode comprometer a filtragem por limiar (limiarização) estatístico mesmo no nível de intensidade intermediária de ruído adicionado.

Nas análises realizadas, a intensidade do ruído adicionado é computada considerando todo o objeto alvo, e, conseqüentemente, seu impacto é maior em regiões do objeto de menores intensidades relativas do que nas de maiores. Com isso em mente, podemos fazer algumas extrapolações. Objetos-alvo que contêm diferentes materiais e estruturas podem inviabilizar a utilização de métodos de filtragem por limiares estatísticos. Dependendo da localização dos materiais, as estruturas e espessuras eles devem produzir pixels de intensidades distintas, que por sua vez sofrem impactos distintos a partir do uso de limiarização. Assim, o conhecimento a priori de características do objeto-alvo deve ser considerada para viabilizar o uso de limiarização para filtrar e discriminar as informações do objeto.

4 CONCLUSÃO

Esta dissertação ofereceu uma avaliação de algoritmos de reconstrução inversa em problemas de tomografia. Um método foi proposto para essa finalidade e aplicado a um conjunto de 16 algoritmos de reconstrução.

A avaliação considera o tempo de processamento, bem como a qualidade das reconstruções e a estabilidade do algoritmo sob diferentes níveis de corrupção por ruído, considerando a sua incidência ou no sinograma ou no objeto-alvo diretamente.

A utilização do Índice de Qualidade Agregado mostrou-se capaz de condensar as informações dos índices de qualidade, preservando significativamente a capacidade de análise dos resultados.

Os resultados indicam que as particularidades da aplicação ensejada devem ser consideradas para a escolha do algoritmo de reconstrução a empregar. Mas, apesar disso, algumas conclusões gerais podem ser tiradas.

Os resultados apresentados sugerem que os algoritmos baseados em MLE atingem geralmente bons resultados e superiores aos demais. Assim, este grupo de algoritmo representa um ponto de partida adequado para aplicações. Além disso, ele deve ser o *benchmark* contra o qual novos métodos e algoritmos devem ser comparados. Destaca-se o bom desempenho geral, confiabilidade e previsibilidade dos algoritmos desse grupo baseados em EM; OSEM e MLEM.

Observou-se o bom desempenho dos algoritmos MLE com restrições quadráticas, porém suas instabilidades em cenários com ruído, especialmente quando inserido no objeto-alvo, demandam cautela extra dado o pouco ganho potencial de qualidade de reconstrução quando comparado a outros algoritmos do grupo MLE. O aumento da complexidade estrutural do objeto-alvo acrescenta ainda mais demanda por cautela.

Os resultados sugerem ainda que os algoritmos de reconstrução direta, FBP e GRIDREC são superiores em termos do compromisso entre a eficiência computacional e a qualidade de reconstrução obtida quando comparados aos demais métodos. A boa classificação comparativa desses algoritmos, mesmo que pontual, considerando a qualidade de reconstrução em casos com baixos níveis de ruído sugere a conveniência, para certos casos, de investigação quanto à utilização conjunta de um método de reconstrução direta, baseado em Fourier, gerando uma imagem inicial e um processamento seguinte por um algoritmo de reconstrução iterativa adequado. Isso poderia balancear o custo computacional ao reduzir a quantidade de iterações em outros métodos, por exemplo, baseados em MLE.

Outro aspecto importante é que os métodos baseados em MLE testados empregam um modelo probabilístico (Poisson) que não é particularmente adequado para todos os cenários considerados. Assim, fica a questão de se é possível que o emprego de um modelo mais afeito às tecnologias de sondagens e objetos alvo considerados melhore a qualidade e a estabilidade das reconstruções obtidas usando esses métodos. Os gráficos de instabilidade indicam que o ajuste dos hiper-parâmetros de alguns algoritmos podem depender do nível de erro.

O estudo dos cortes das reconstruções destaca que nem sempre o aumento do número de iterações acarreta uma melhoria no desempenho sob ruído, e pode adicionar progressivamente componentes de alta frequência e também do nível médio do erro da imagem reconstruída.

REFERÊNCIAS

- AARLE, Wim Van et al. Fast and flexible x-ray tomography using the ASTRA toolbox. *Optics express*, Optical Society of America, v. 24, n. 22, p. 25129–25147, 2016.
- ANDERSEN, Anders H; KAK, Avinash C. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic imaging*, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 81–94, 1984.
- ASTER, Richard C.; BORCHERS, Brian; THURBER, Clifford H. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. [S.l.]: Elsevier, 2019.
- BRADSKI, Gary. The opencv library. *Dr. Dobb's Journal: Software Tools for the Professional Programmer*, Miller Freeman Inc., v. 25, n. 11, p. 120–123, 2000.
- BUZUG, Thorsten. *Computed Tomography From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT*. [S.l.]: Springer, 2008.
- CAMPOS, Rafael Saraiva. *Contributions to radio frequency indoor positioning and Through-the-Wall Mapping*. [S.l.]: UFRJ, 2017.
- CAMPOS, Rafael Saraiva; LOVISOLO, Lisandro; CAMPOS, Marcello Luiz R de. Assessing multisensor radiofrequency-based through-the-wall mapping systemic parameters using a finite-element method framework. *Journal of Applied Remote Sensing*, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, v. 12, n. 2, p. 026025–026025, 2018.
- CHAMBOLLE, Antonin; POCK, Thomas. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of mathematical imaging and vision*, Springer, v. 40, p. 120–145, 2011.
- CHANG, Ji-Ho; ANDERSON, John MM; VOTAW, John R. Regularized image reconstruction algorithms for positron emission tomography. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 23, n. 9, p. 1165–1175, 2004.
- DEMPSTER, Arthur P; LAIRD, Nan M; RUBIN, Donald B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society: series B (methodological)*, Wiley Online Library, v. 39, n. 1, p. 1–22, 1977.
- DOWD, Betsy A et al. Developments in synchrotron x-ray computed microtomography at the national synchrotron light source. v. 3772, p. 224–236, 1999.
- GABOR, Herman T. *Fundamentals of Computerized Tomography: Image reconstruction from projections*. [S.l.]: Springer, 2009.
- GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. *Digital Image Processing*. [S.l.]: Pearson, 2018.
- GORDON, Richard; BENDER, Robert; HERMAN, Gabor T. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of theoretical Biology*, Elsevier, v. 29, n. 3, p. 471–481, 1970.
- GÜRSOY, Doga et al. Tomopy: a framework for the analysis of synchrotron tomographic data. *Journal of synchrotron radiation*, International Union of Crystallography, v. 21, n. 5, p. 1188–1193, 2014.

- HARRIS, Charles R et al. Array programming with numpy. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 585, n. 7825, p. 357–362, 2020.
- HASTIE, Trevor et al. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 2.
- HESTENES, Magnus R; STIEFEL, Eduard et al. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, v. 49, n. 6, p. 409–436, 1952.
- HUDSON, H Malcolm; LARKIN, Richard S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 13, n. 4, p. 601–609, 1994.
- HUNTER, John D. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in science & engineering*, IEEE Computer Society, v. 9, n. 03, p. 90–95, 2007.
- KACZMARZ, MS. *Approximate solution of systems of linear equations*. [S.l.], 1937.
- KAK, Avinash C.; SLANEY, Malcolm. *Principles of computerized tomographic imaging*. [S.l.]: IEEE Press, 1988.
- KIRSCH, Andreas. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. [S.l.]: Springer, 2021.
- KLUYVER, Thomas et al. *Jupyter Notebooks-a publishing format for reproducible computational workflows*. [S.l.: s.n.], 2016. v. 2016.
- LUENBERGER, David G; YE, Yinyu et al. *Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Springer, 1984. v. 2.
- MCKINNEY, Wes et al. Data structures for statistical computing in python. In: AUSTIN, TX. *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*. [S.l.], 2010. v. 445, n. 1, p. 51–56.
- NATTERER, Frank. *The mathematics of Computerized Tomography*. [S.l.]: SIAM, 2001.
- OTSU, Nobuyuki. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, IEEE, v. 9, n. 1, p. 62–66, 1979.
- PEDREGOSA, Fabian et al. Scikit-learn: Machine learning in python. *the Journal of machine Learning research*, JMLR. org, v. 12, p. 2825–2830, 2011.
- RADON, J. On the determination of functions from their integrals along certain manifolds. *Mathematisch-Physische Klasse*, v. 69, p. 262–277, 1917.
- SHEPP, Lawrence A; LOGAN, Benjamin F. The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on nuclear science*, IEEE, v. 21, n. 3, p. 21–43, 1974.
- SHEPP, Lawrence A; VARDI, Yehuda. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 1, n. 2, p. 113–122, 1982.
- SOBELL, Mark G. *A practical guide to Ubuntu Linux*. [S.l.]: Pearson Education, 2015.
- WALT, Stefan Van der et al. scikit-image: image processing in python. *PeerJ*, PeerJ Inc., v. 2, p. e453, 2014.

WANG, Zhou et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE transactions on image processing*, IEEE, v. 13, n. 4, p. 600–612, 2004.

WASKOM, Michael et al. Mwaskom/seaborn: V0. 8.1 (september 2017). *Zenodo*, 2017.

YING, Leslie; XU, Dan; LIANG, Z-P. On tikhonov regularization for image reconstruction in parallel MRI. v. 1, p. 1056–1059, 2004.

A CURVAS DE QUALIDADE POR ITERAÇÃO, AGRUPADAS POR NÍVEL DE CORRUPÇÃO

Este apêndice traz curvas da qualidade da reconstrução em função da iteração para os diferentes algoritmos. Cada gráfico apresentado neste apêndice está estruturado da seguinte forma: Índice de Qualidade, nas Ordenadas, pela Iteração nas Abcissas, e o Algoritmo é indicado pela Cor da Curva. Os algoritmos nas curvas estão agrupados por imagem base e tipo e nível de corrupção. De tal sorte que cada seção traz as curvas obtidas para uma imagem base e em cada seção há duas subseções; a primeira traz as qualidades das reconstruções quando a adição de ruído ocorre no objeto em si e a segunda no sinograma. Em cada subseção, as curvas são apresentadas em ordem crescente da intensidade do ruído adicionado, isto é, em ordem decrescente de PSNR.

A.1 Objeto-Alvo Engrenagem

A.1.1 Adição de Erro no Objeto Engrenagem

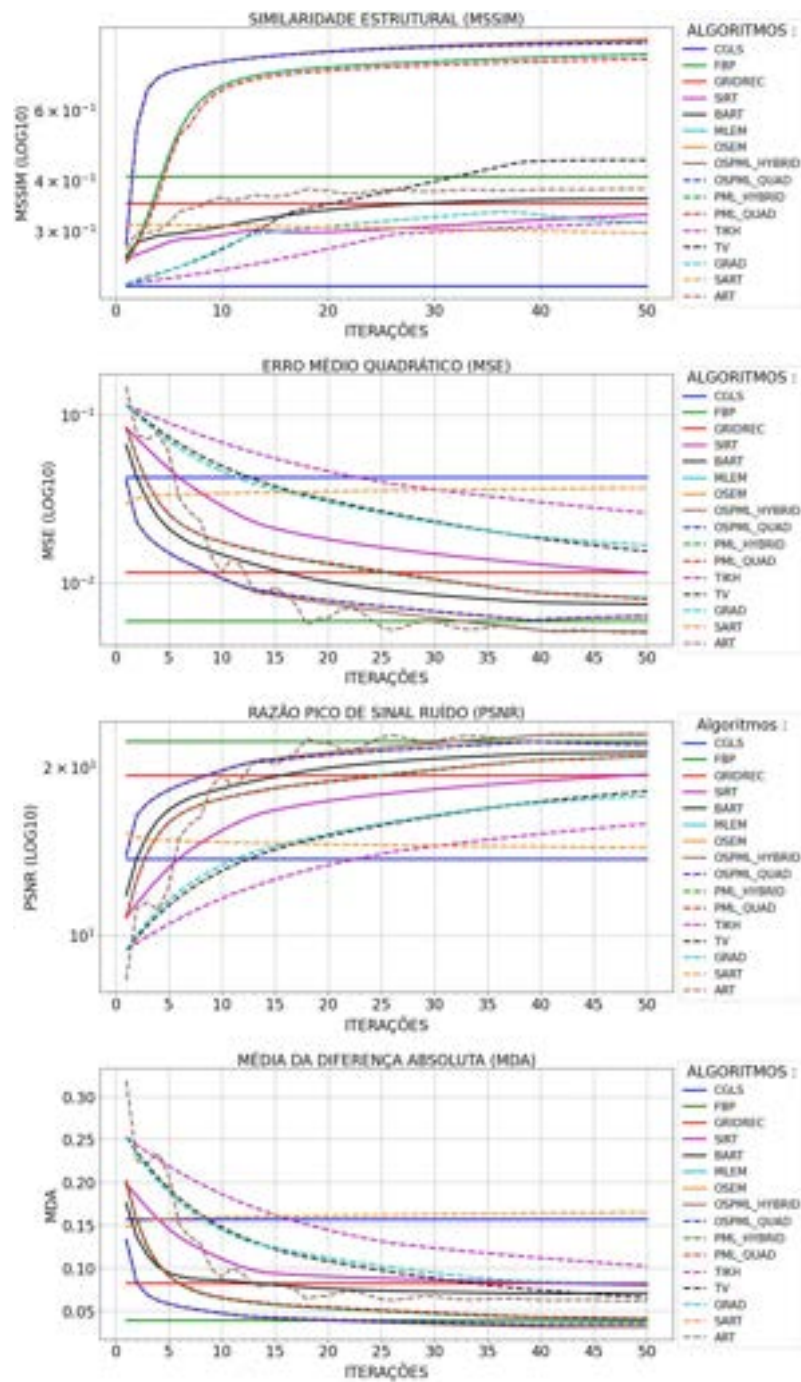


Figura 27 - Erro Nível 00 no Objeto Engrenagem.

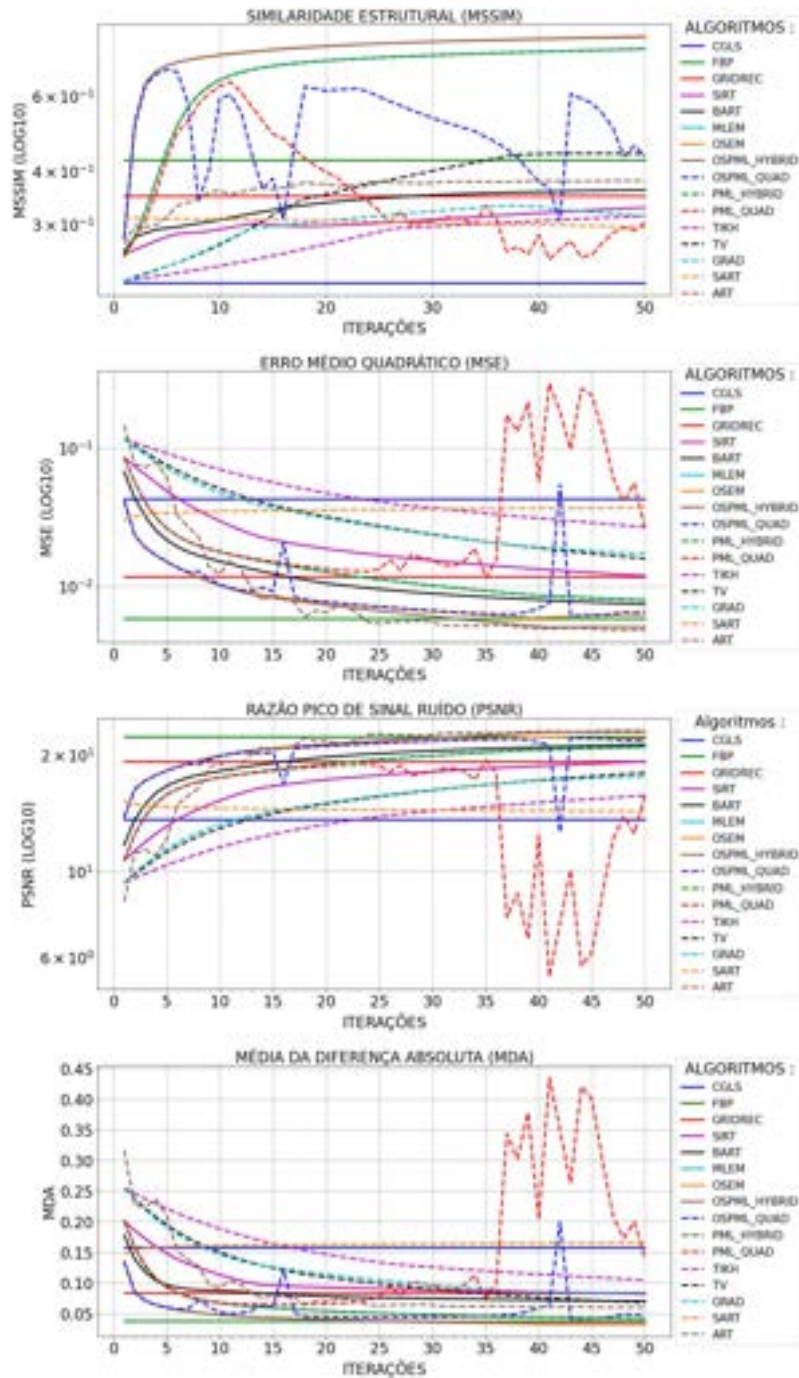


Figura 28 - Erro Nível 01 no Objeto Engrenagem

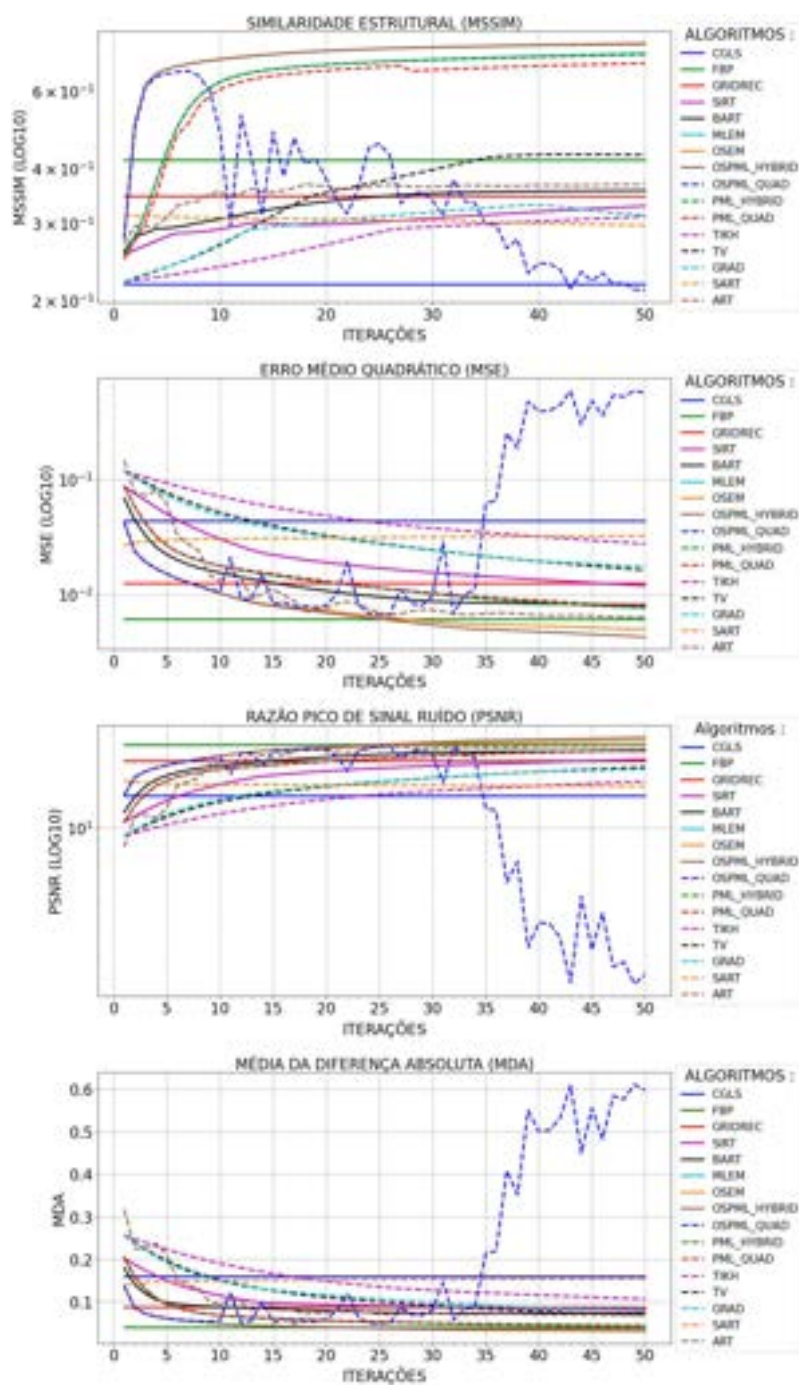


Figura 29 - Erro Nível 02 no Objeto Engrenagem

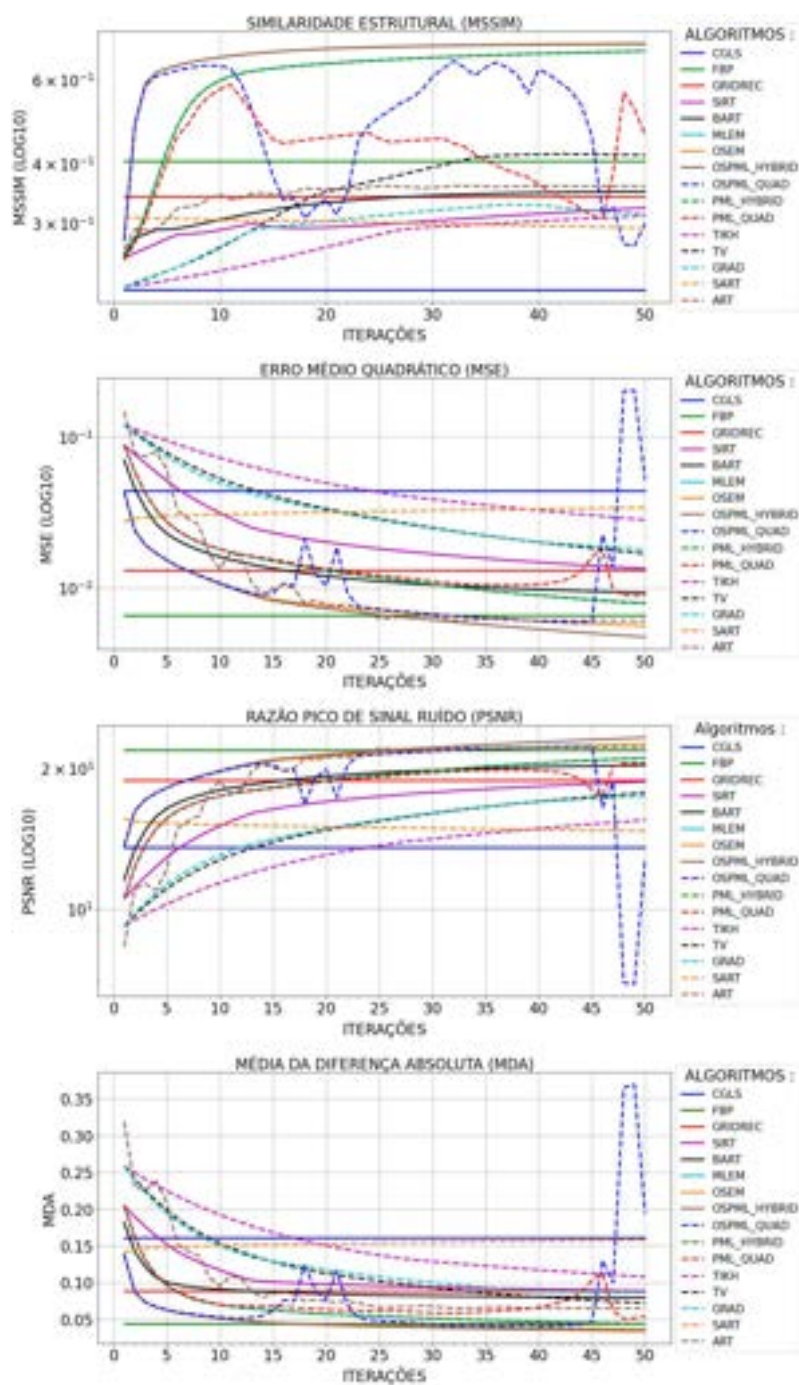


Figura 30 - Erro Nível 03 no Objeto Engrenagem

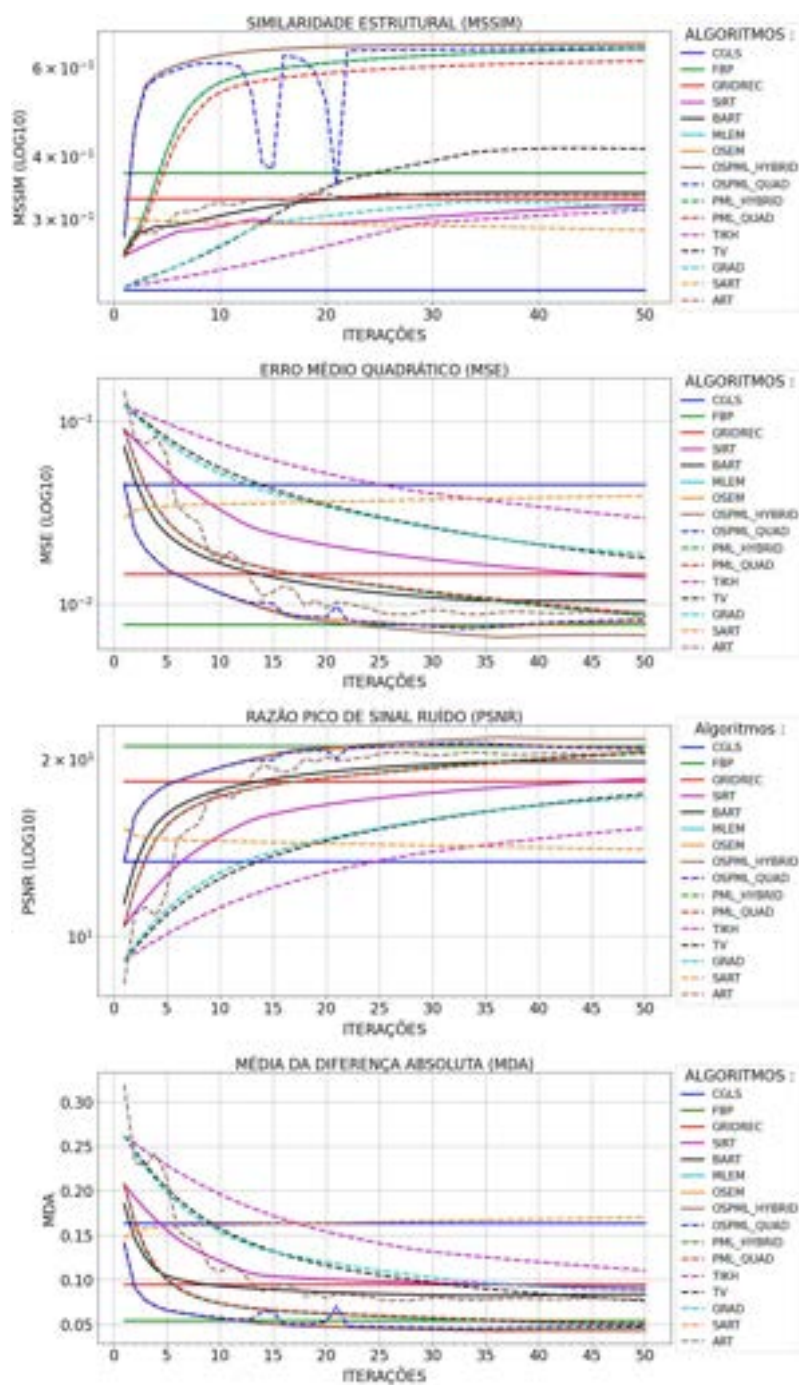


Figura 31 - Erro Nível 04 no Objeto Engrenagem

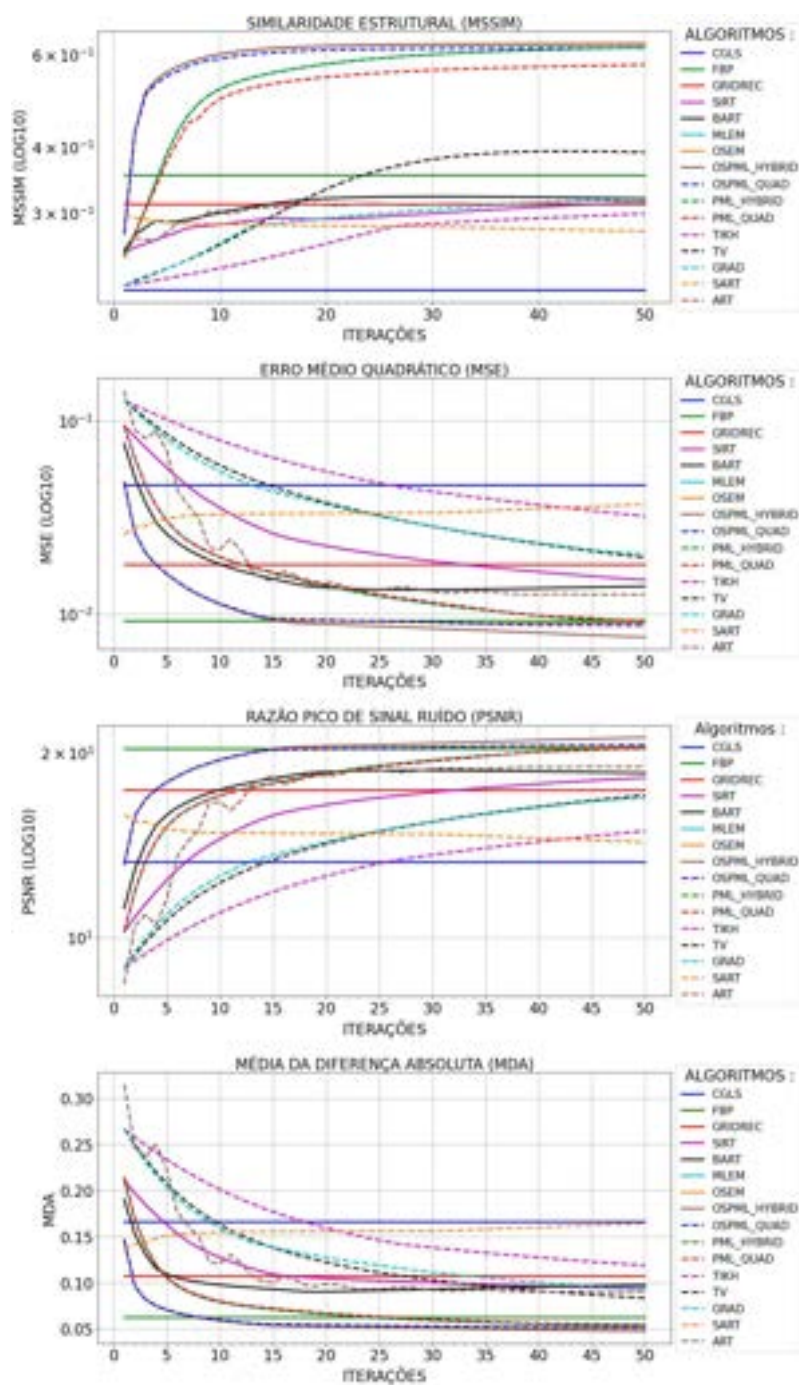


Figura 32 - Erro Nível 05 no Objeto Engrenagem

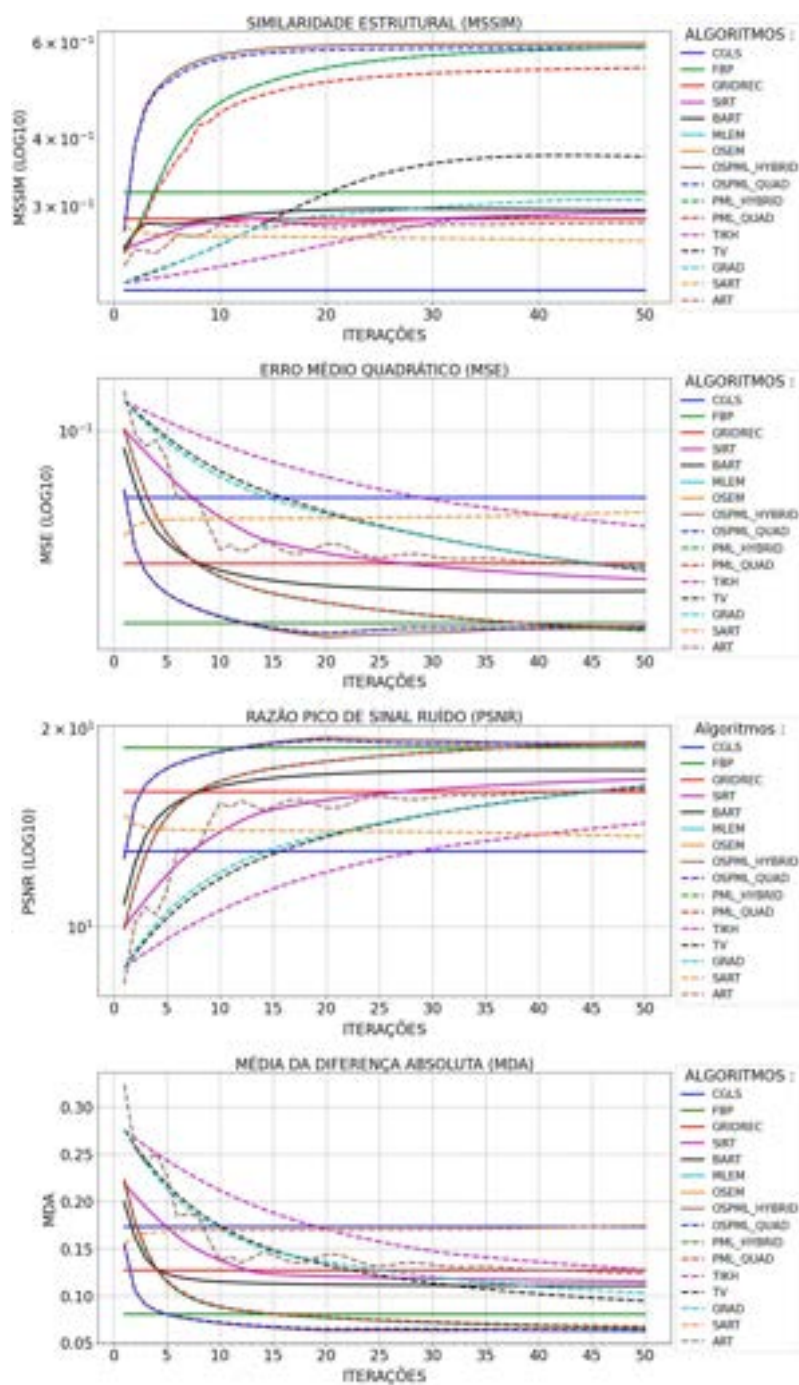


Figura 33 - Erro Nível 06 no Objeto Engrenagem

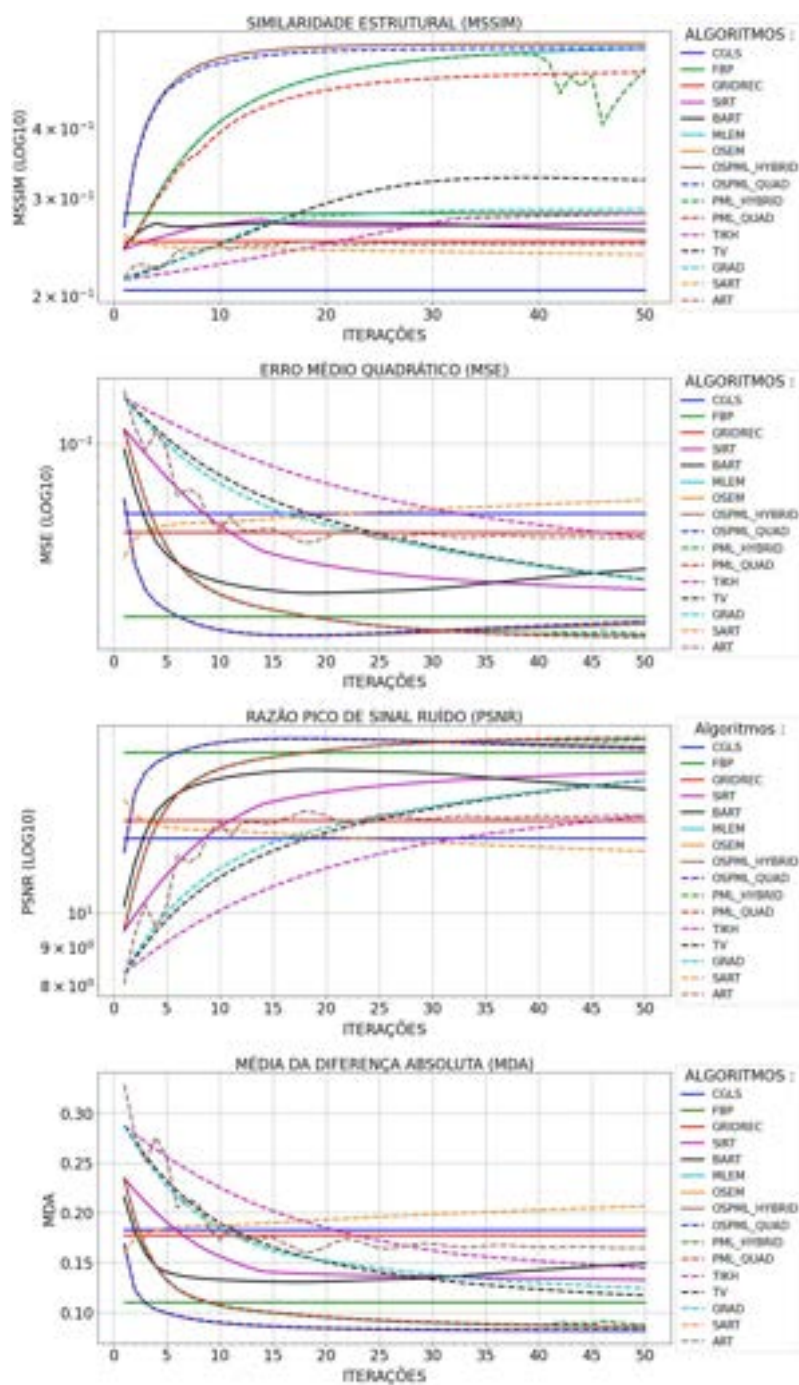


Figura 34 - Erro Nível 07 no Objeto Engrenagem

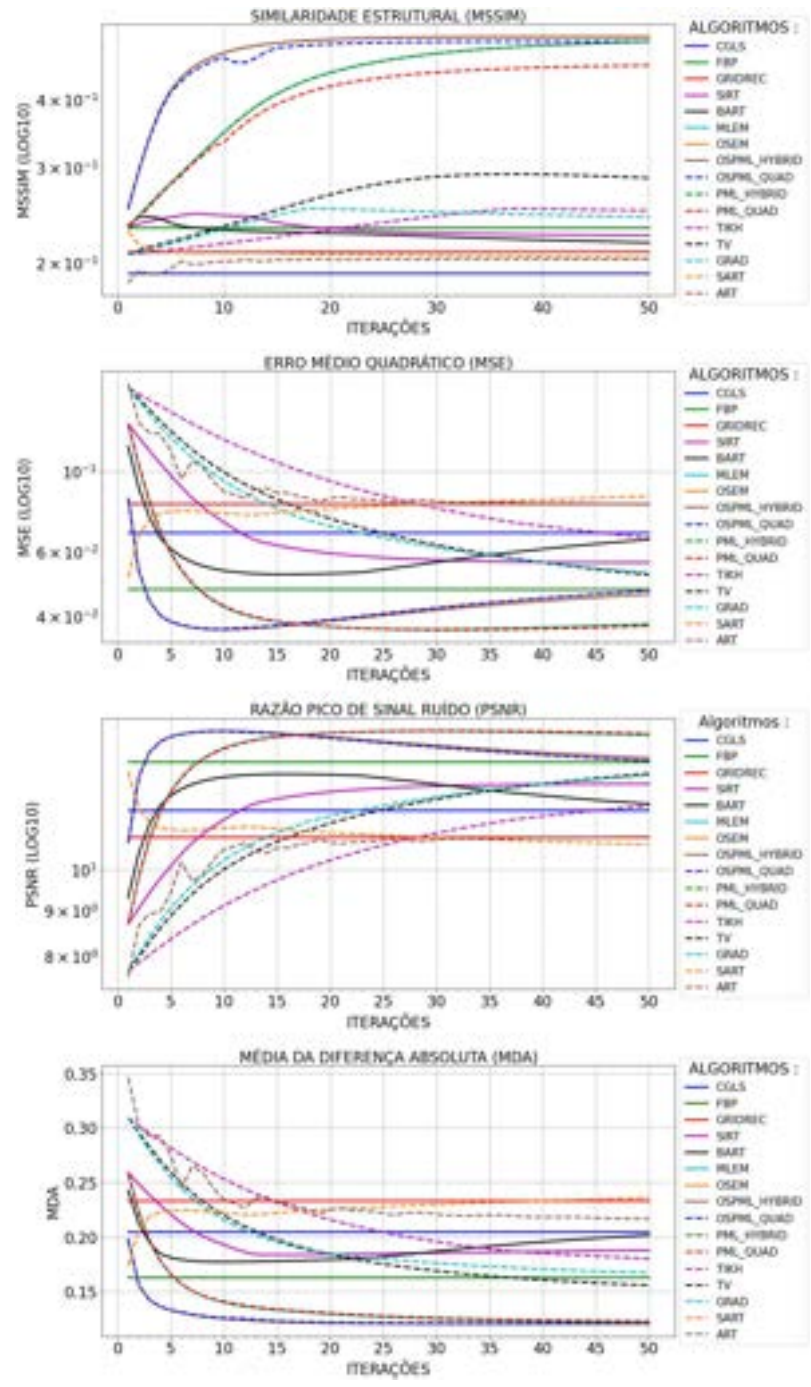


Figura 35 - Erro Nível 08 no Objeto Engrenagem

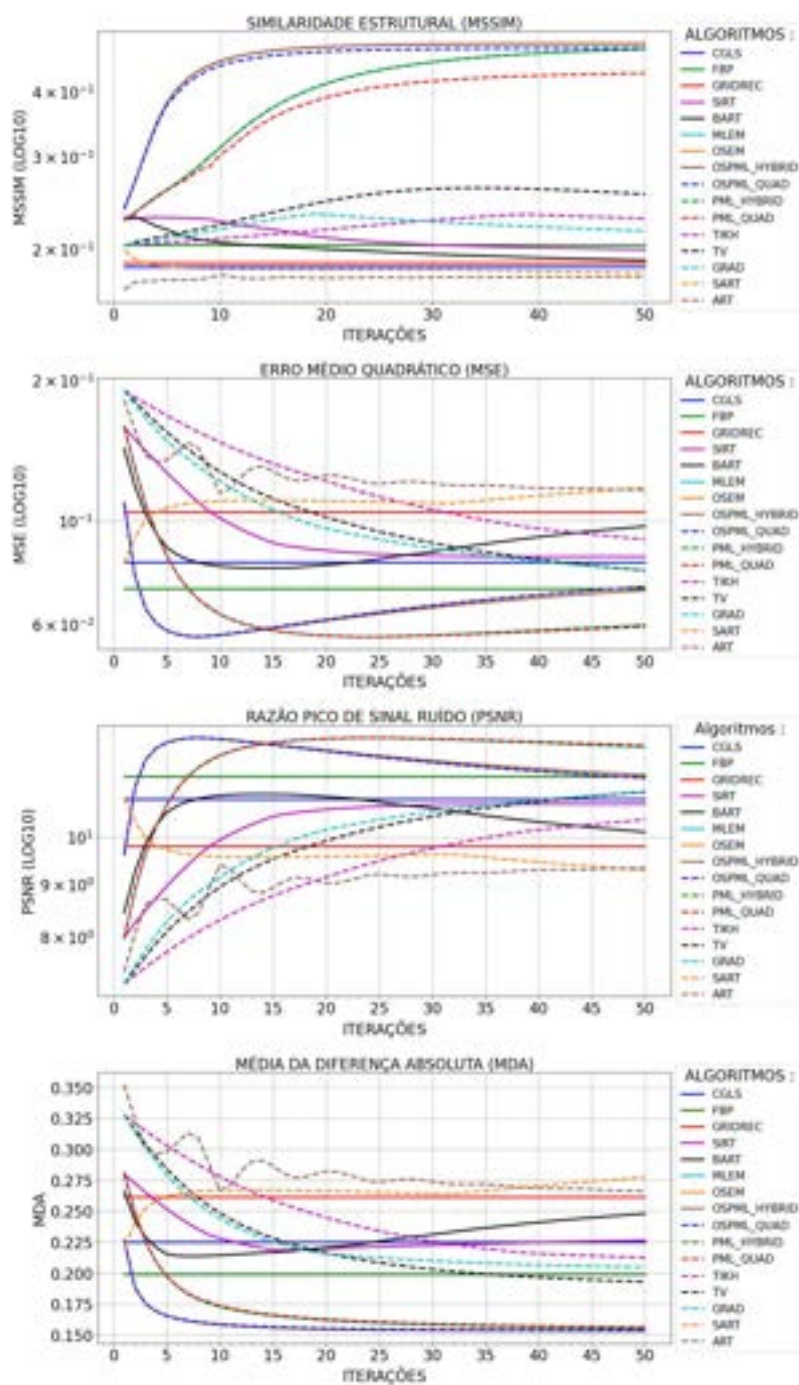


Figura 36 - Erro Nível 09 no Objeto Engrenagem

A.1.2 Adição de Erro no Sinograma Engrenagem

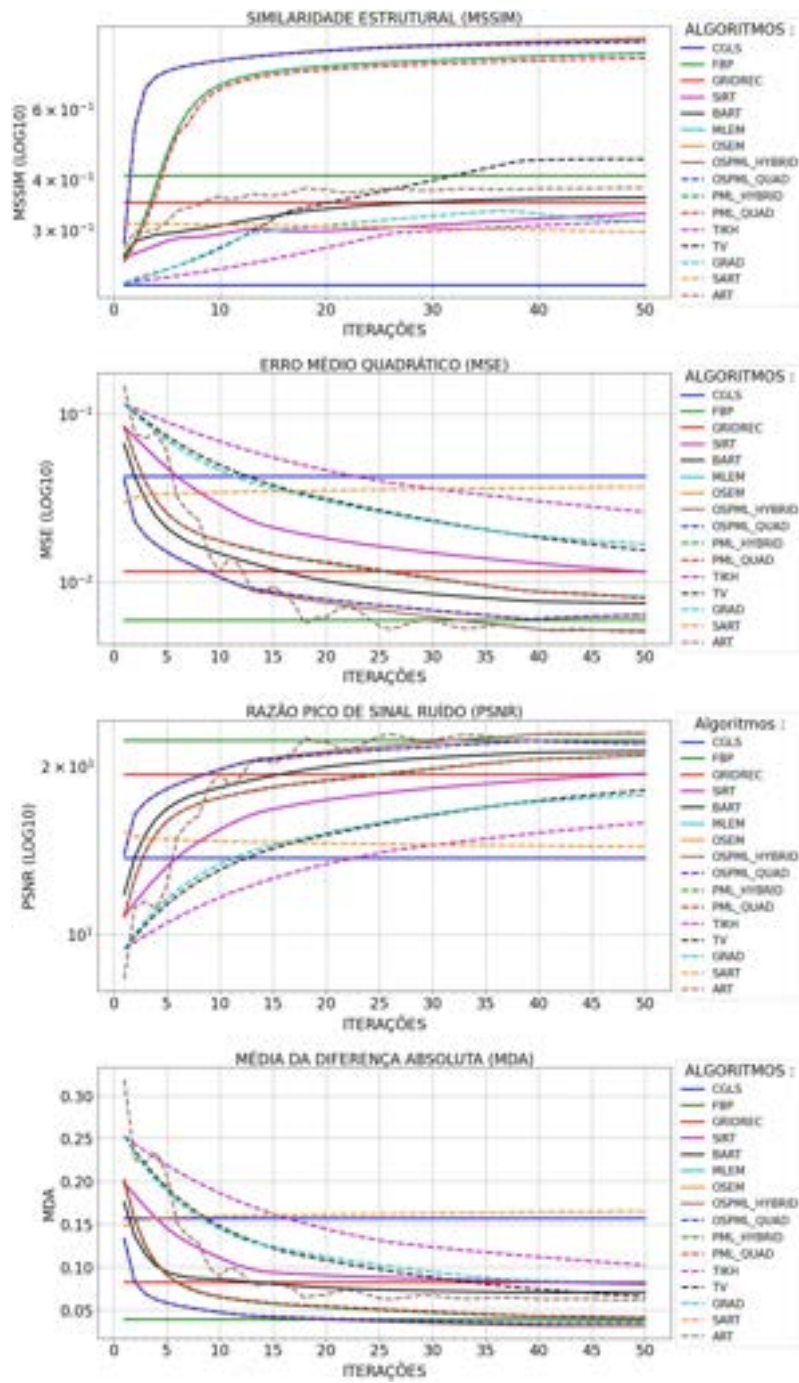


Figura 37 - Erro Nível 00 no Sinograma Engrenagem

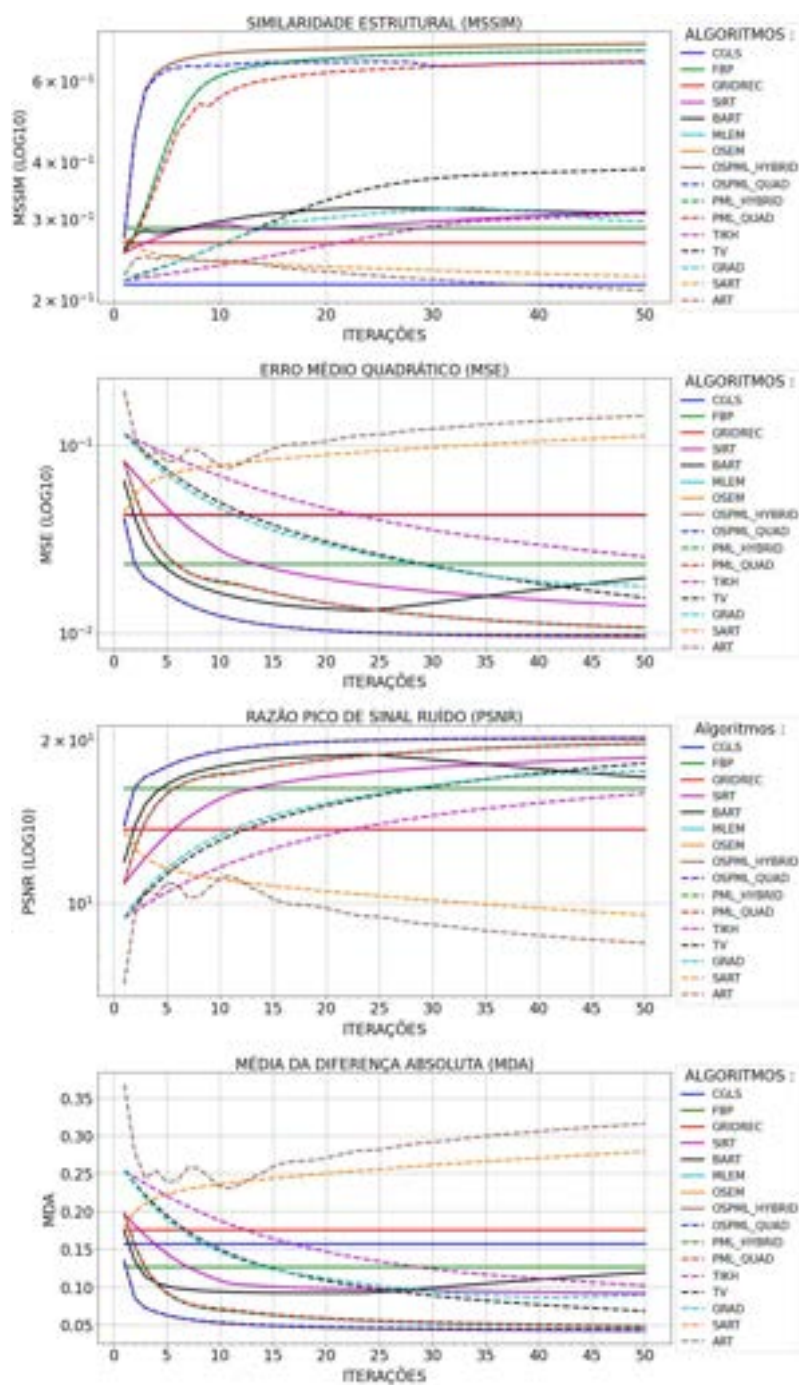


Figura 38 - Erro Nível 01 no Sinograma Engrenagem

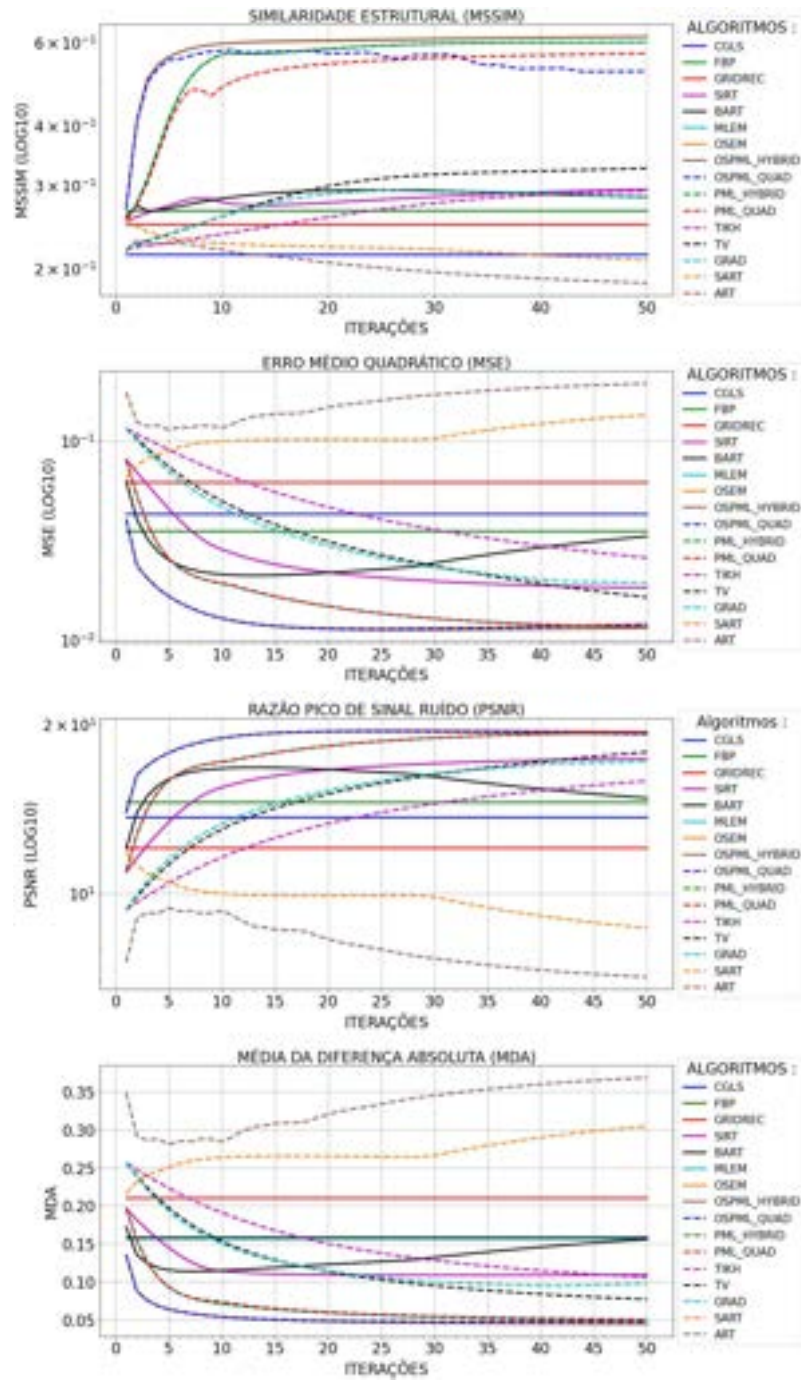


Figura 39 - Erro Nível 02 no Sinograma Engrenagem

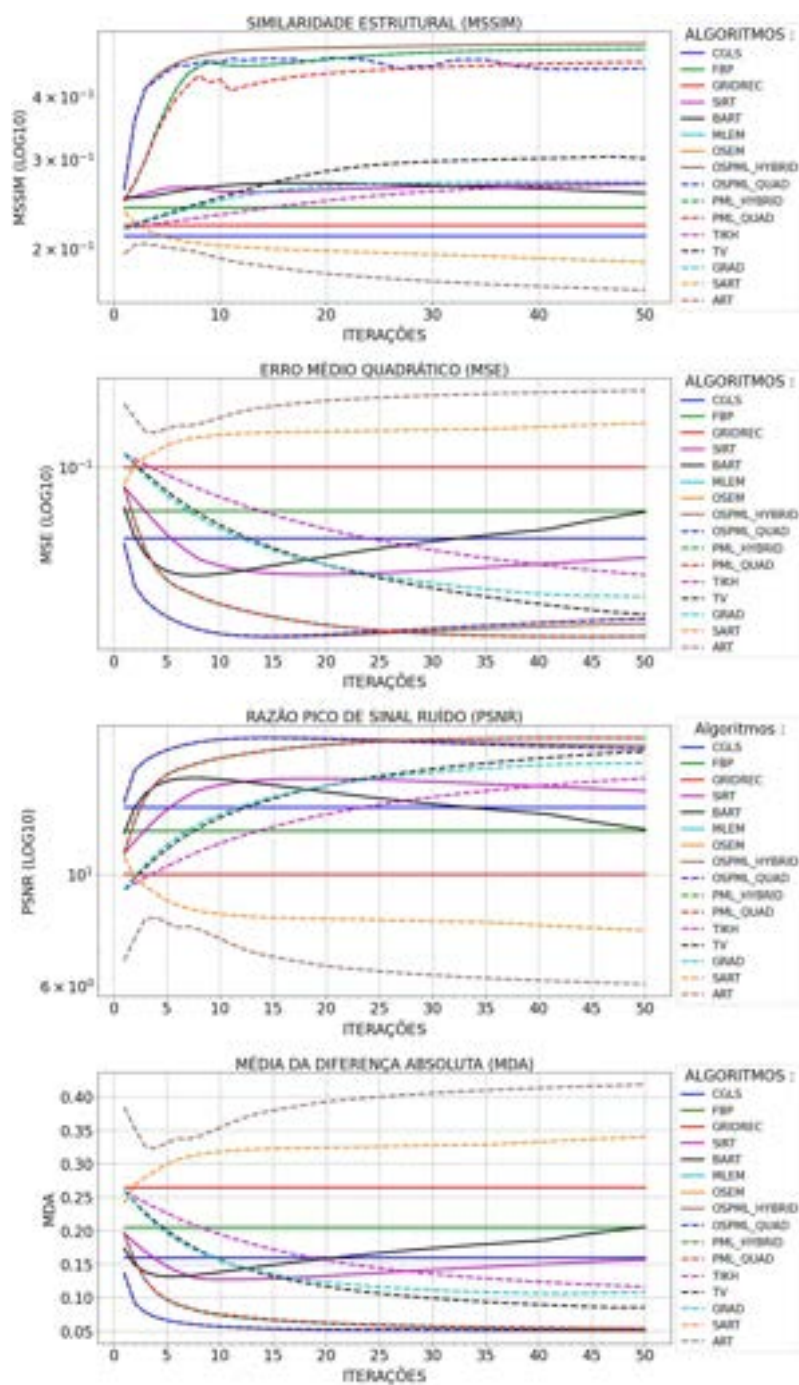


Figura 40 - Erro Nível 03 no Sinograma Engrenagem

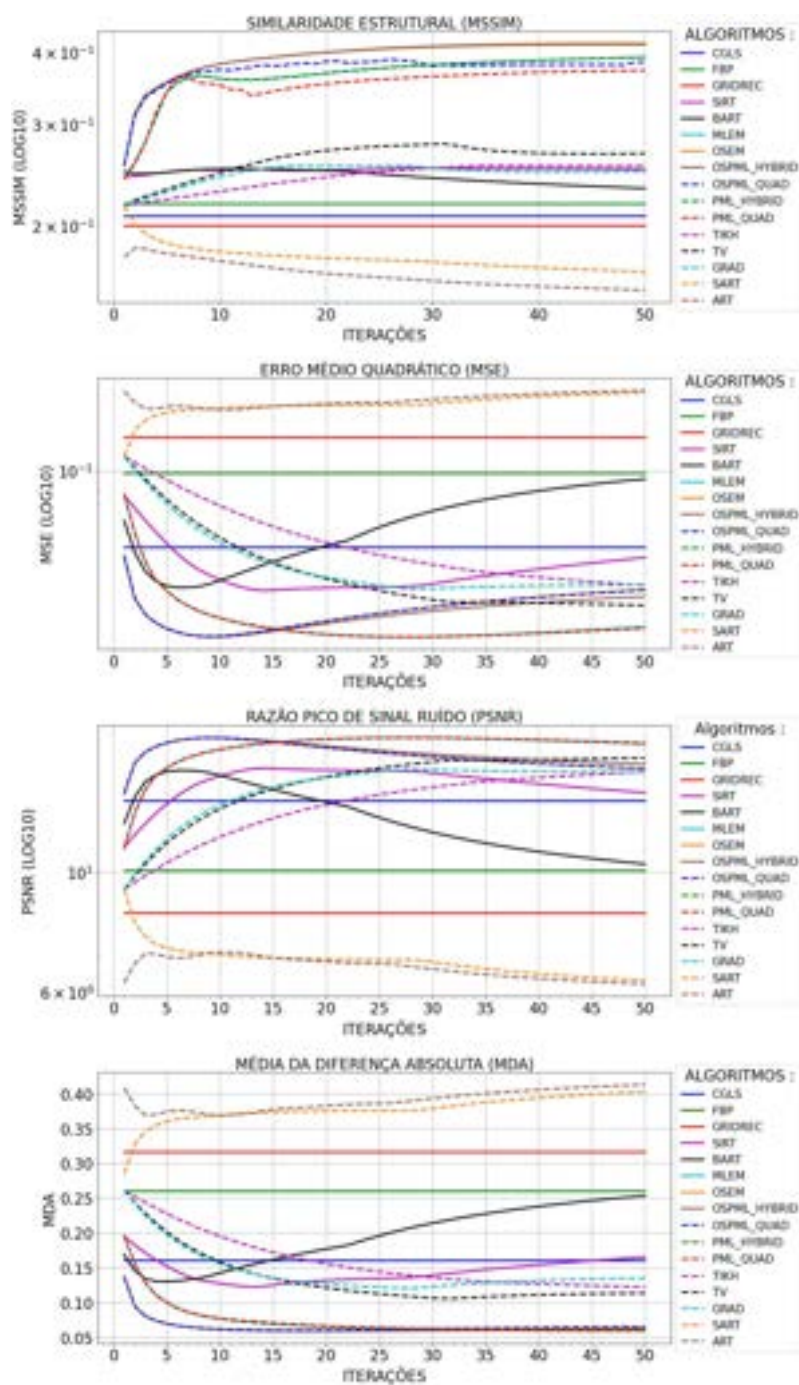


Figura 41 - Erro Nível 04 no Sinograma Engrenagem

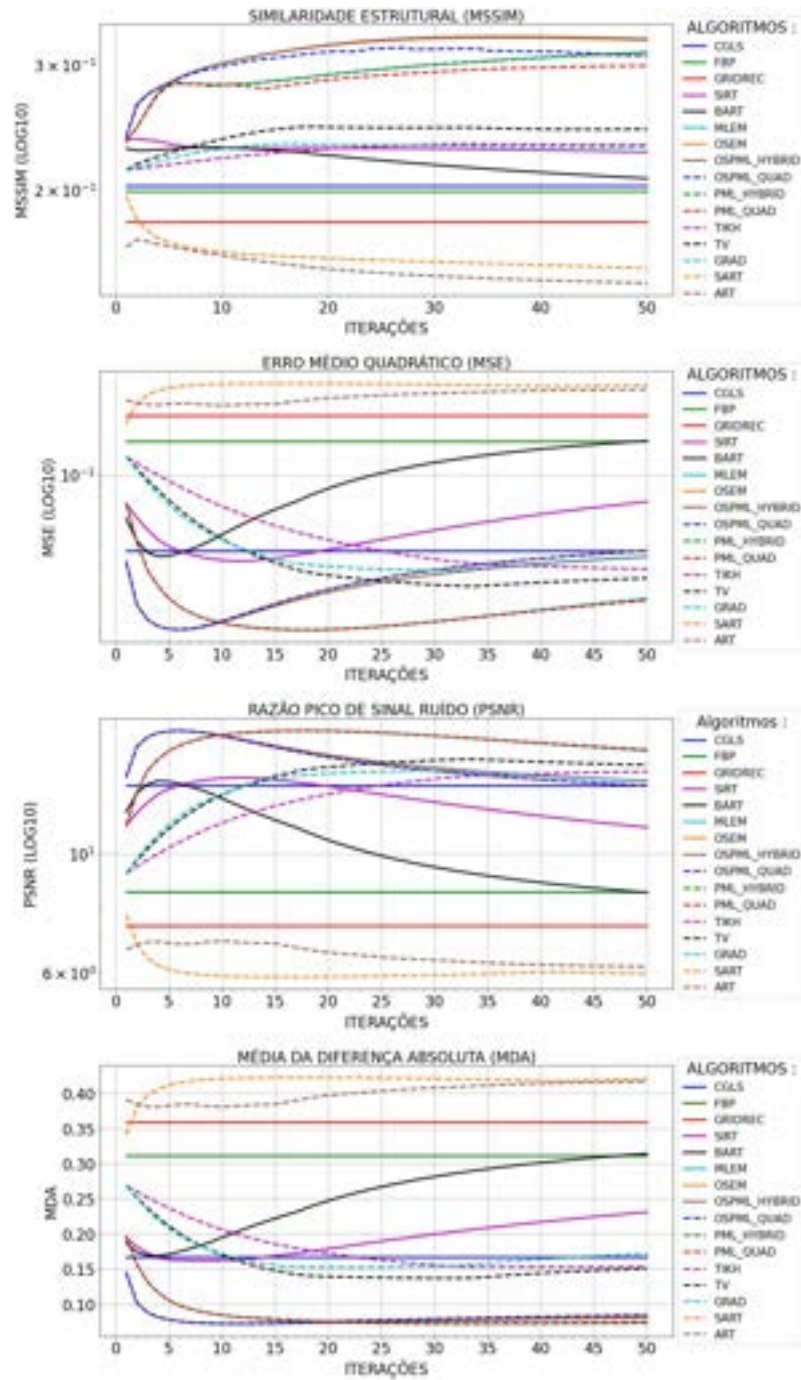


Figura 42 - Erro Nível 05 no Sinograma Engrenagem

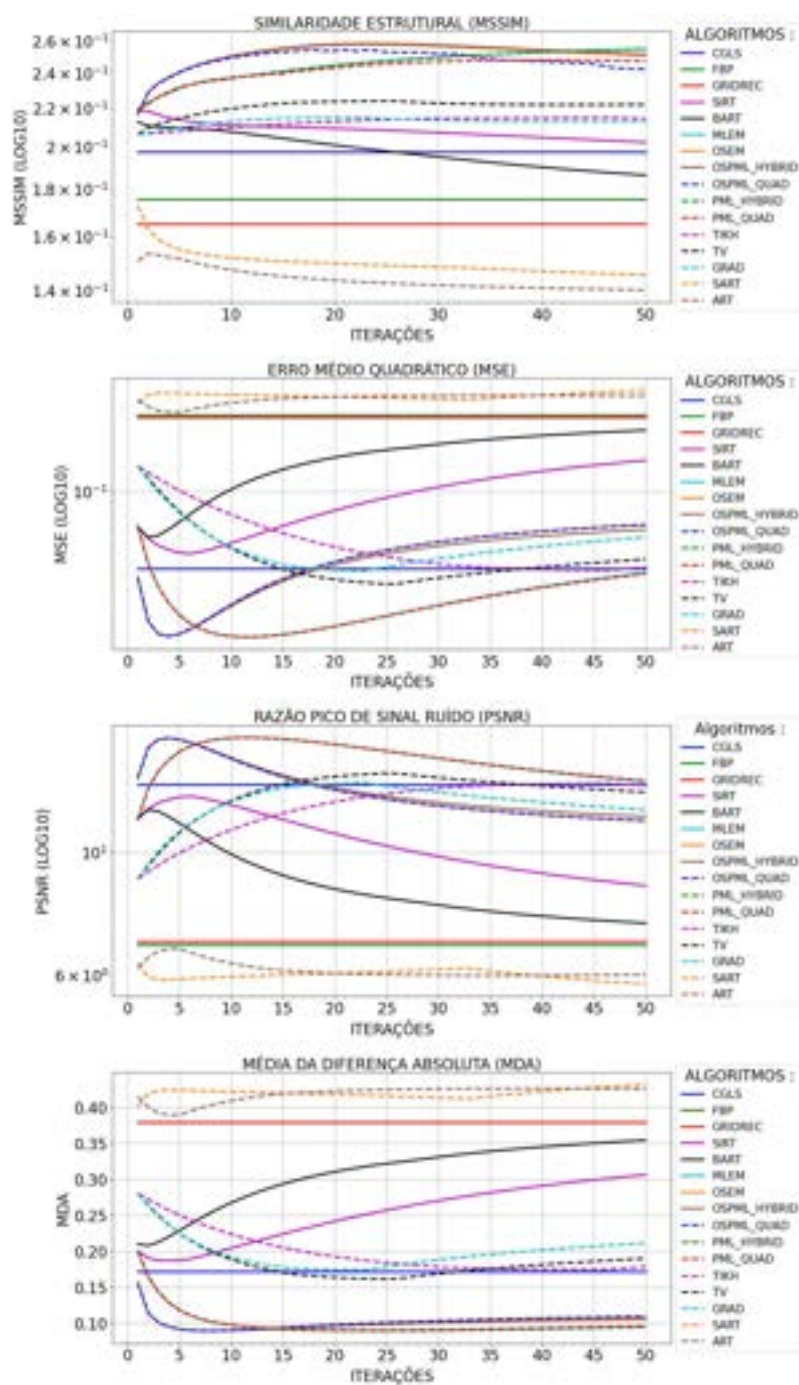


Figura 43 - Erro Nível 06 no Sinograma Engrenagem

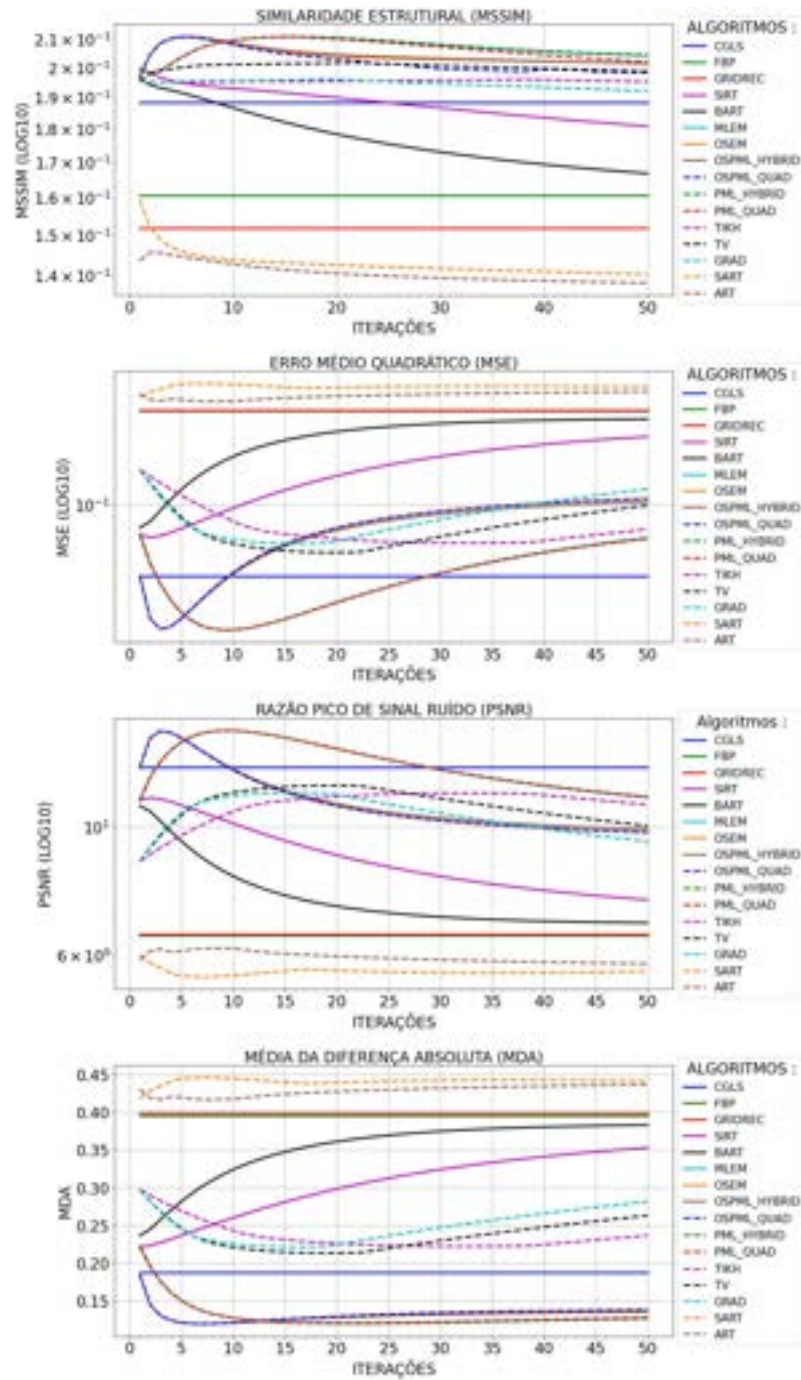


Figura 44 - Erro Nível 07 no Sinograma Engrenagem

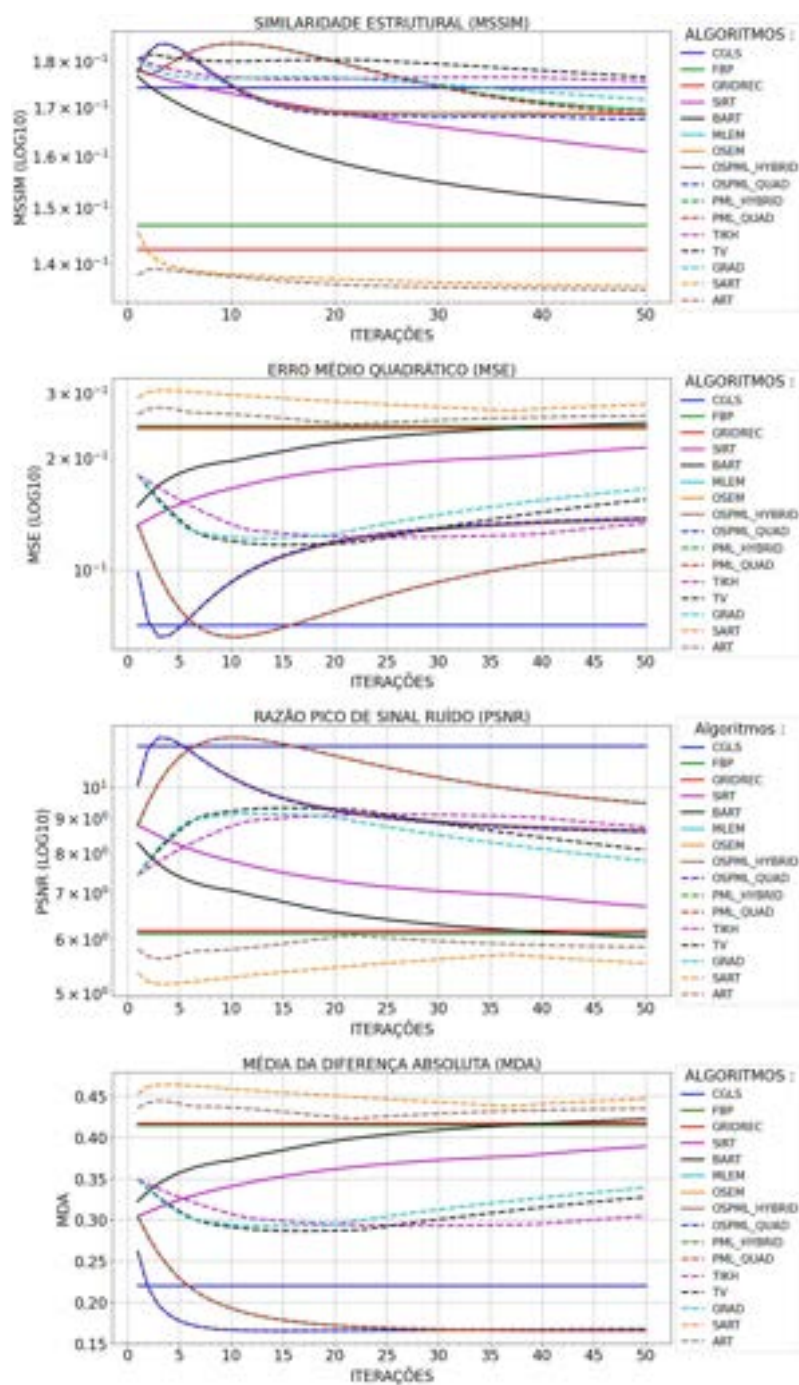


Figura 45 - Erro Nível 08 no Sinograma Engrenagem

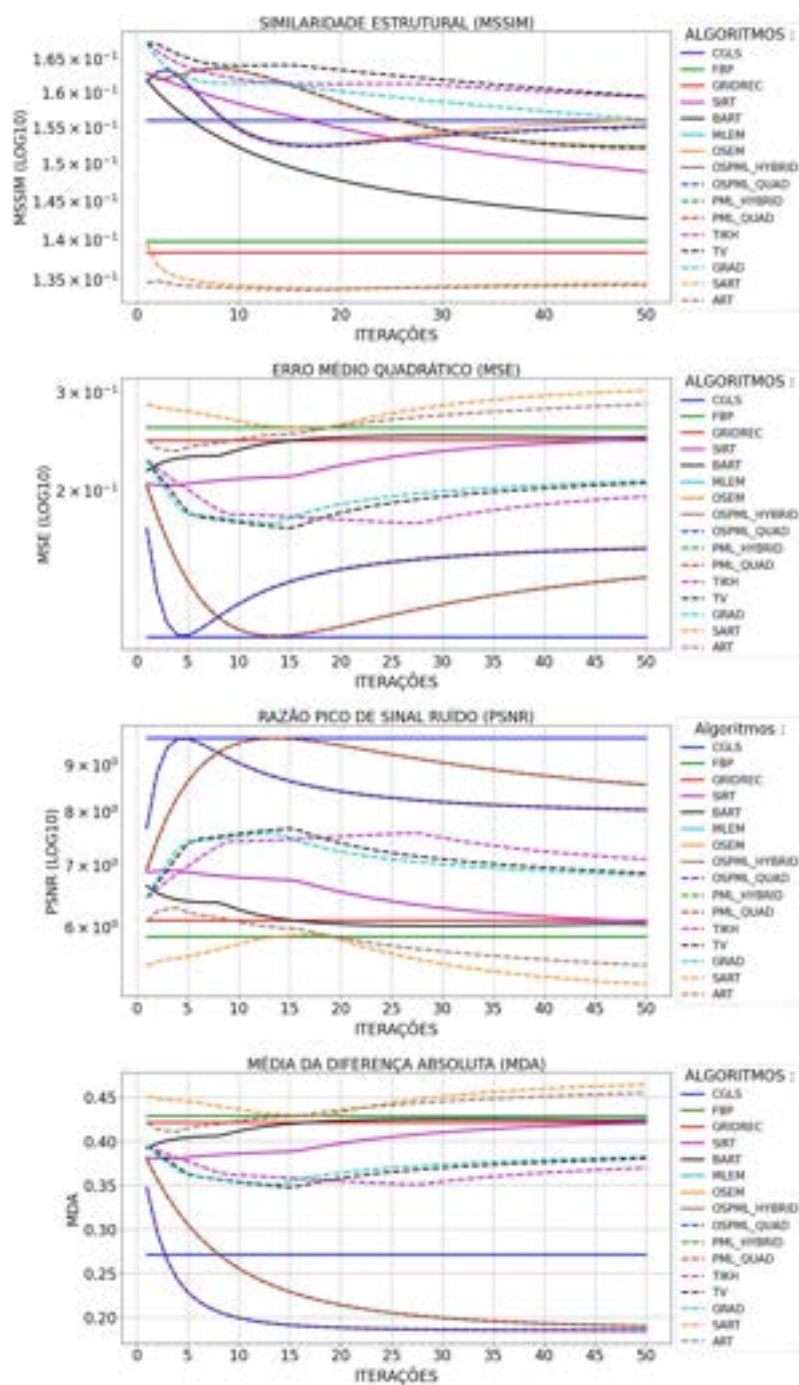


Figura 46 - Erro Nível 09 no Sinograma Engrenagem

A.2 Objeto-Alvo Phantom

A.2.1 Adição de Erro no Objeto Phantom

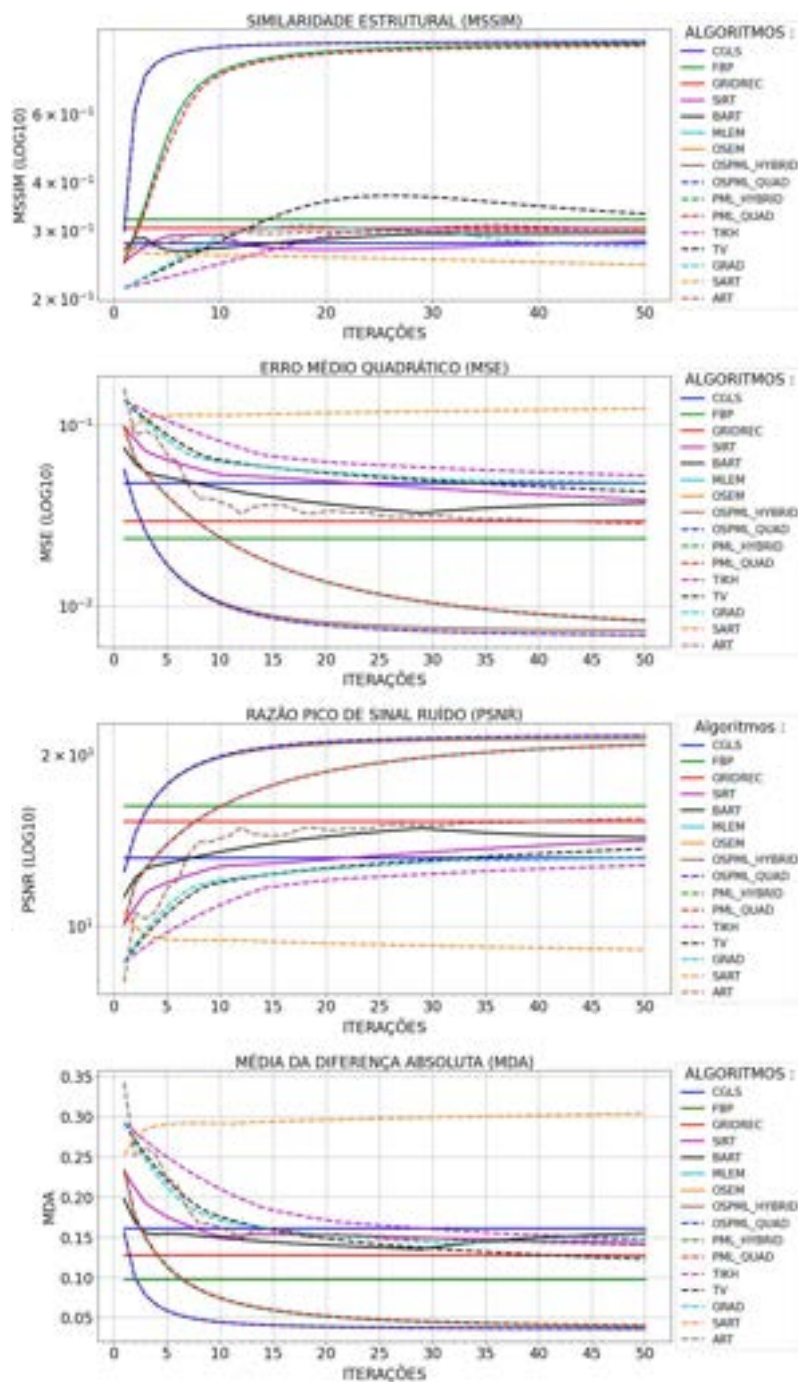


Figura 47 - Erro Nível 00 no Objeto Phantom

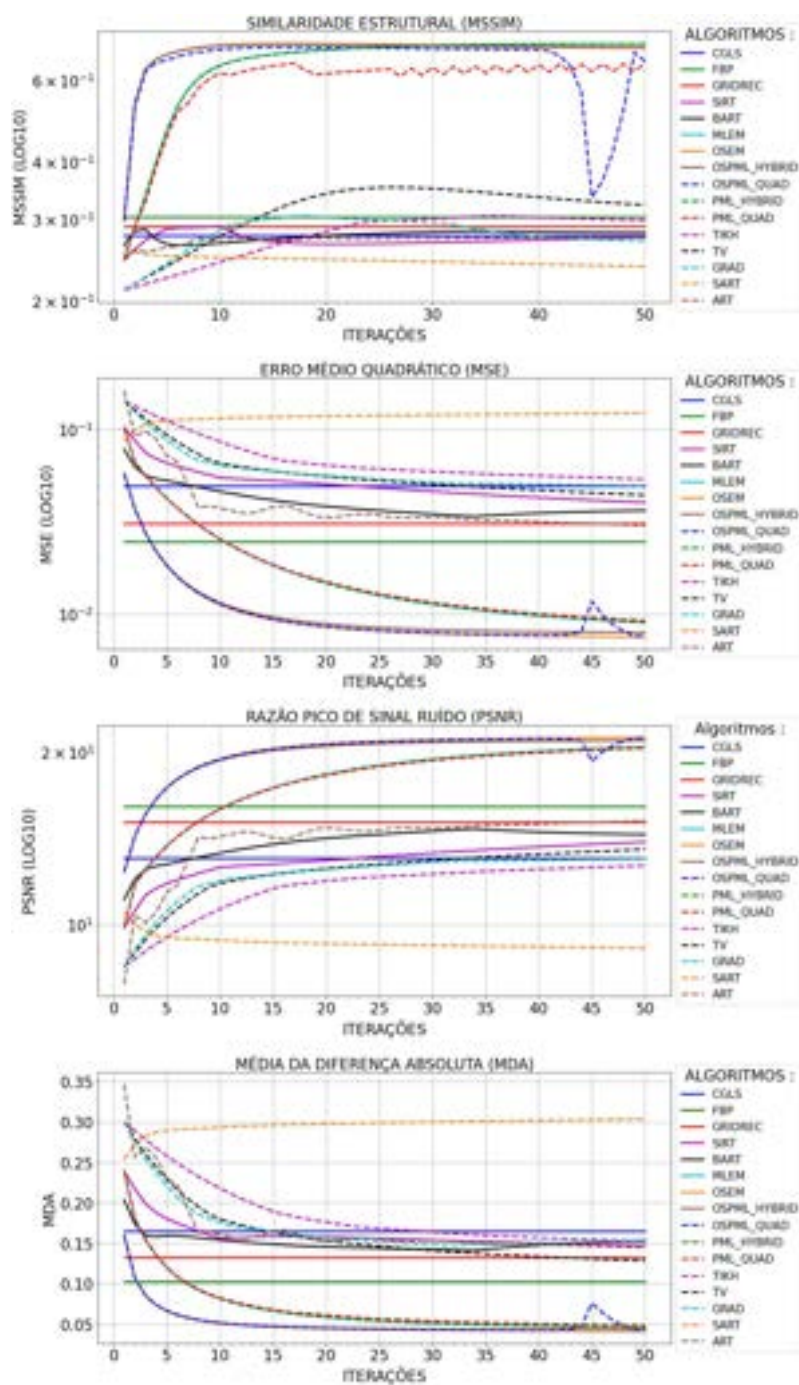


Figura 48 - Erro Nível 01 no Objeto Phantom

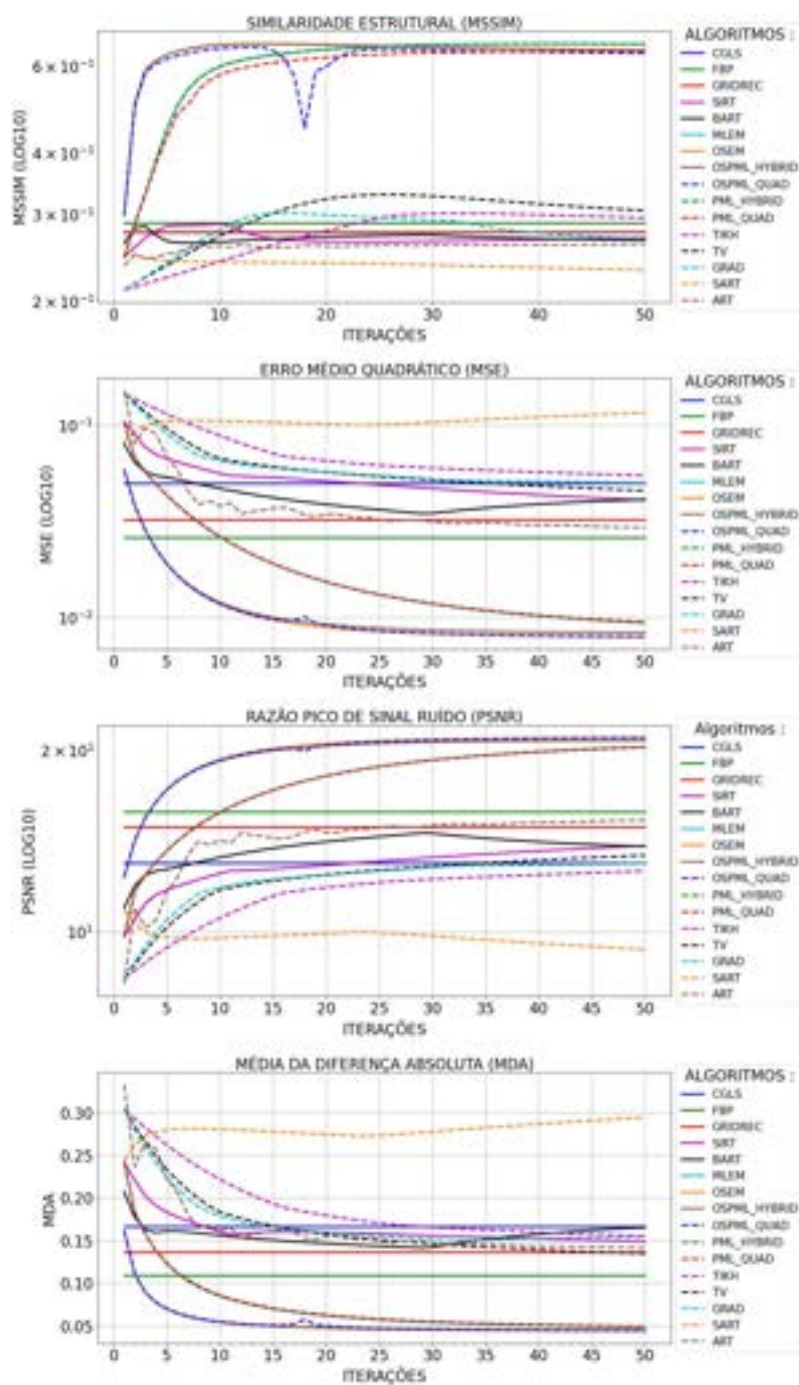


Figura 49 - Erro Nível 02 no Objeto Phantom

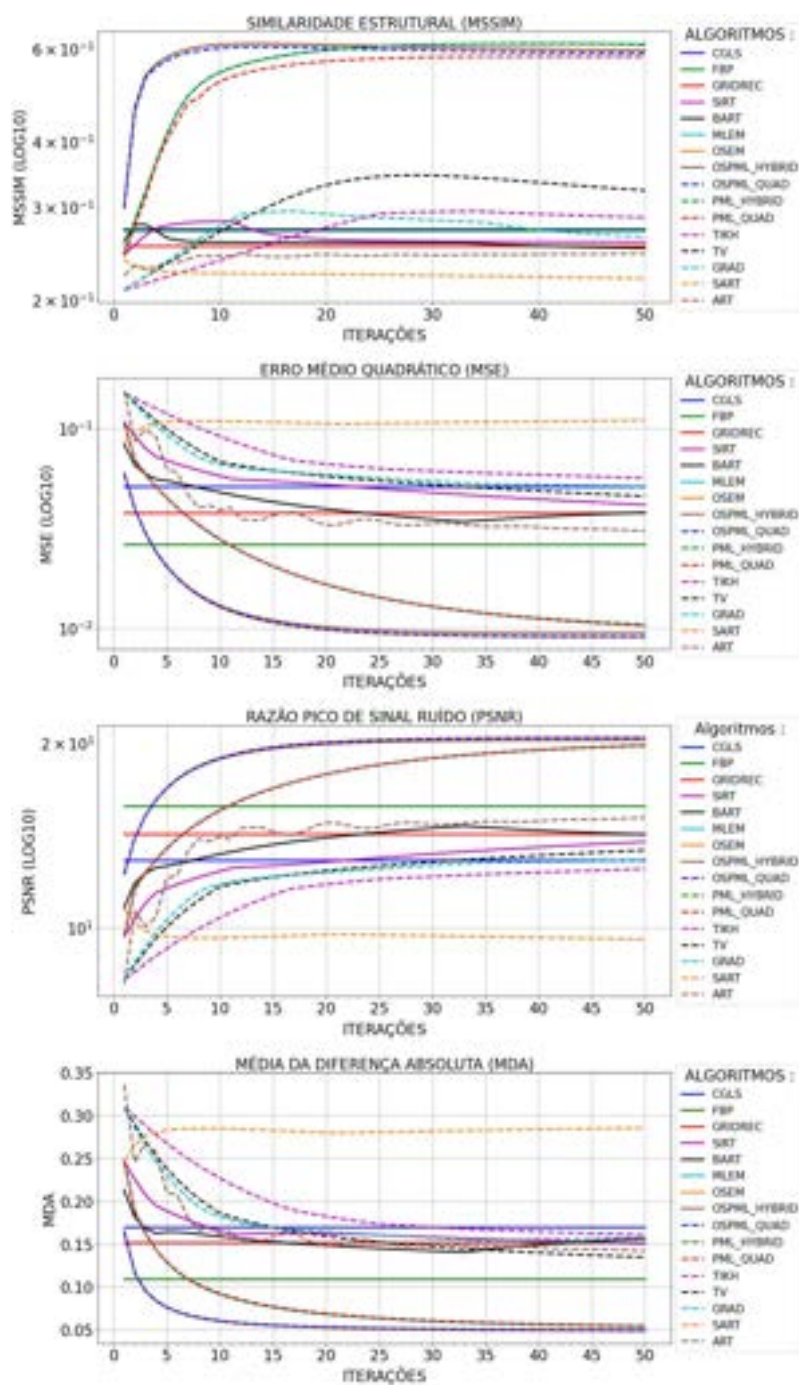


Figura 50 - Erro Nível 03 no Objeto Phantom

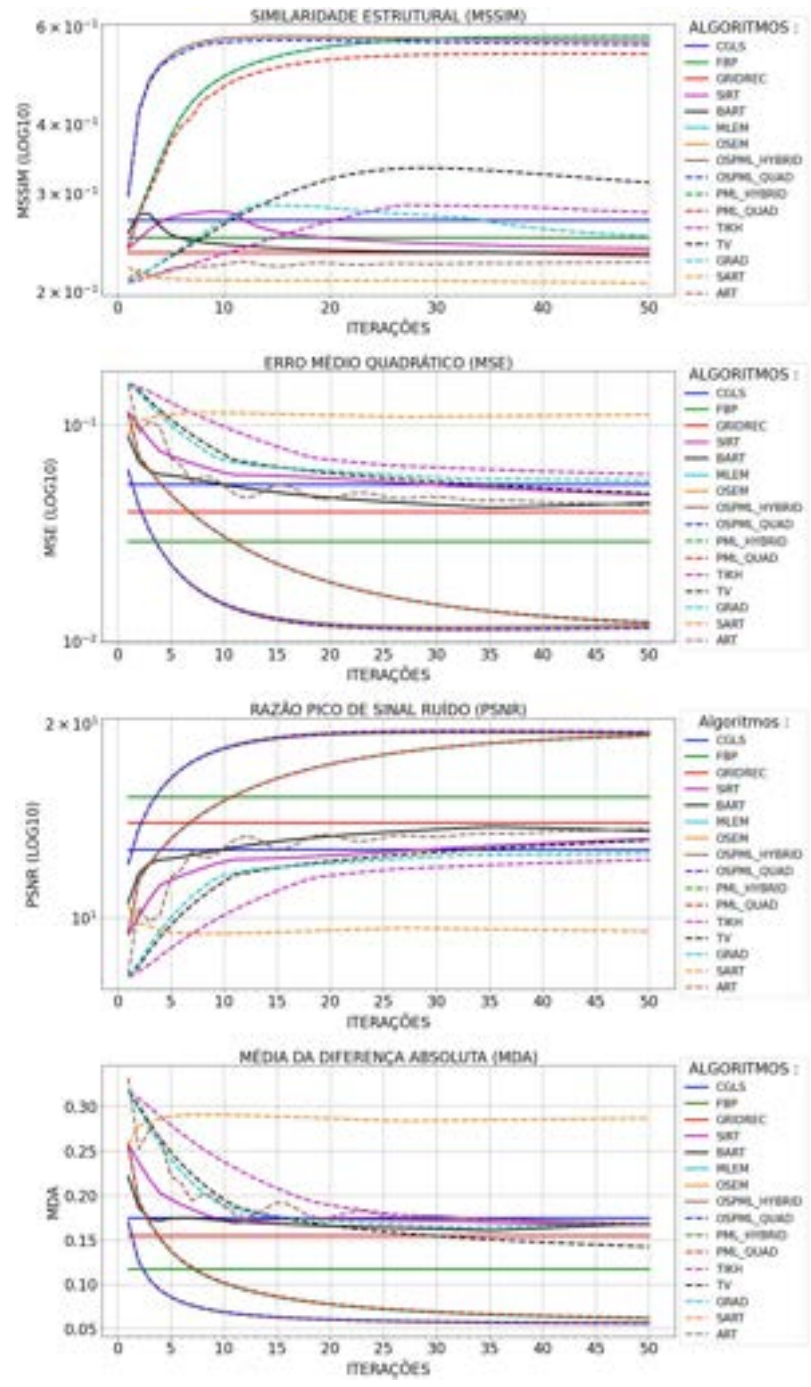


Figura 51 - Erro Nível 04 no Objeto Phantom

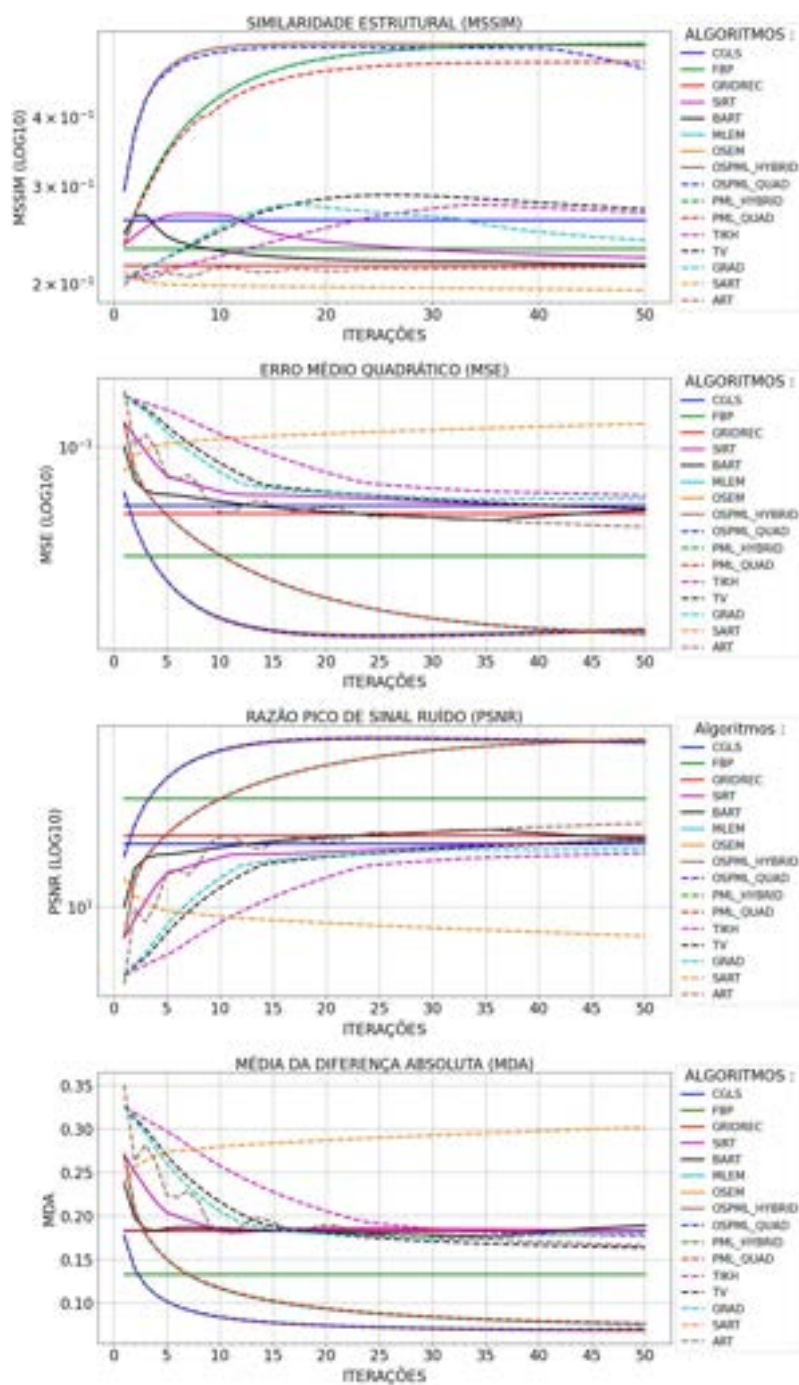


Figura 52 - Erro Nível 05 no Objeto Phantom

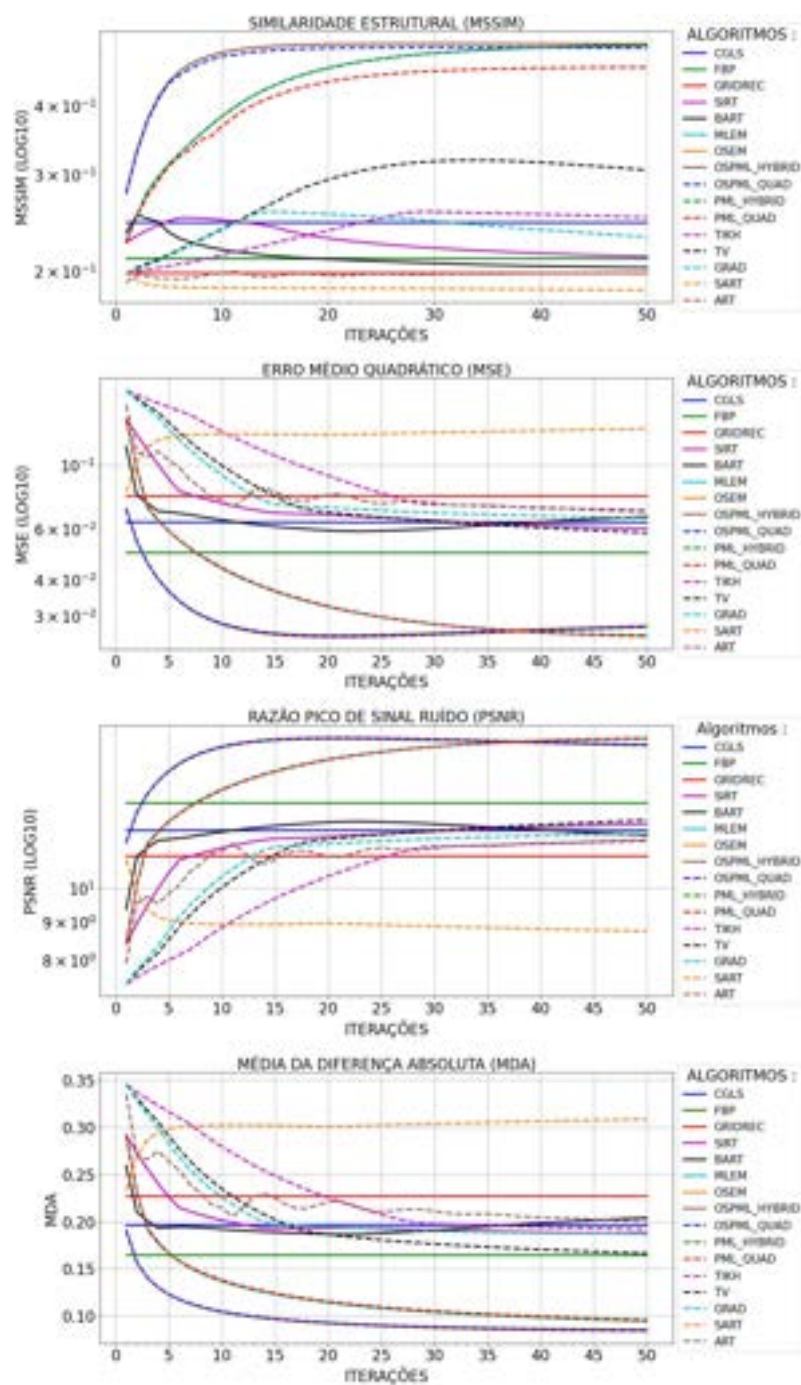


Figura 53 - Erro Nível 06 no Objeto Phantom

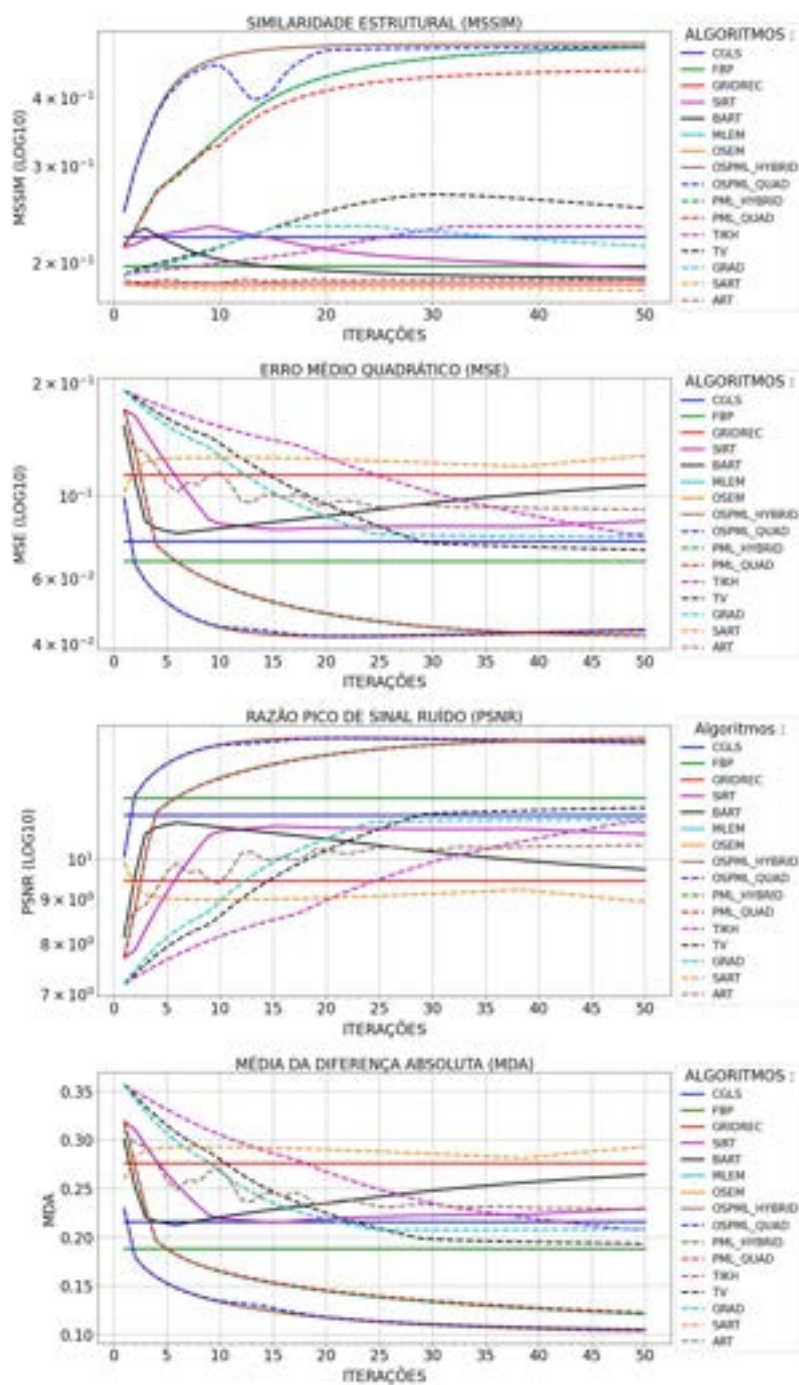


Figura 54 - Erro Nível 07 no Objeto Phantom

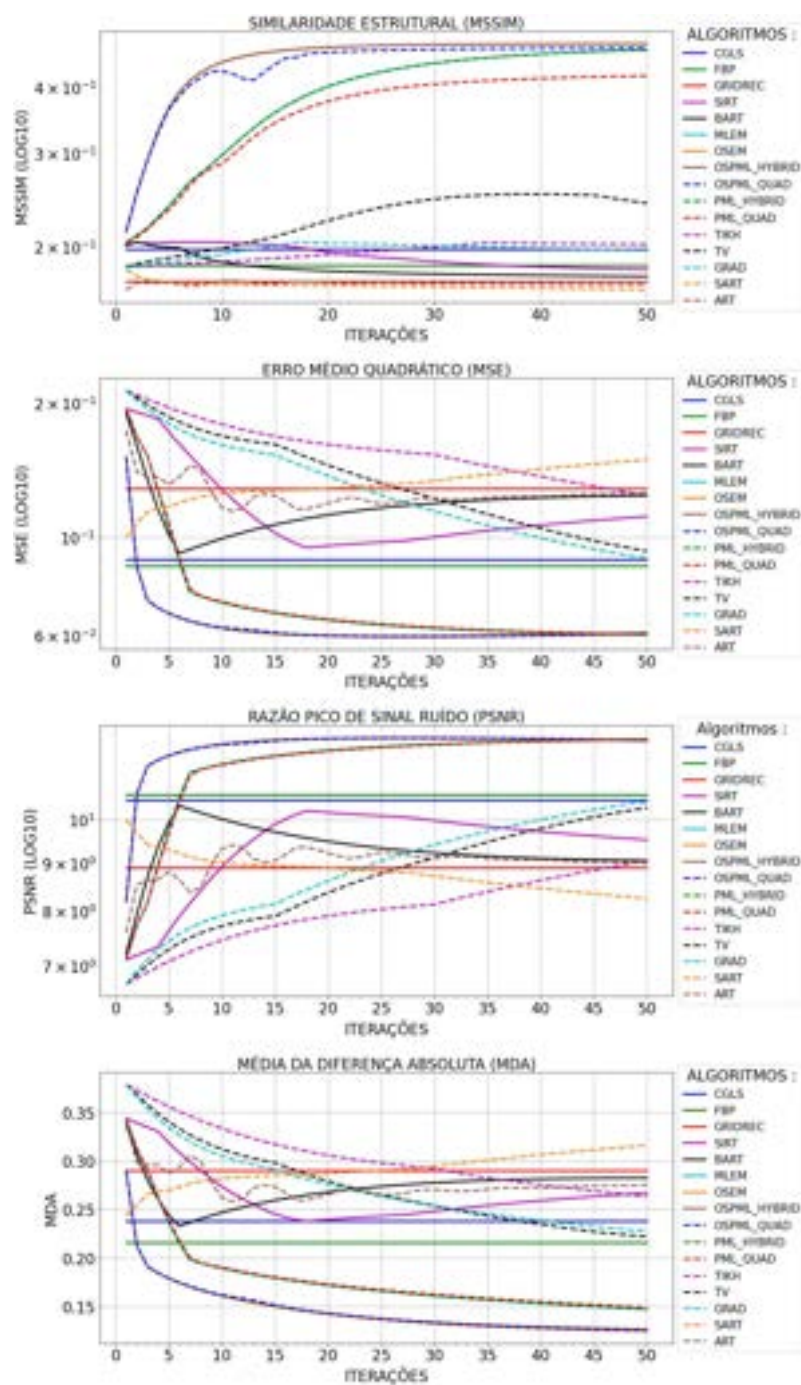


Figura 55 - Erro Nível 08 no Objeto Phantom

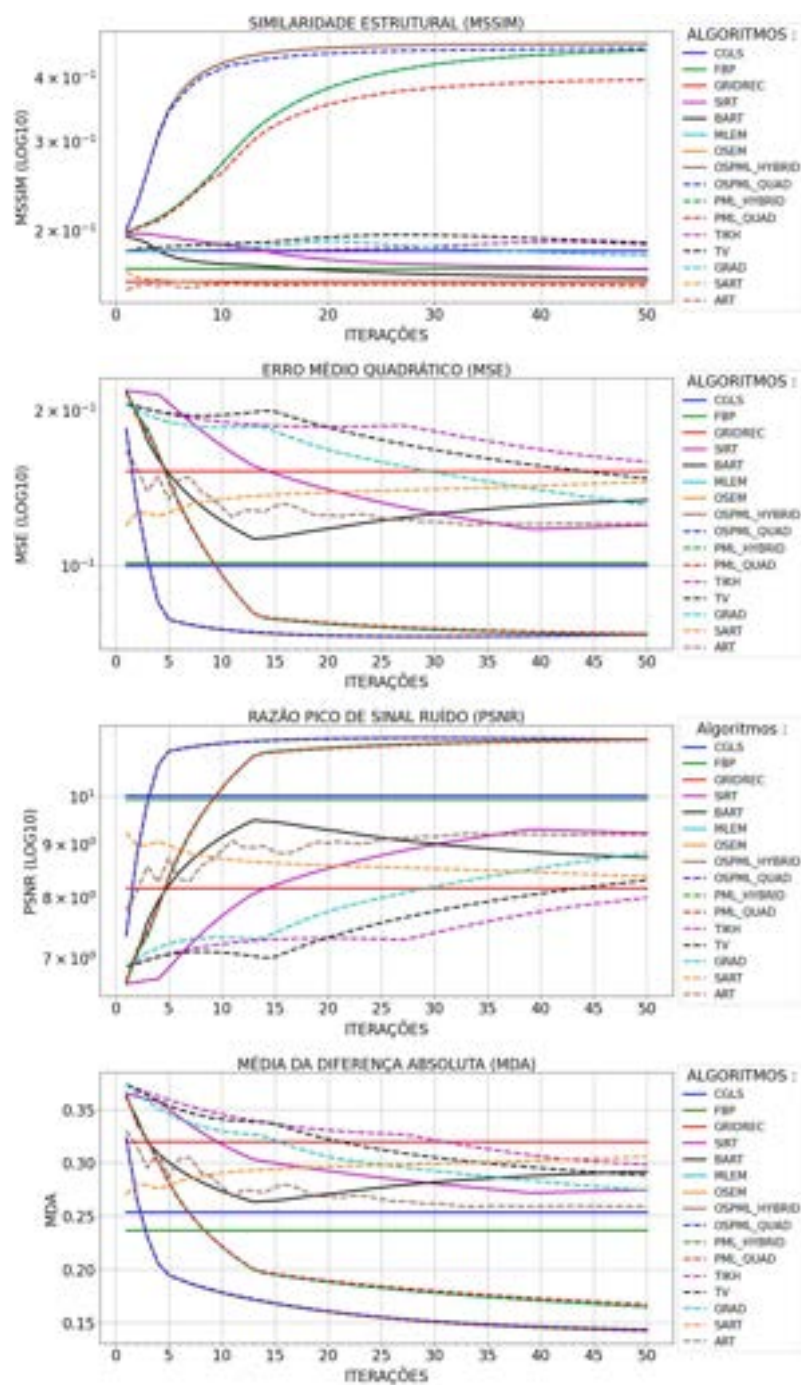


Figura 56 - Erro Nível 09 no Objeto Phantom

A.2.2 Adição de Erro no Sinograma Phantom

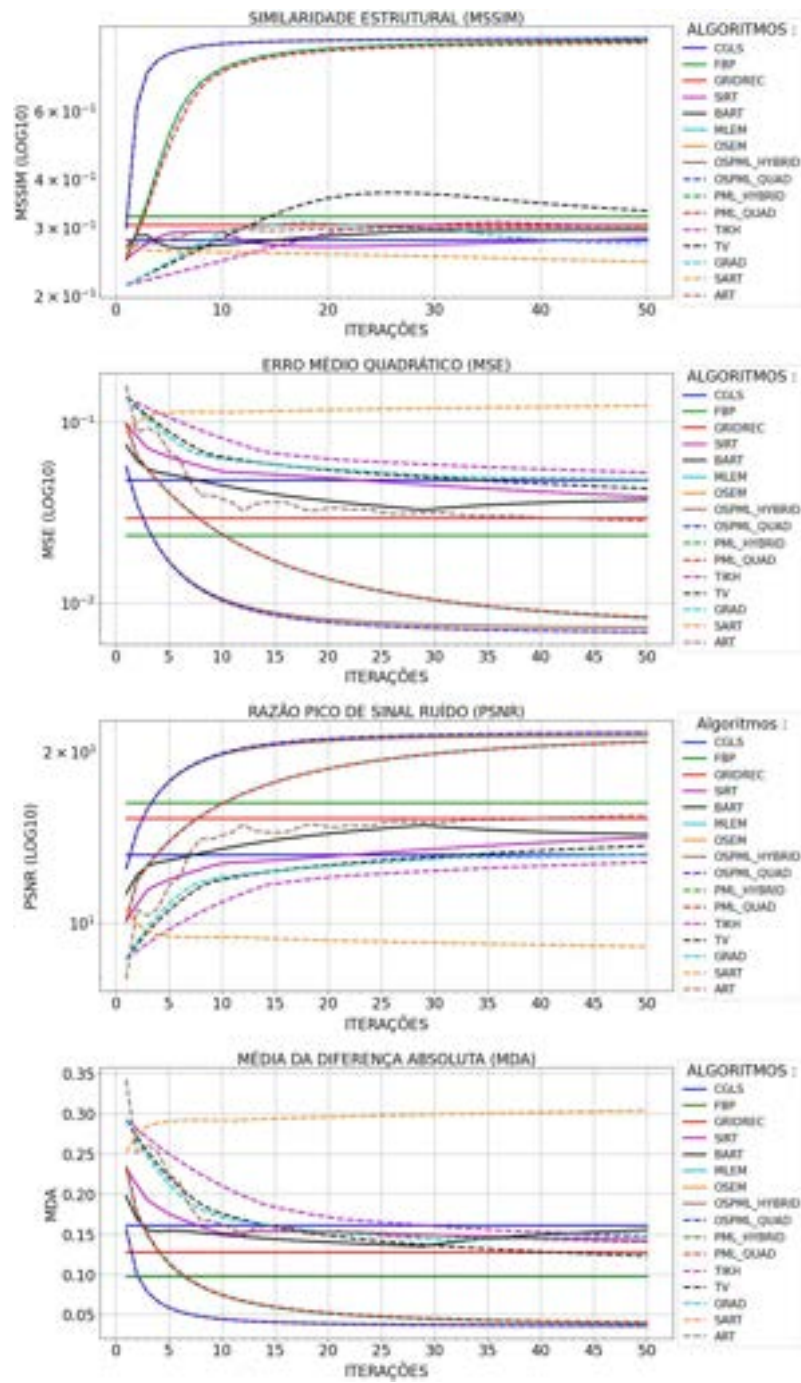


Figura 57 - Erro Nível 00 no Sinograma Phantom

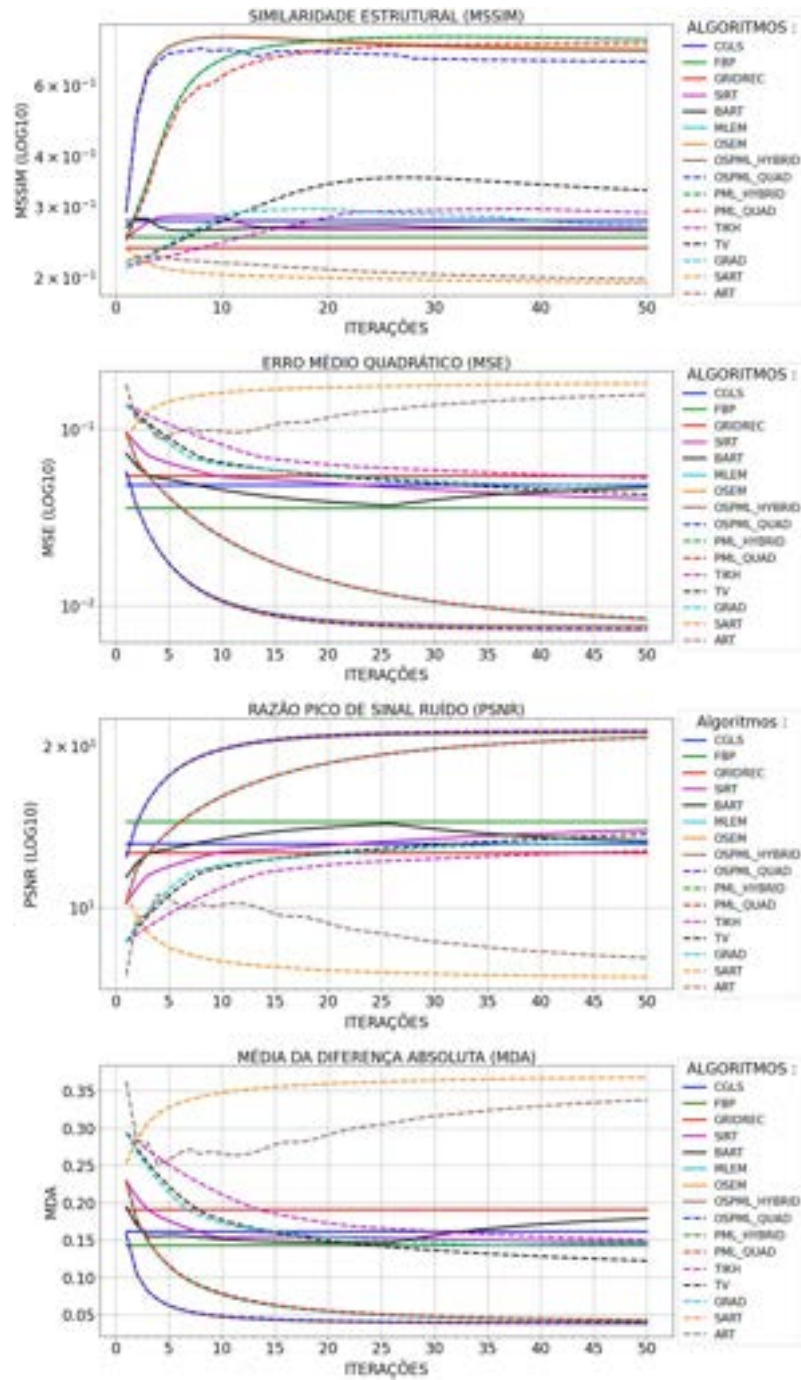


Figura 58 - Erro Nível 01 no Sinograma Phantom

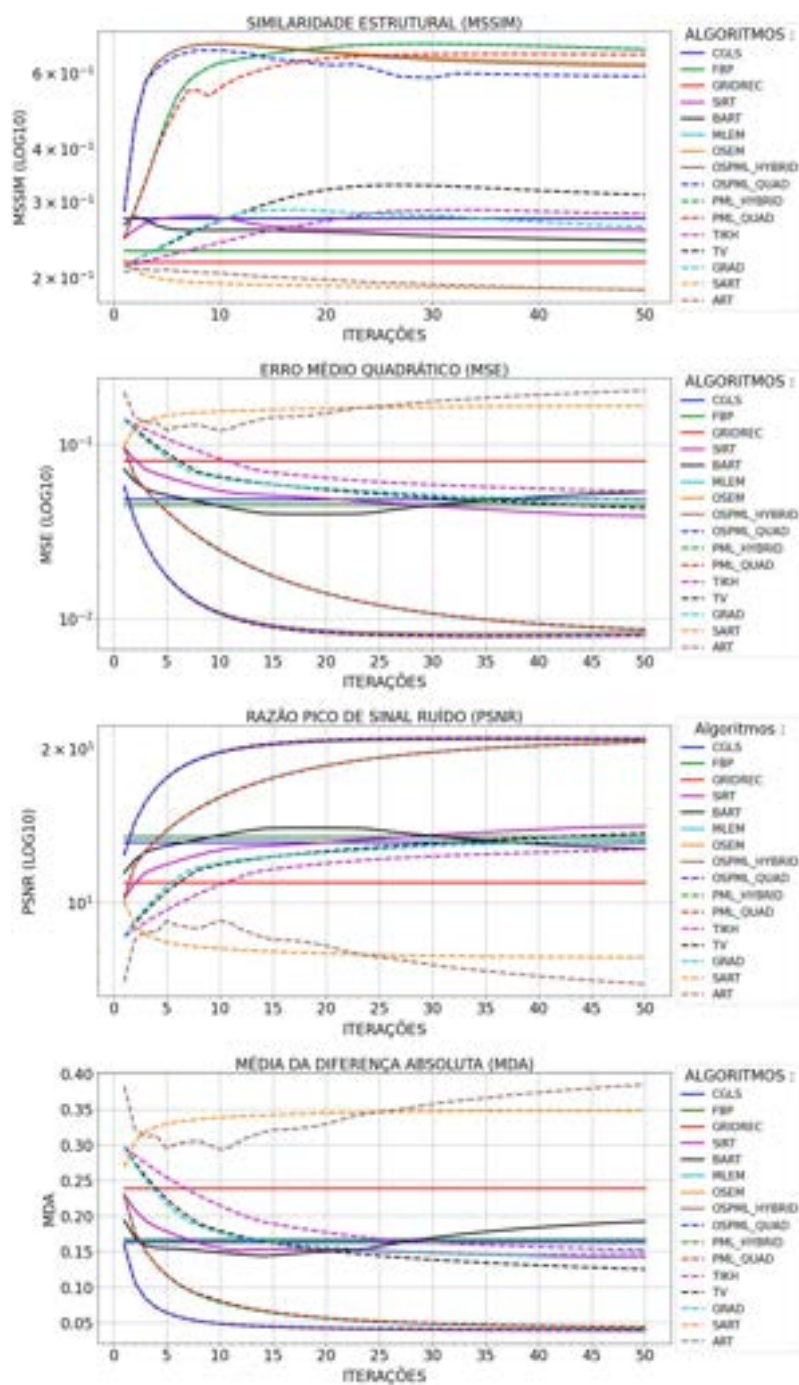


Figura 59 - Erro Nível 02 no Sinograma Phantom

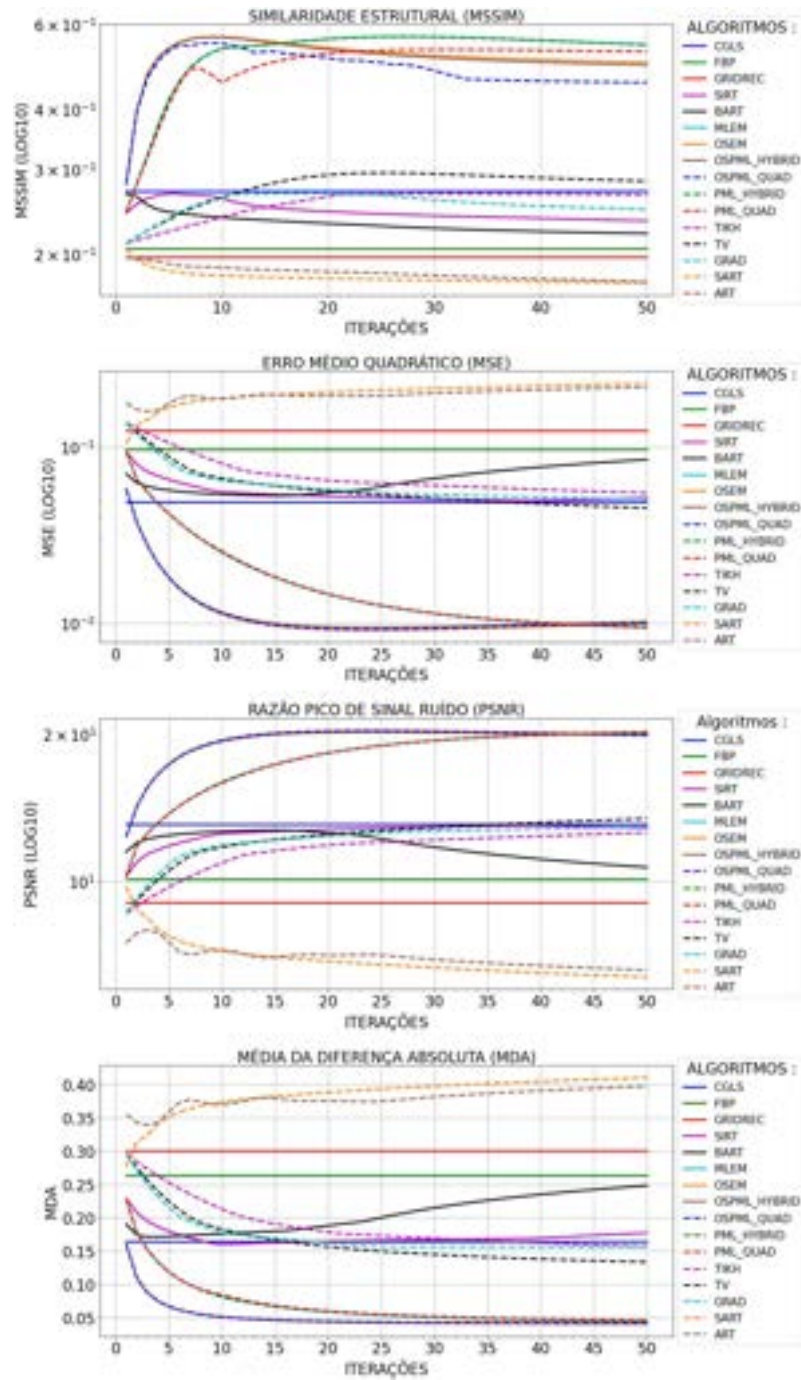


Figura 60 - Erro Nível 03 no Sinograma Phantom

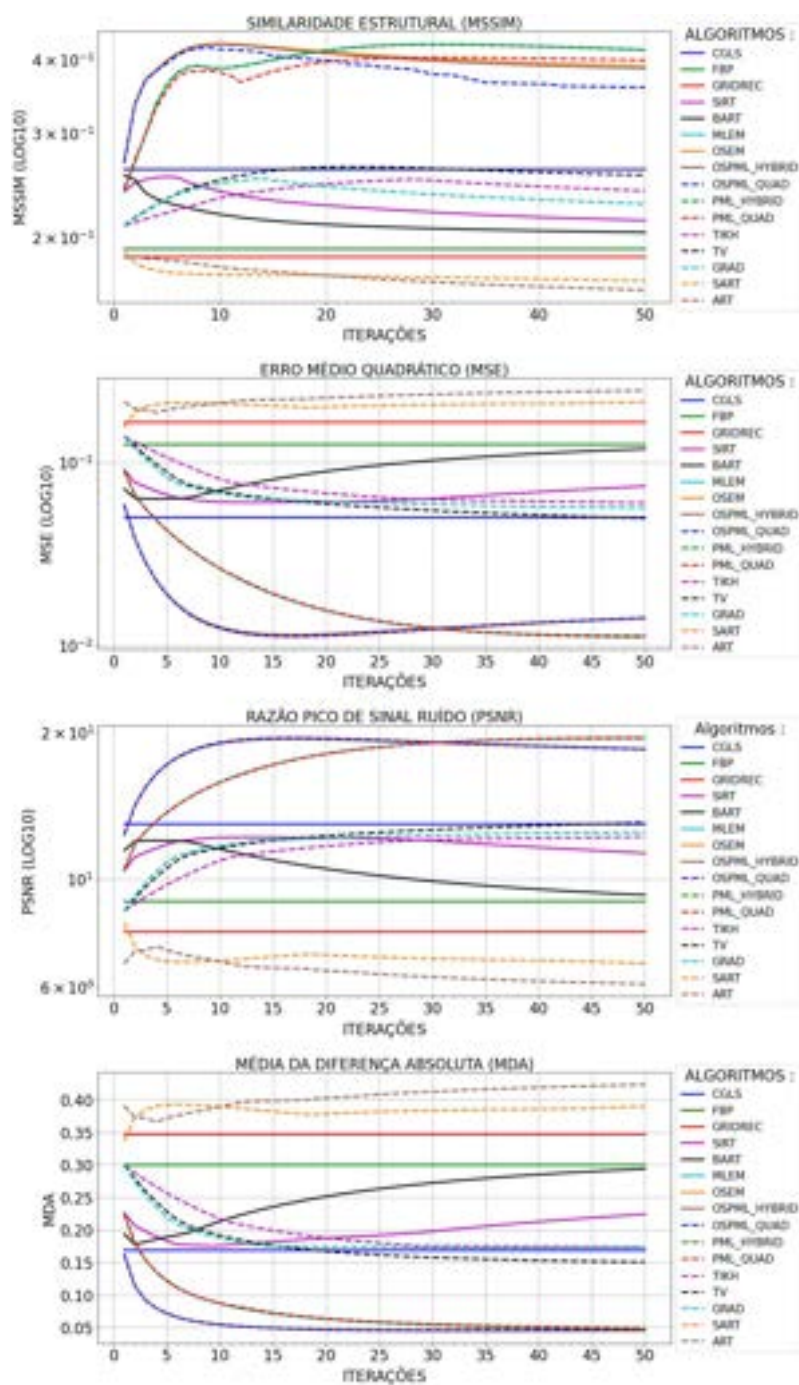


Figura 61 - Erro Nível 04 no Sinograma Phantom

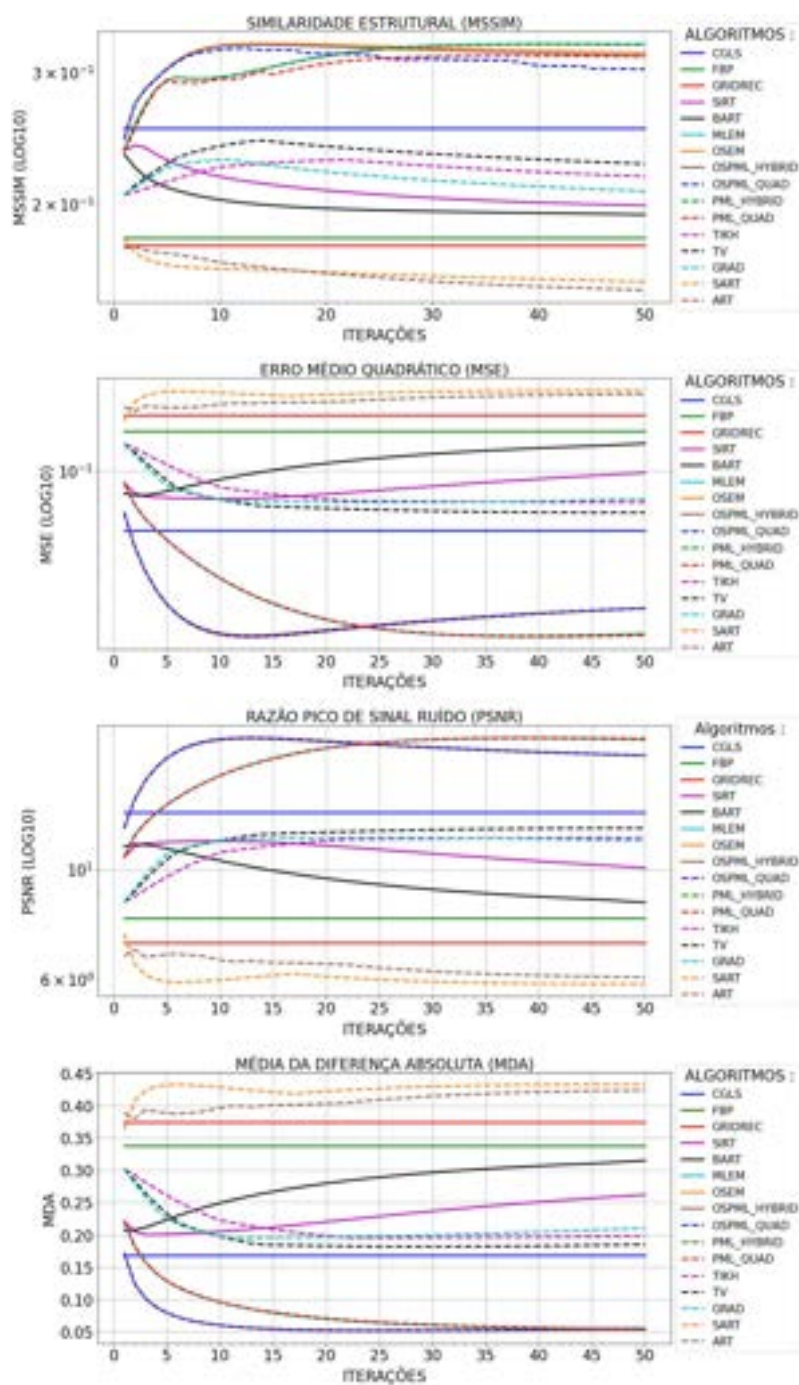


Figura 62 - Erro Nível 05 no Sinograma Phantom

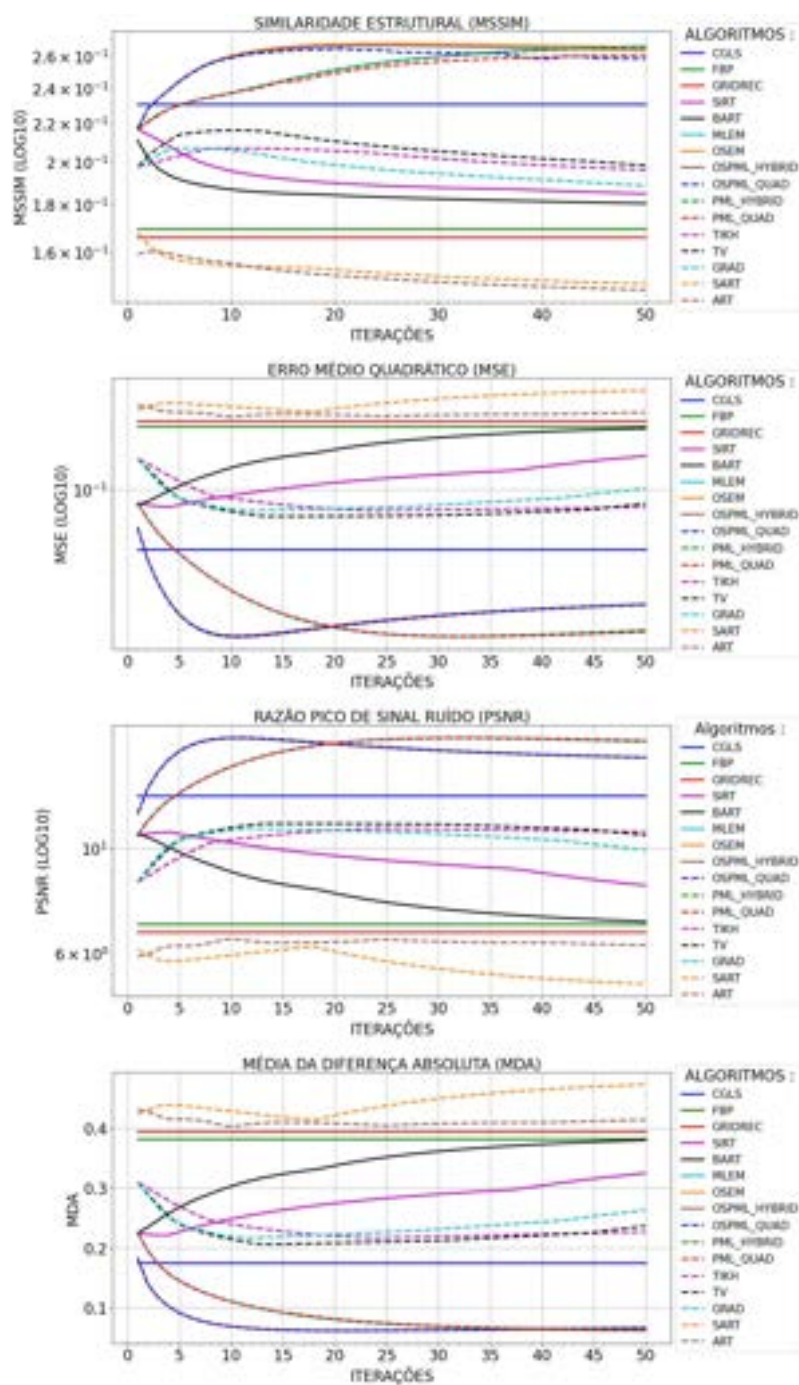


Figura 63 - Erro Nível 06 no Sinograma Phantom

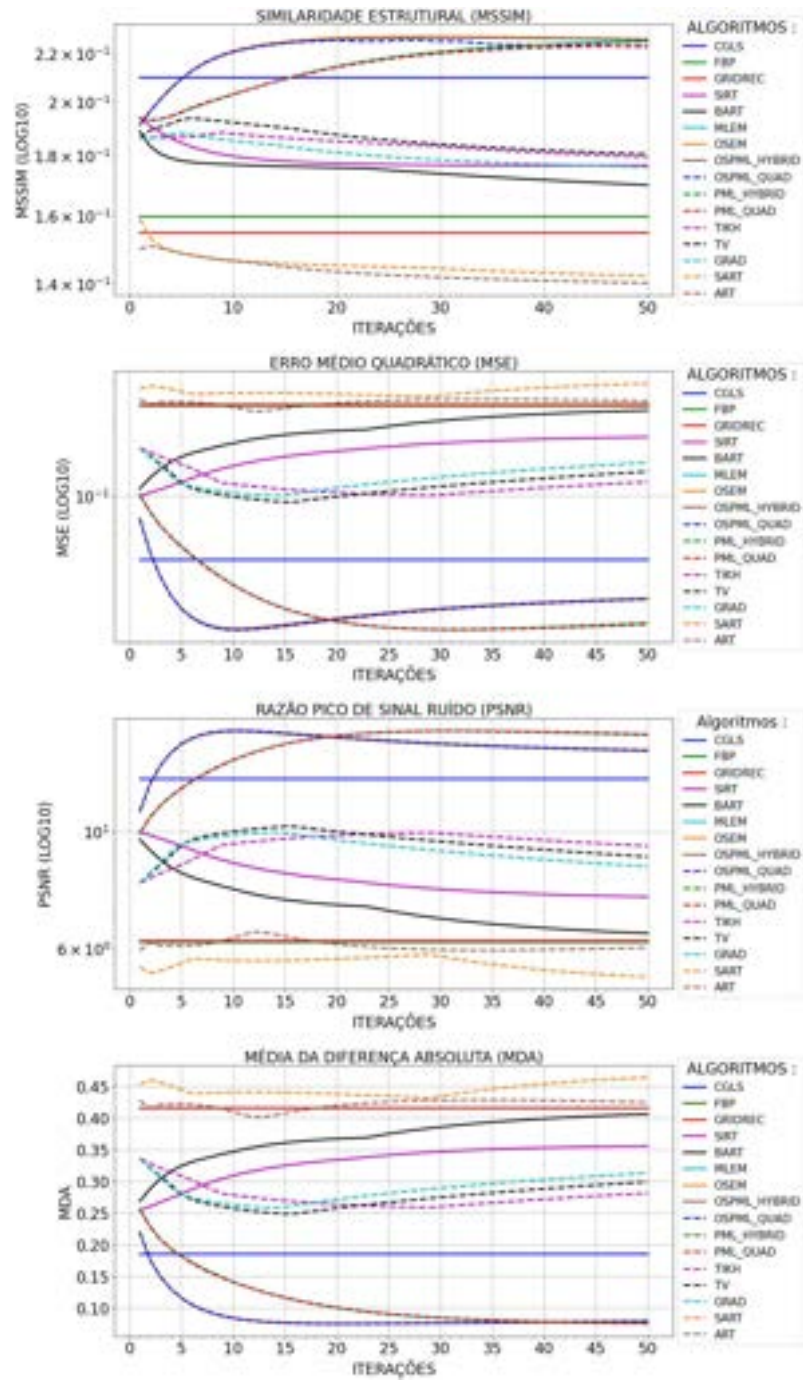


Figura 64 - Erro Nível 07 no Sinograma Phantom

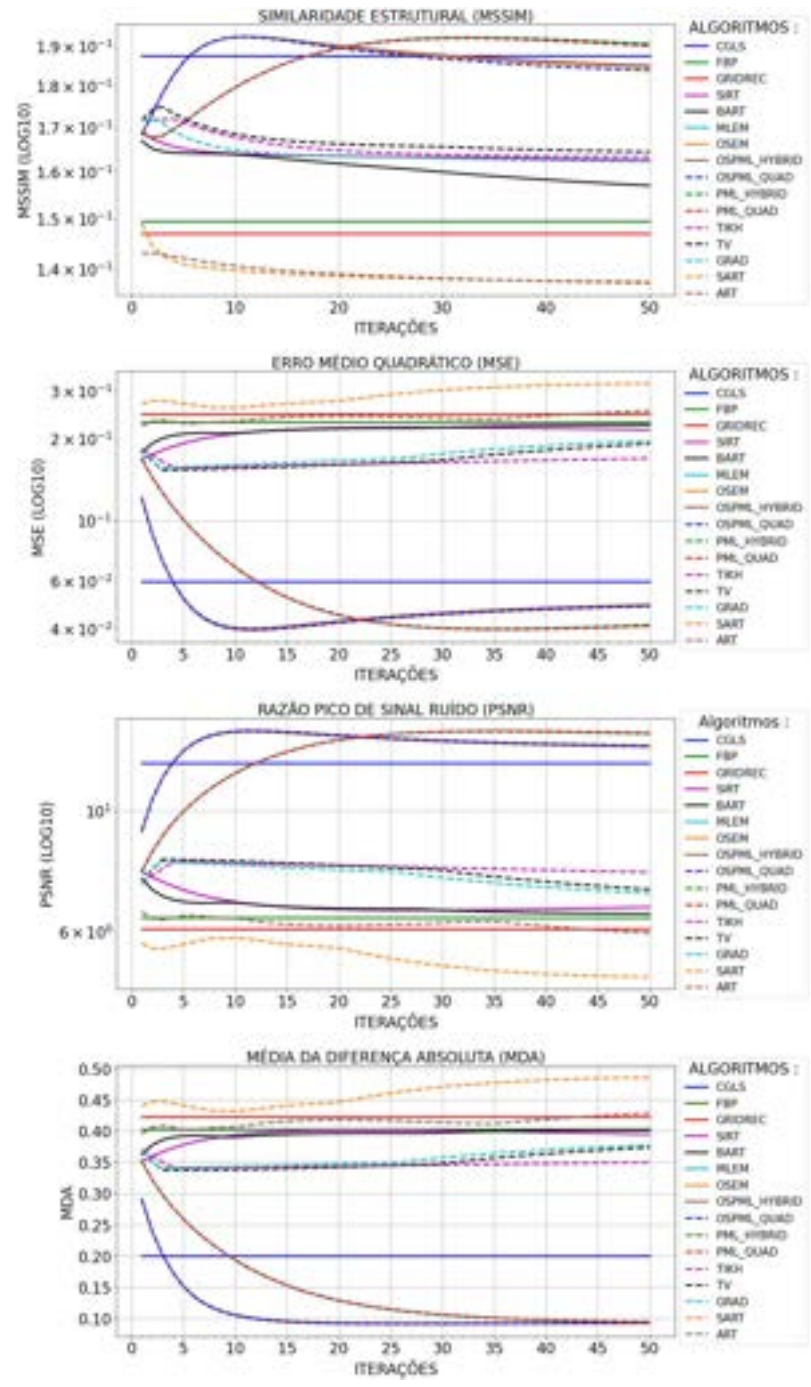


Figura 65 - Erro Nível 08 no Sinograma Phantom

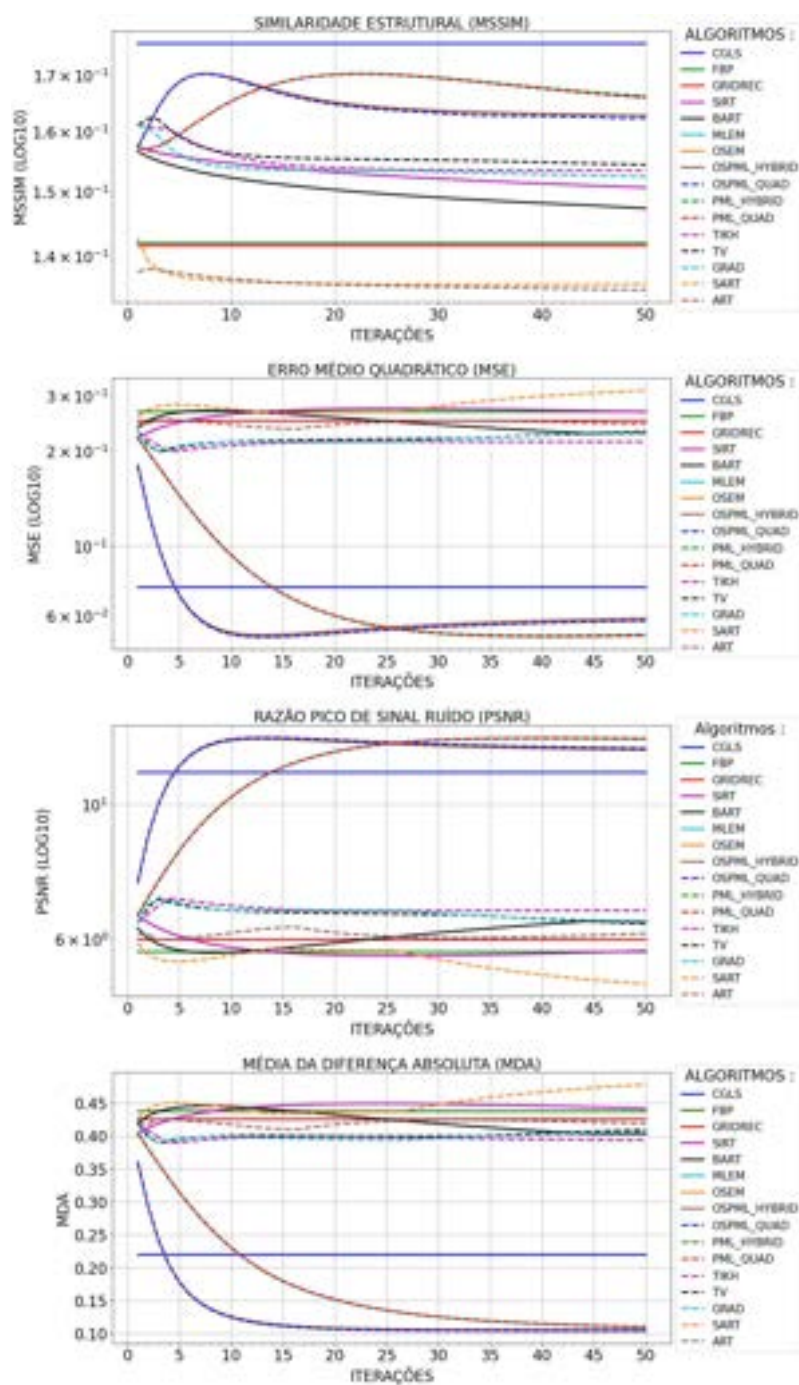


Figura 66 - Erro Nível 09 no Sinograma Phantom

A.3 Objeto-Alvo Horus

A.3.1 Adição de Erro no Objeto Horus

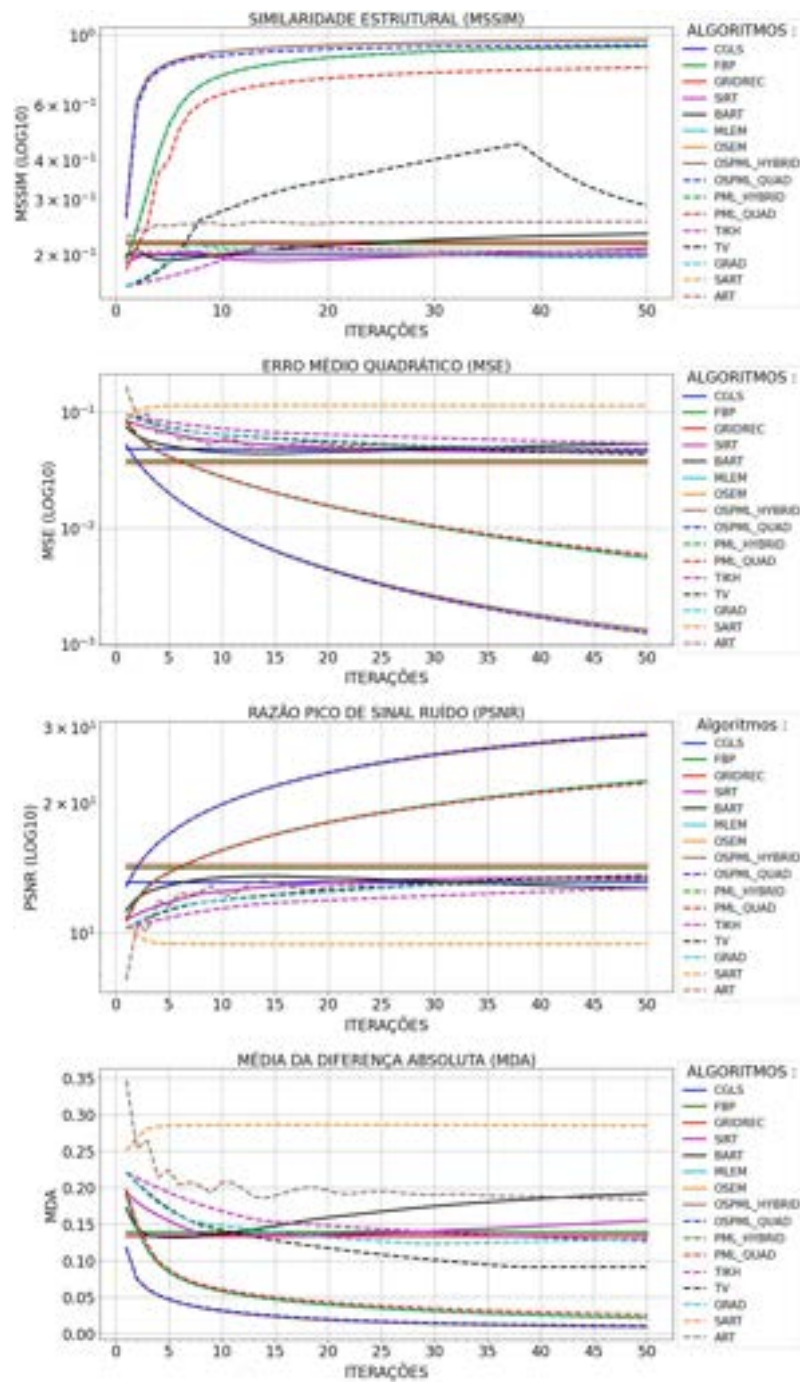


Figura 67 - Erro Nível 00 no Objeto Horus

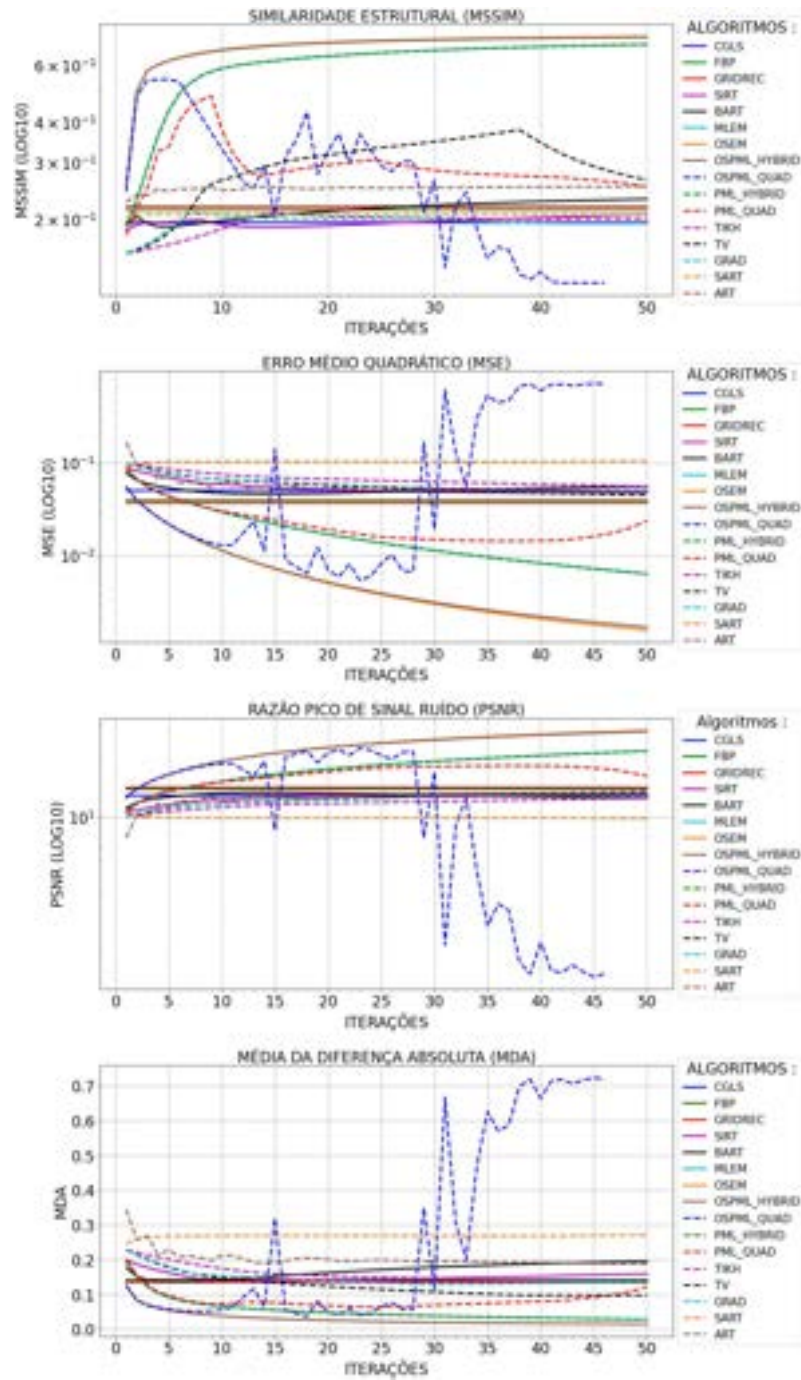


Figura 68 - Erro Nível 01 no Objeto Horus

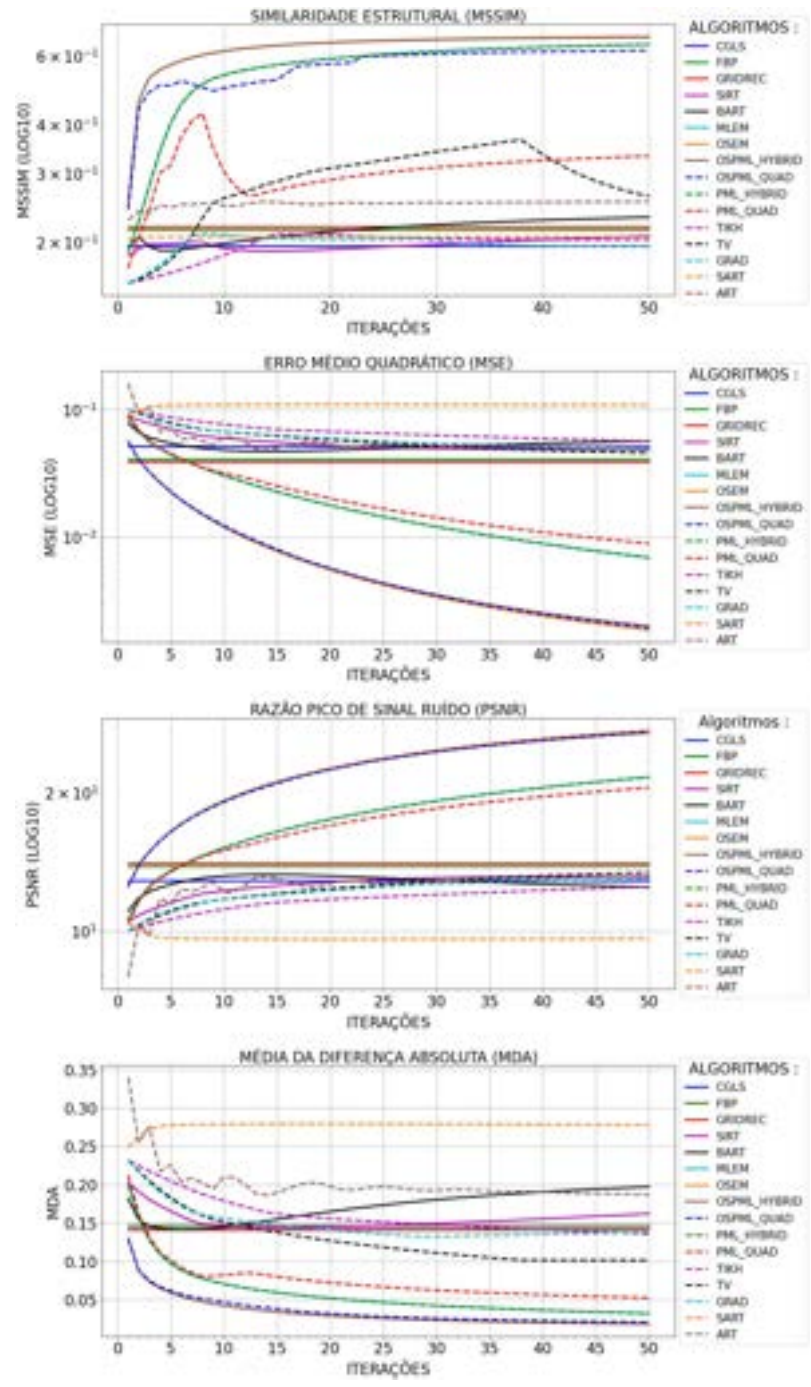


Figura 69 - Erro Nível 02 no Objeto Horus

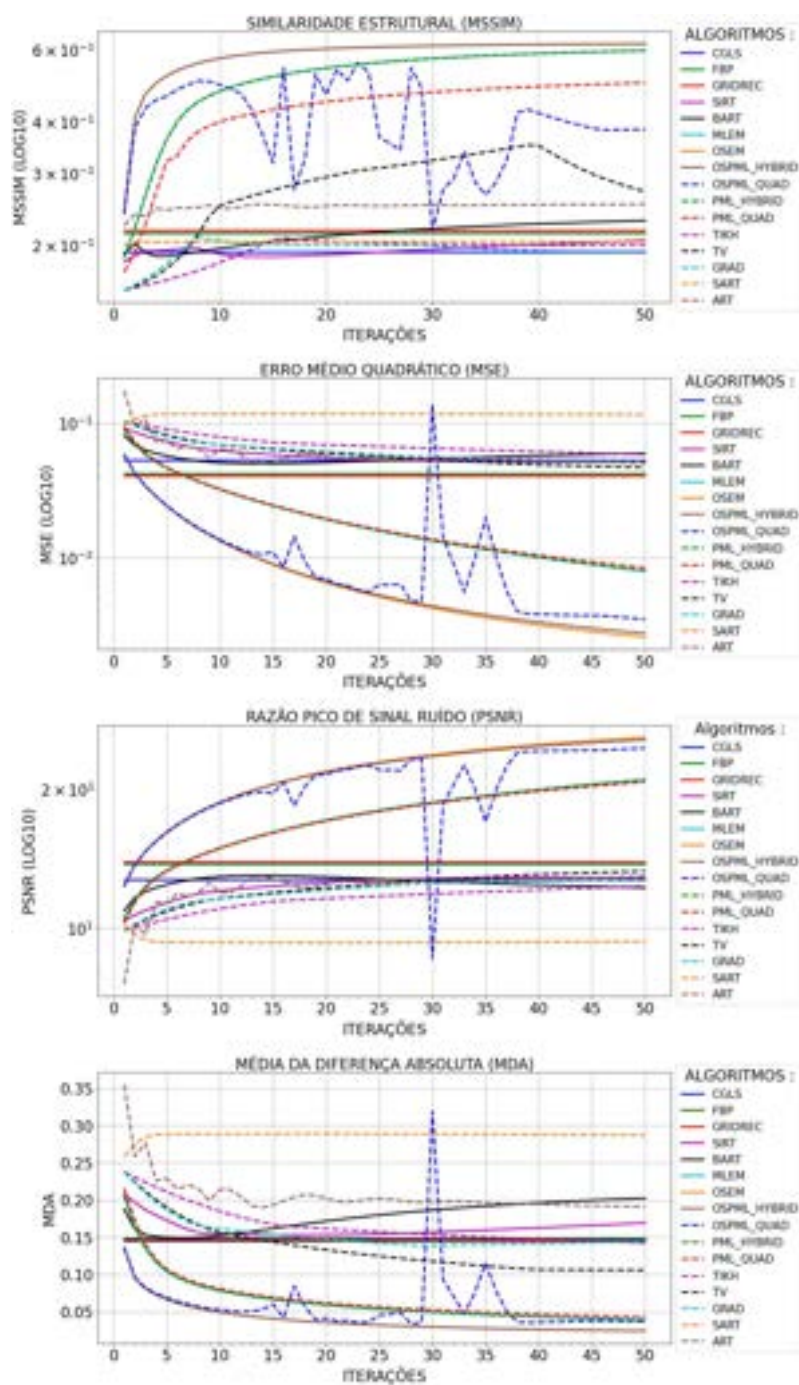


Figura 70 - Erro Nível 03 no Objeto Horus

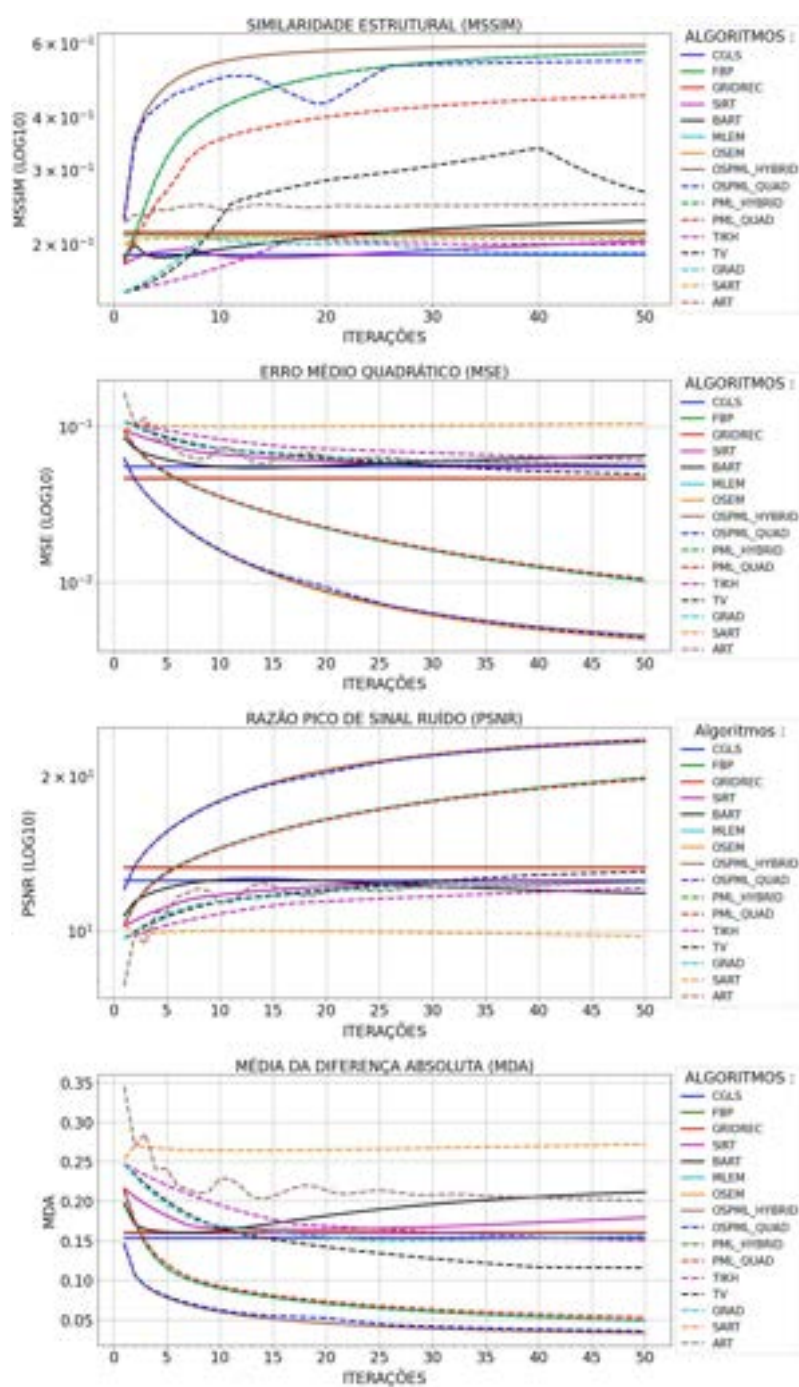


Figura 71 - Erro Nível 04 no Objeto Horus

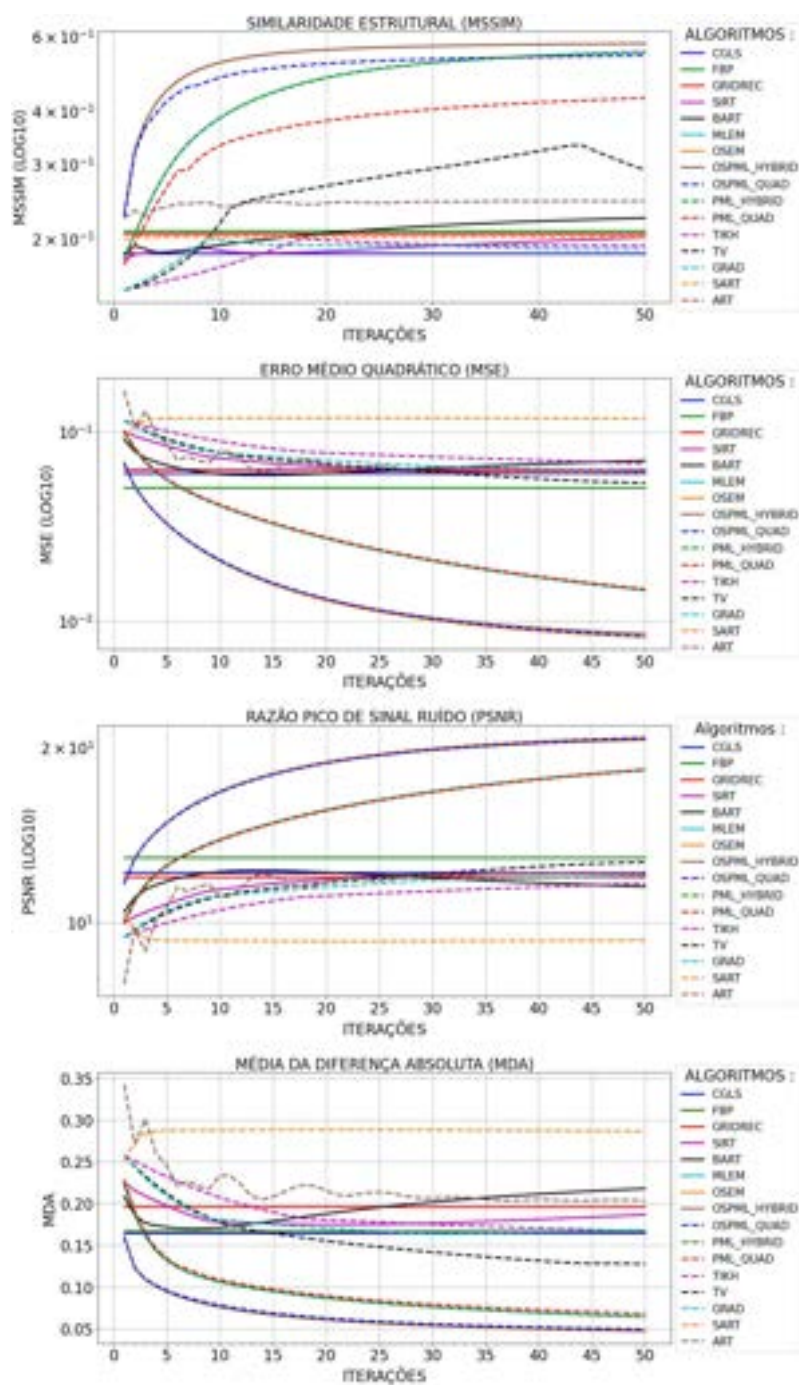


Figura 72 - Erro Nível 05 no Objeto Horus

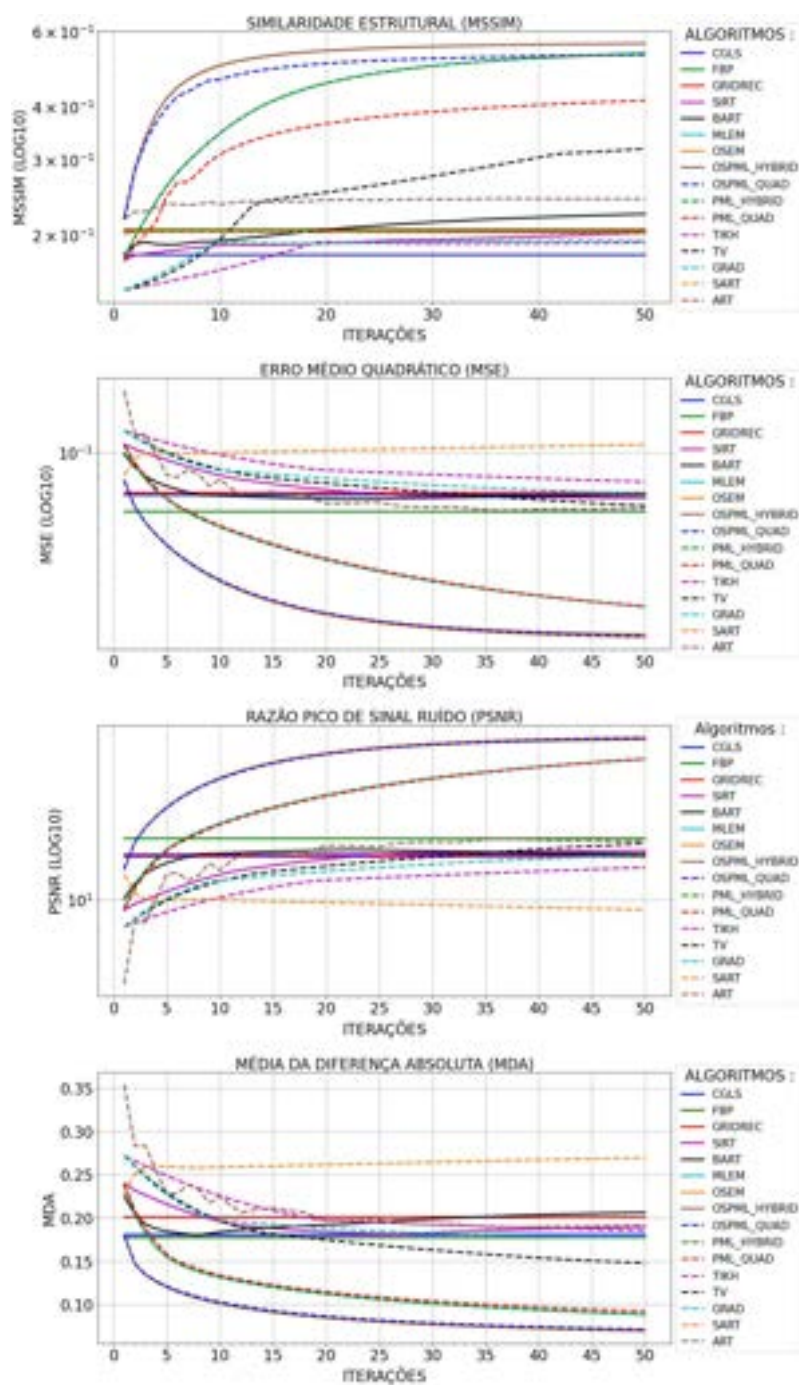


Figura 73 - Erro Nível 06 no Objeto Horus

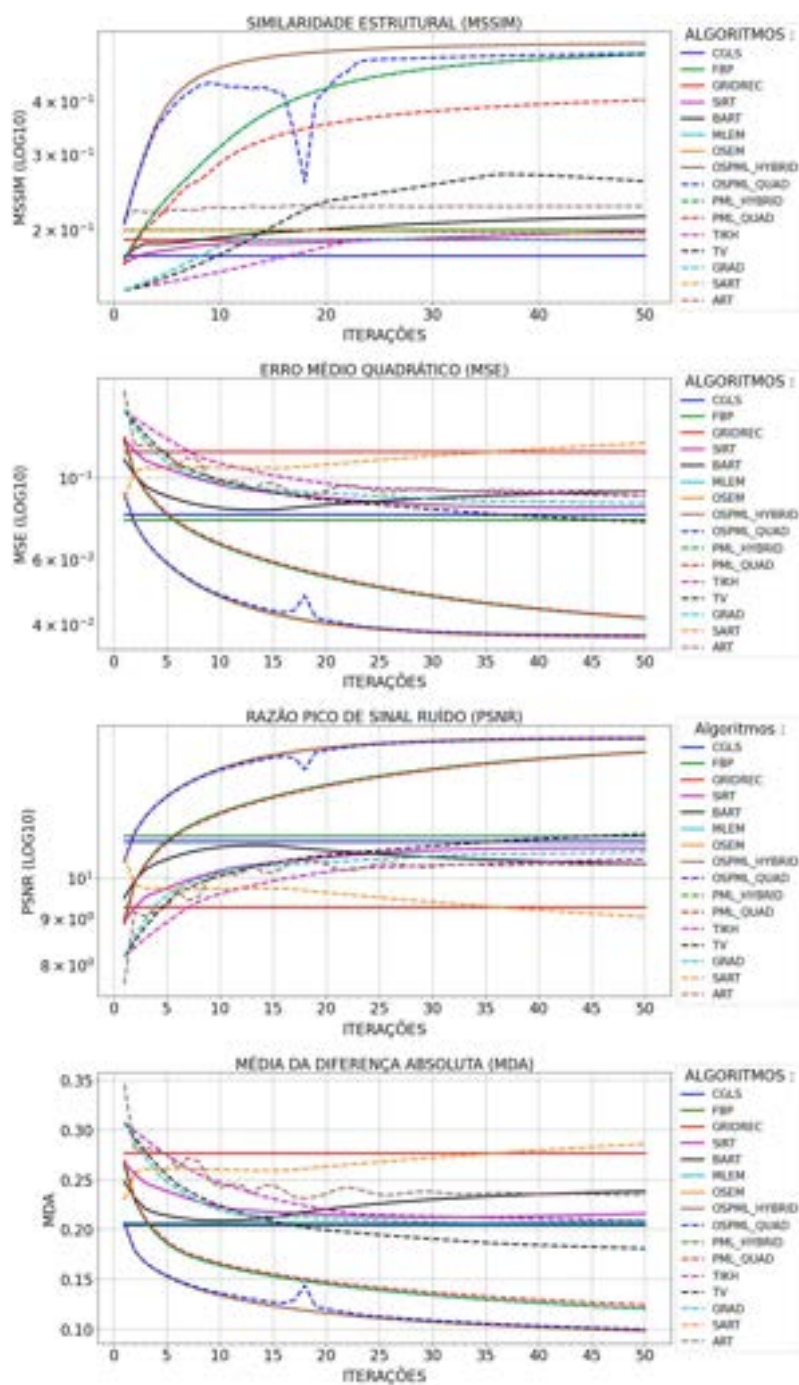


Figura 74 - Erro Nível 07 no Objeto Horus

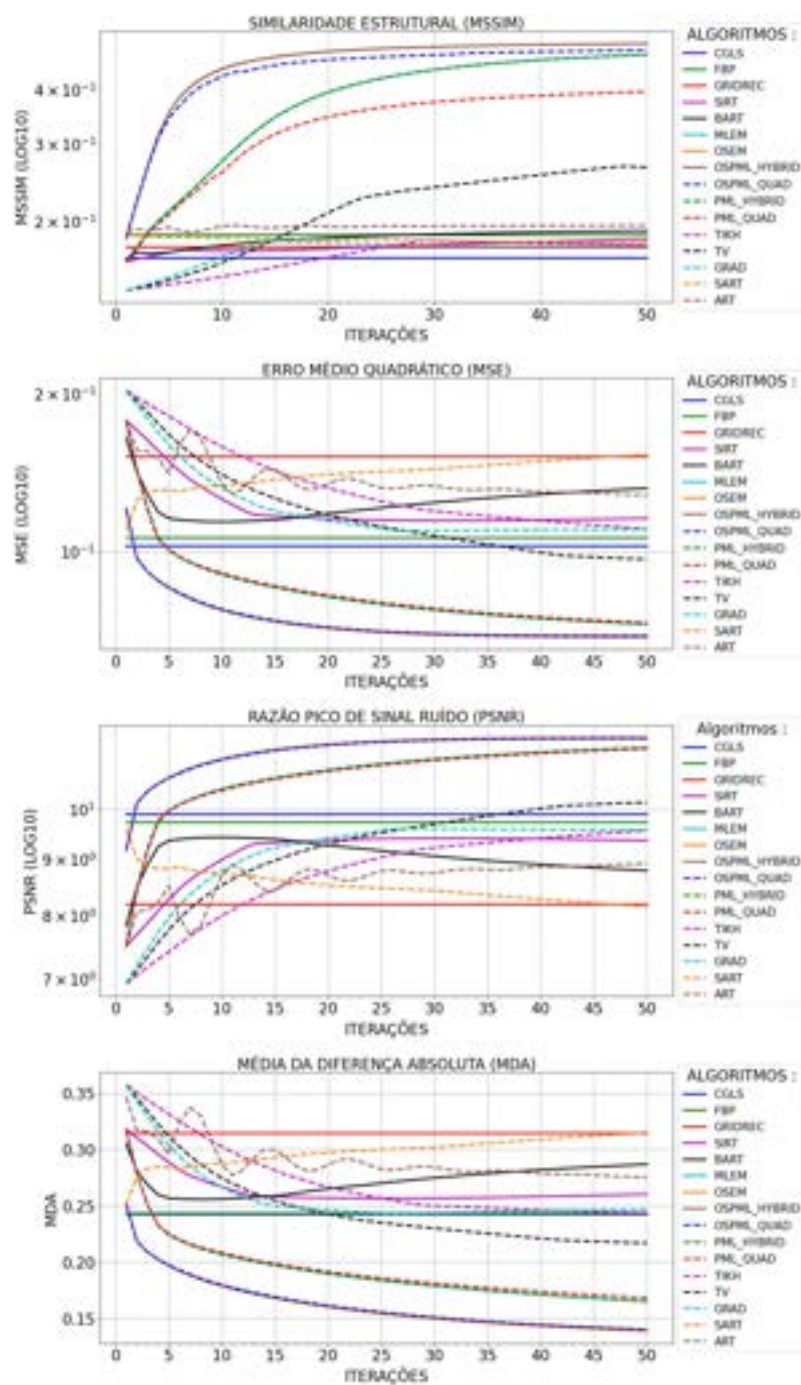


Figura 75 - Erro Nível 08 no Objeto Horus

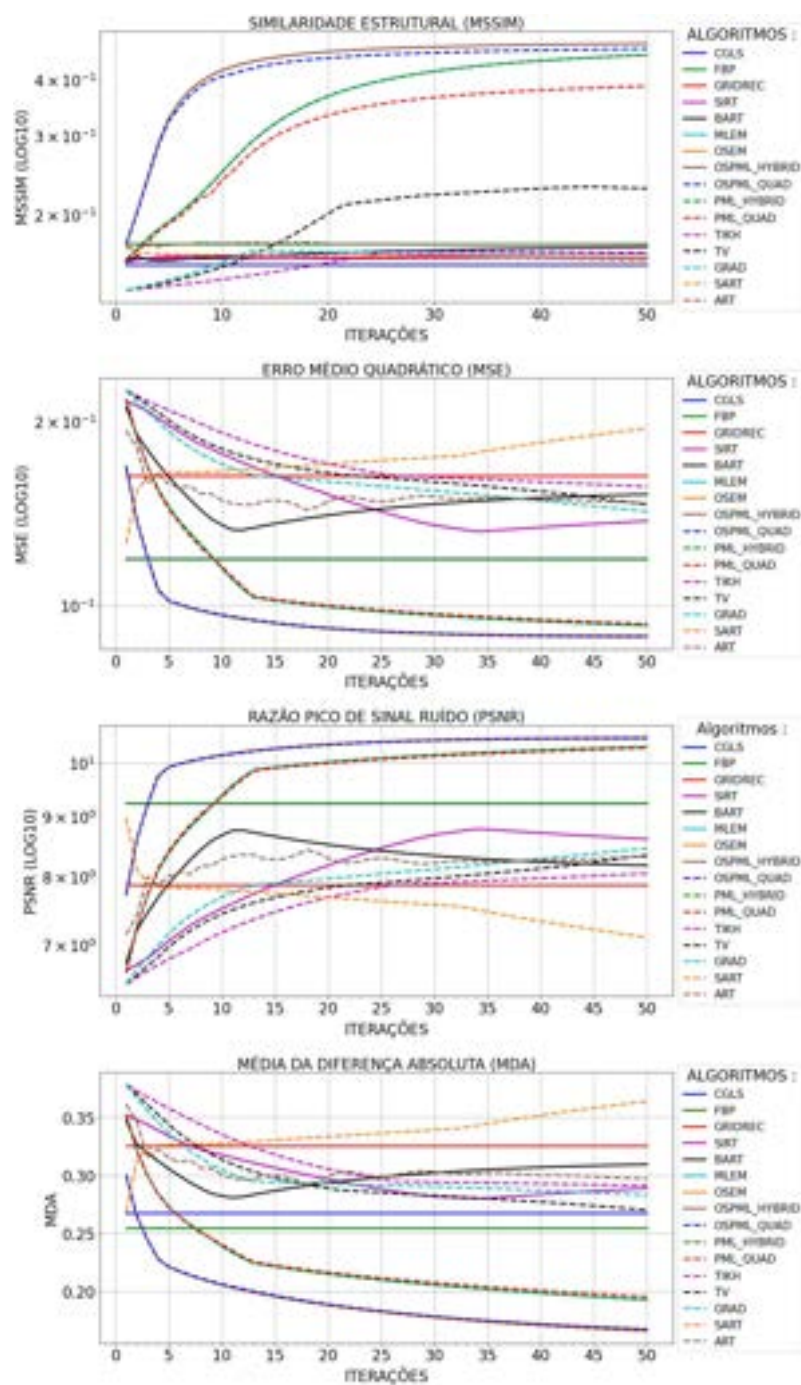


Figura 76 - Erro Nível 09 no Objeto Horus

A.3.2 Adição de Erro no Sinograma Horus

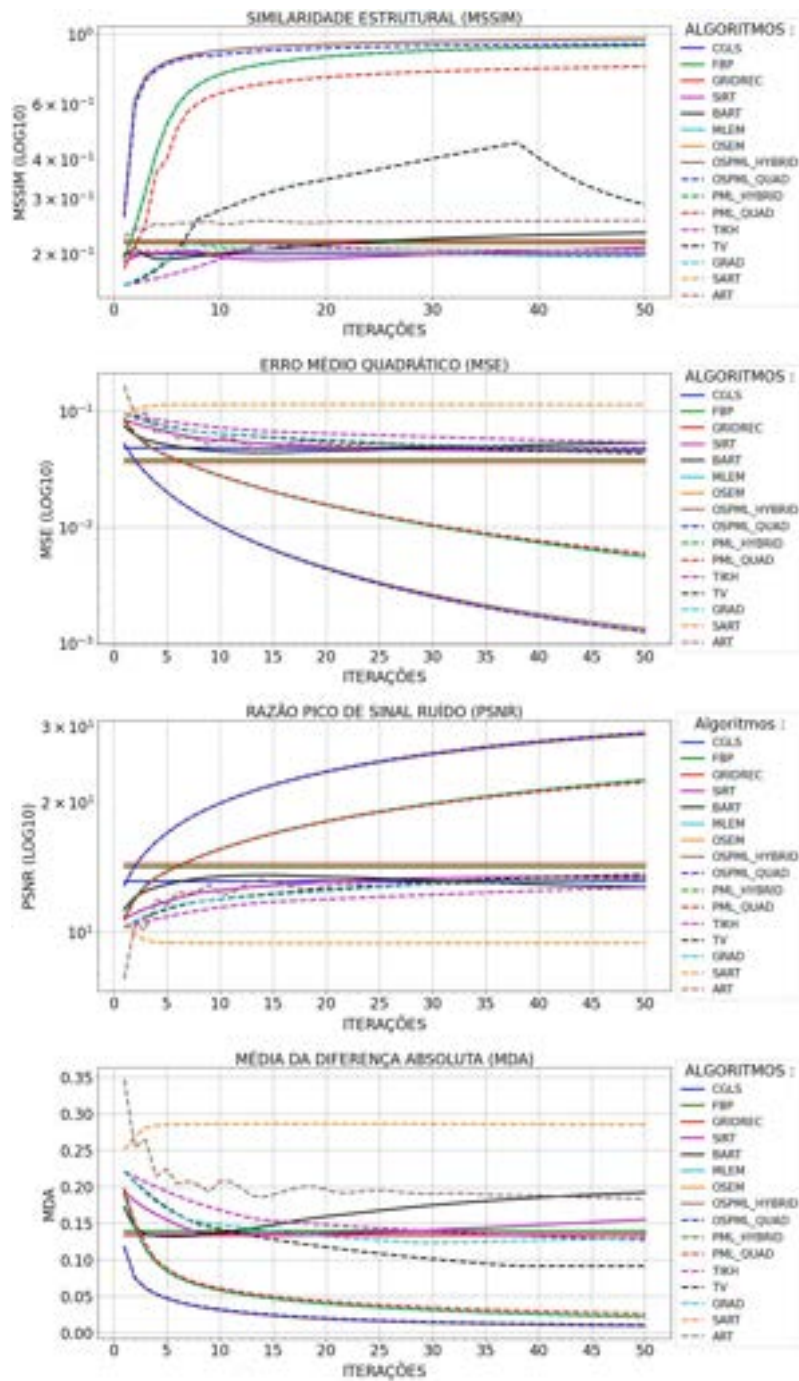


Figura 77 - Erro Nível 00 no Sinograma Horus

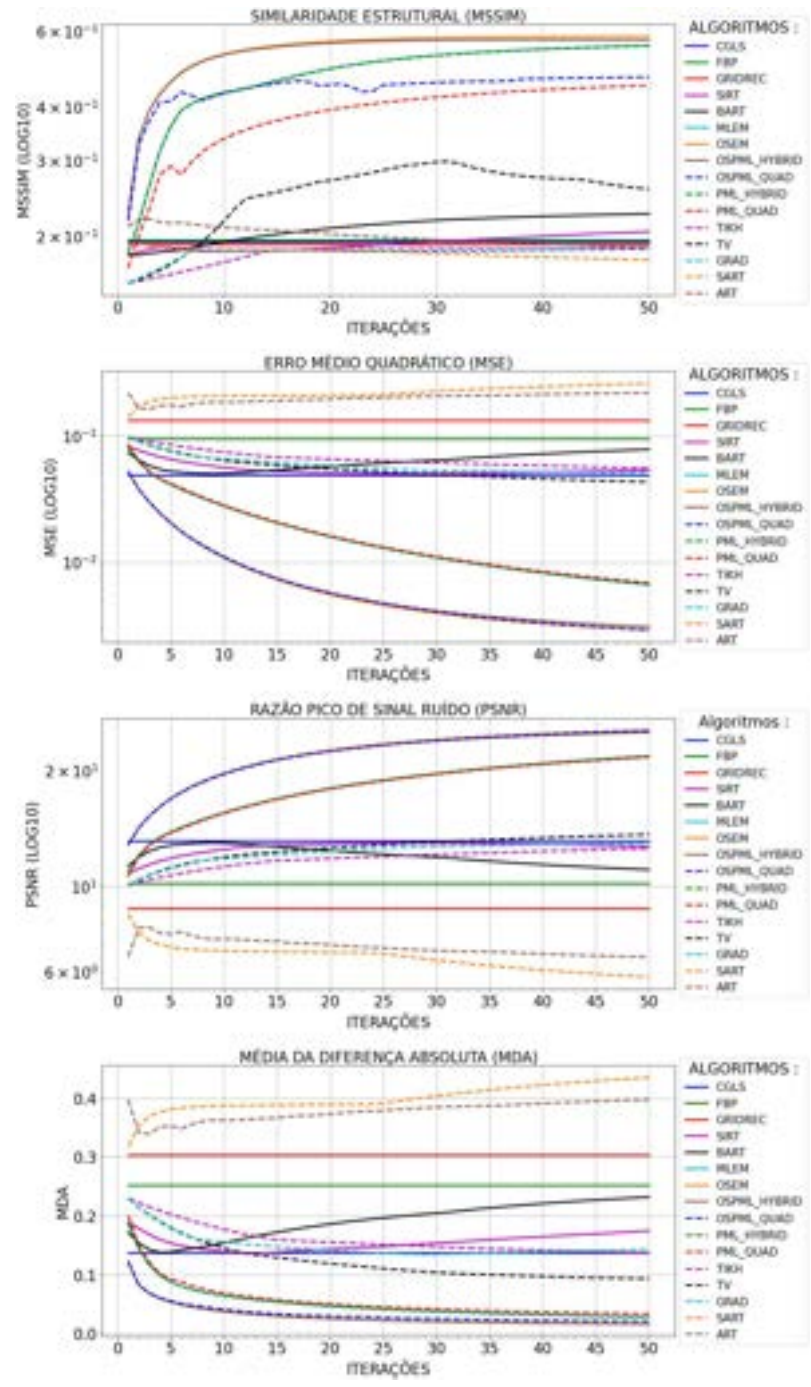


Figura 78 - Erro Nível 01 no Sinograma Horus

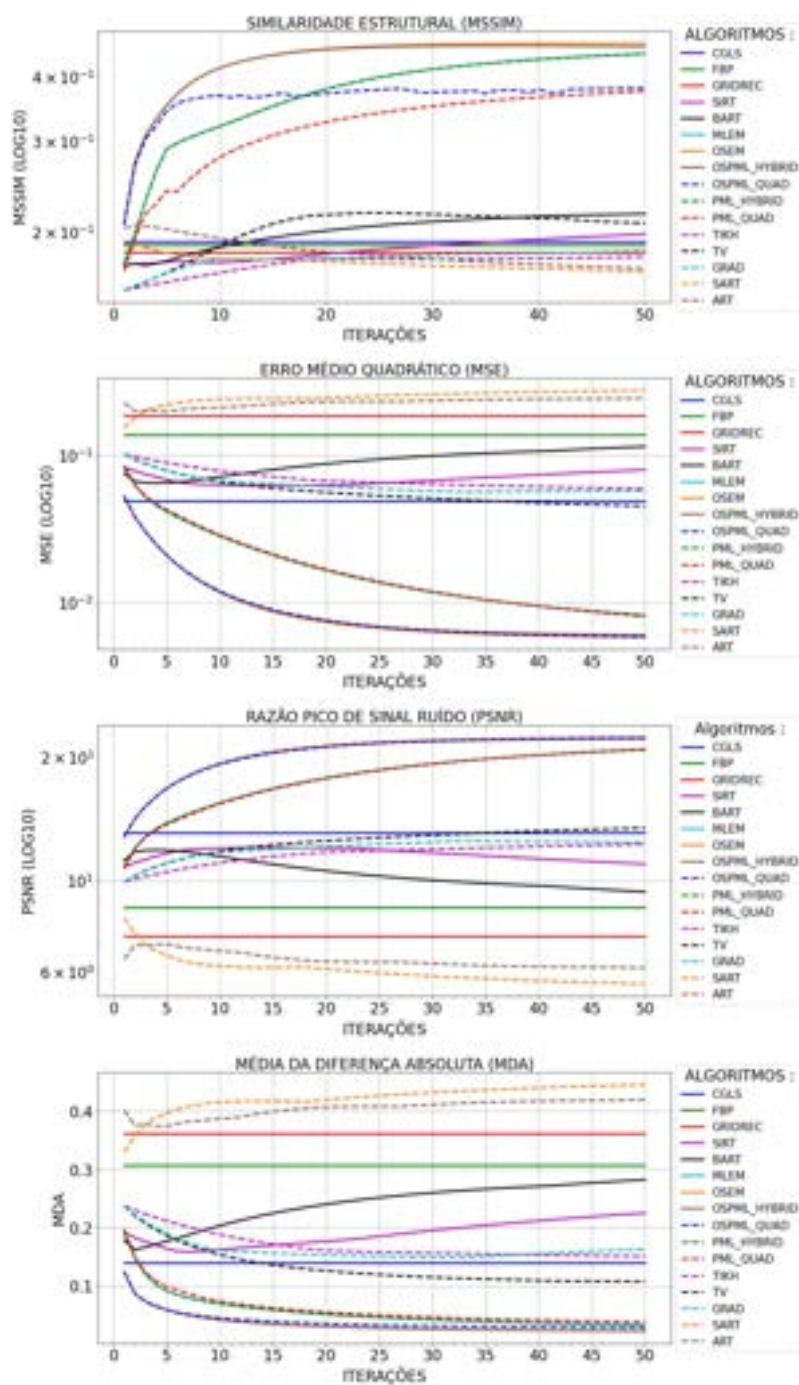


Figura 79 - Erro Nível 02 no Sinograma Horus

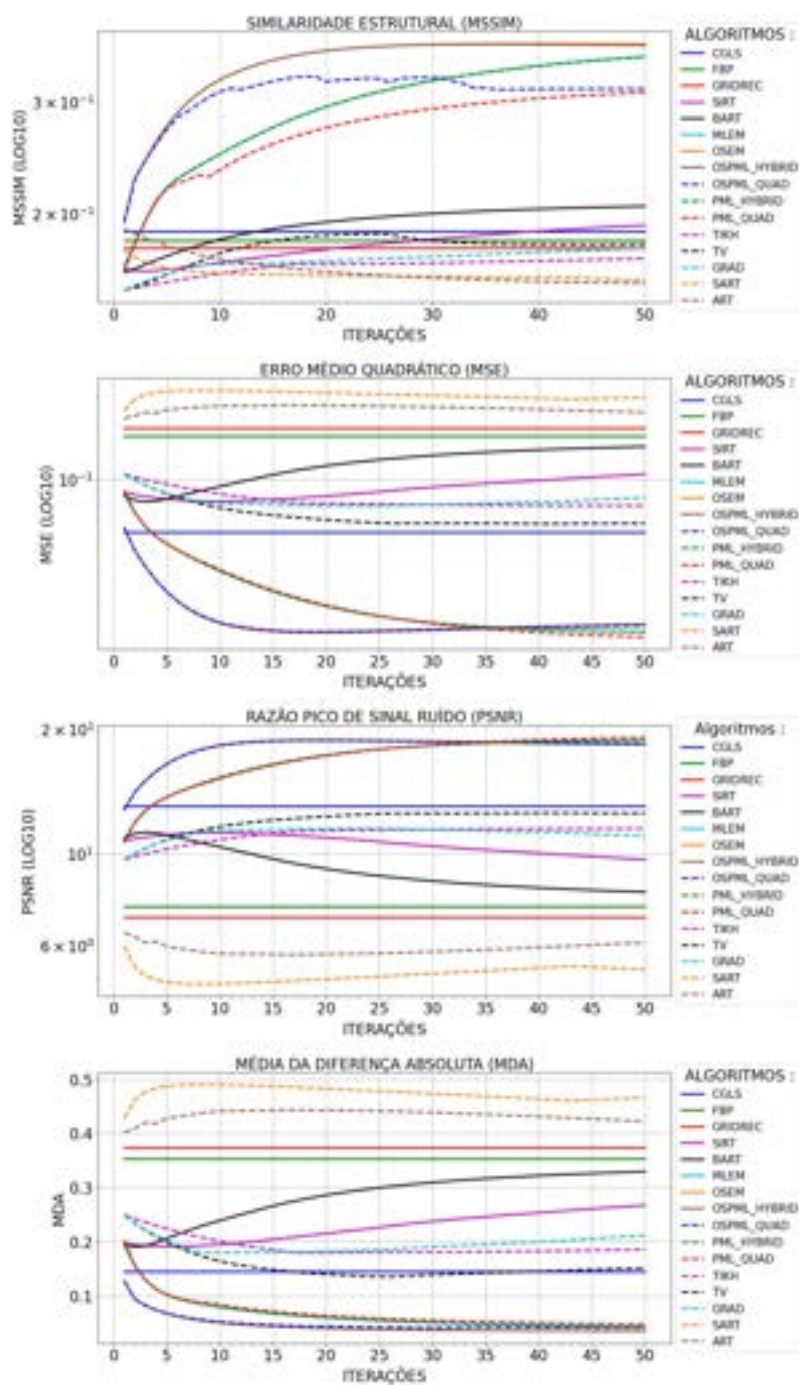


Figura 80 - Erro Nível 03 no Sinograma Horus

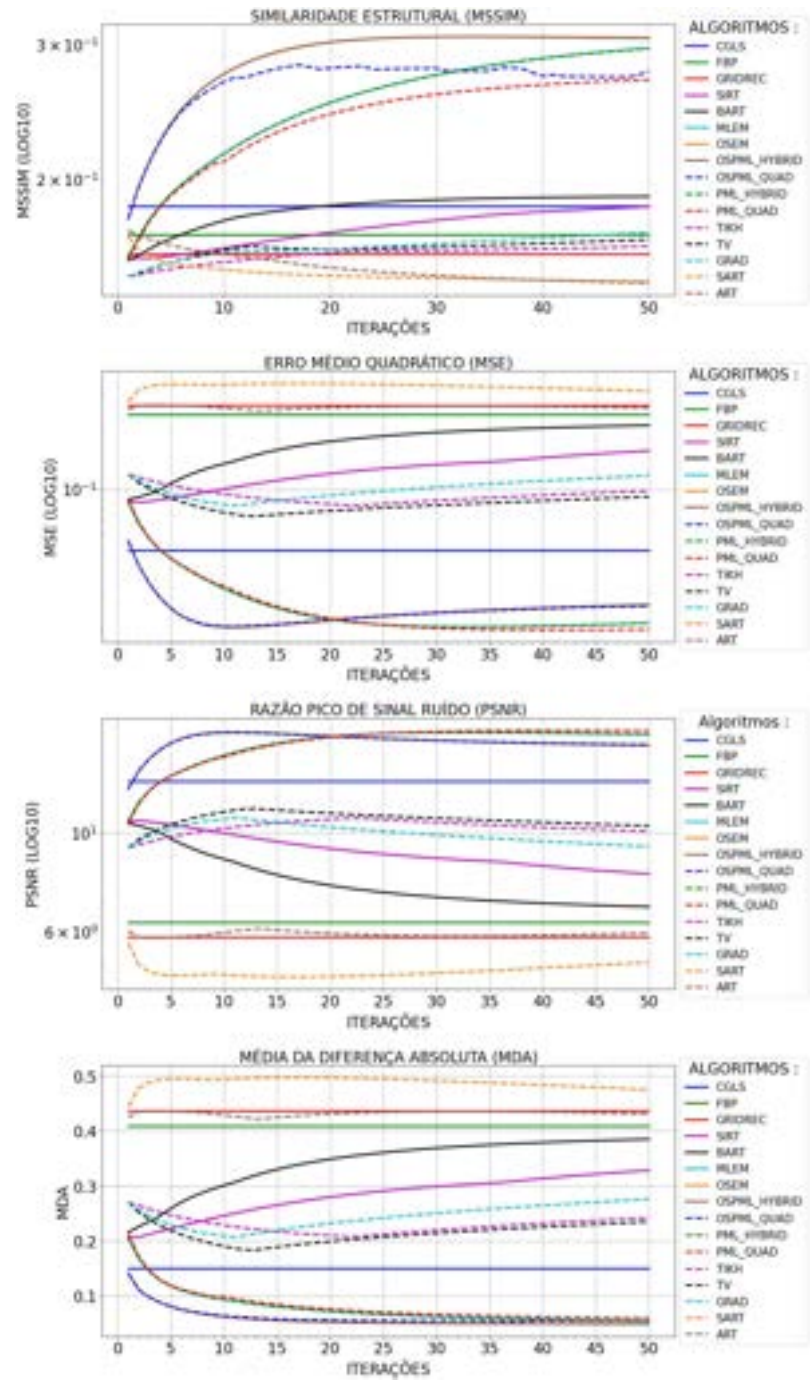


Figura 81 - Erro Nível 04 no Sinograma Horus

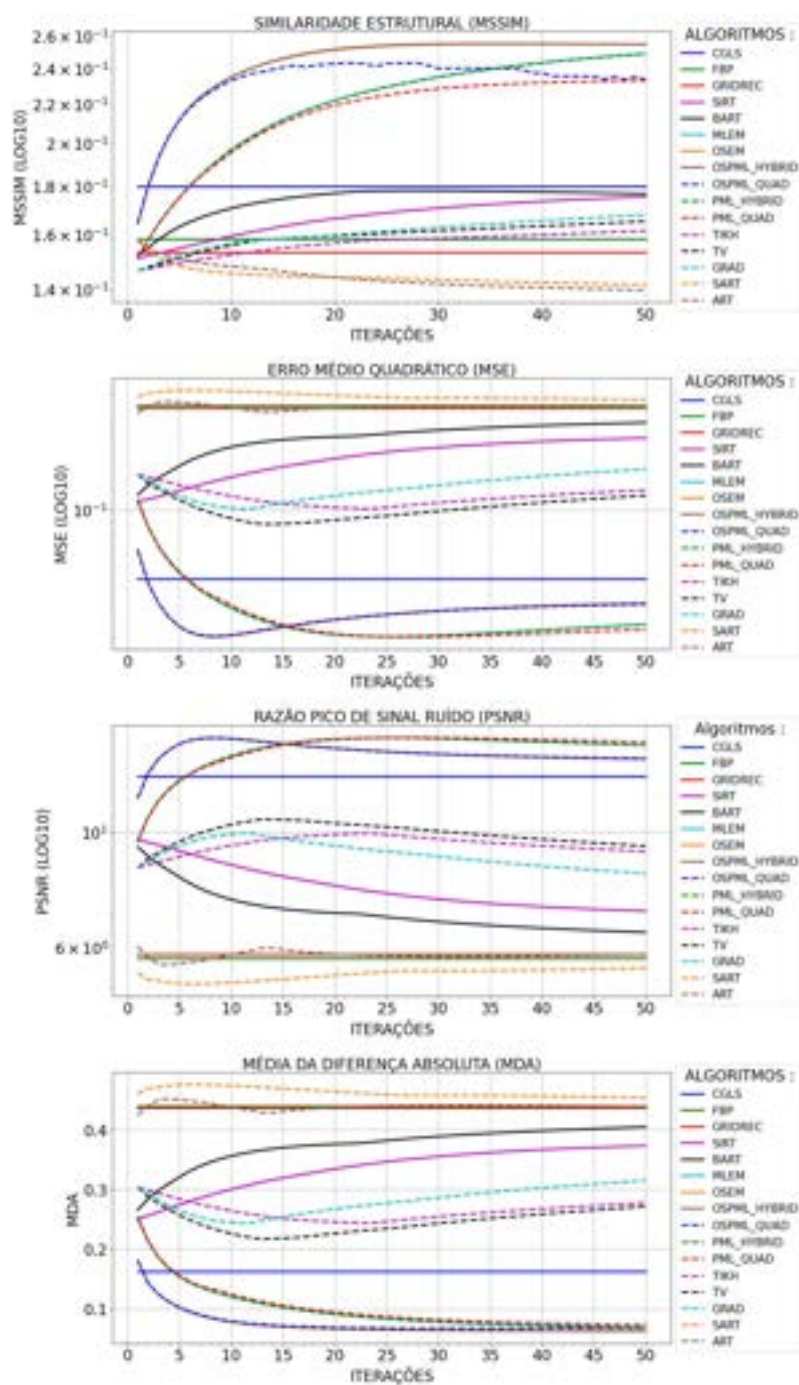


Figura 82 - Erro Nível 05 no Sinograma Horus

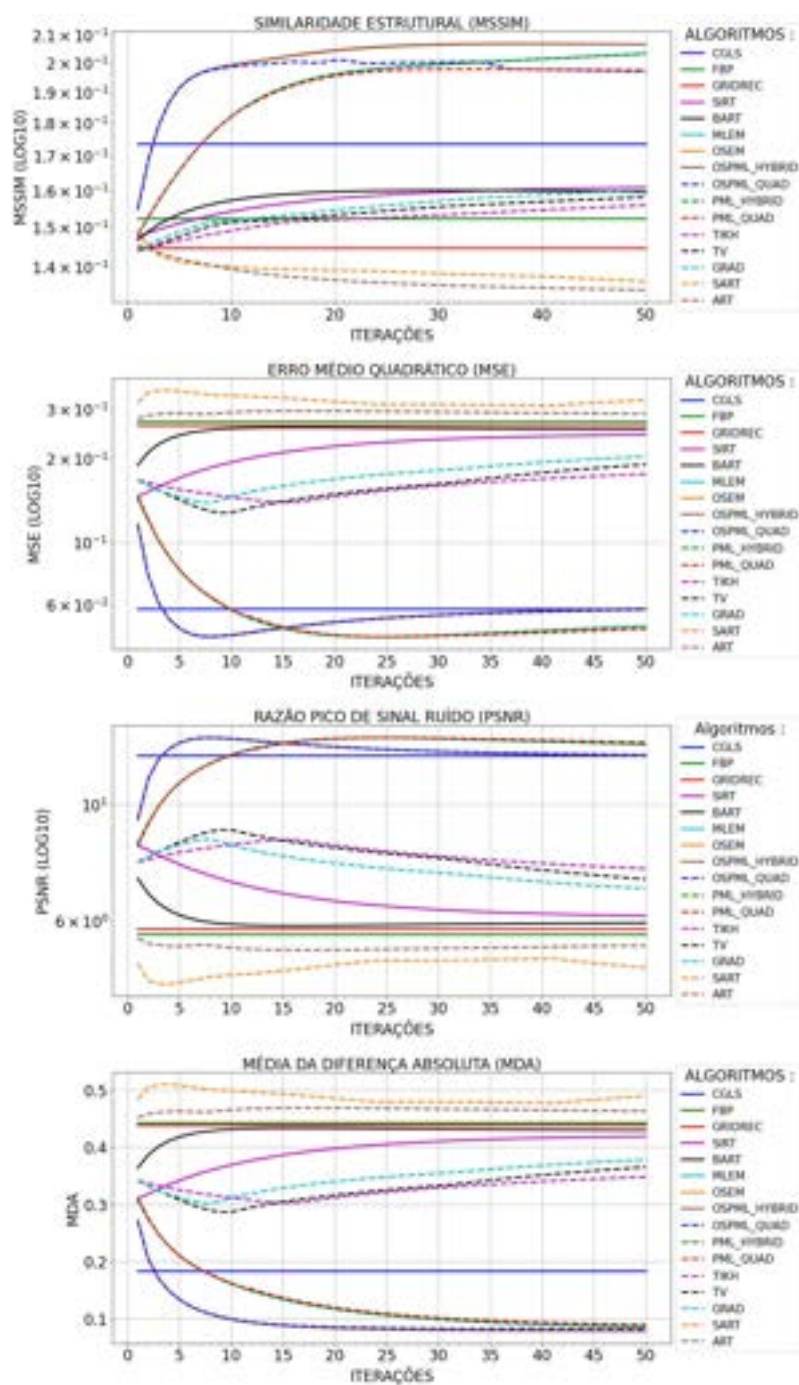


Figura 83 - Erro Nível 06 no Sinograma Horus

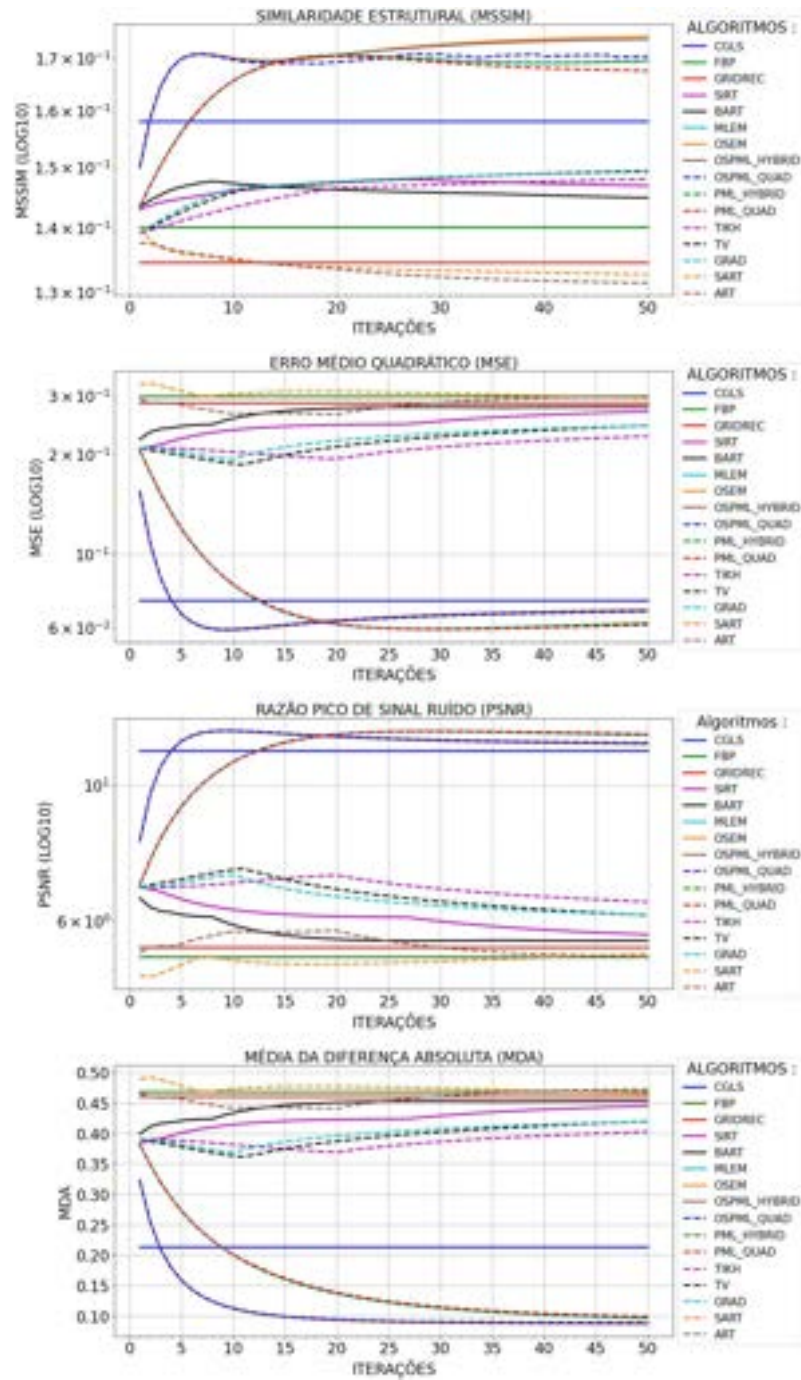


Figura 84 - Erro Nível 07 no Sinograma Horus

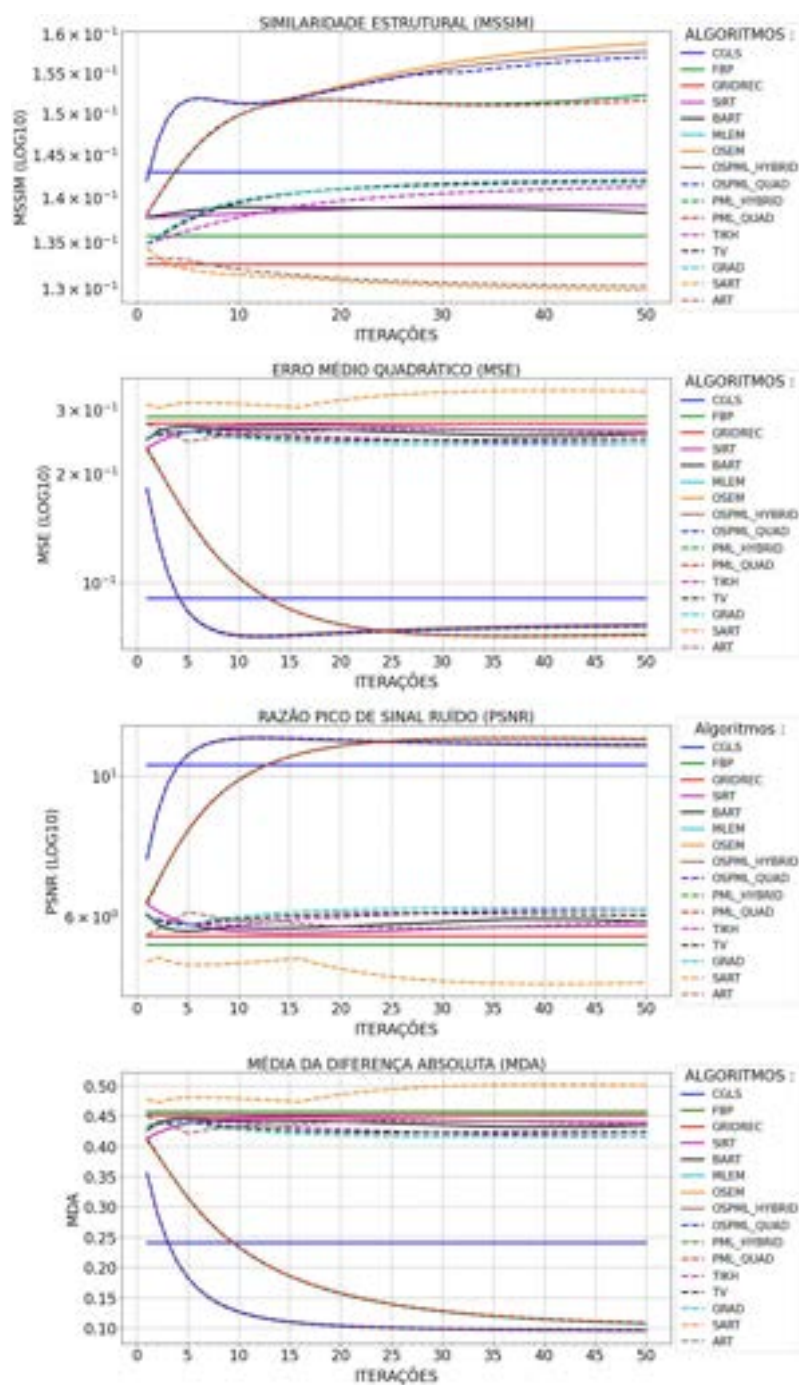


Figura 85 - Erro Nível 08 no Sinograma Horus

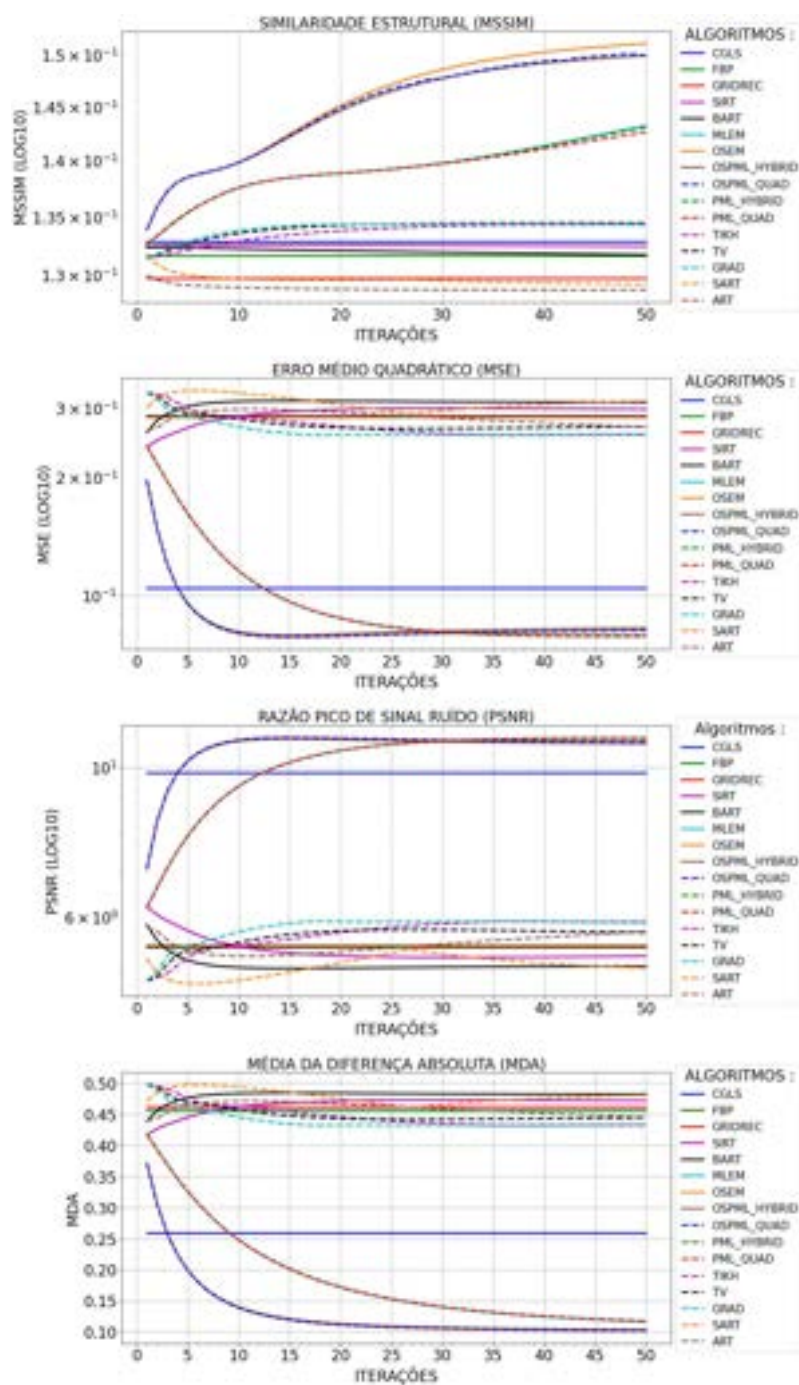


Figura 86 - Erro Nível 09 no Sinograma Horus

B CURVAS DE QUALIDADE POR ITERAÇÃO, AGRUPADAS POR ALGORITMO

Este apêndice traz curvas da qualidade da reconstrução em função da iteração para as diferentes intensidades de ruído. Cada gráfico apresentado neste apêndice está estruturado da seguinte forma: Índice de Qualidade, nas Ordenadas, pela Iteração nas Abcissas, e o Nível da intensidade do Ruído é indicado pela Cor da Curva. Os níveis de intensidade do ruído nas curvas estão agrupados por imagem base e algoritmo de reconstrução. De tal sorte que cada seção traz as curvas obtidas para uma imagem base e em cada seção há duas subseções; a primeira traz as qualidades das reconstruções quando a adição de ruído ocorre no objeto em si e a segunda no sinograma. Em cada subseção, as curvas são apresentadas na mesma sequência de algoritmos.

B.1 Objeto-Alvo Engrenagem

B.1.1 Adição de Erro no Objeto Engrenagem

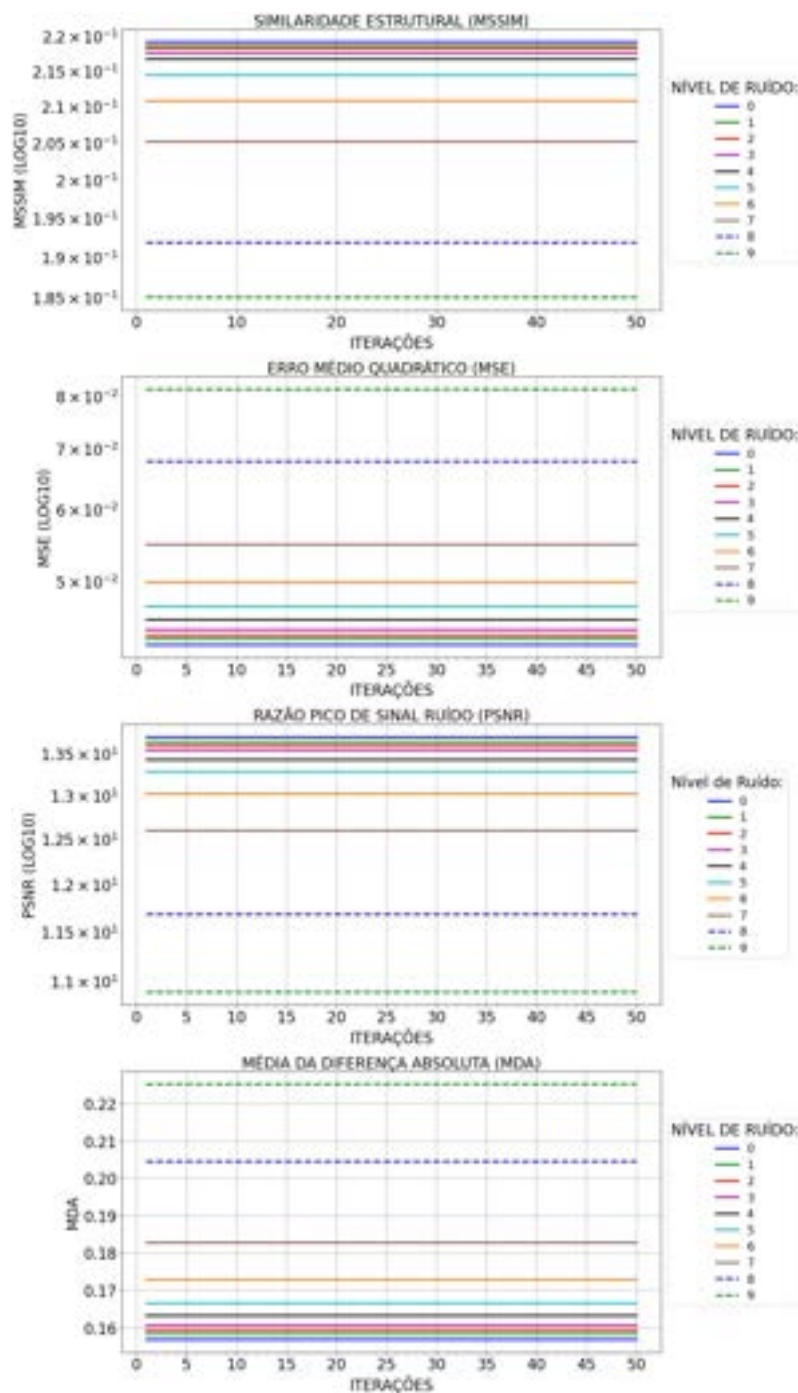


Figura 87 - CGLS com erro no Objeto Engrenagem

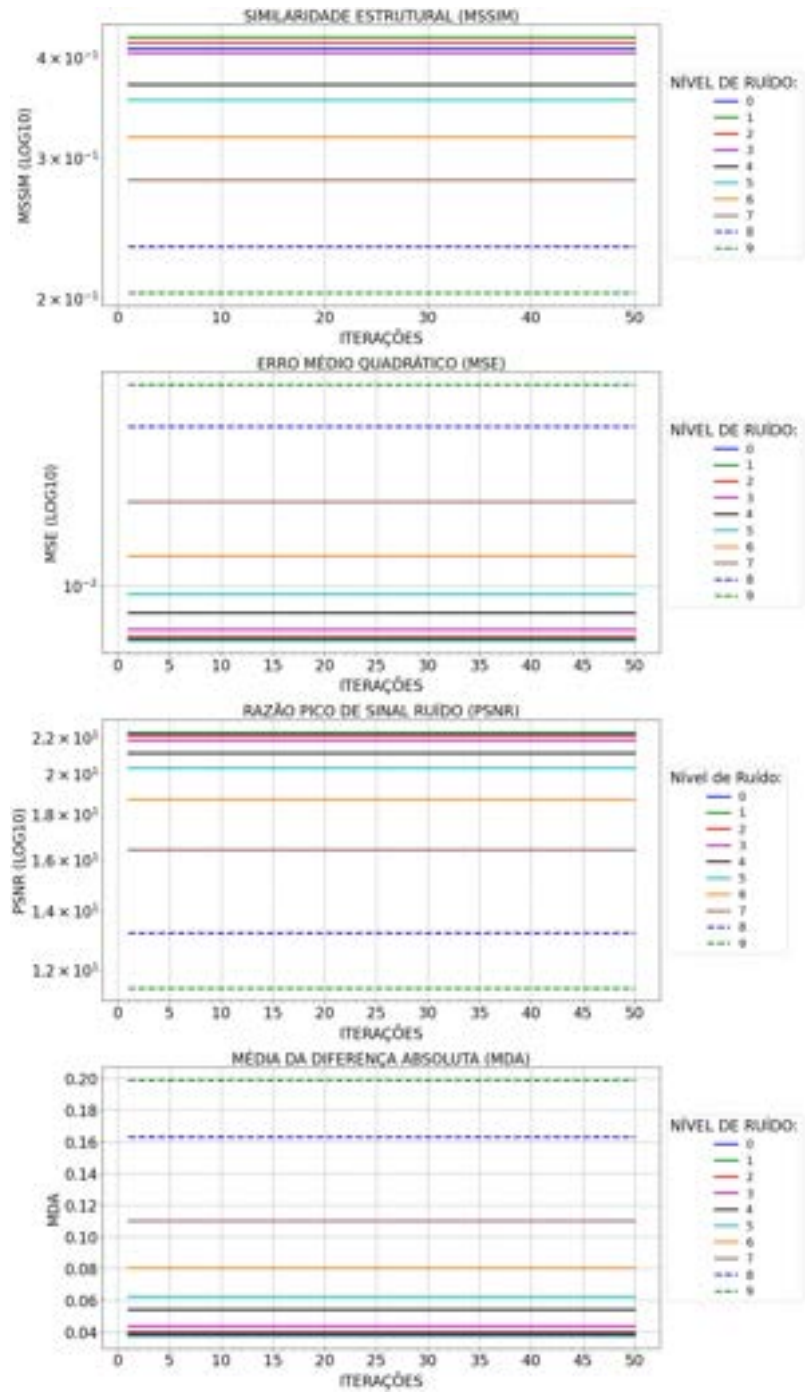


Figura 88 - FBP com erro no Objeto Engrenagem

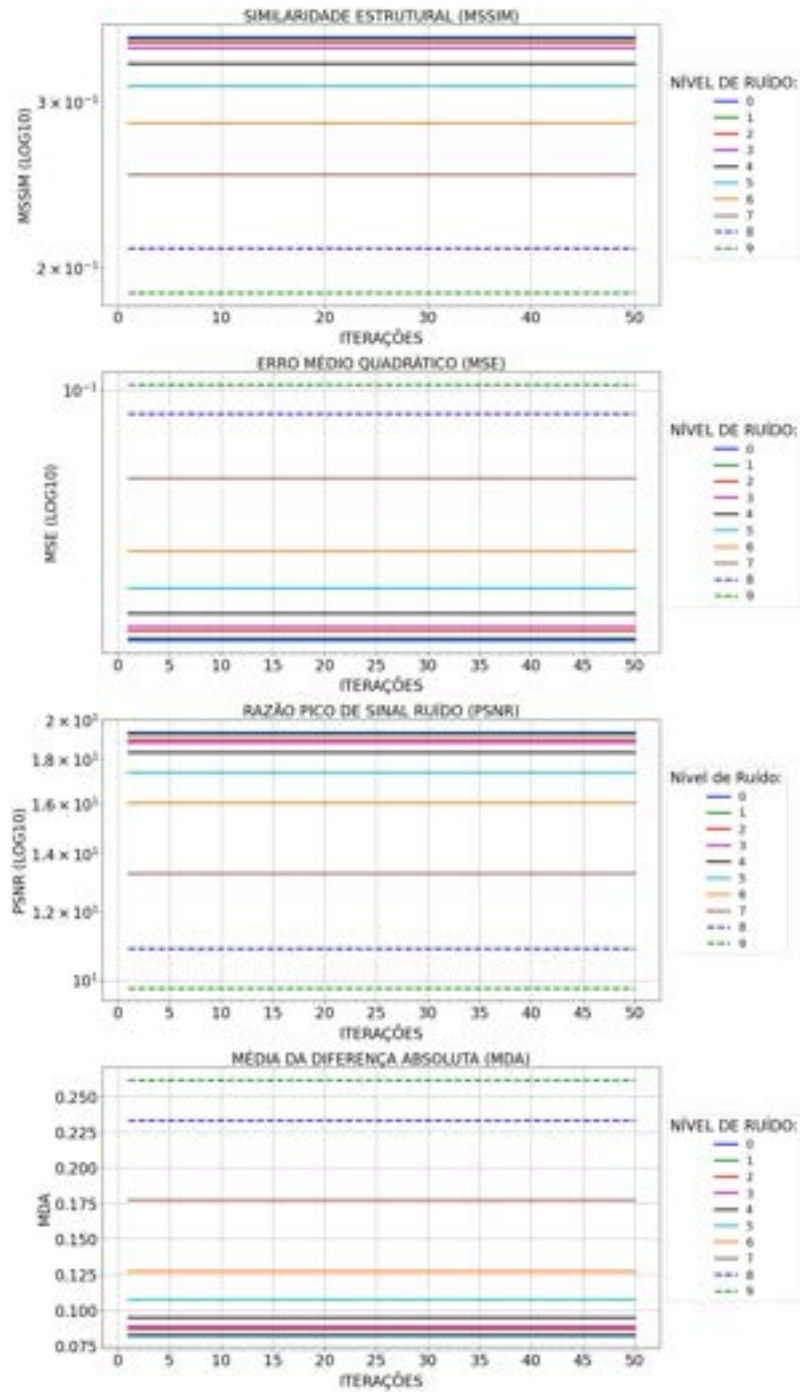


Figura 89 - GRIDREC com erro no Objeto Engrenagem

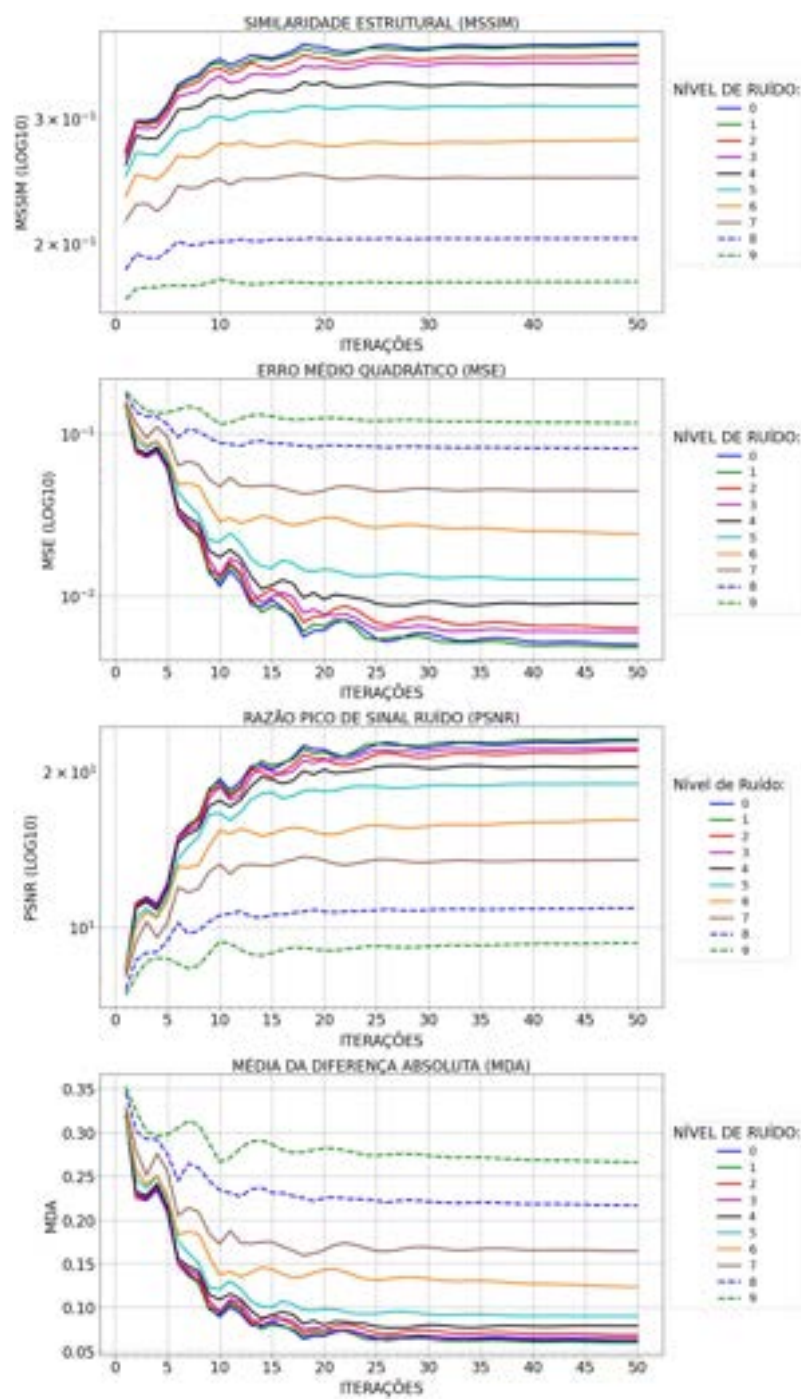


Figura 90 - ART com erro no Objeto Engrenagem

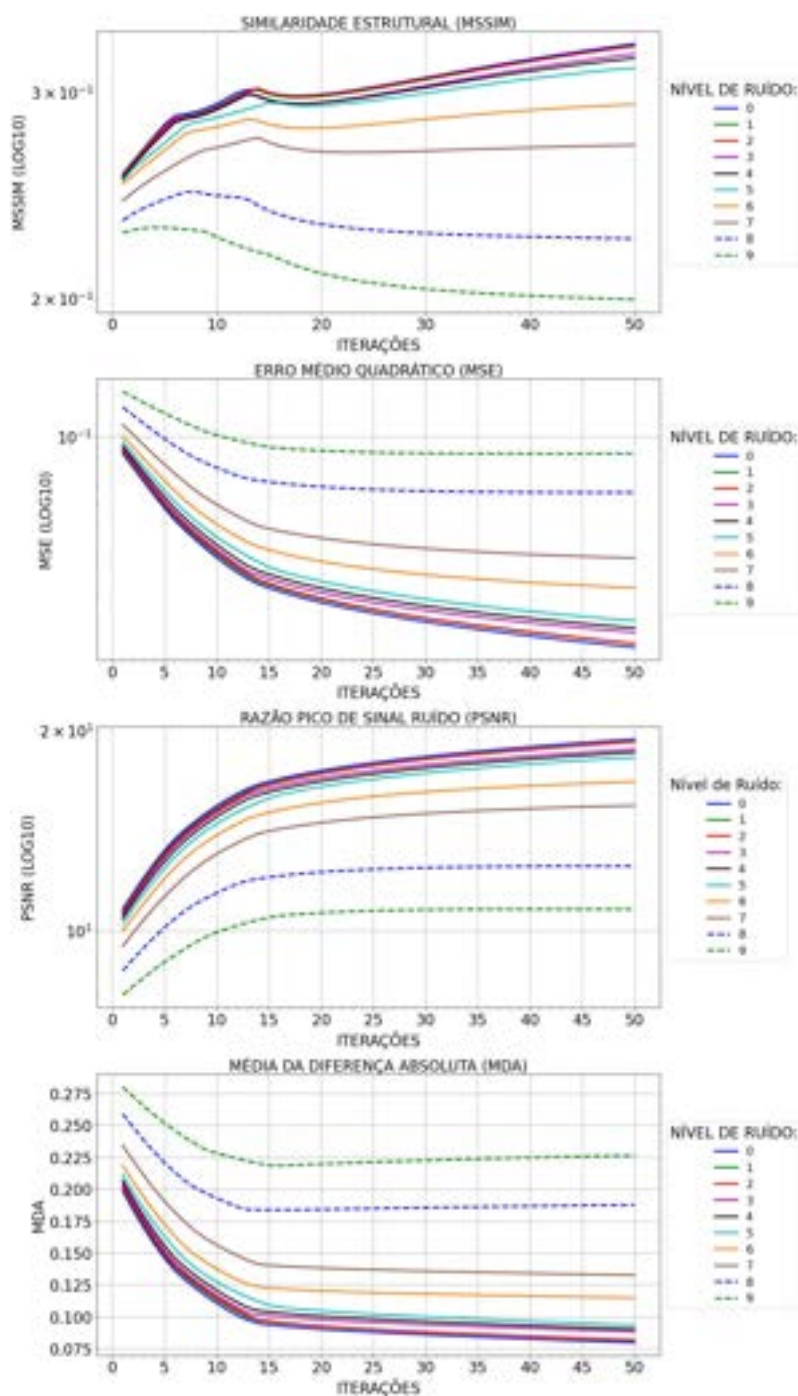


Figura 91 - SIRT com erro no Objeto Engrenagem

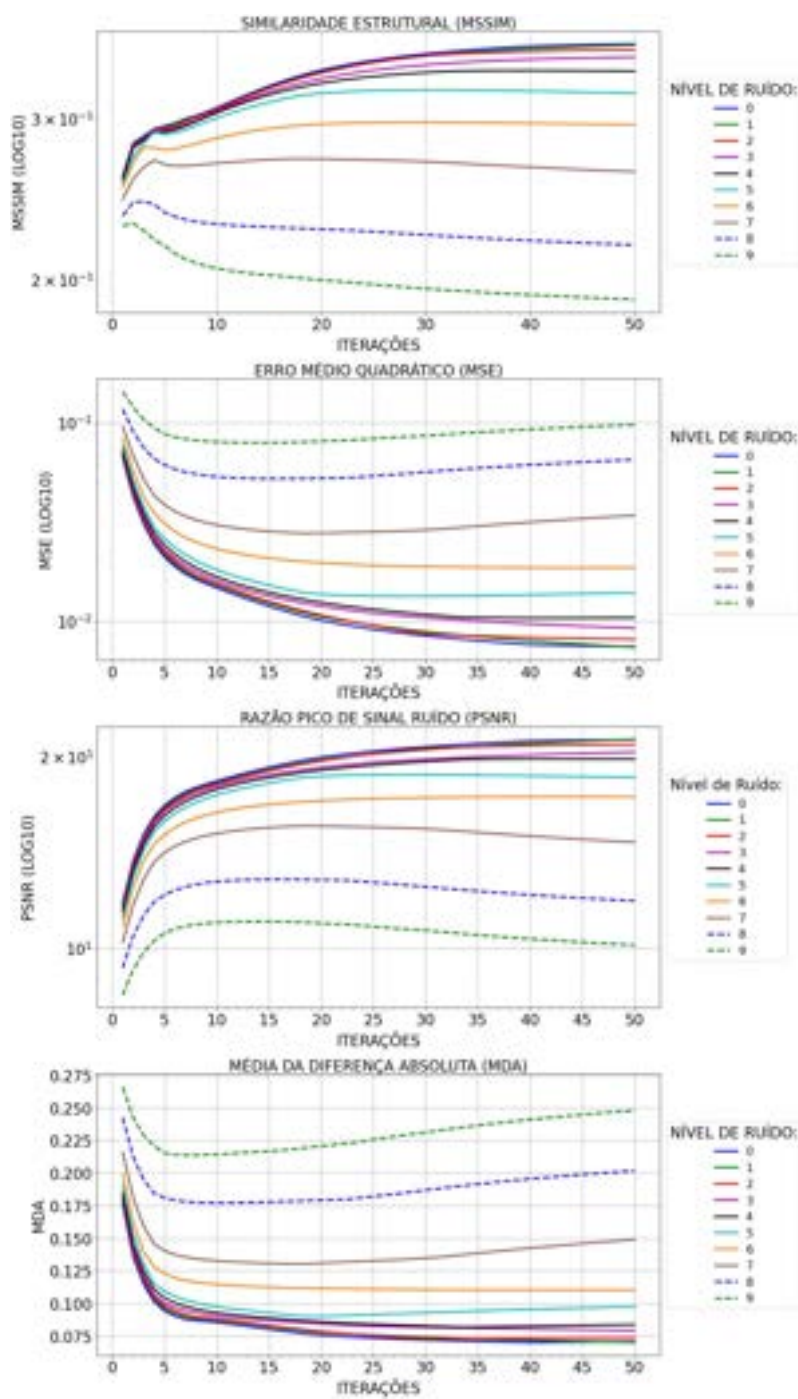


Figura 92 - BART com erro no Objeto Engrenagem

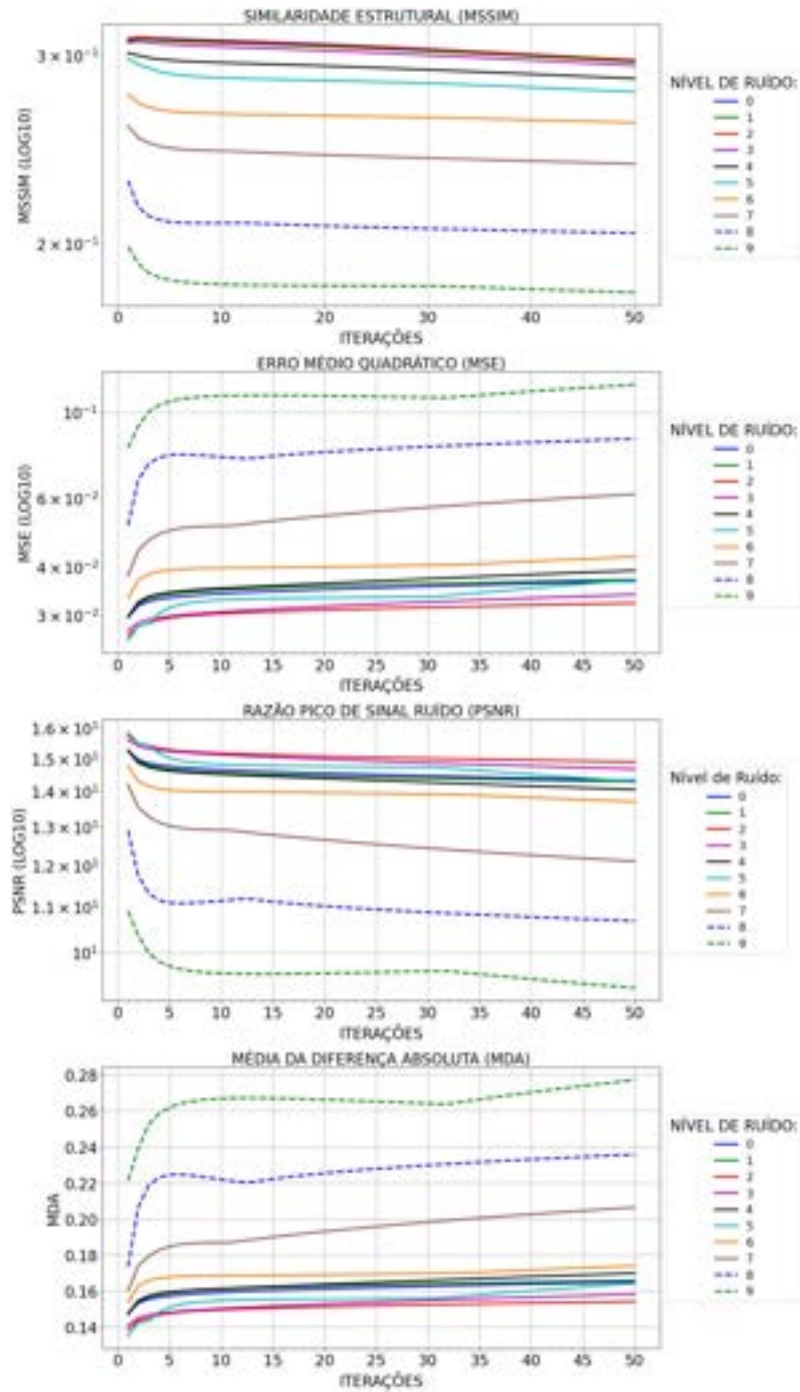


Figura 93 - SART com erro no Objeto Engrenagem

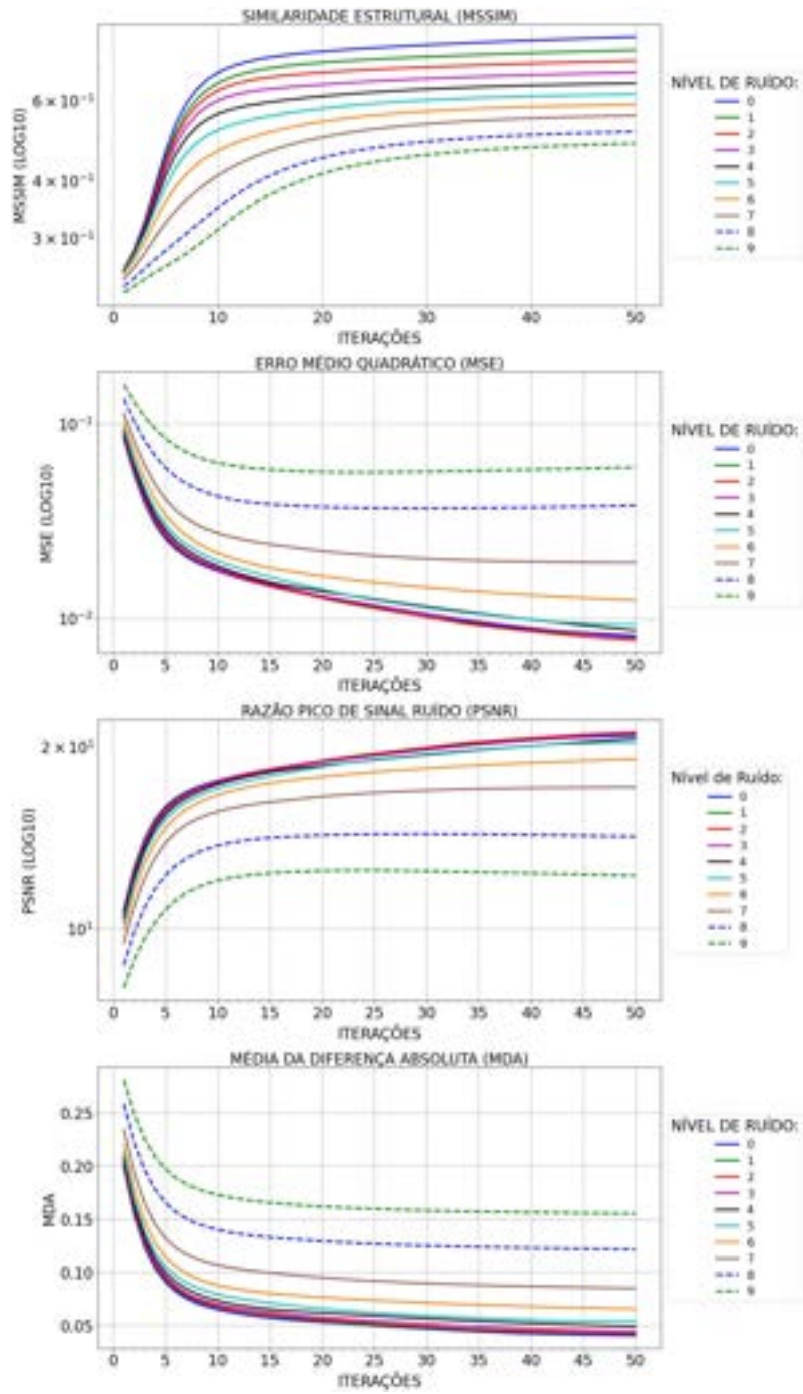


Figura 94 - MLEM com erro no Objeto Engrenagem

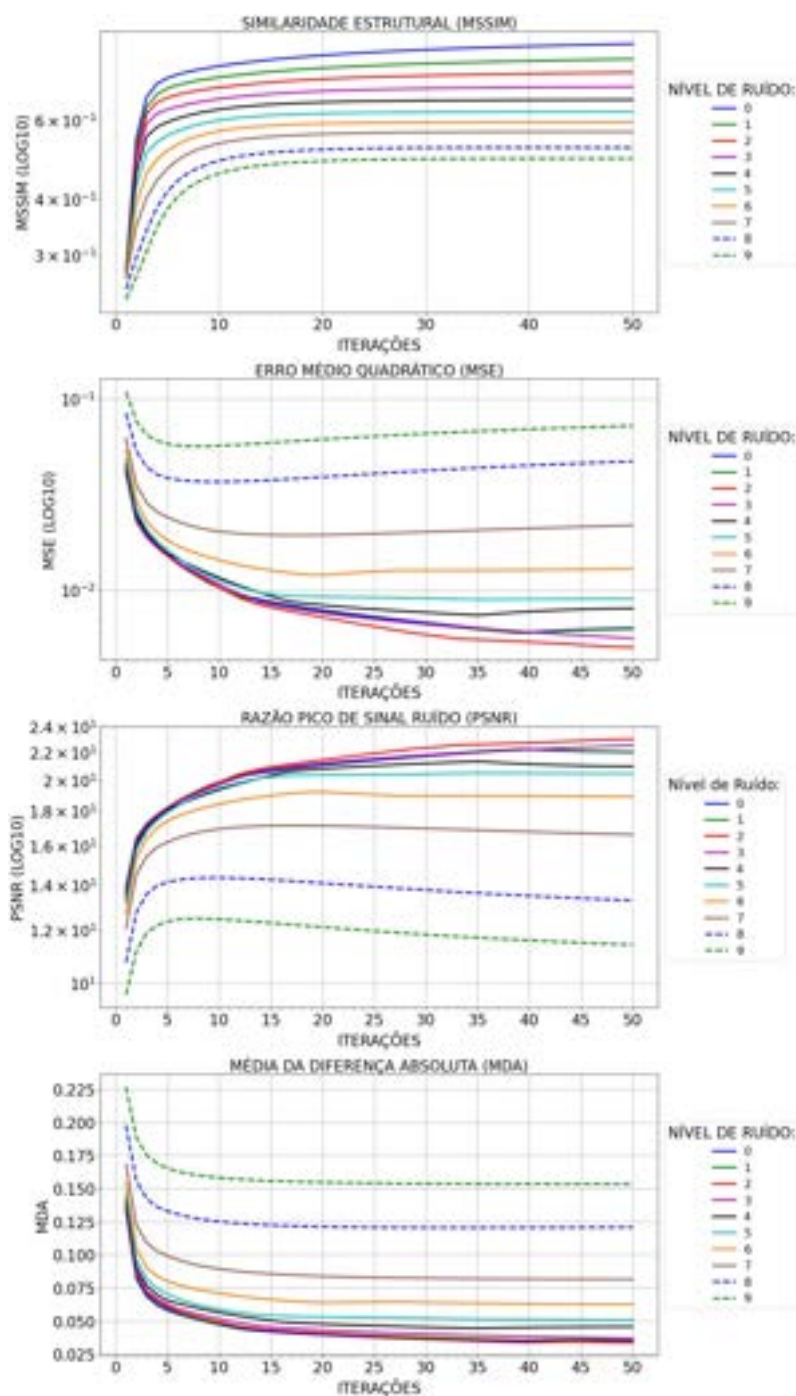


Figura 95 - OSEM com erro no Objeto Engrenagem

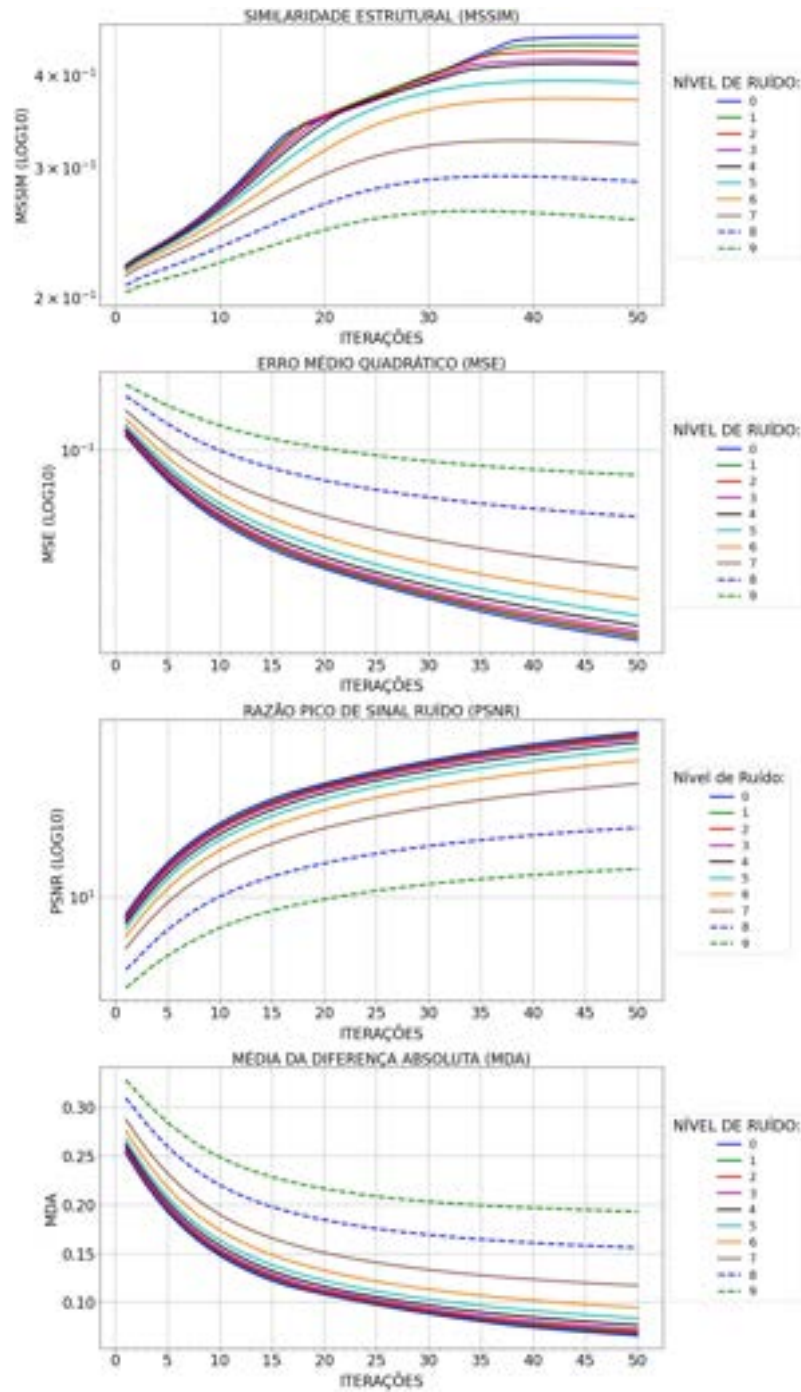


Figura 96 - TV com erro no Objeto Engrenagem

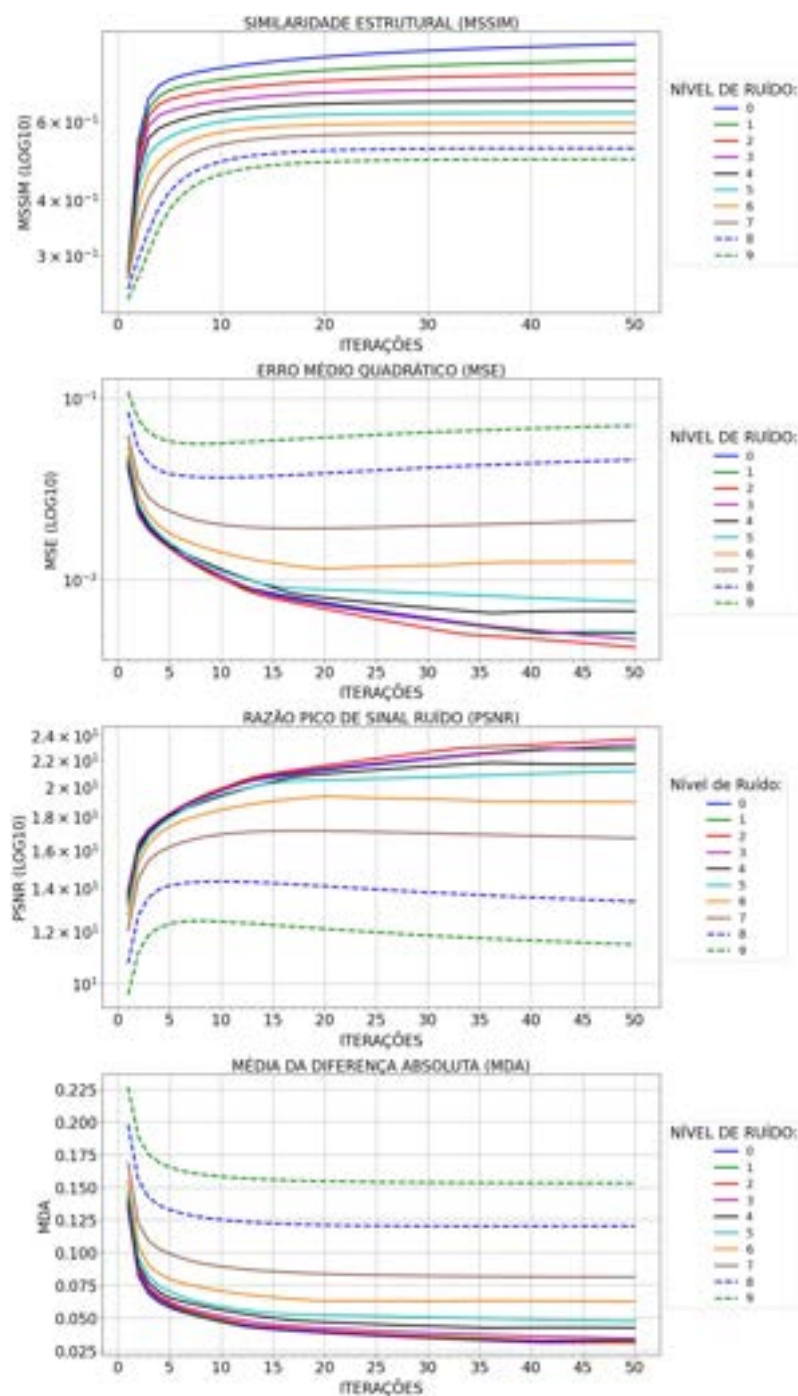


Figura 97 - OSPML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem

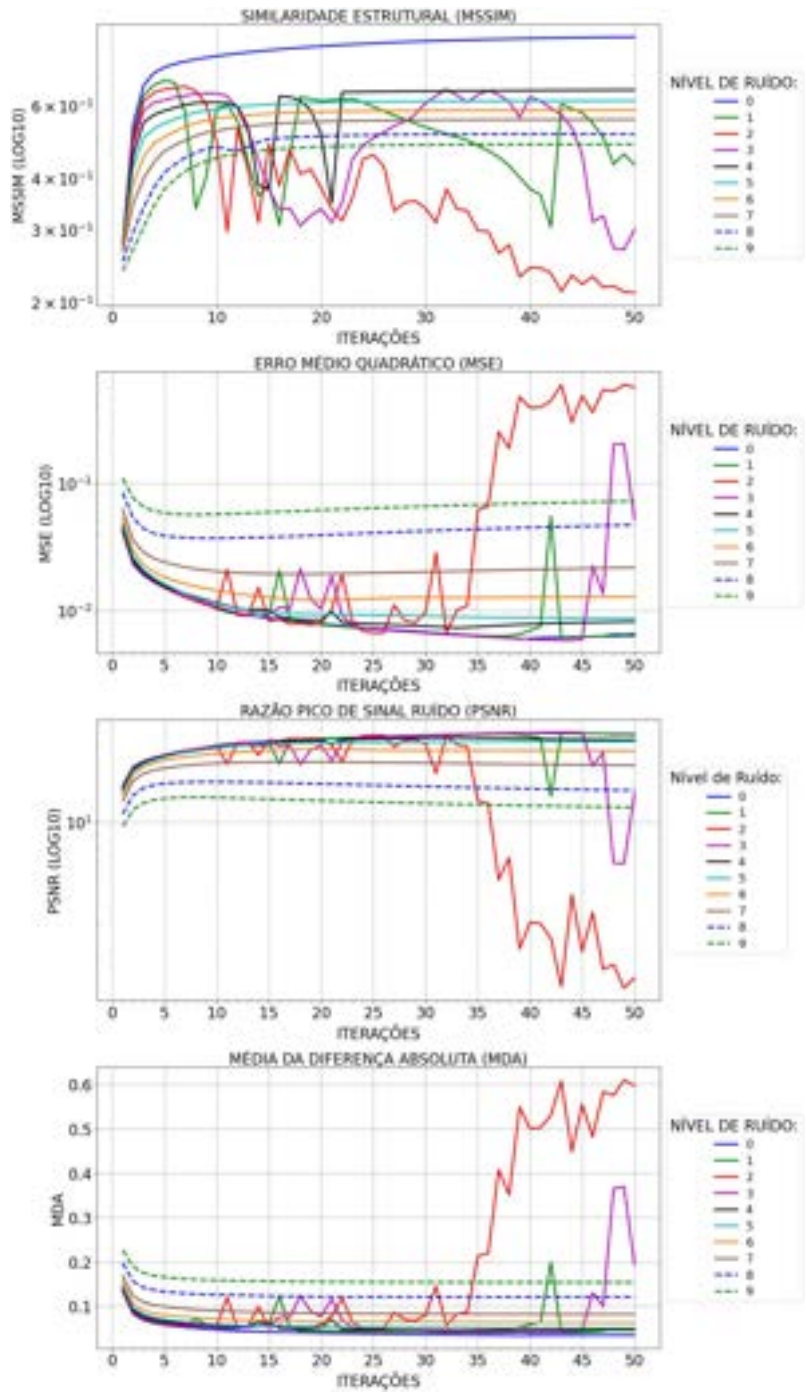


Figura 98 - OSPML-Quad com erro no Objeto Engrenagem

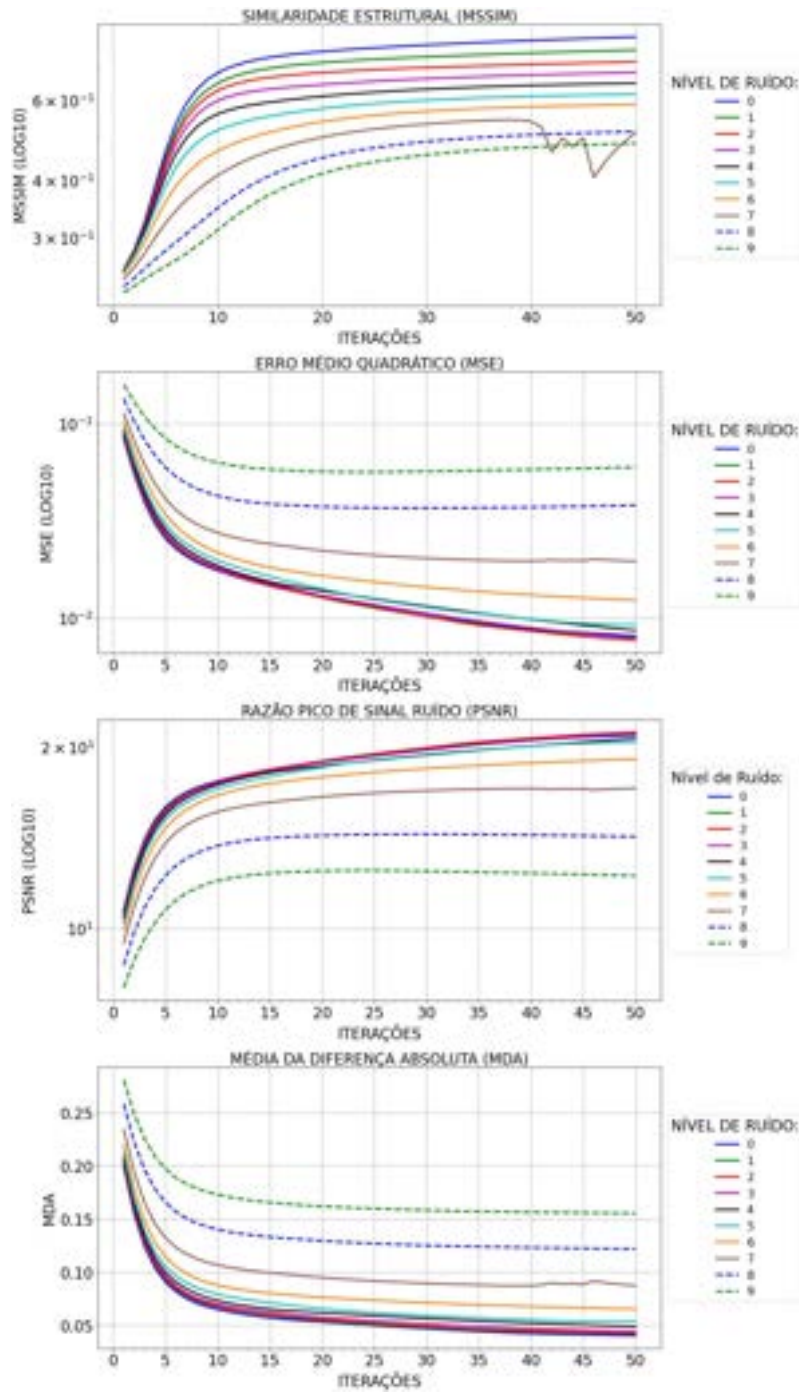


Figura 99 - PML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem

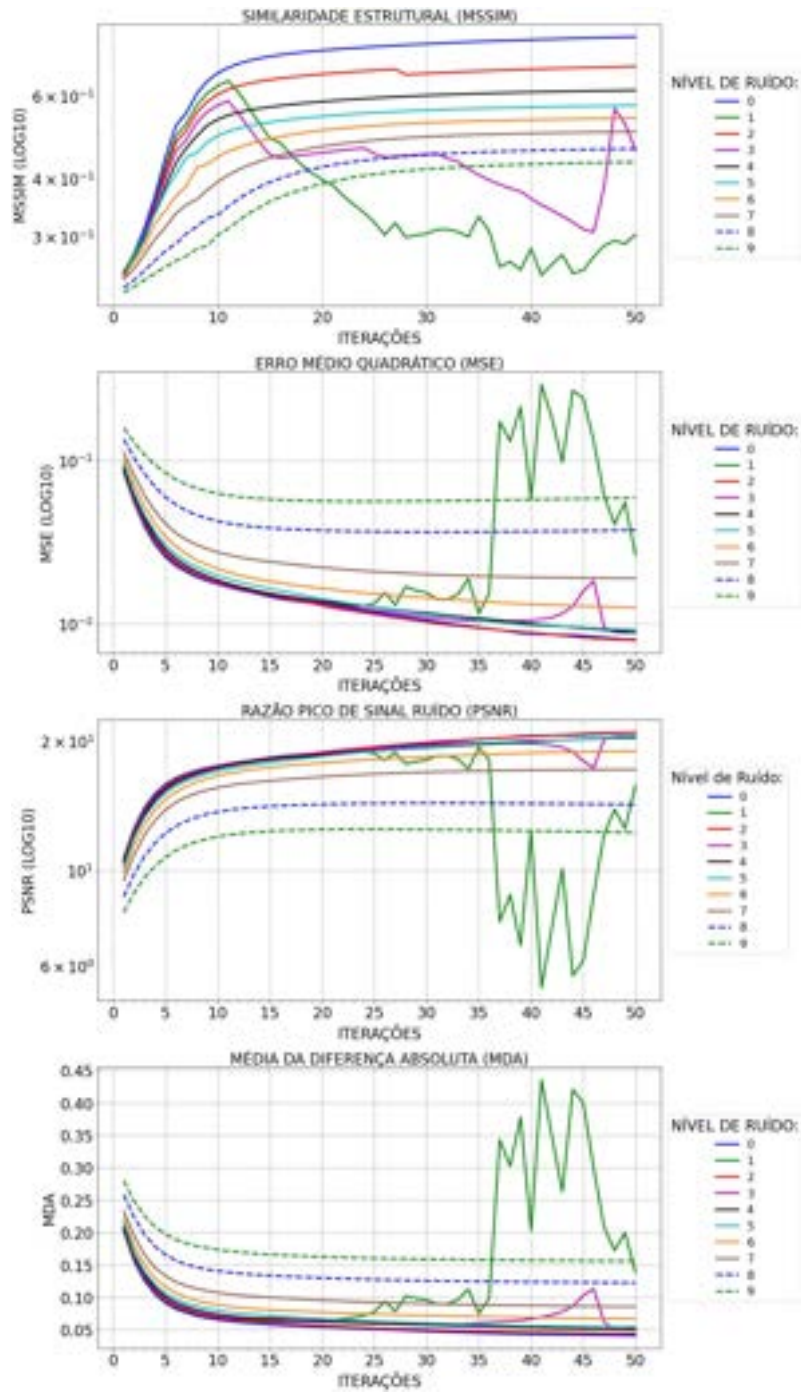


Figura 100 - PML-Quad com erro no Objeto Engrenagem

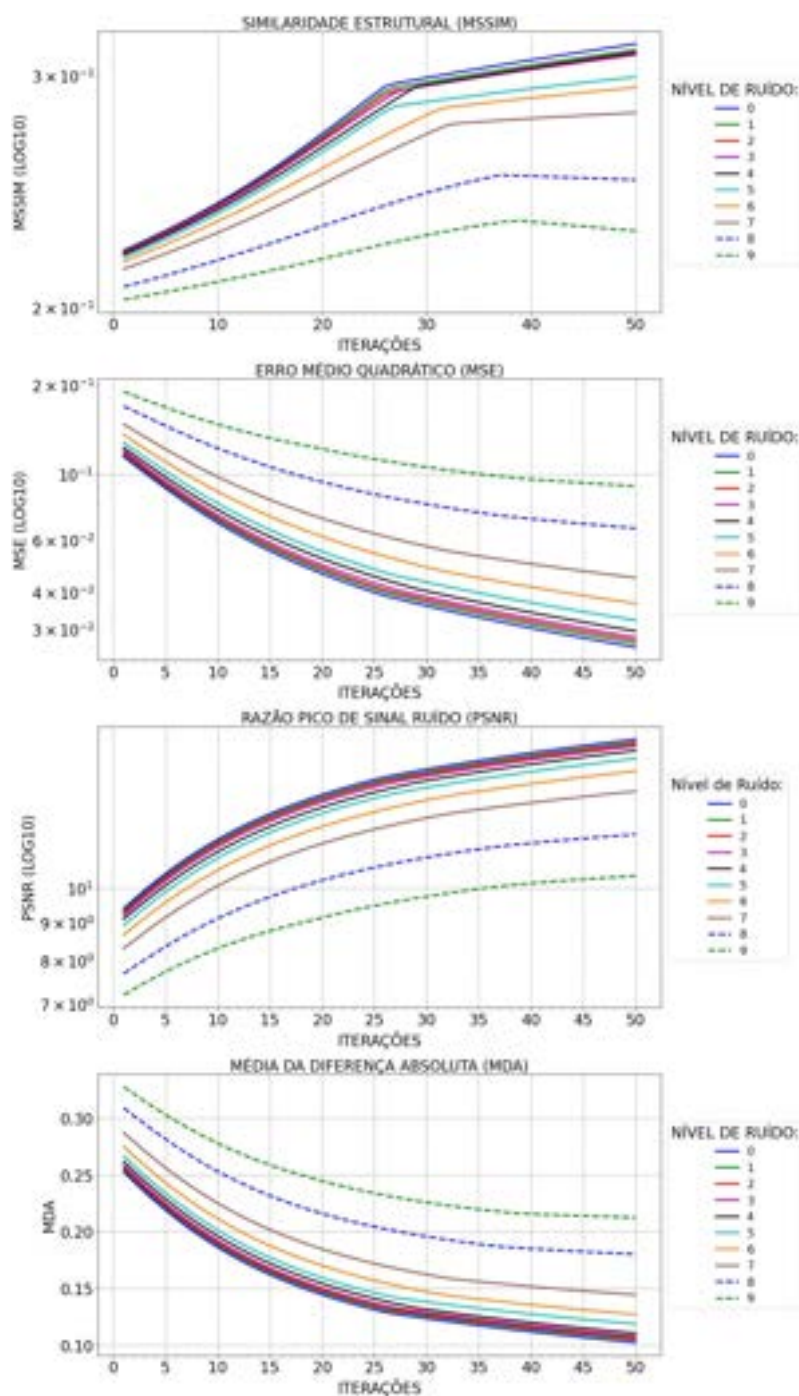


Figura 101 - TIKH com erro no Objeto Engrenagem

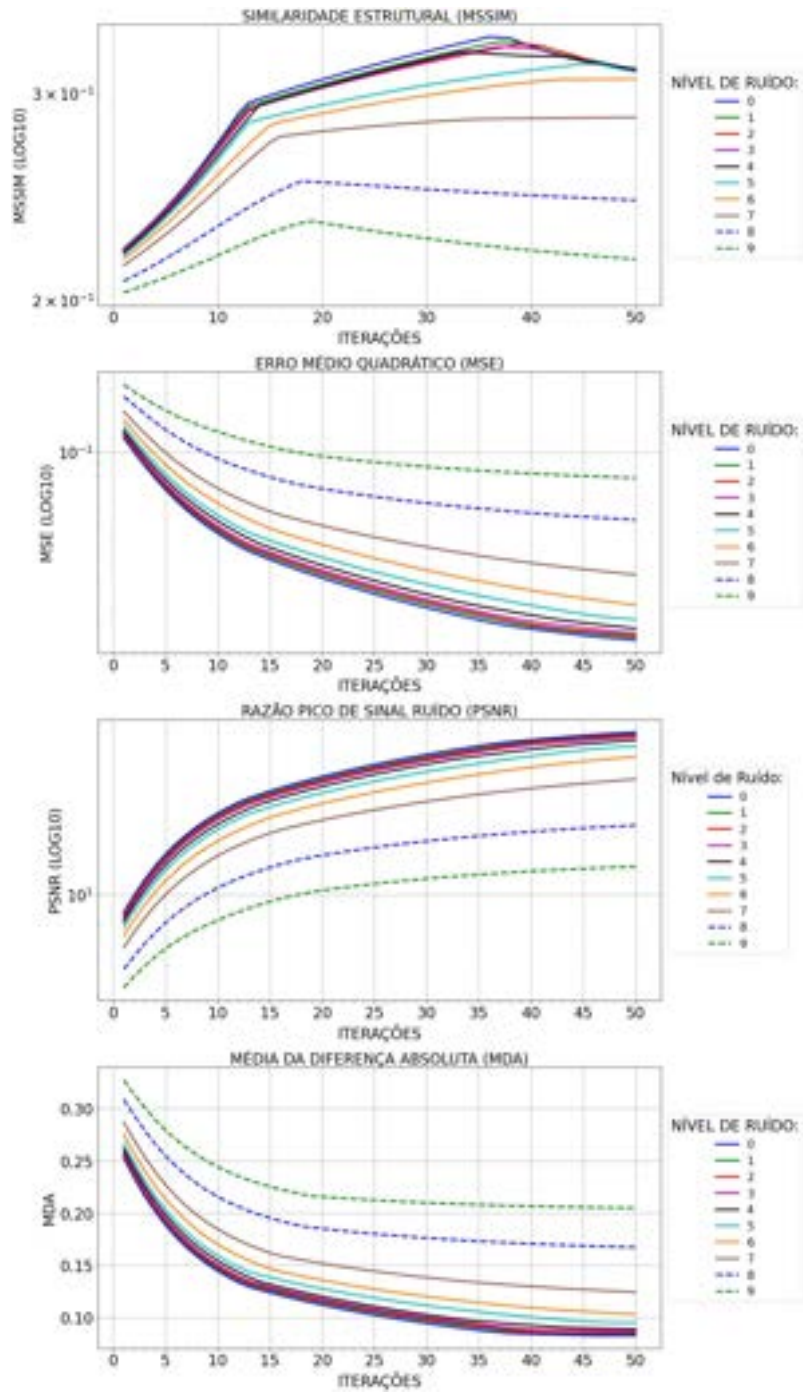


Figura 102 - GRAD com erro no Objeto Engrenagem

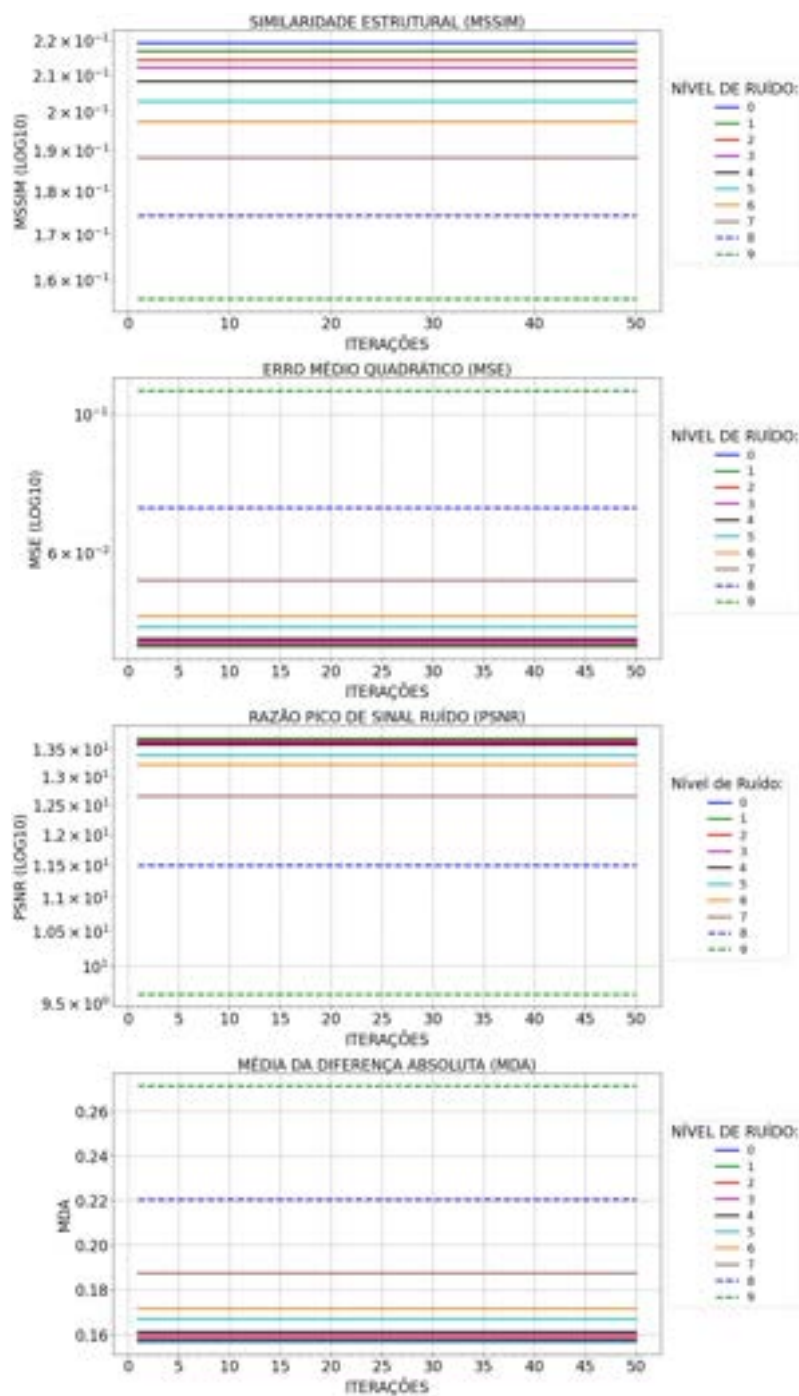
B.1.2 Adição de Erro no Sinograma Engrenagem

Figura 103 - CGLS com erro no Sinograma Engrenagem

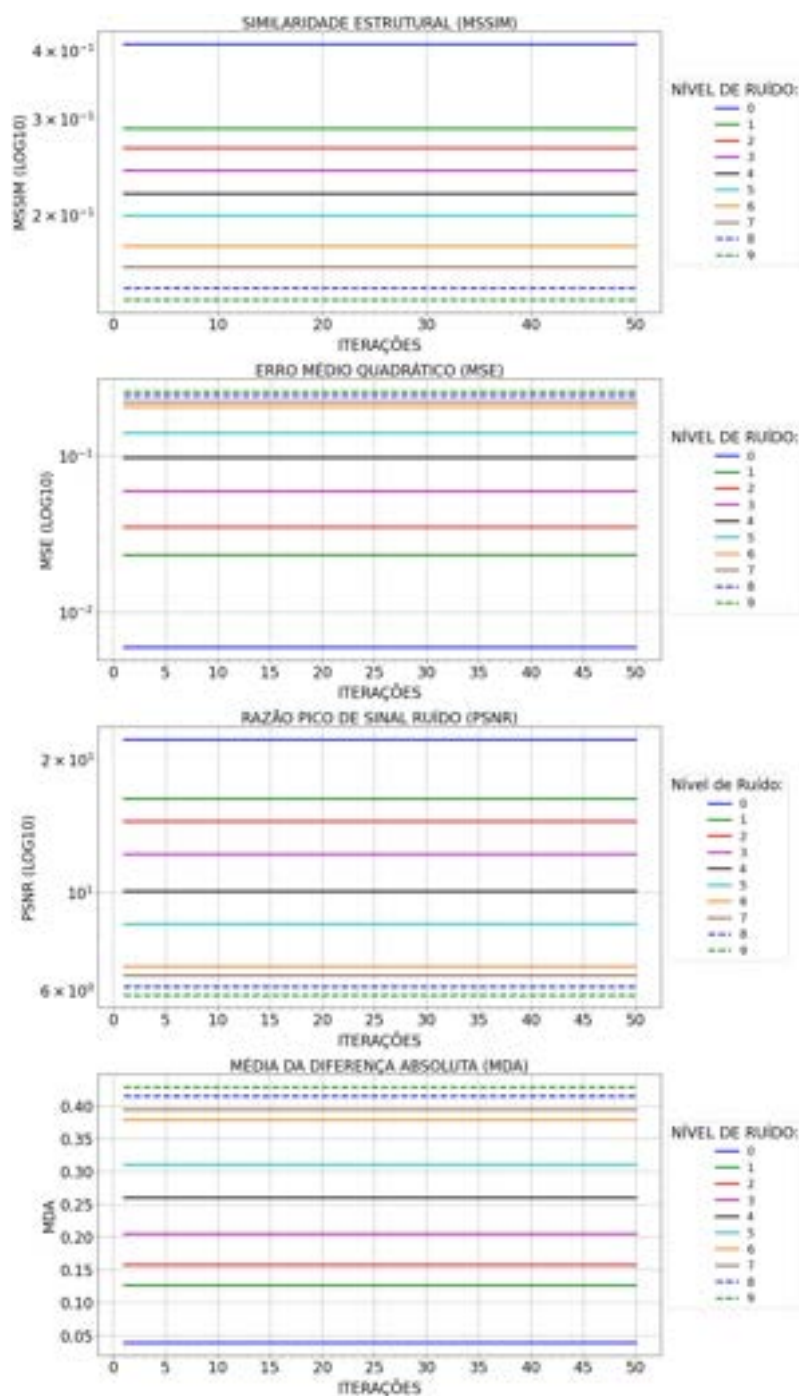


Figura 104 - FBP com erro no Sinograma Engrenagem

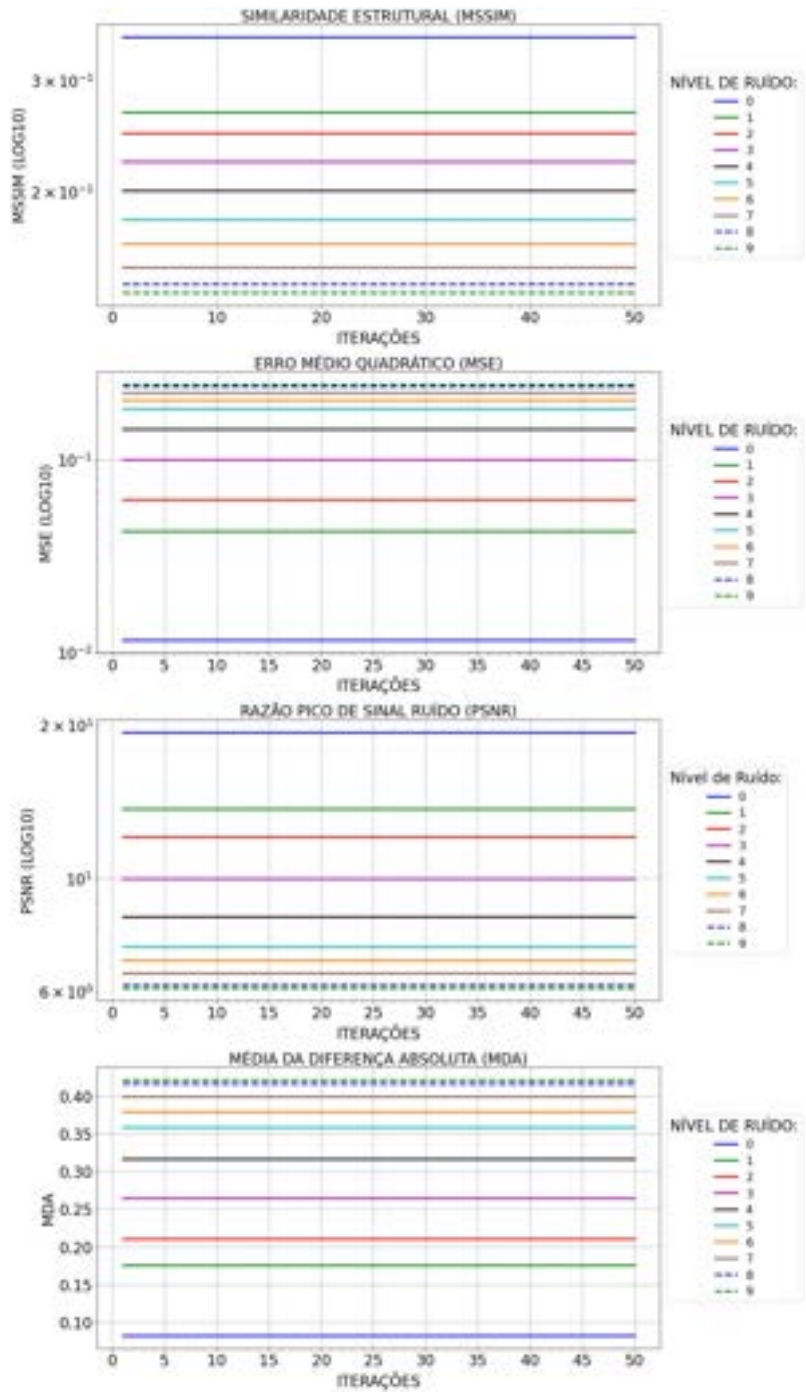


Figura 105 - GRIDREC com erro no Sinograma Engrenagem

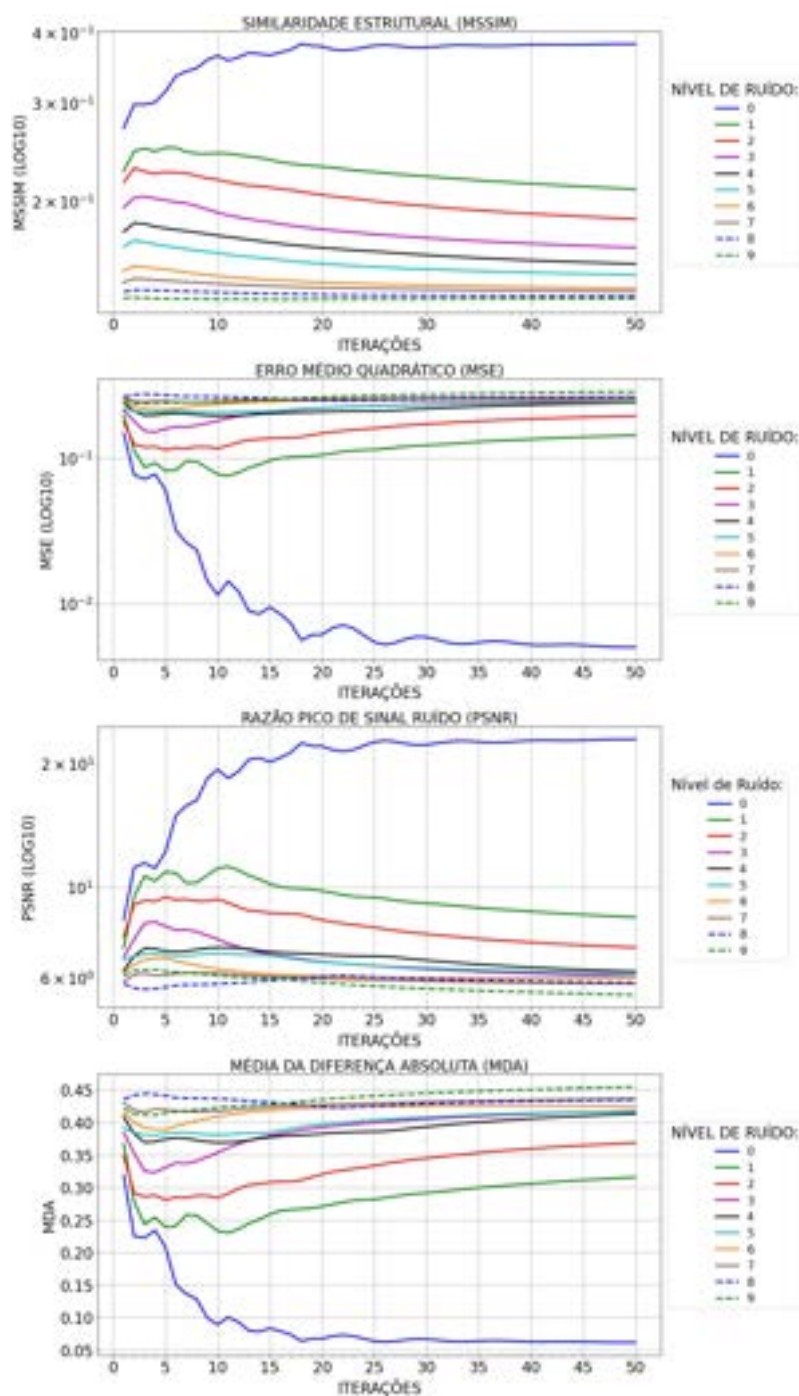


Figura 106 - ART com erro no Sinograma Engrenagem

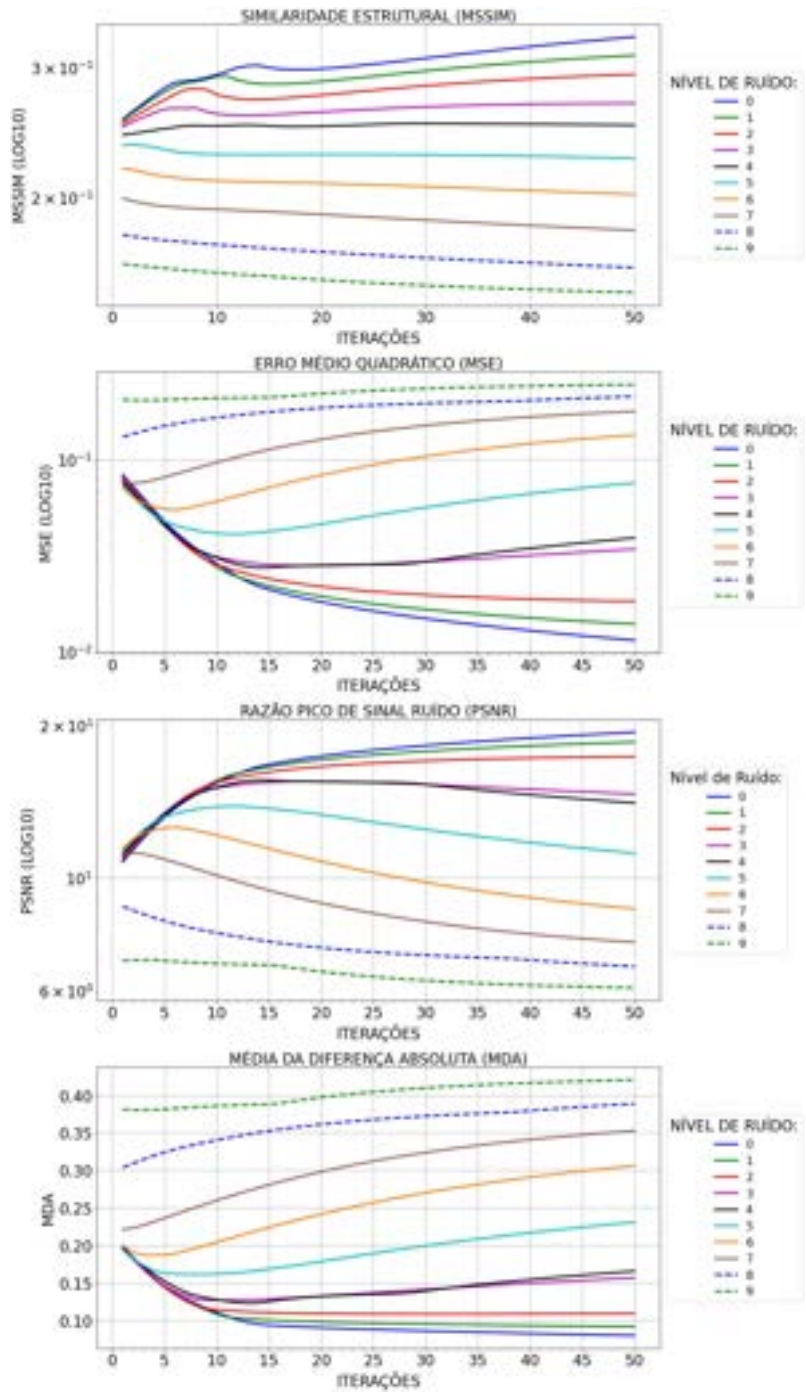


Figura 107 - SIRT com erro no Sinograma Engrenagem

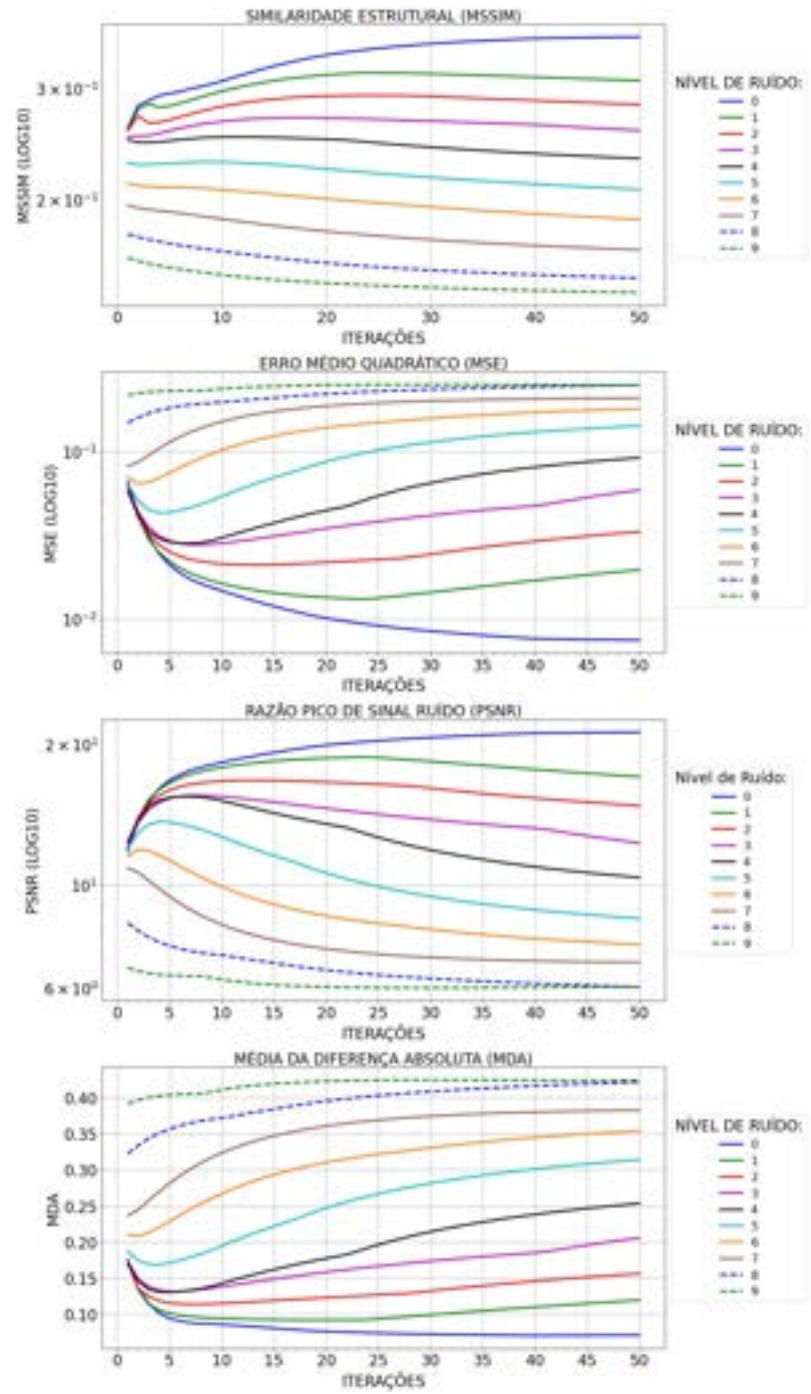


Figura 108 - BART com erro no Sinograma Engrenagem

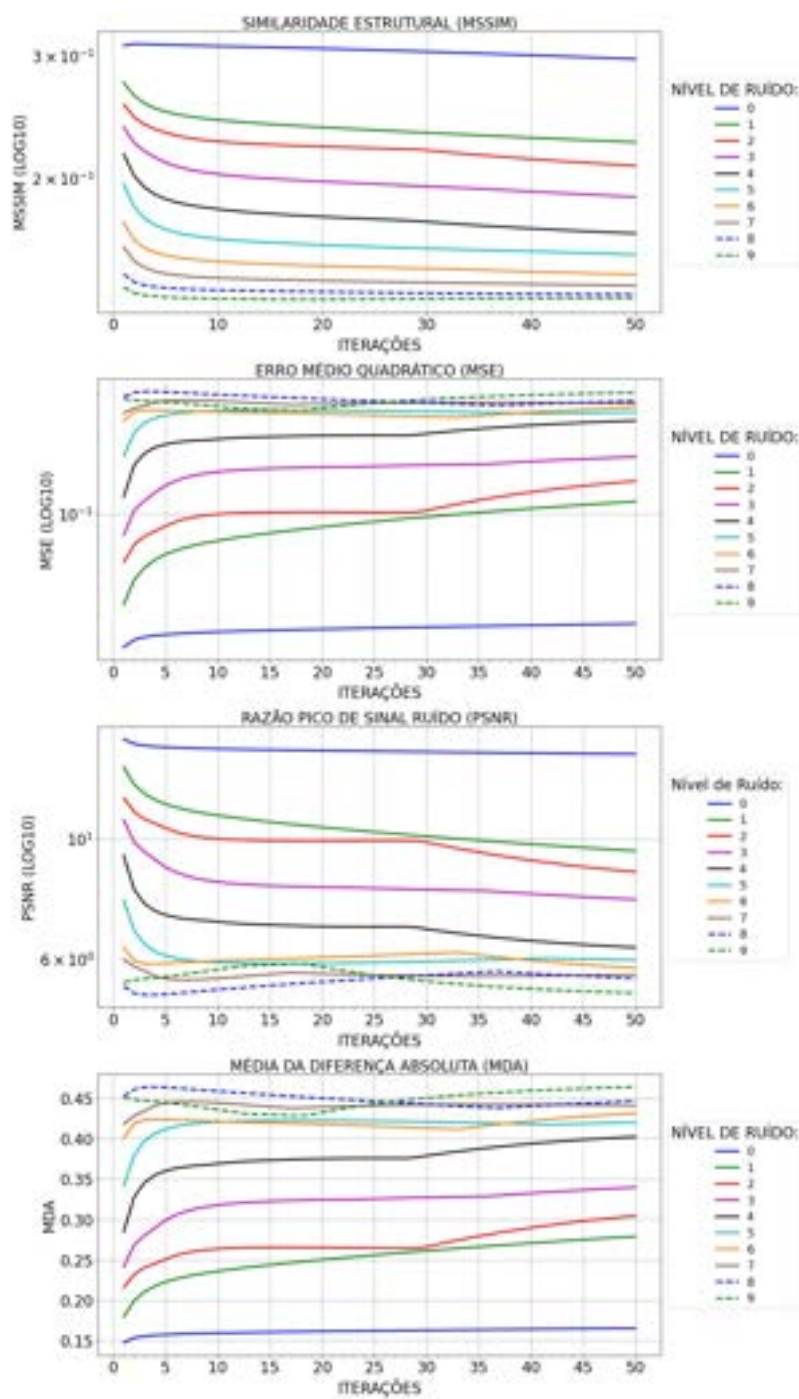


Figura 109 - SART com erro no Sinograma Engrenagem

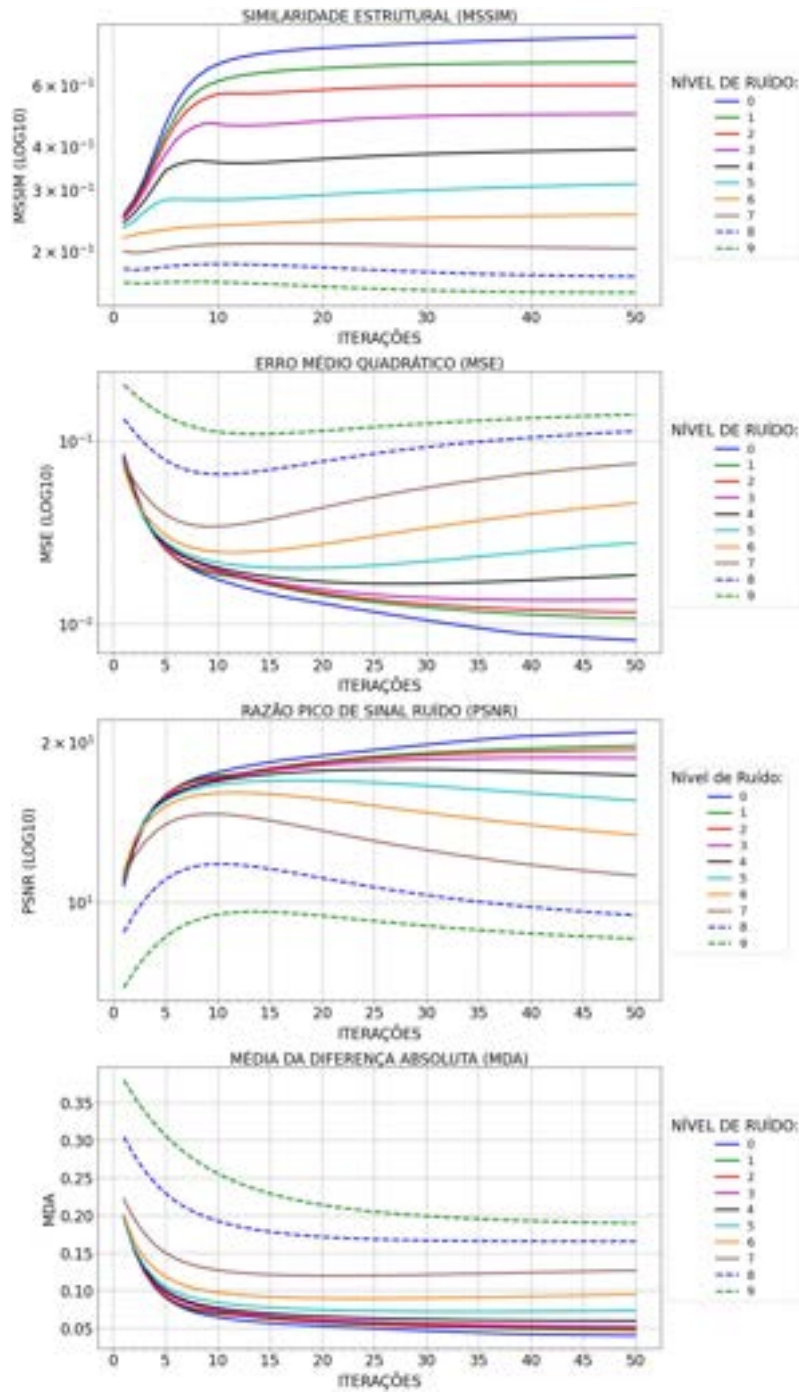


Figura 110 - MLEM com erro no Sinograma Engrenagem

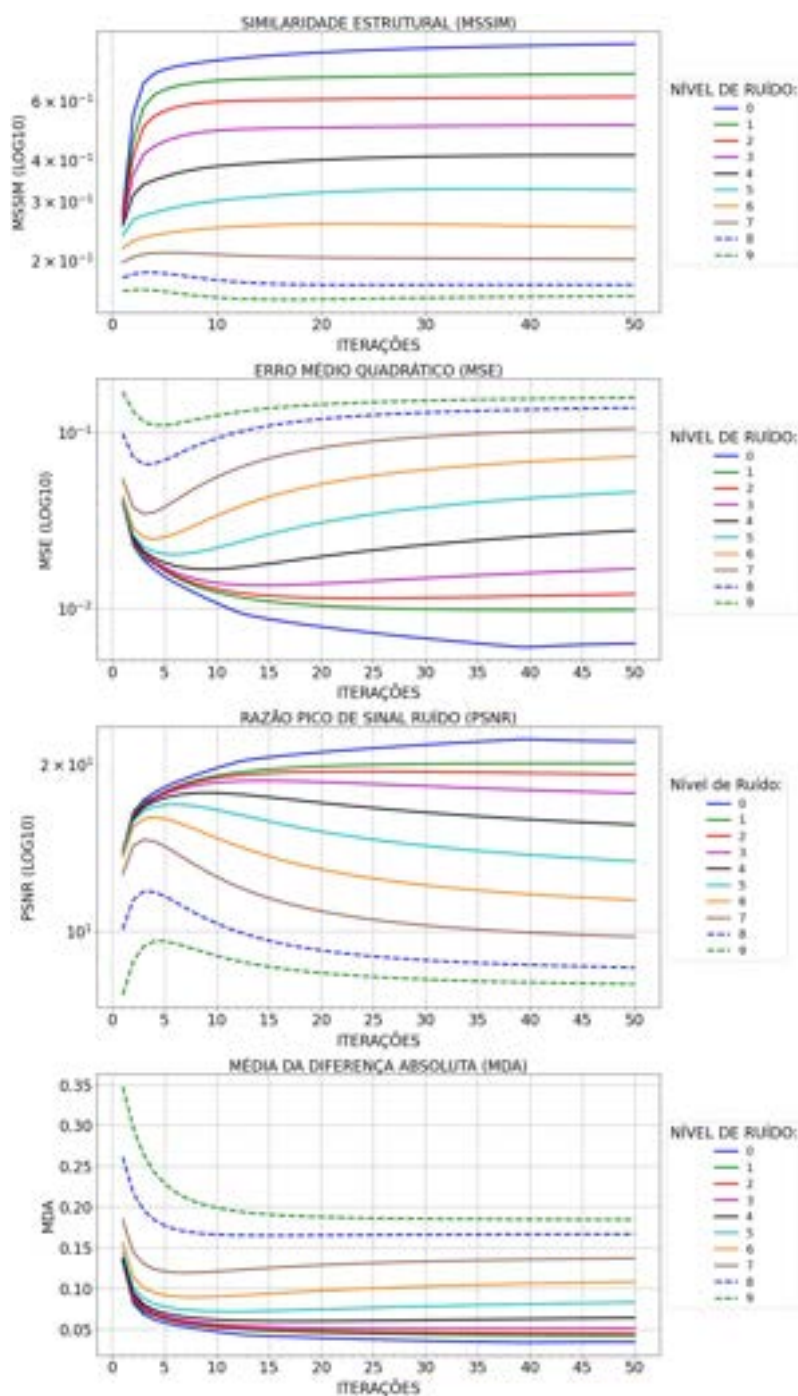


Figura 111 - OSEM com erro no Sinograma Engrenagem

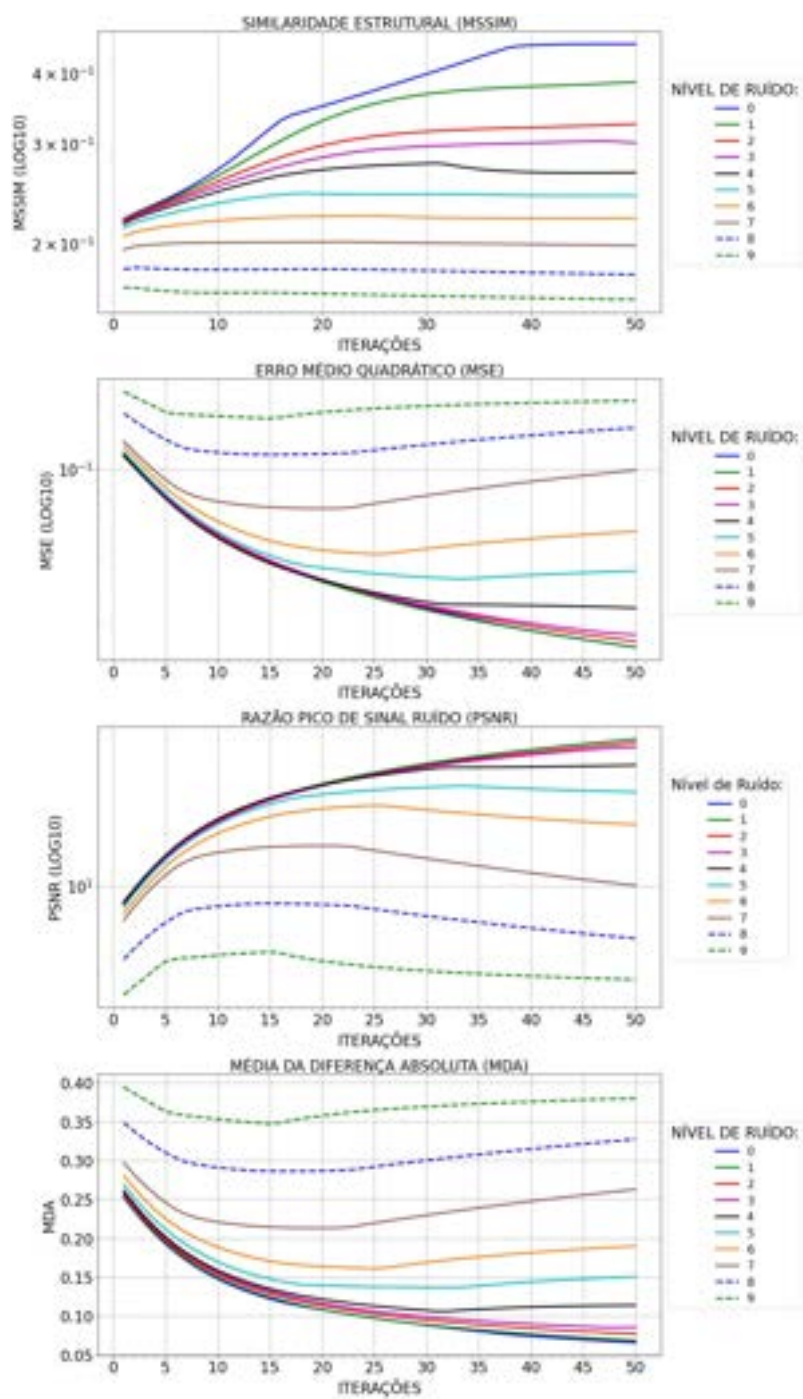


Figura 112 - TV com erro no Sinograma Engrenagem

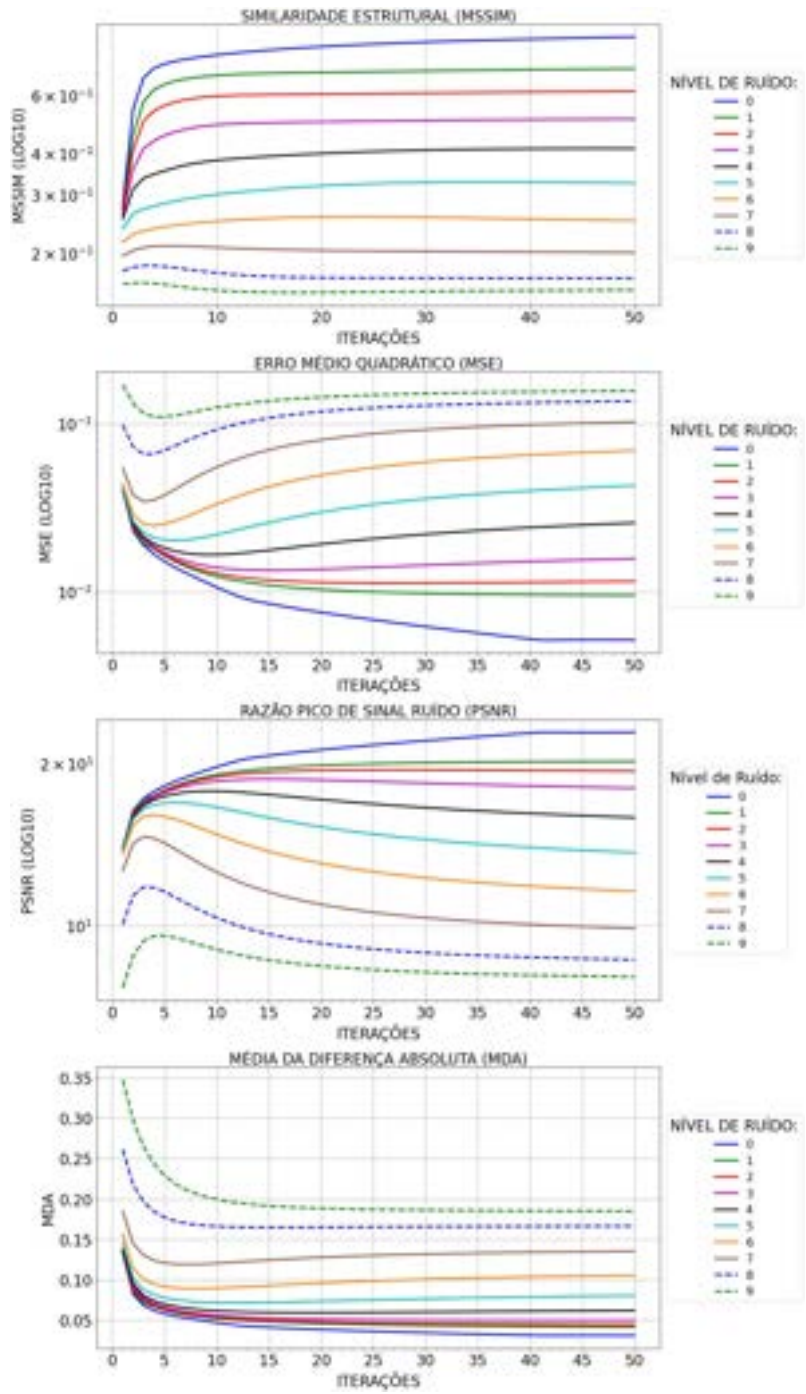


Figura 113 - OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem

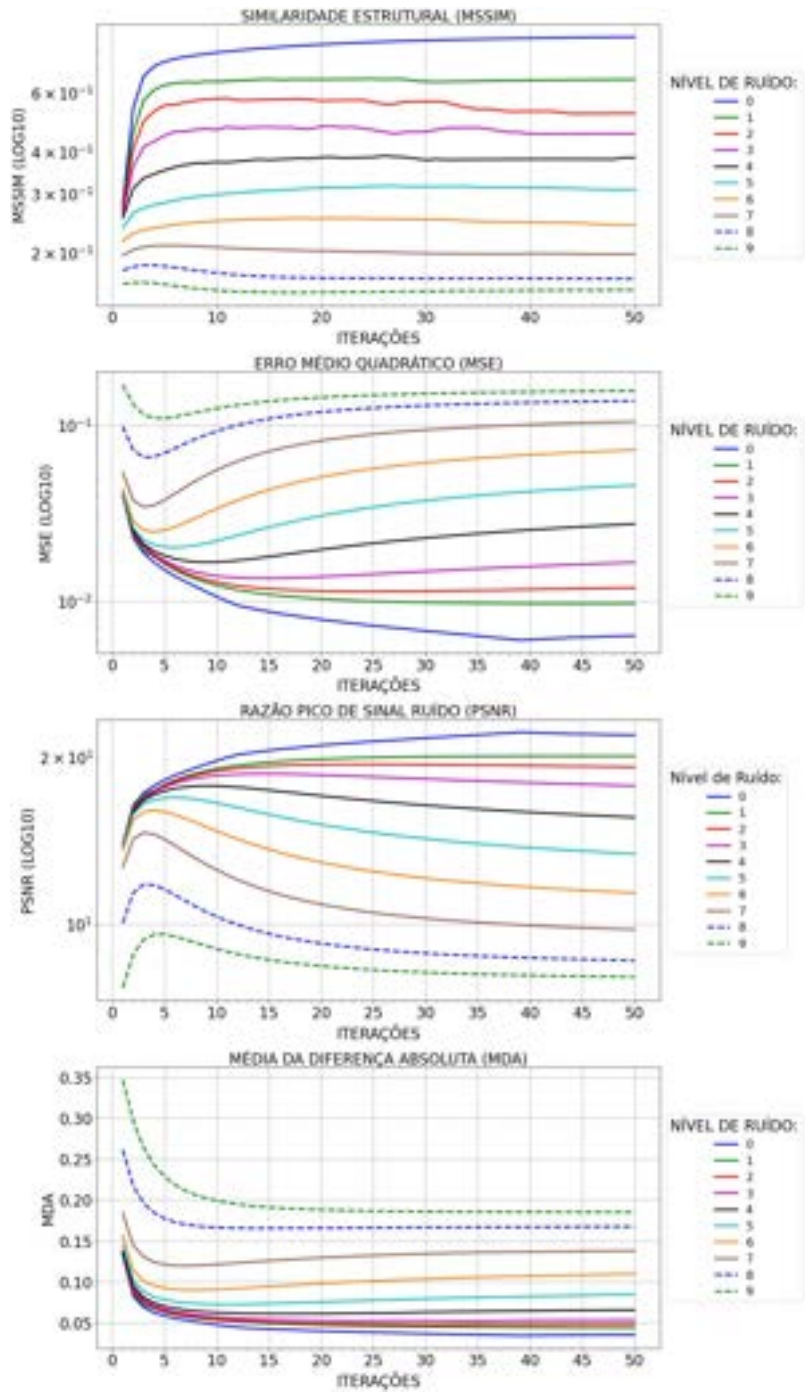


Figura 114 - OSPML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem

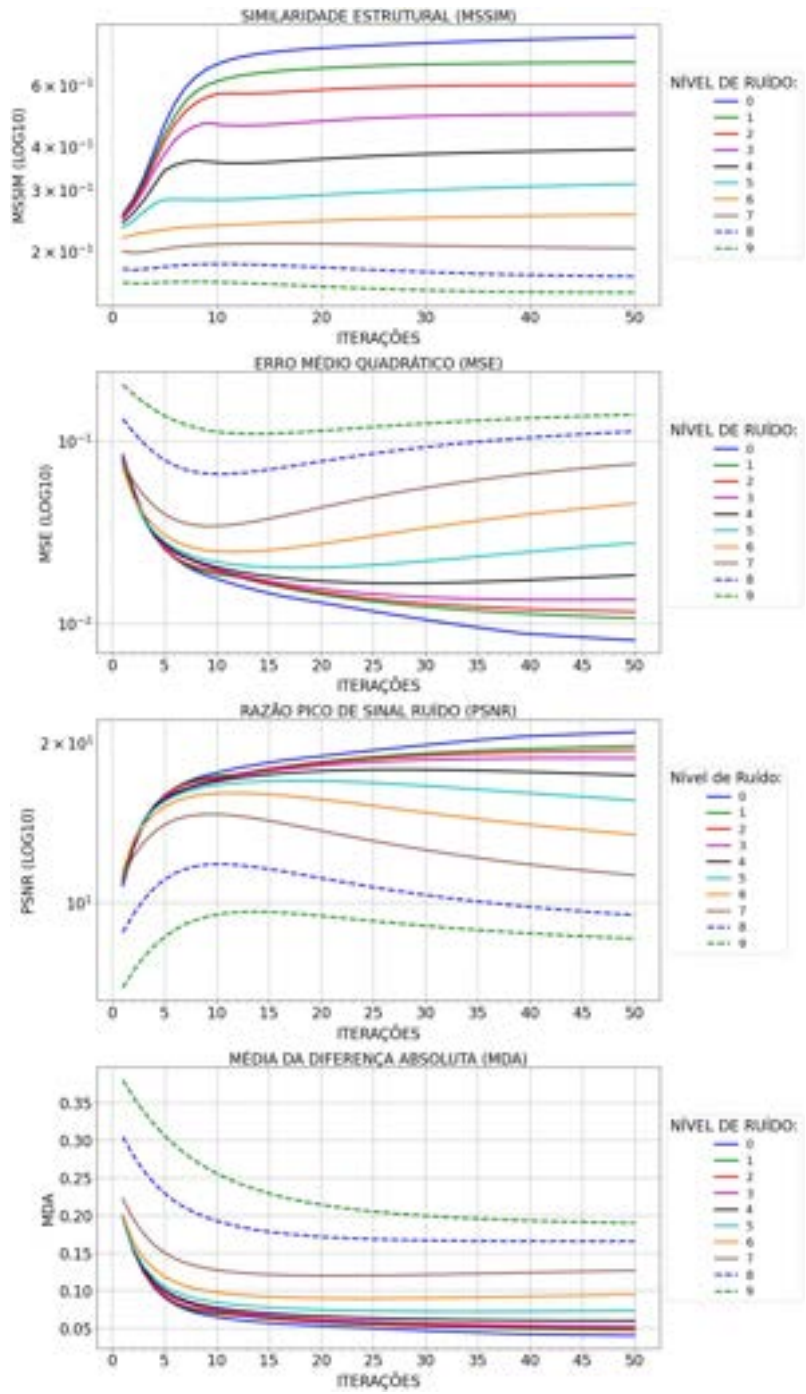


Figura 115 - PML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem

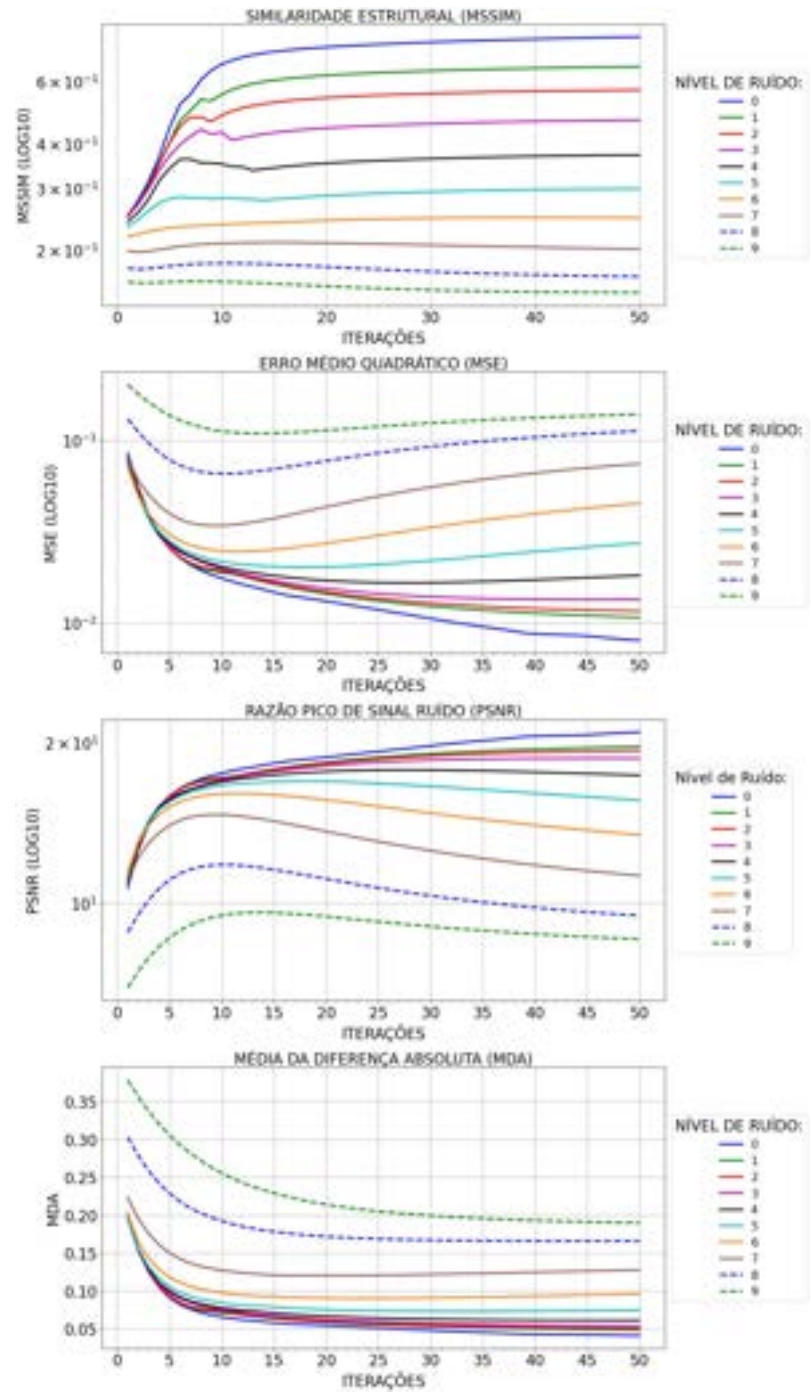


Figura 116 - PML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem

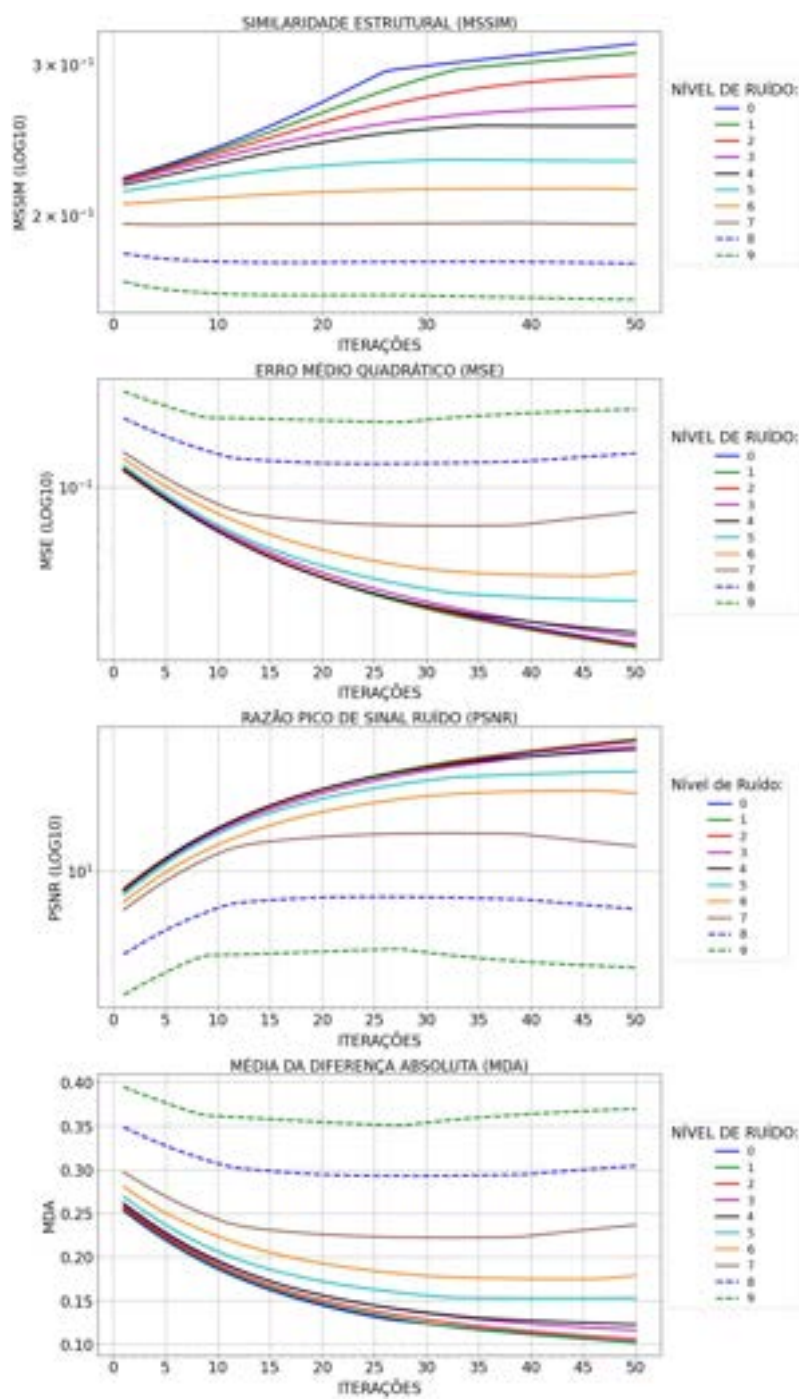


Figura 117 - TIKH com erro no Sinograma Engrenagem

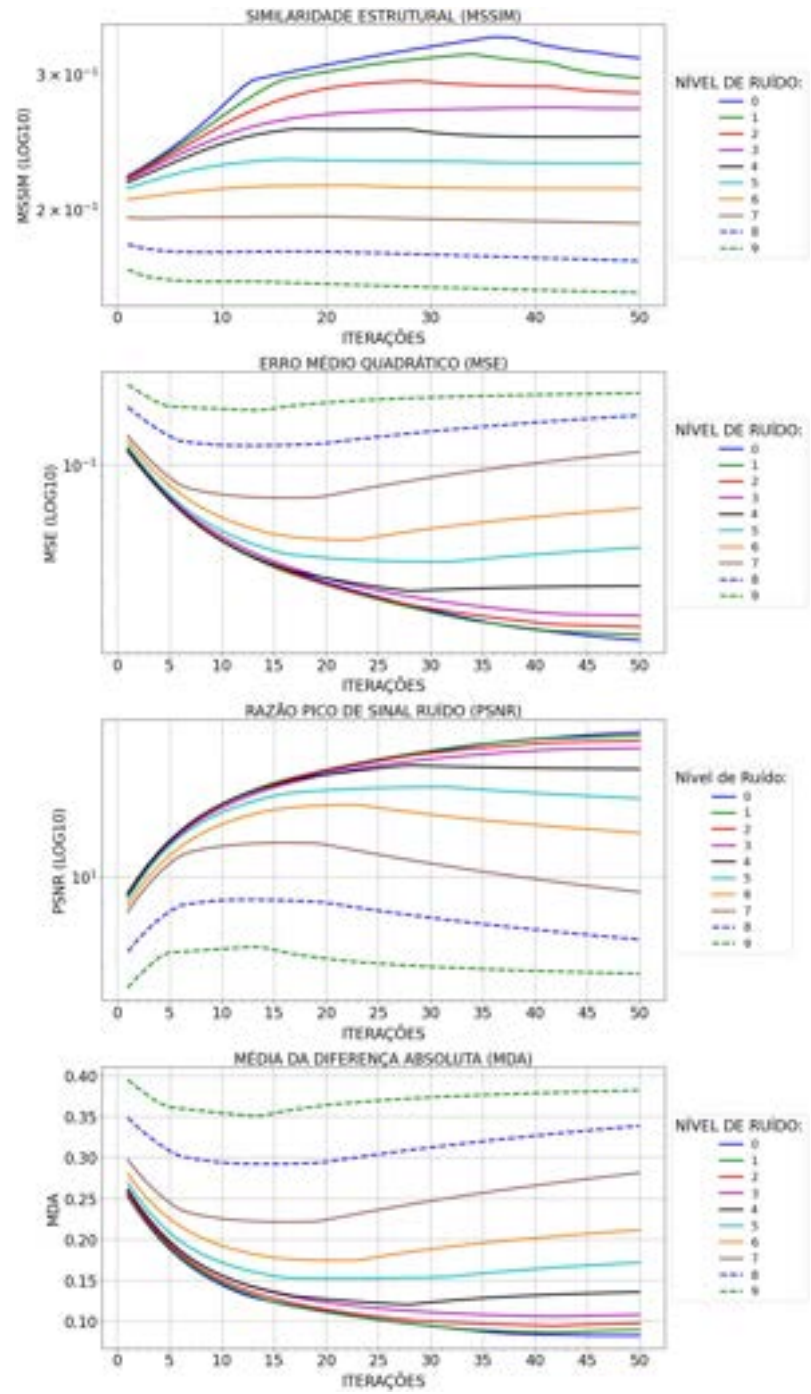


Figura 118 - GRAD com erro no Sinograma Engrenagem

B.2 Objeto-Alvo Phantom

B.2.1 Adição de Erro no Objeto Phantom

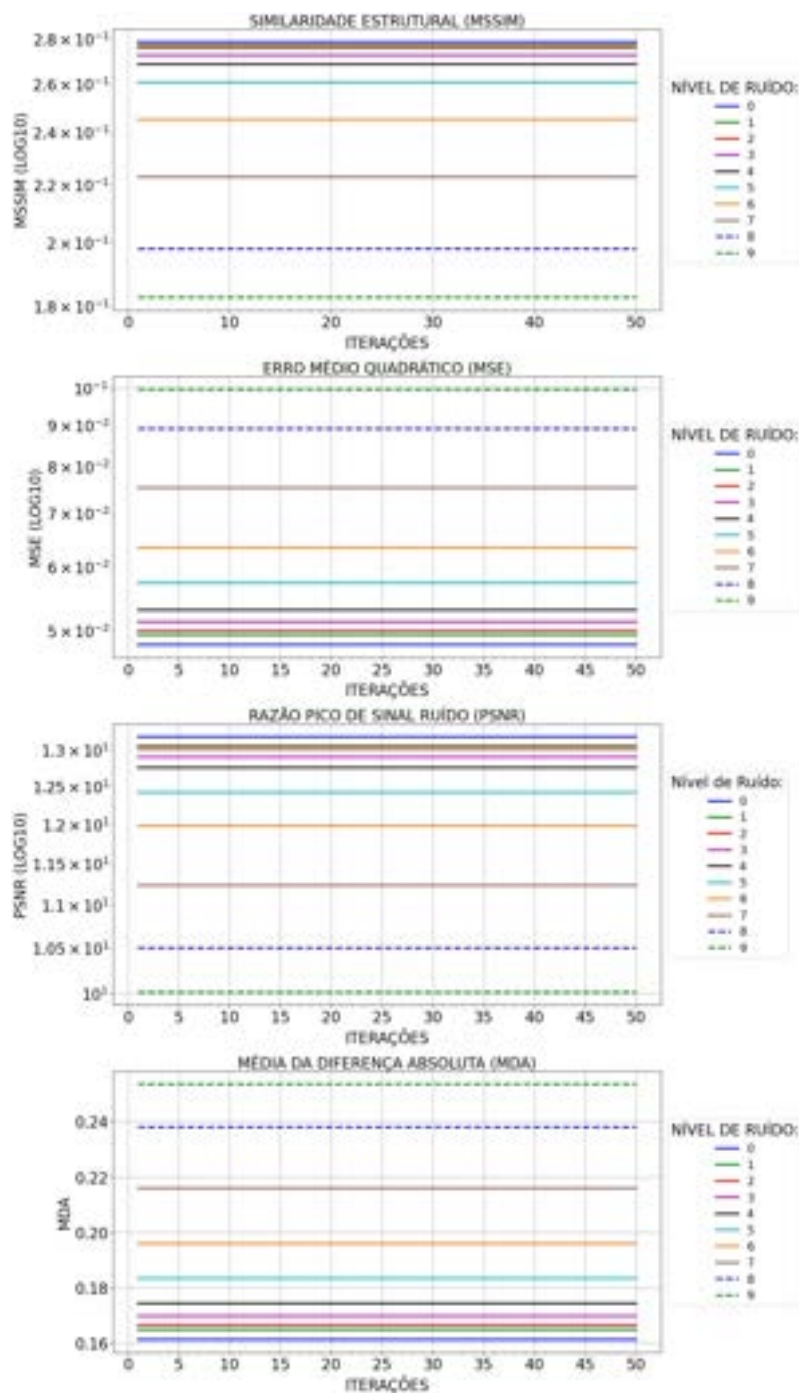


Figura 119 - CGLS com erro no Objeto Phantom

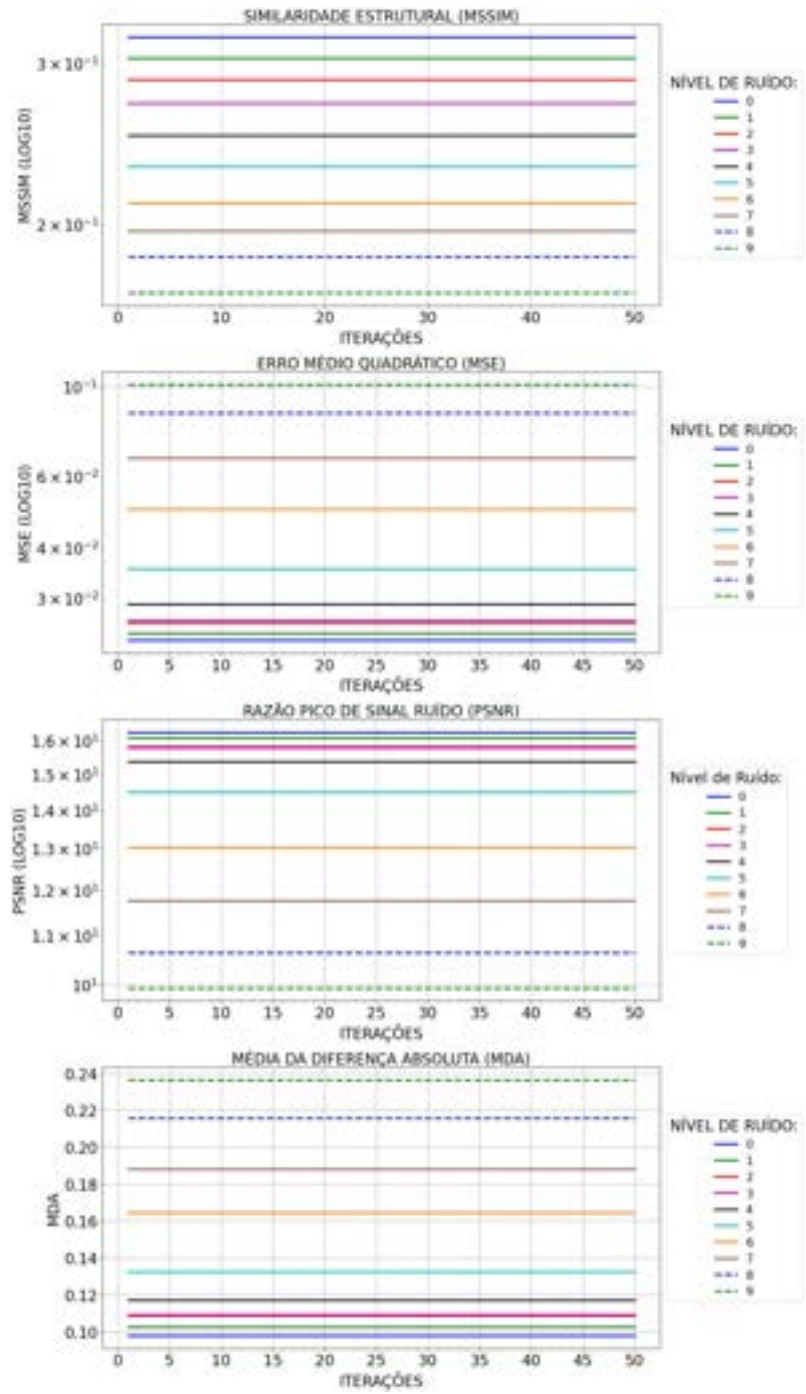


Figura 120 - FBP com erro no Objeto Phantom

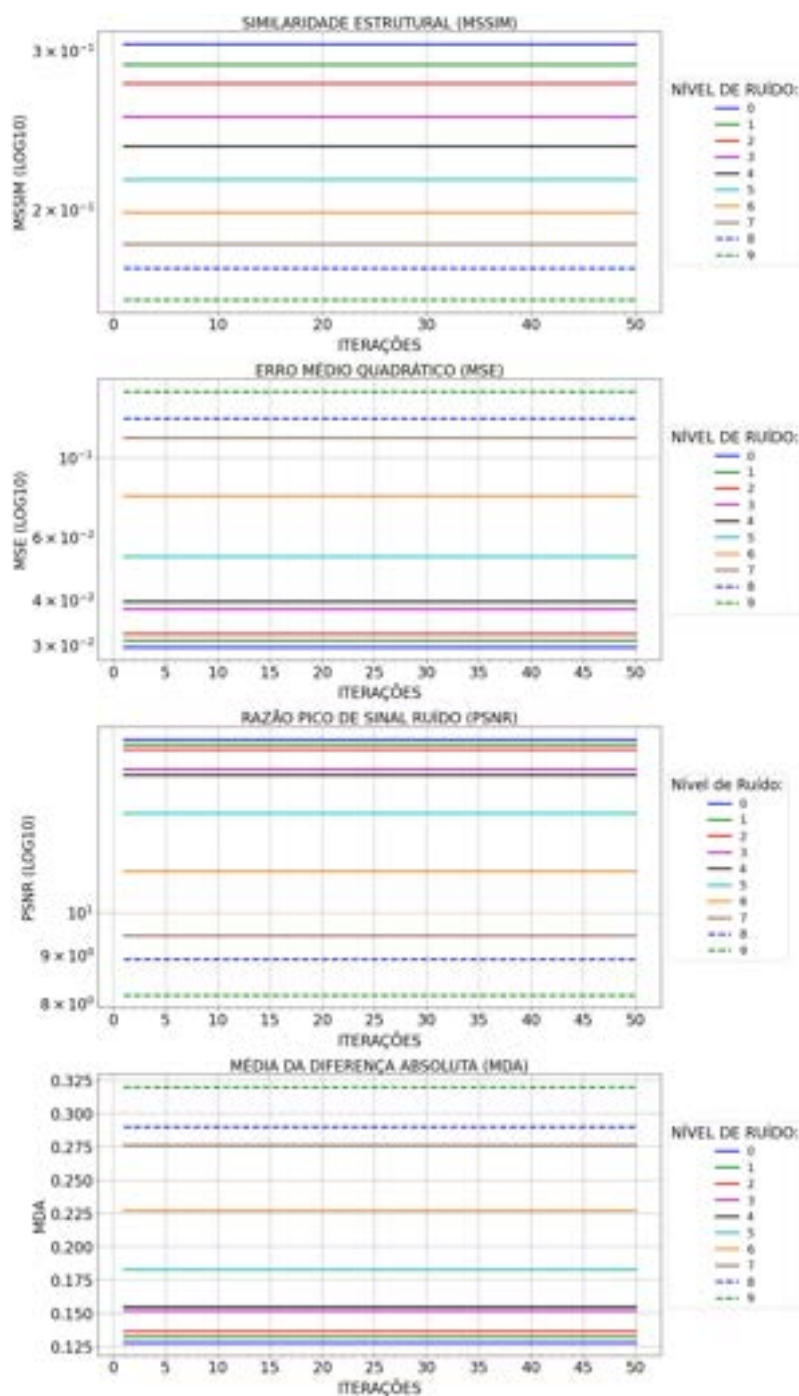


Figura 121 - GRIDREC com erro no Objeto Phantom

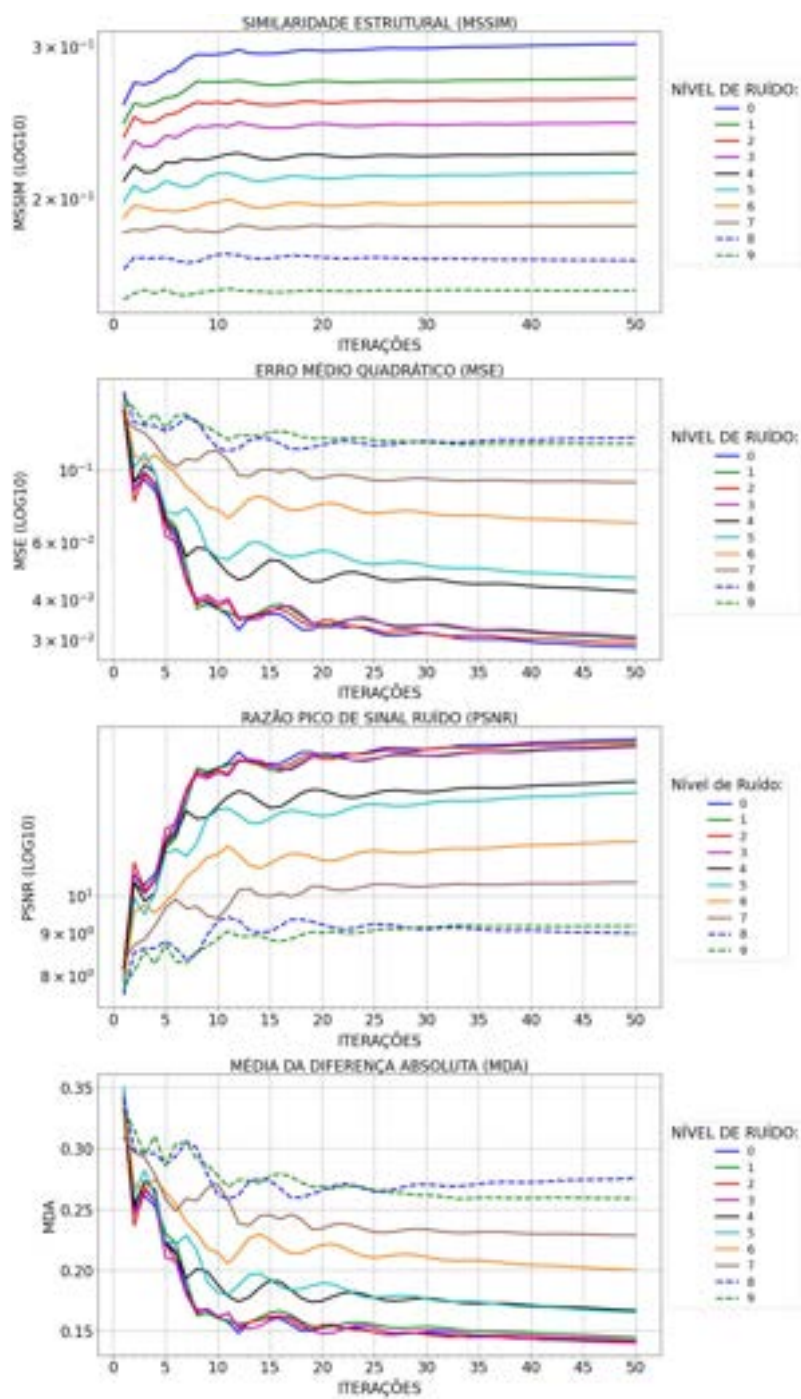


Figura 122 - ART com erro no Objeto Phantom

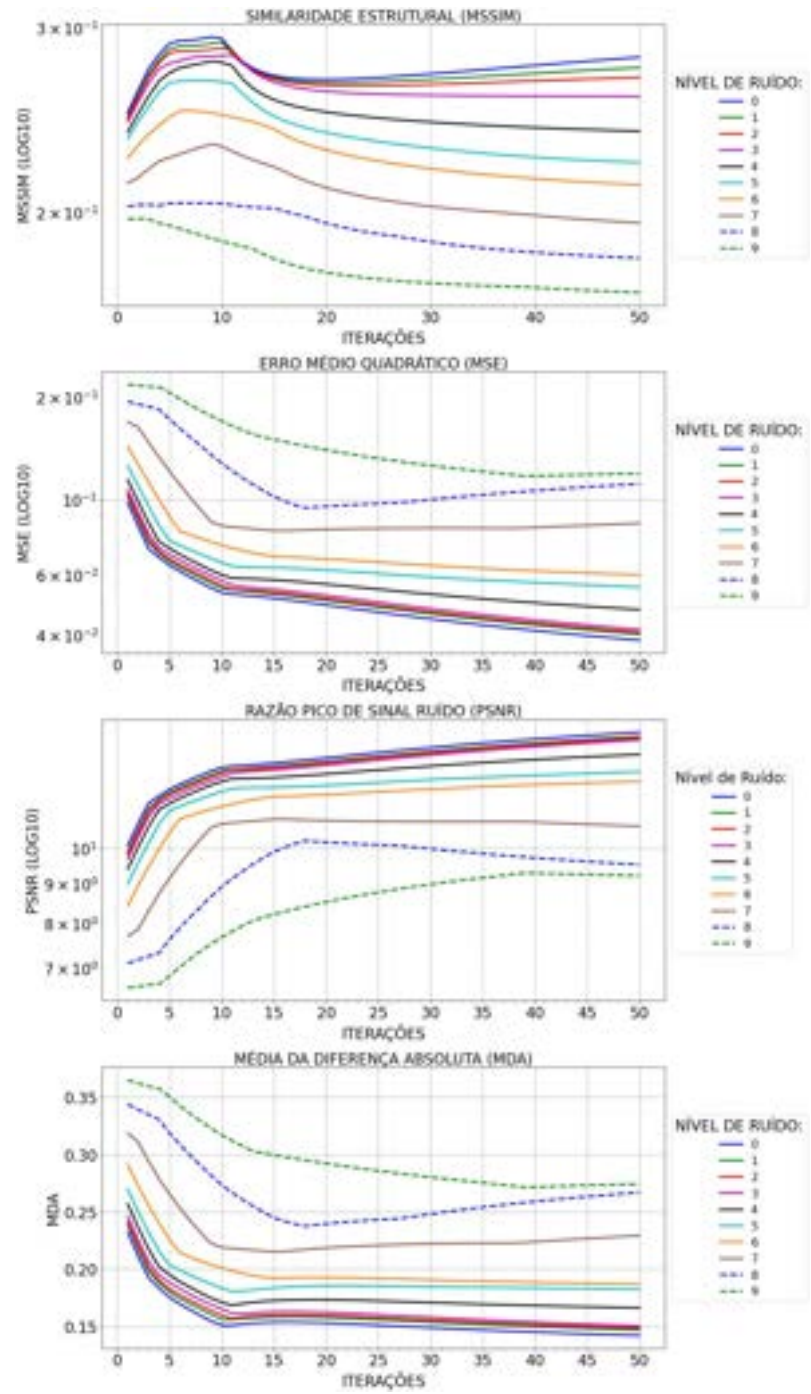


Figura 123 - SIRT com erro no Objeto Phantom

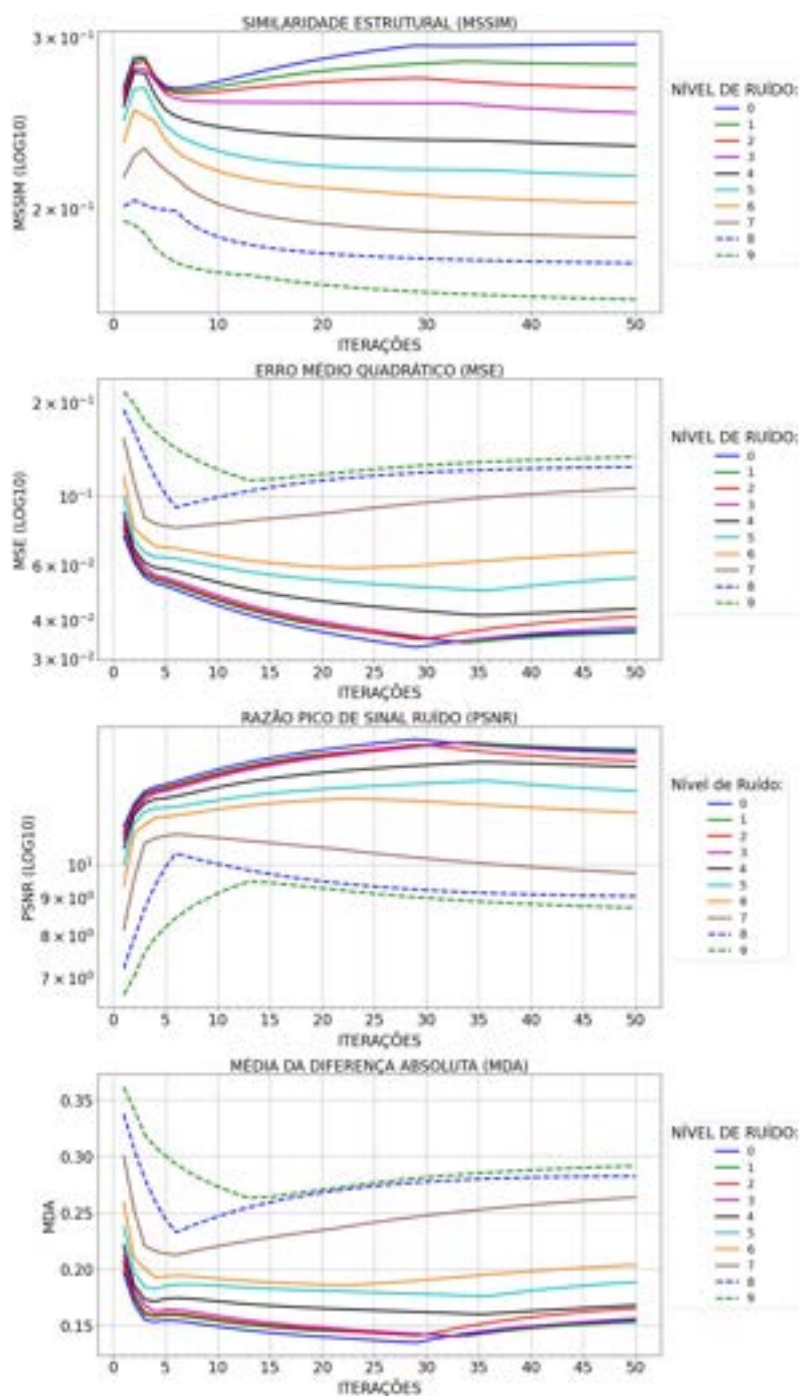


Figura 124 - BART com erro no Objeto Phantom

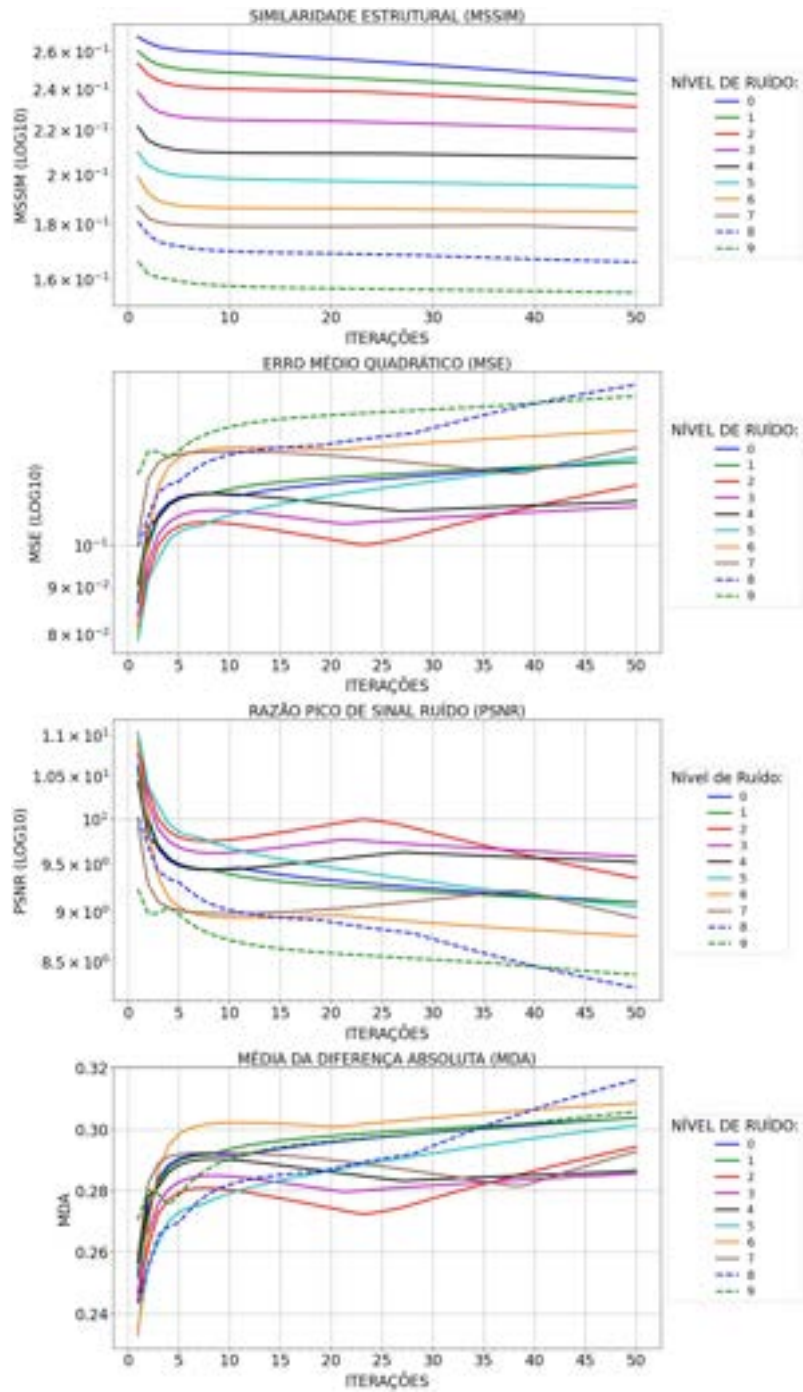


Figura 125 - SART com erro no Objeto Phantom

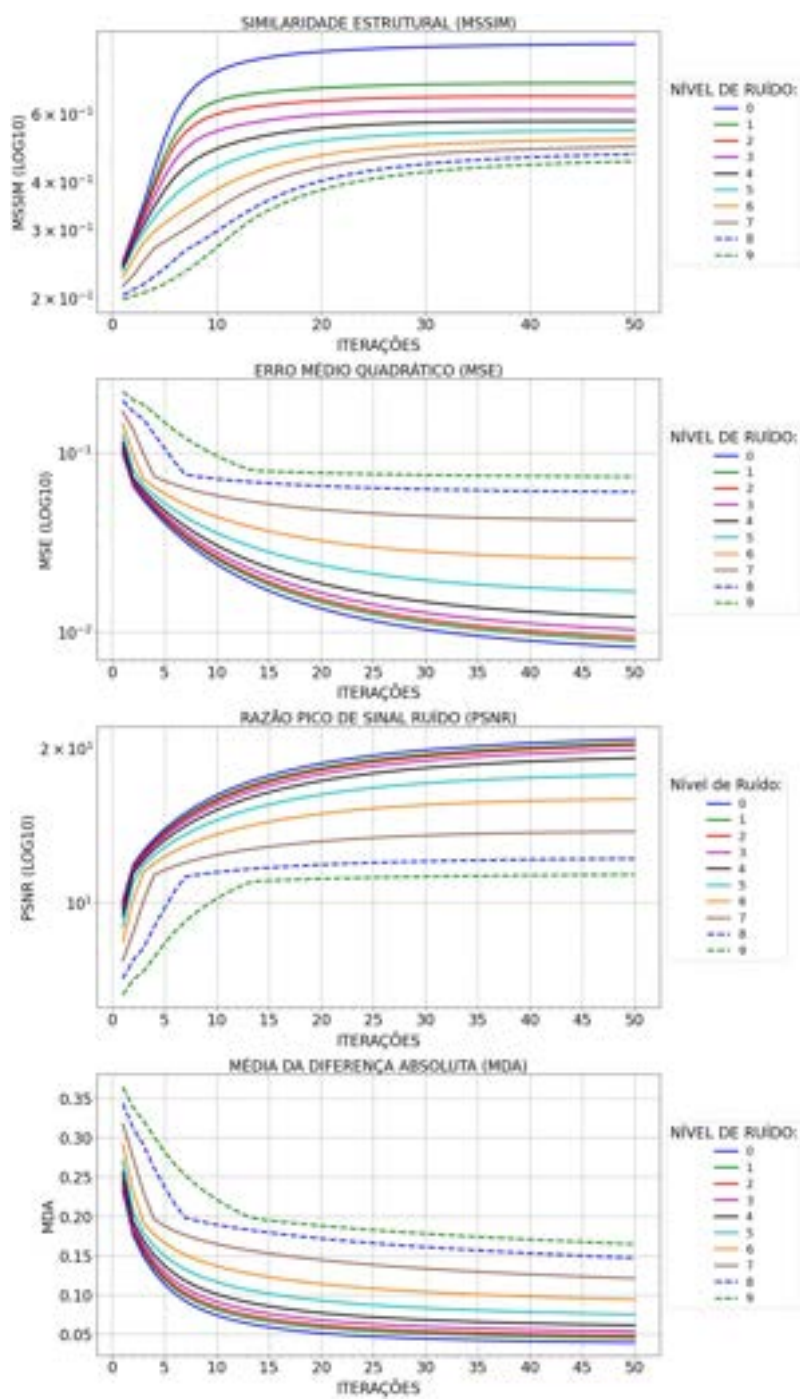


Figura 126 - MLEM com erro no Objeto Phantom

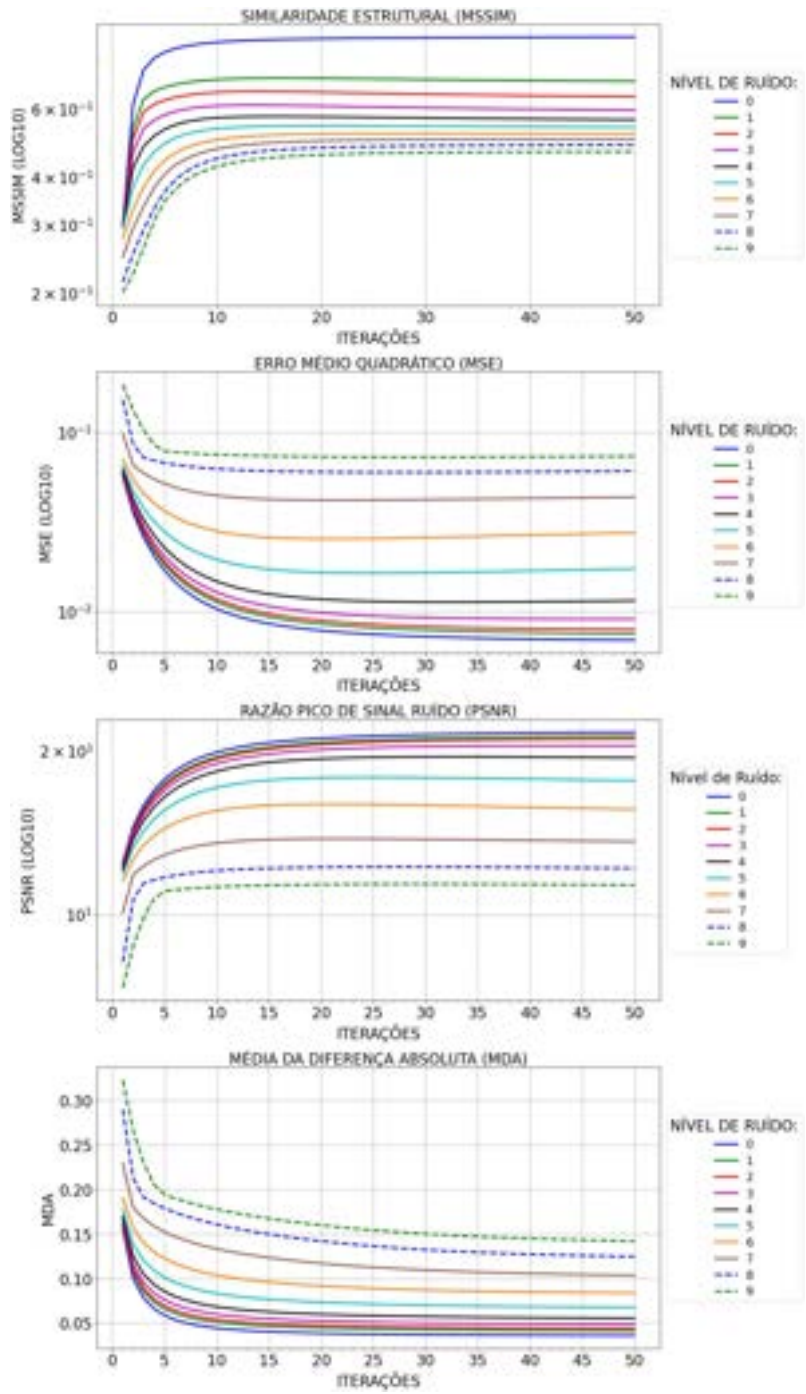


Figura 127 - OSEM com erro no Objeto Phantom

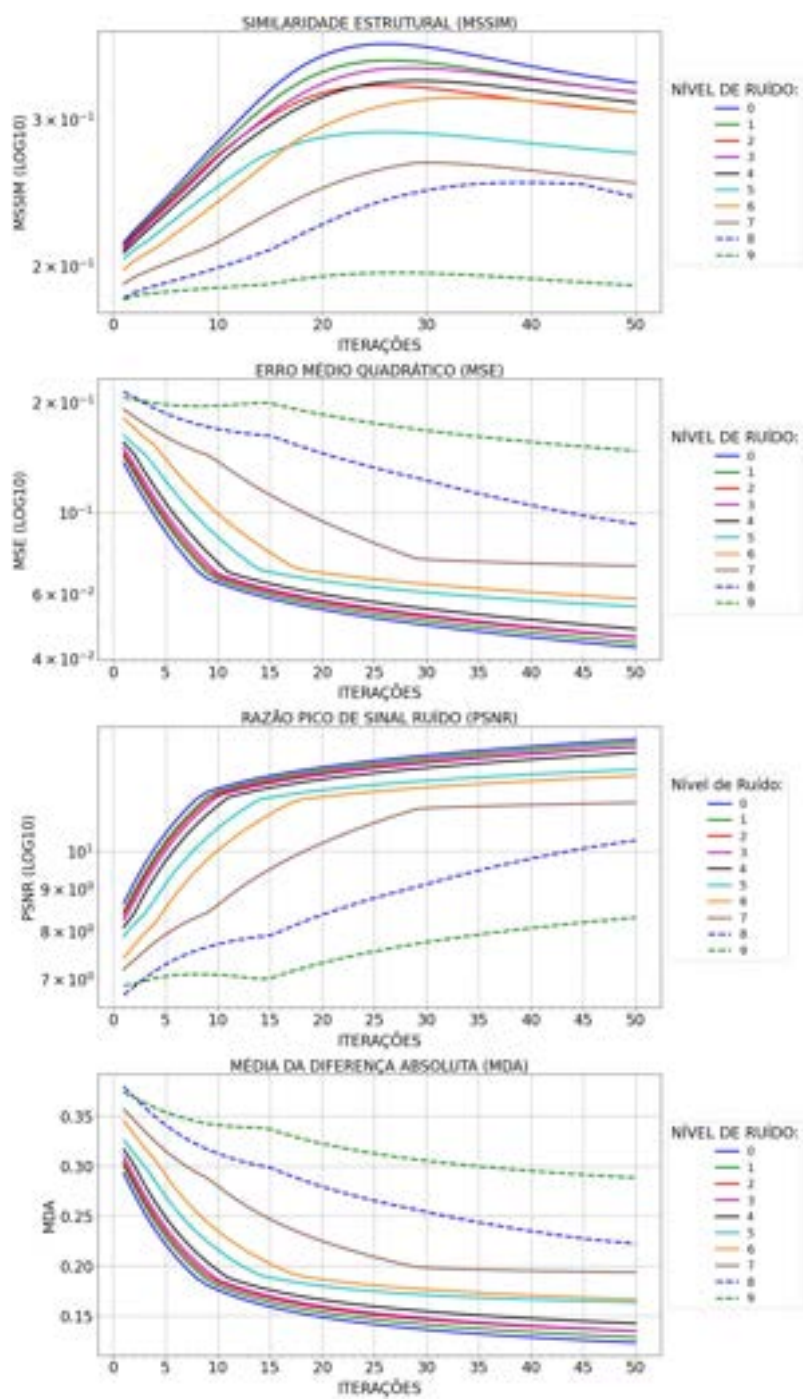


Figura 128 - TV com erro no Objeto Phantom

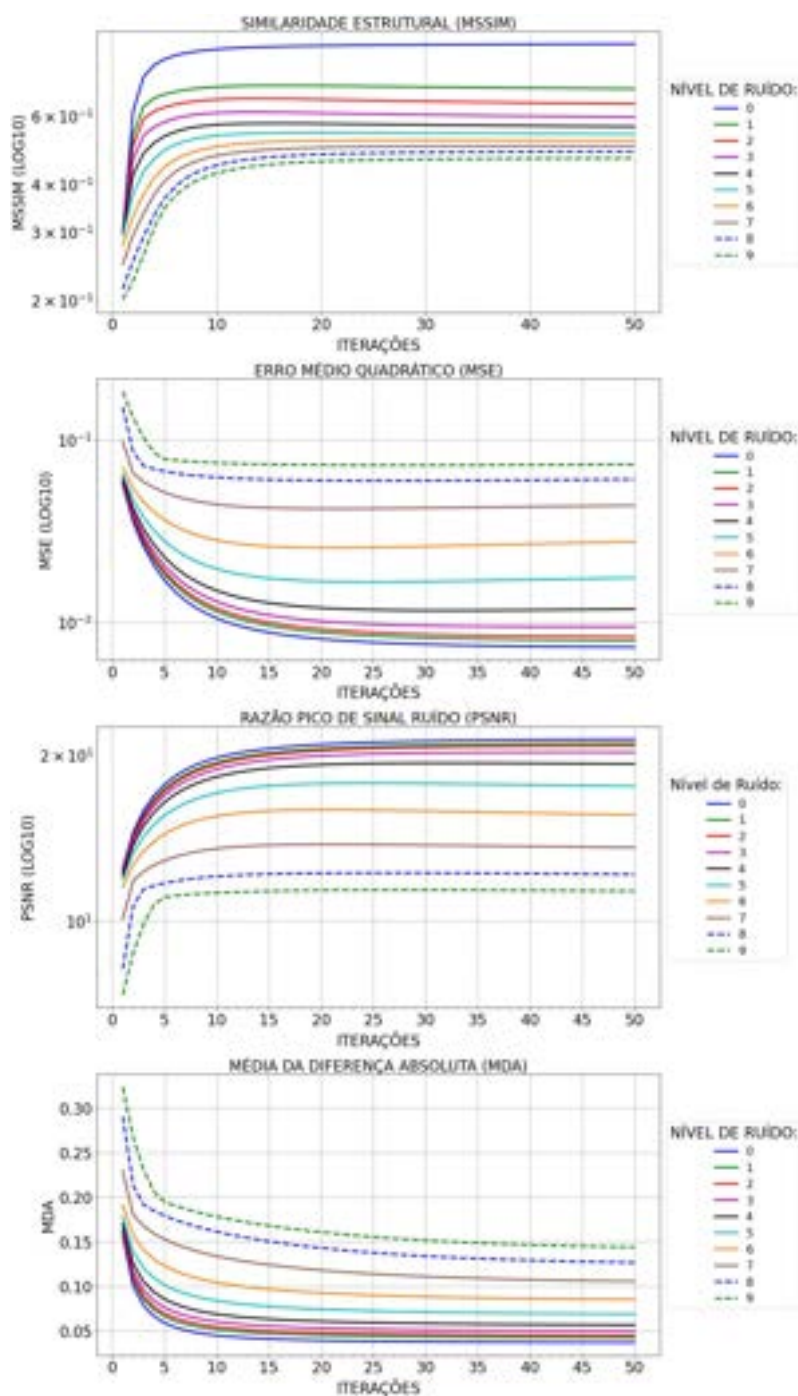


Figura 129 - OSPML-Hybrid com erro no Objeto Phantom

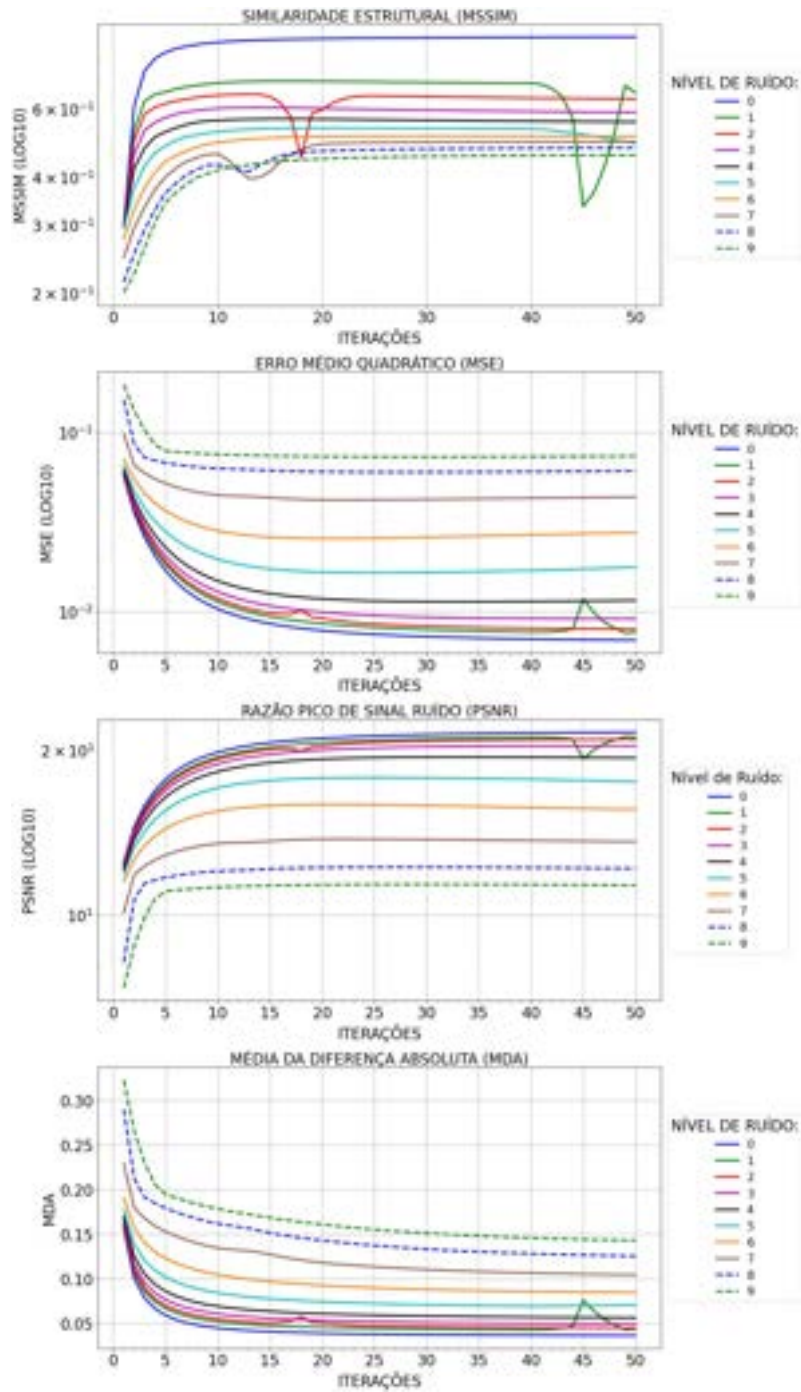


Figura 130 - OSPML-Quad com erro no Objeto Phantom

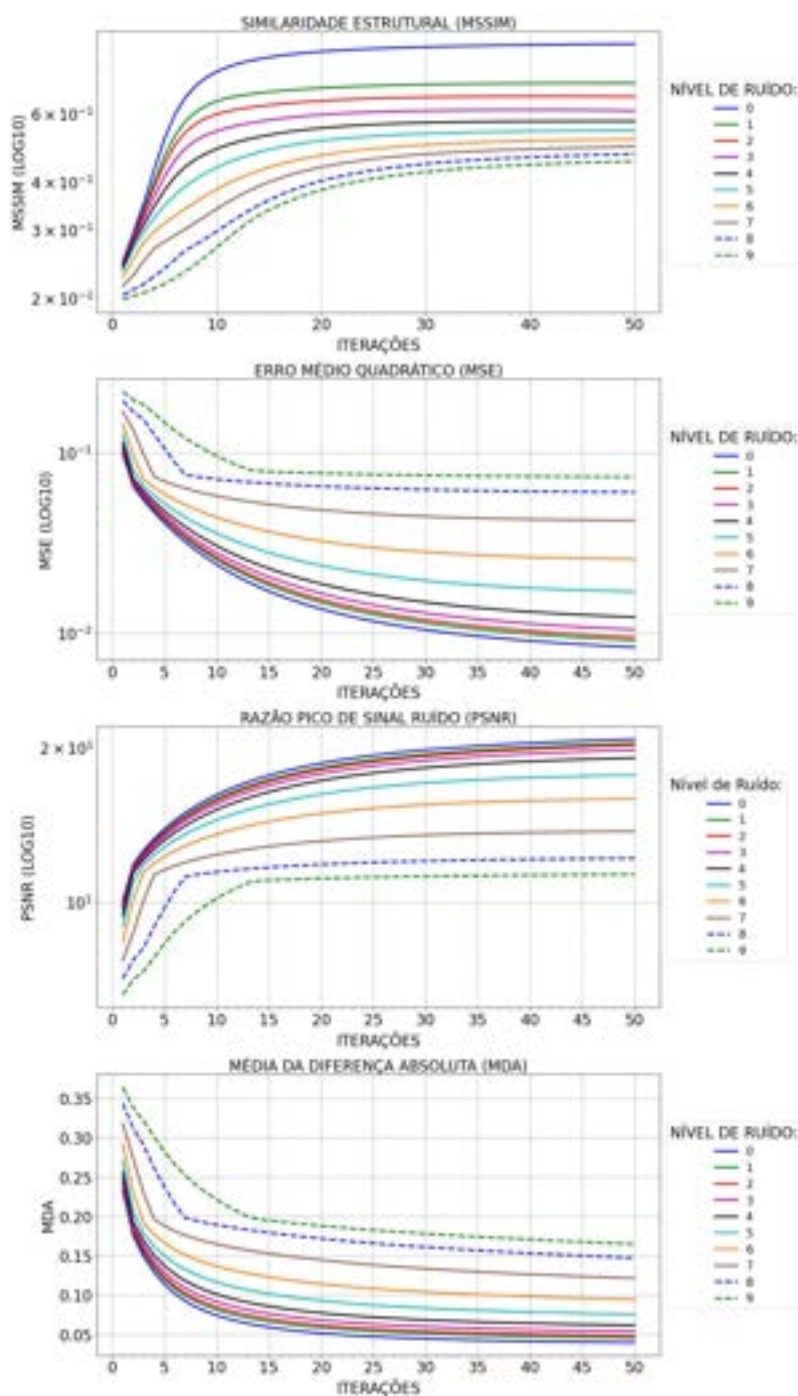


Figura 131 - PML-Hybrid com erro no Objeto Phantom

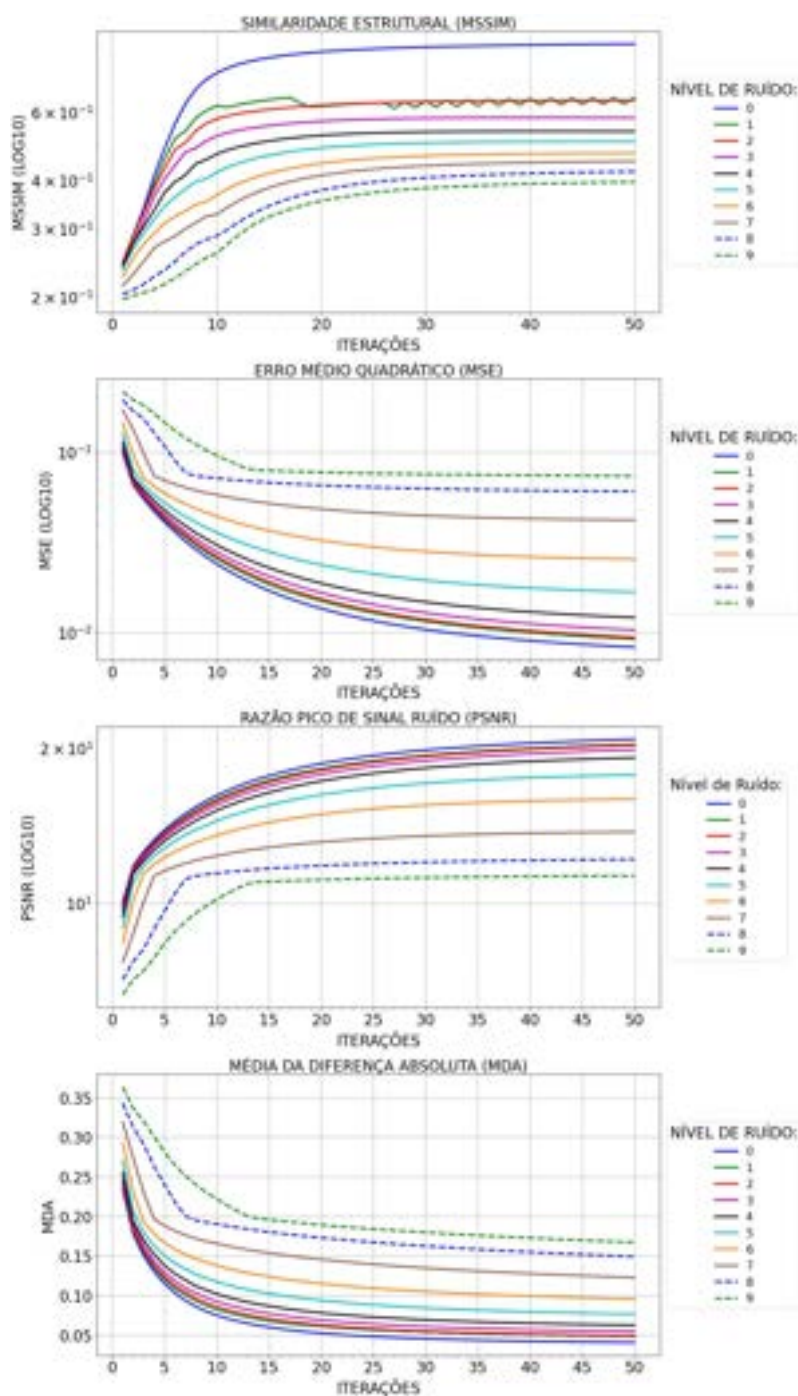


Figura 132 - PML-Quad com erro no Objeto Phantom

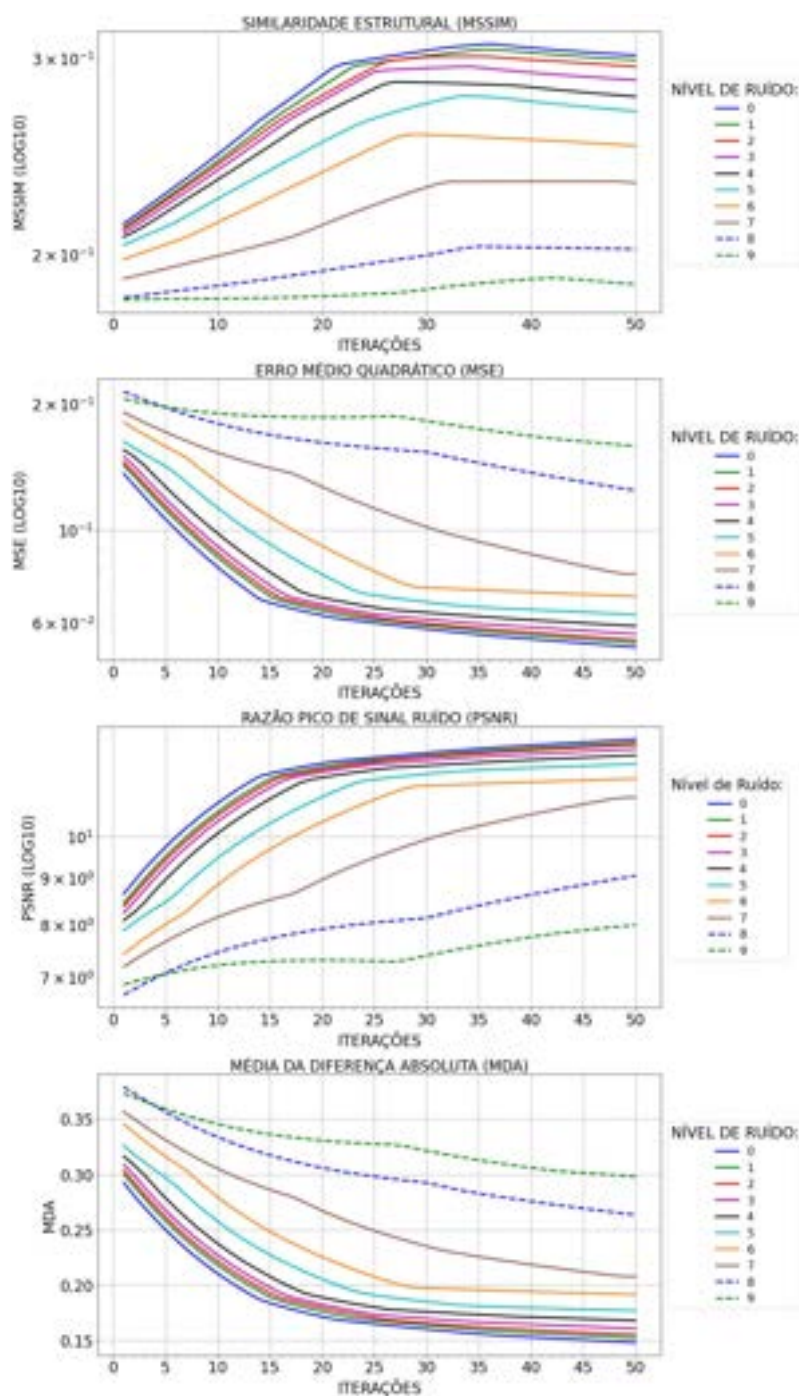


Figura 133 - TIKH com erro no Objeto Phantom

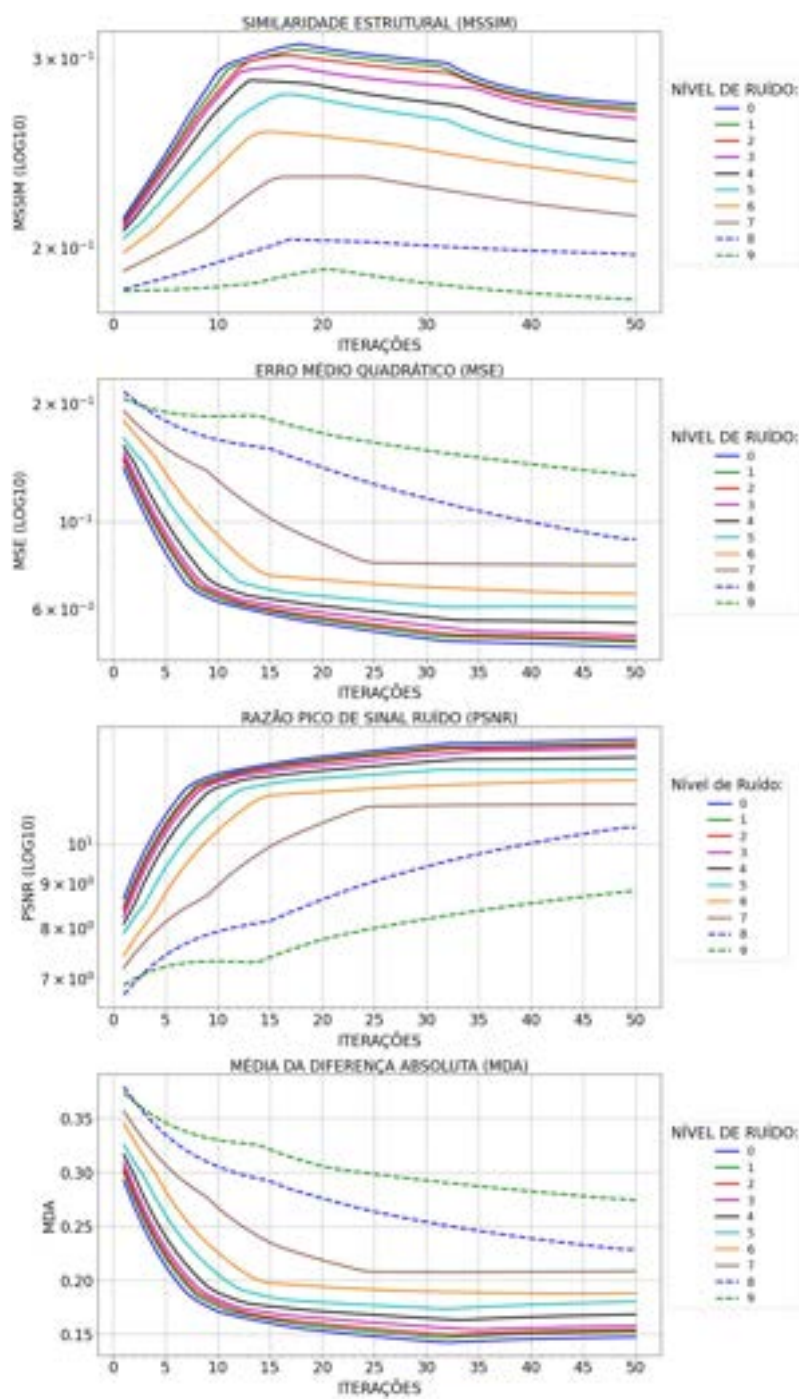


Figura 134 - GRAD com erro no Objeto Phantom

B.2.2 Adição de Erro no Sinograma Phantom

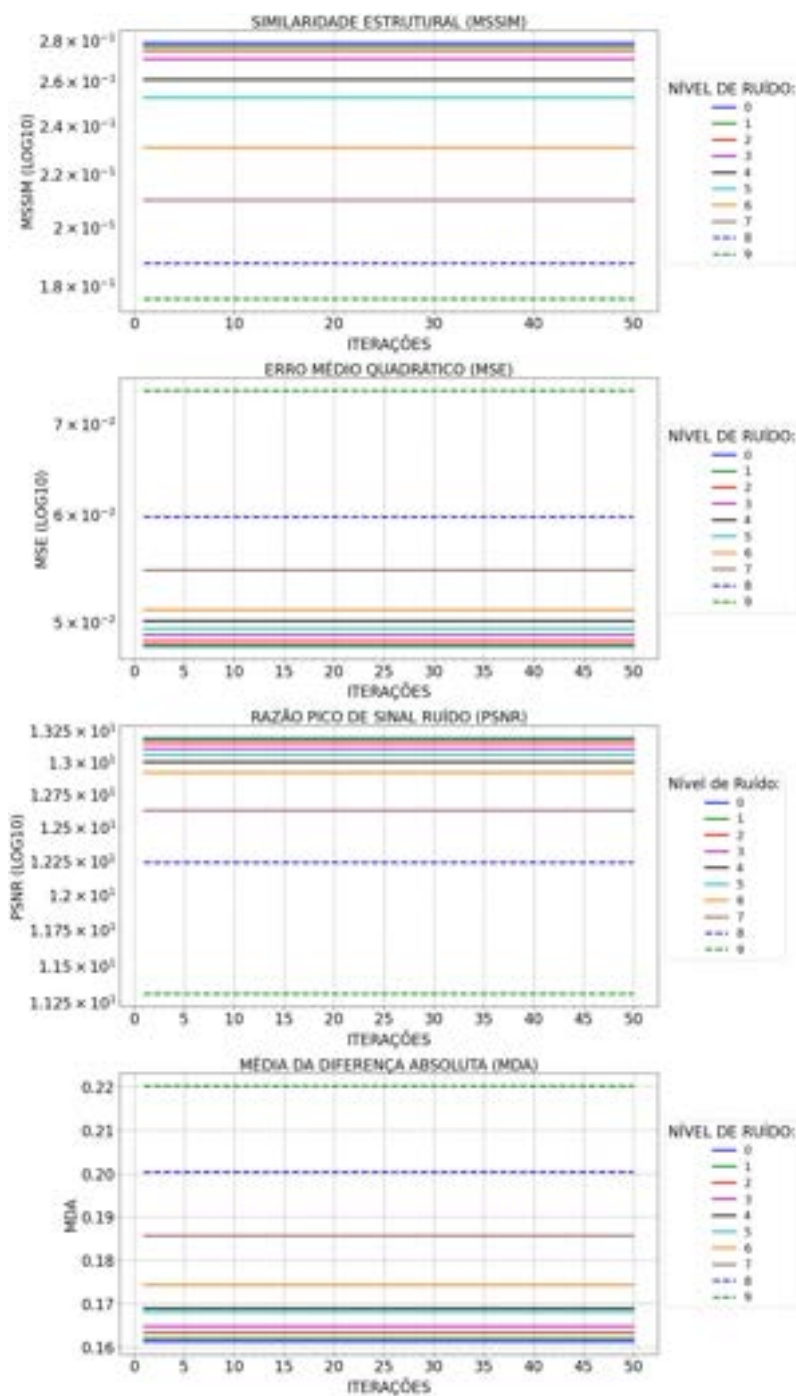


Figura 135 - CGLS com erro no Sinograma Phantom

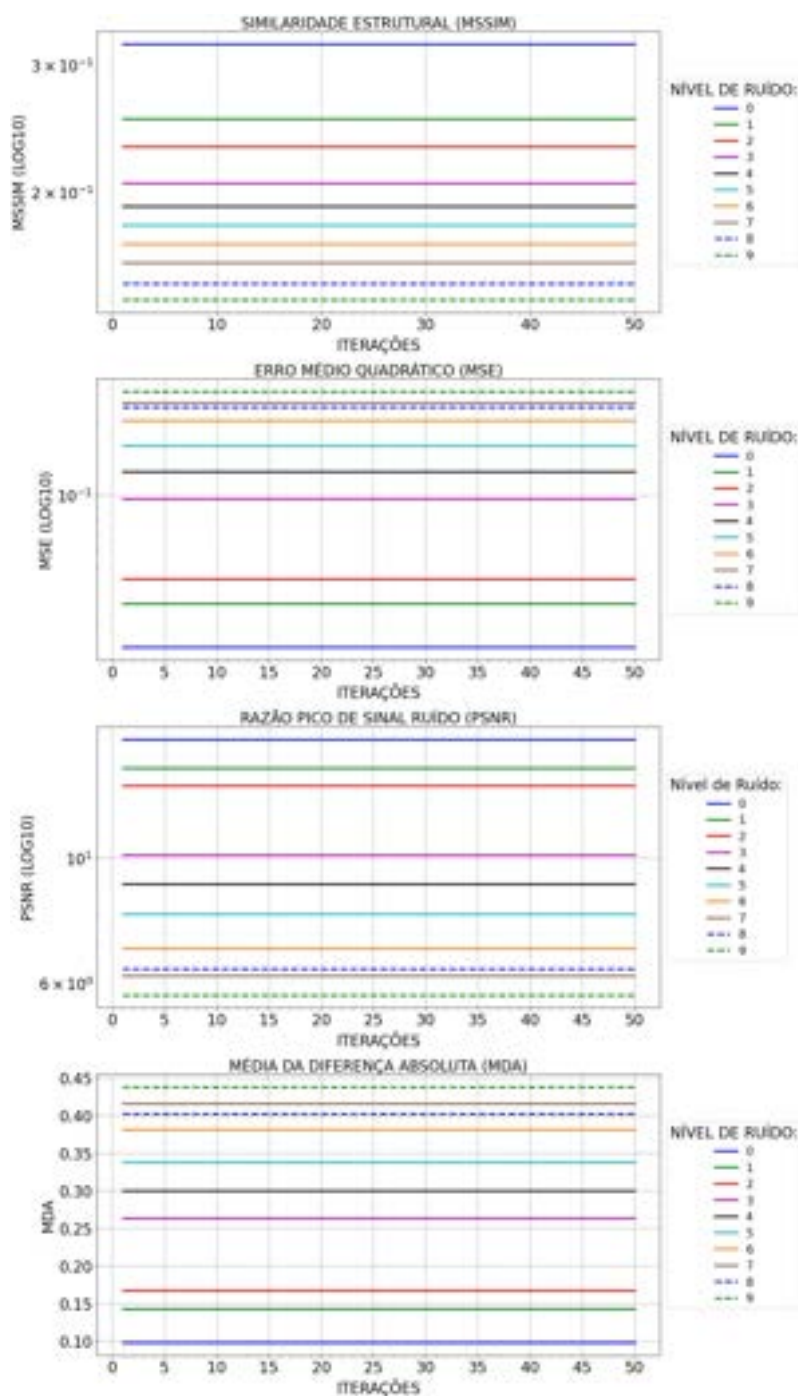


Figura 136 - FBP com erro no Sinograma Phantom

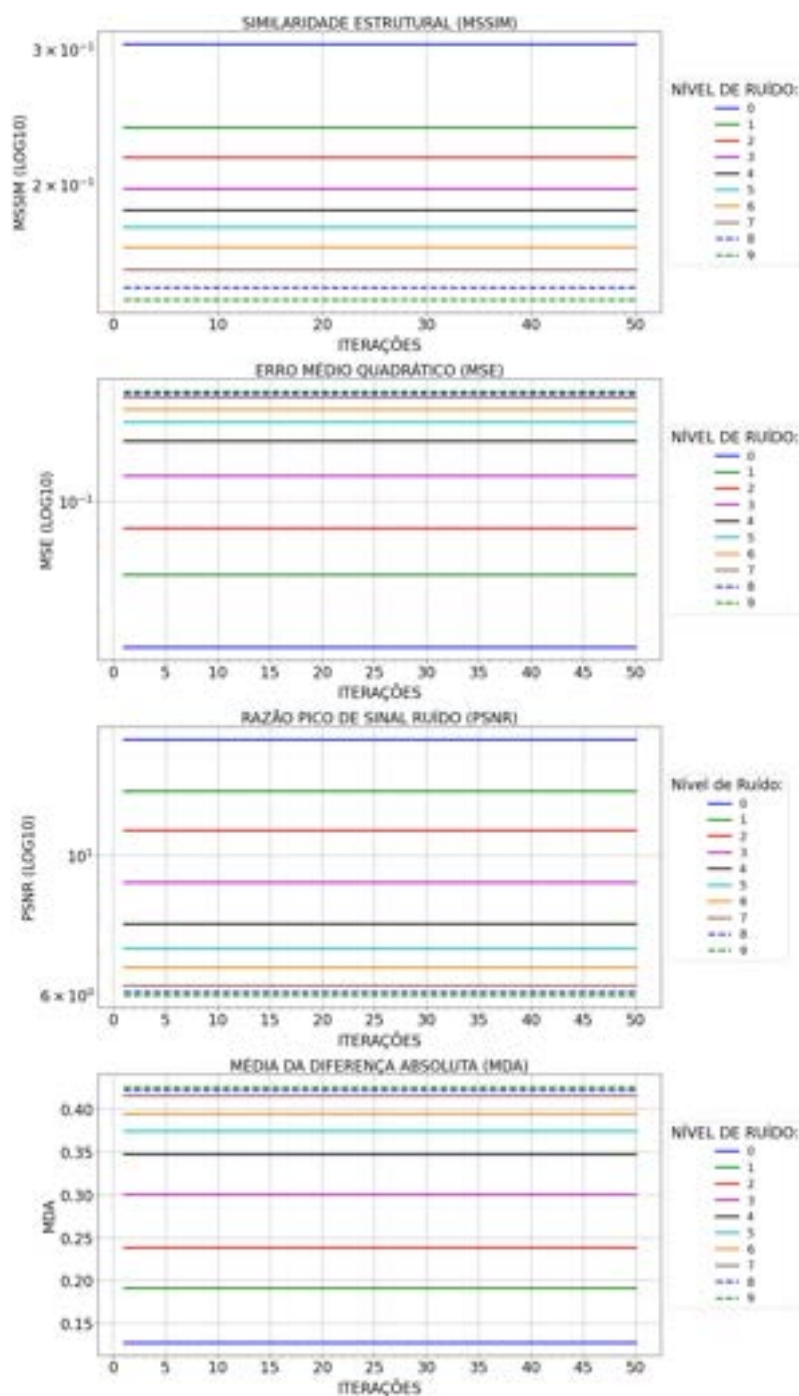


Figura 137 - GRIDREC com erro no Sinograma Phantom

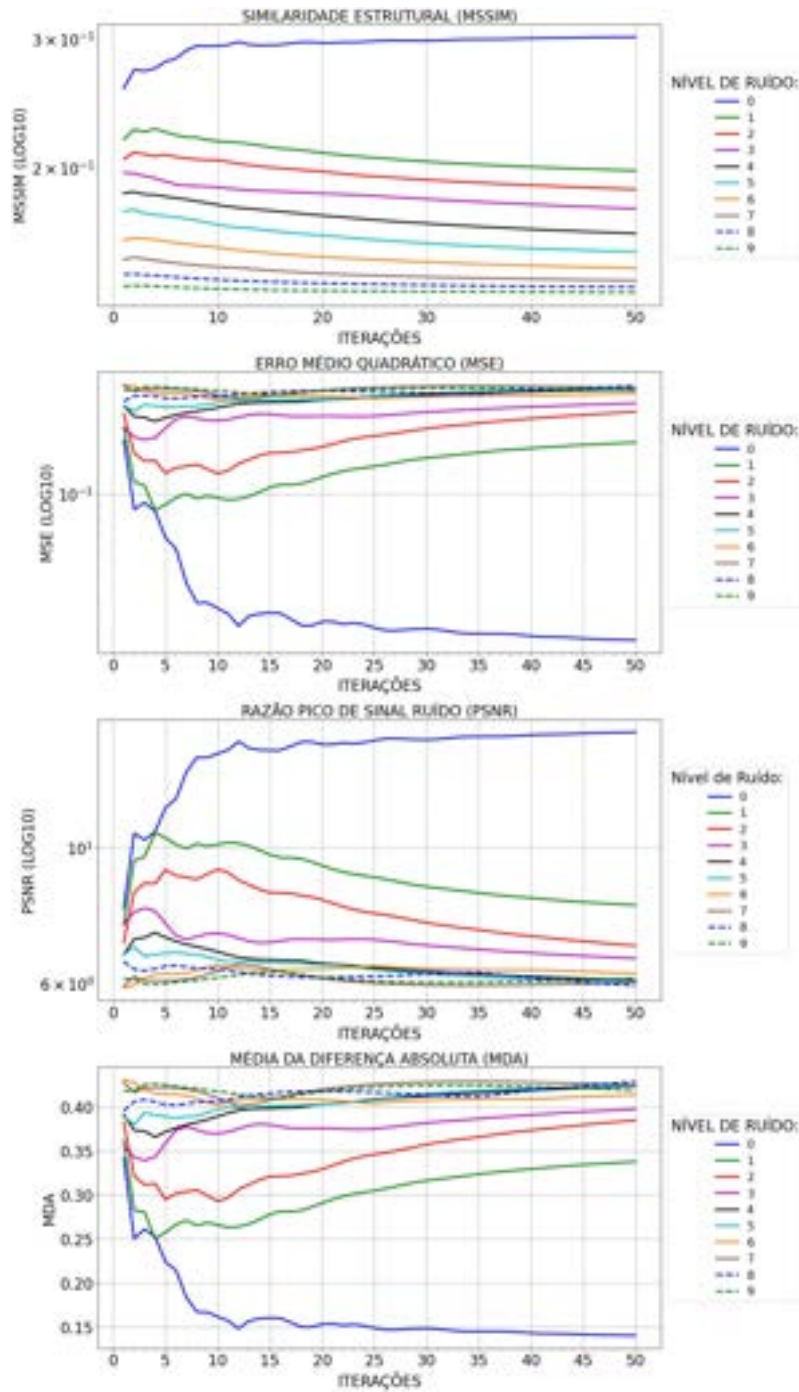


Figura 138 - ART com erro no Sinograma Phantom

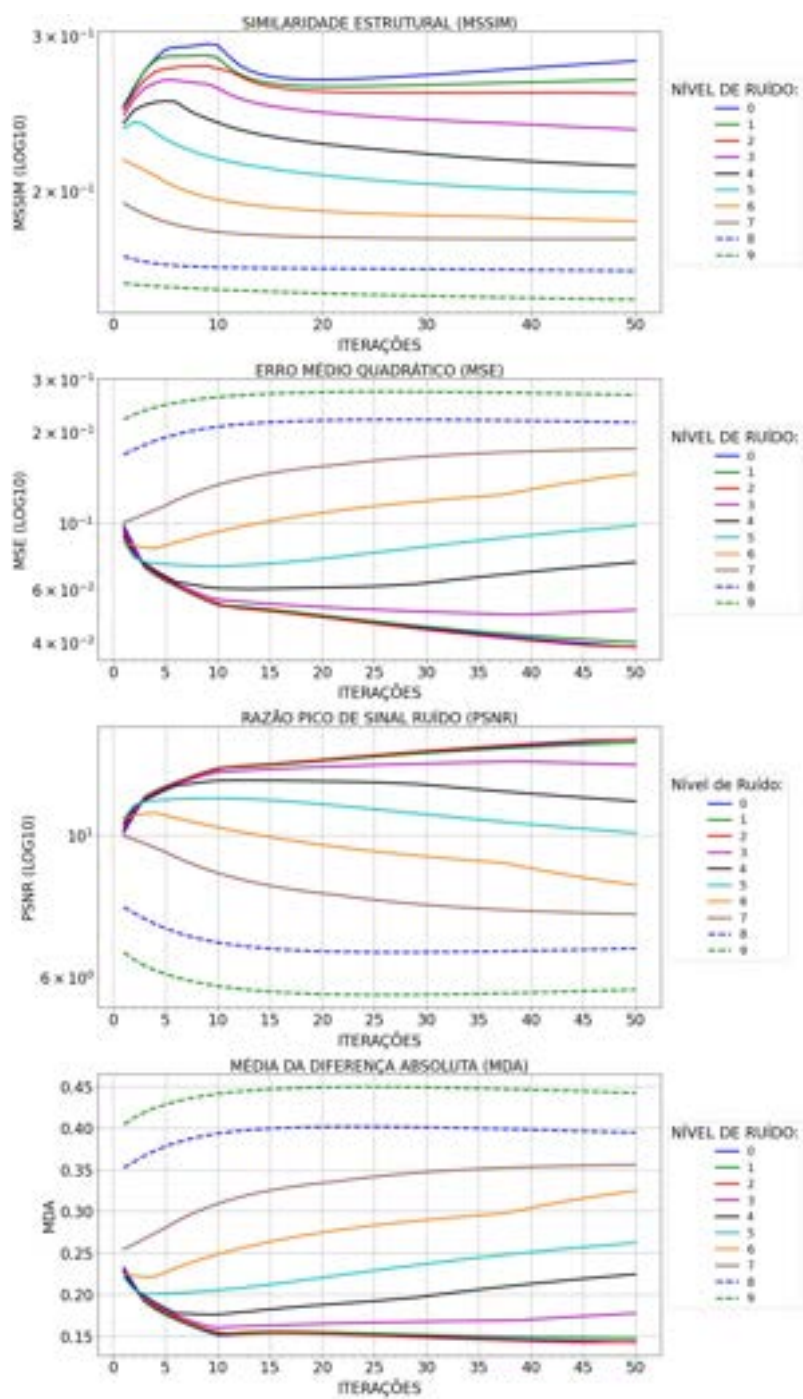


Figura 139 - SIRT com erro no Sinograma Phantom

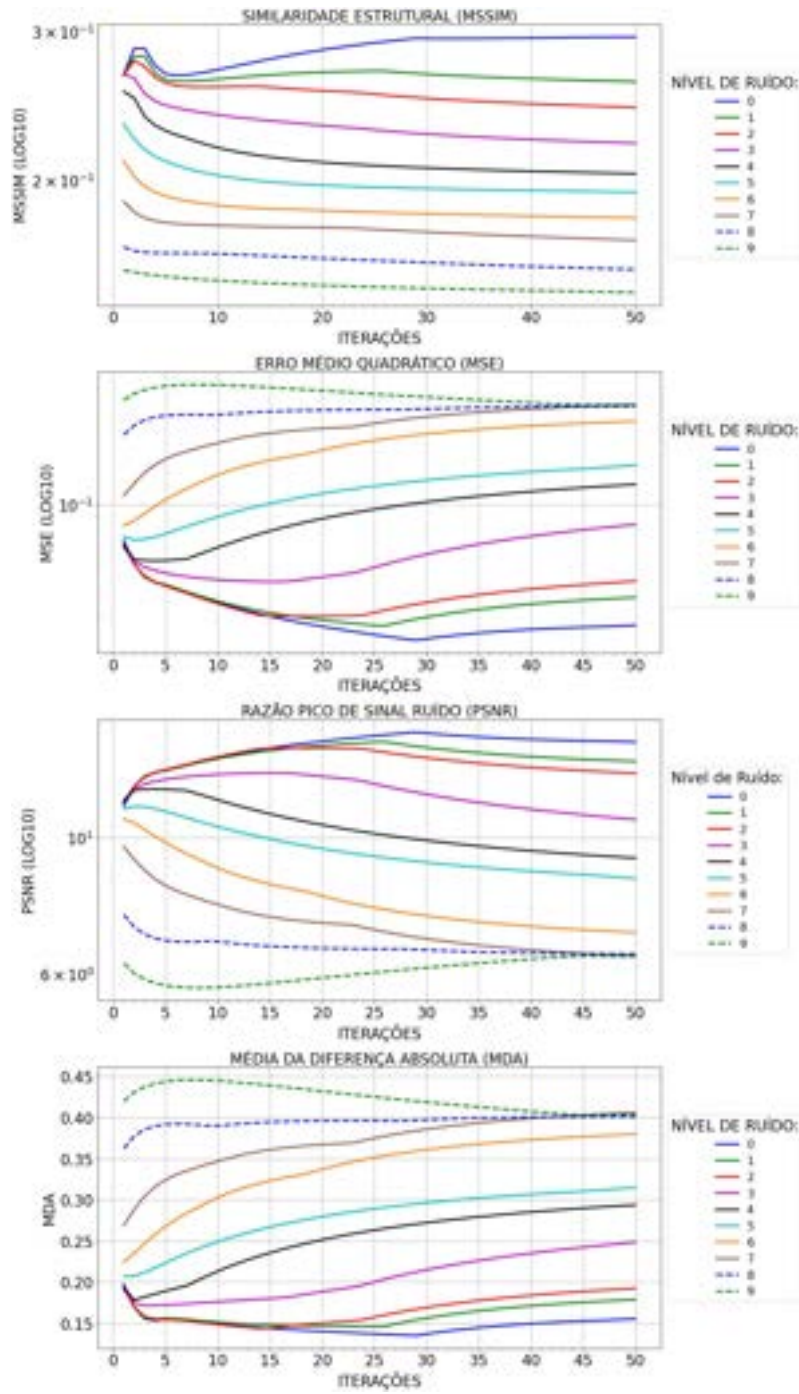


Figura 140 - BART com erro no Sinograma Phantom

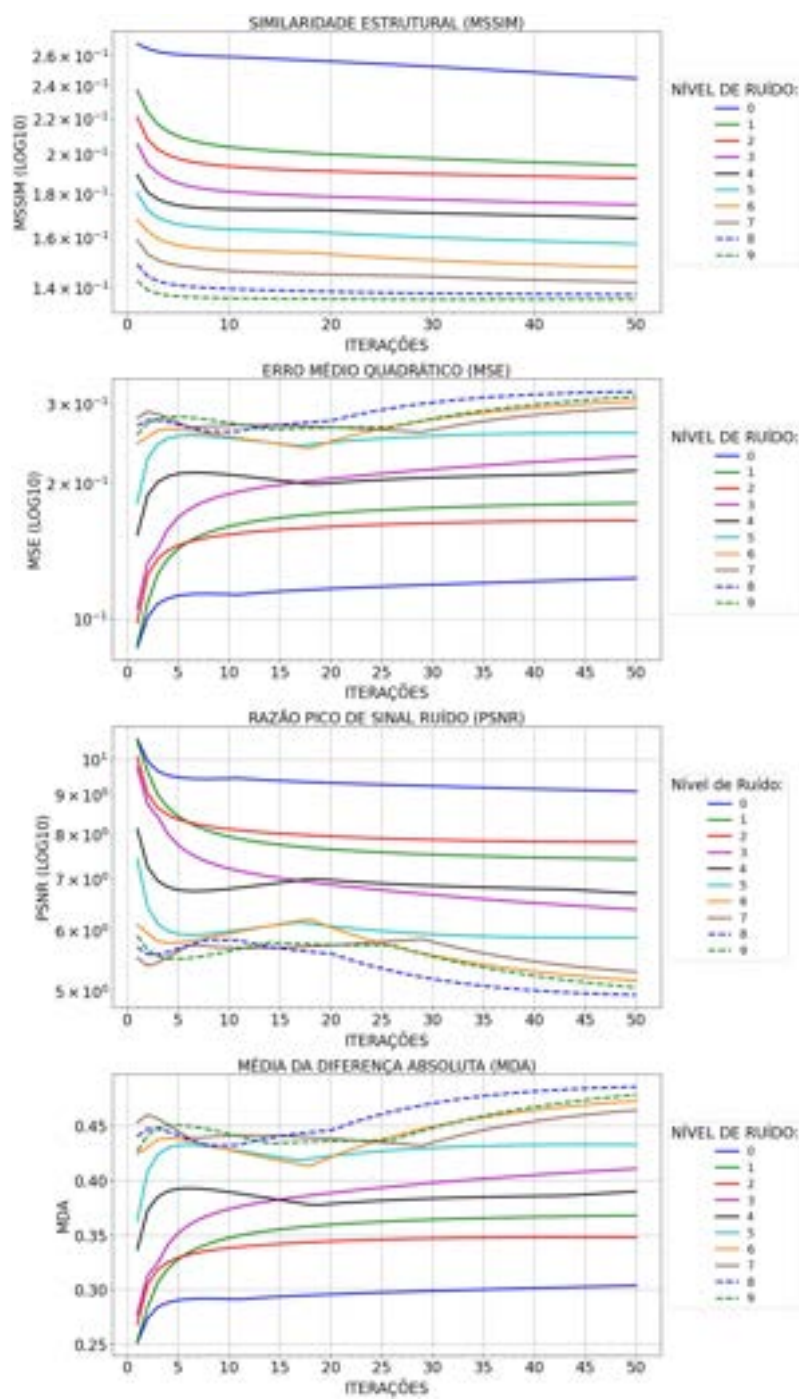


Figura 141 - SART com erro no Sinograma Phantom

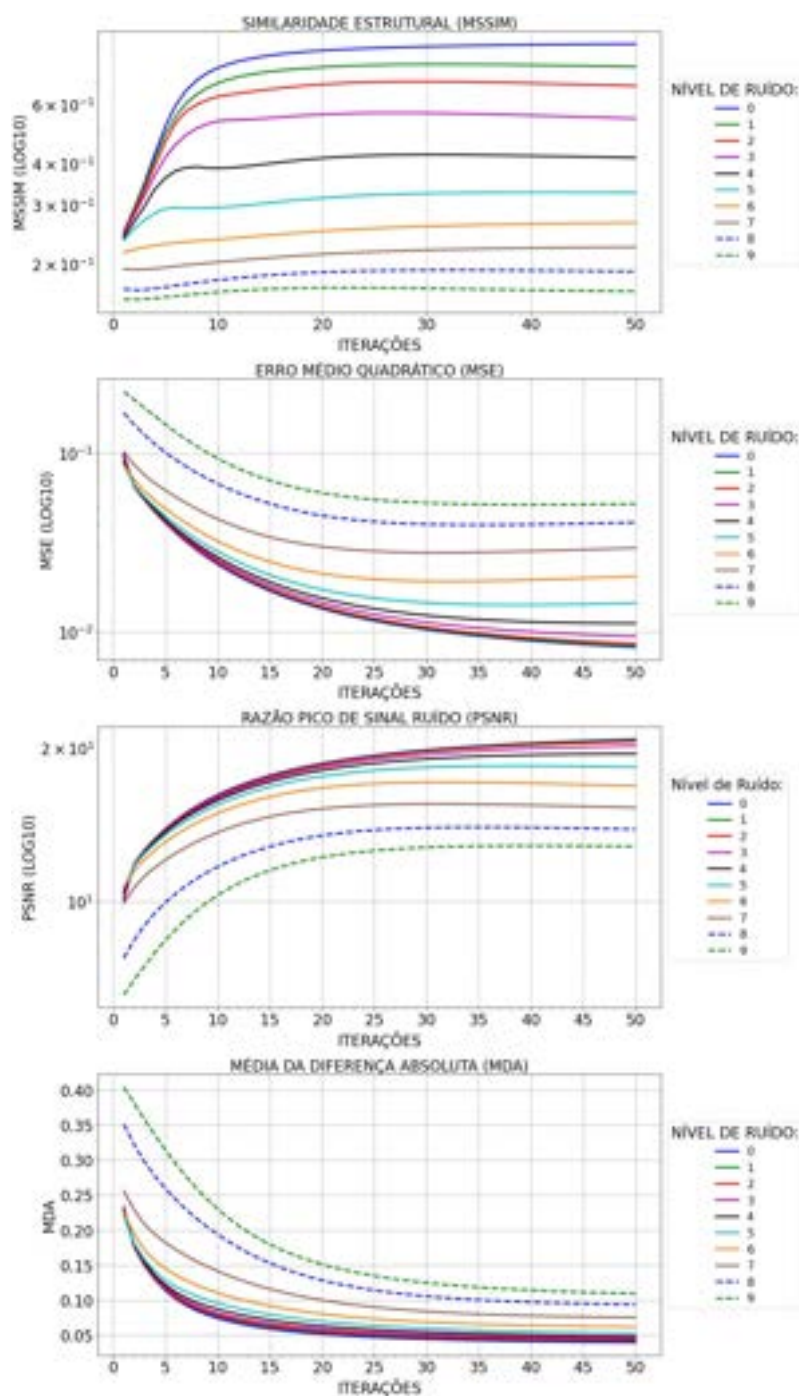


Figura 142 - MLEM com erro no Sinograma Phantom

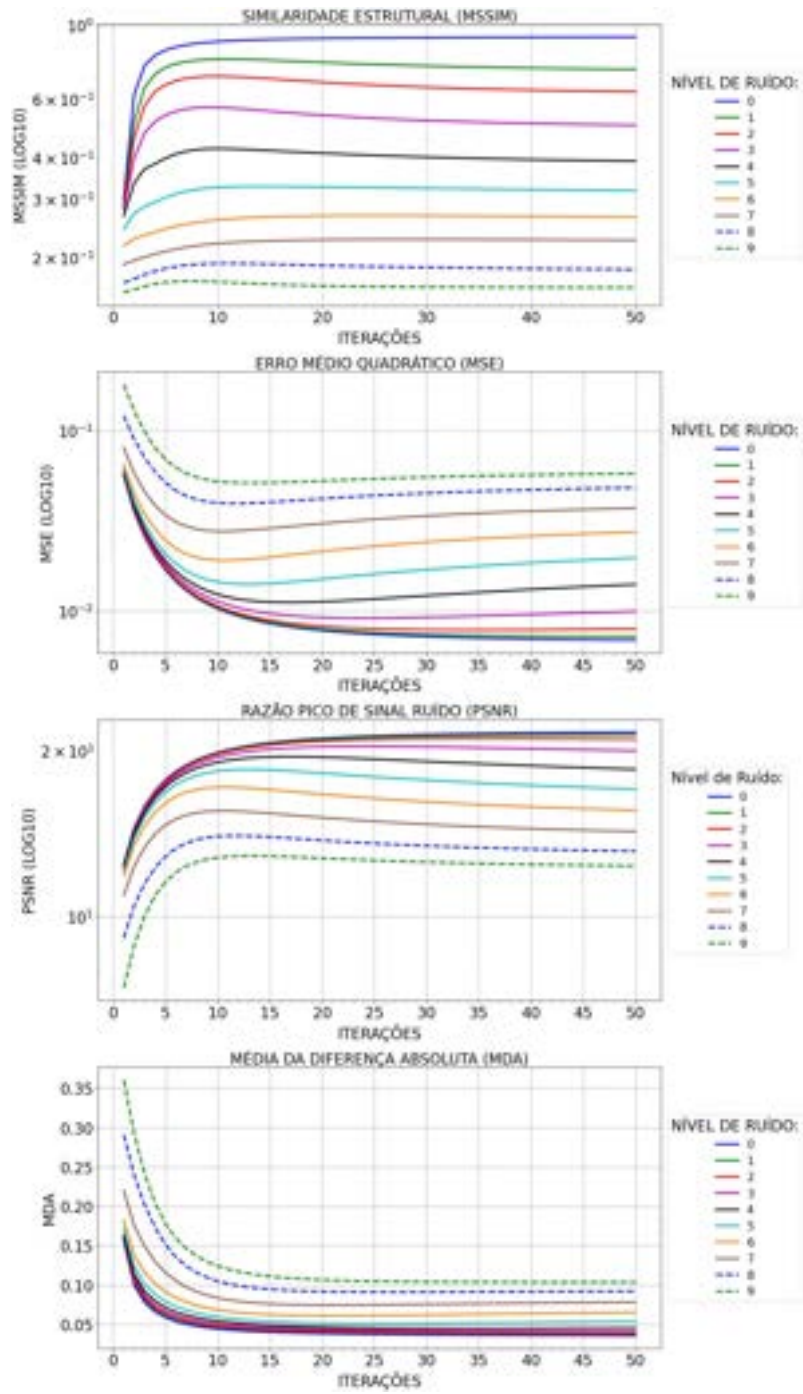


Figura 143 - OSEM com erro no Sinograma Phantom

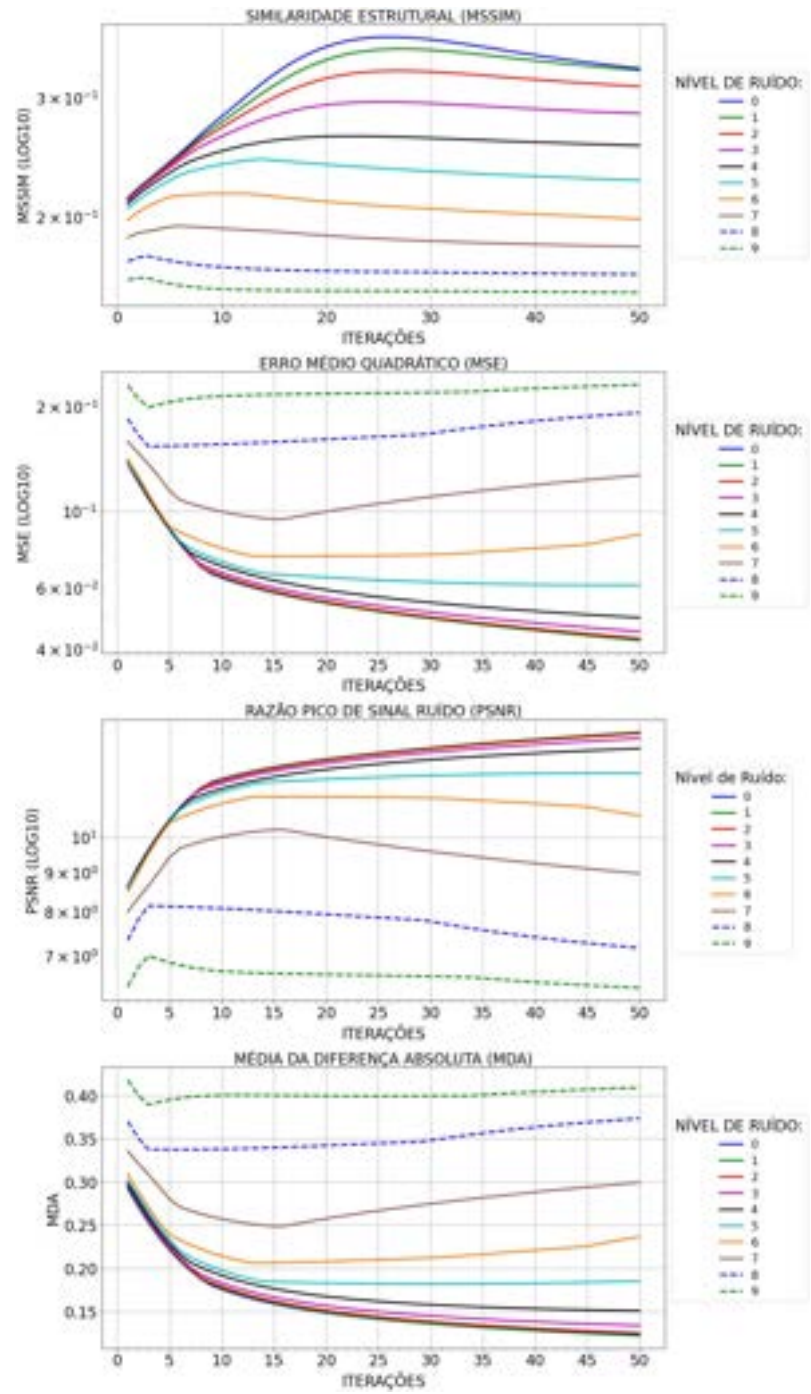


Figura 144 - TV com erro no Sinograma Phantom

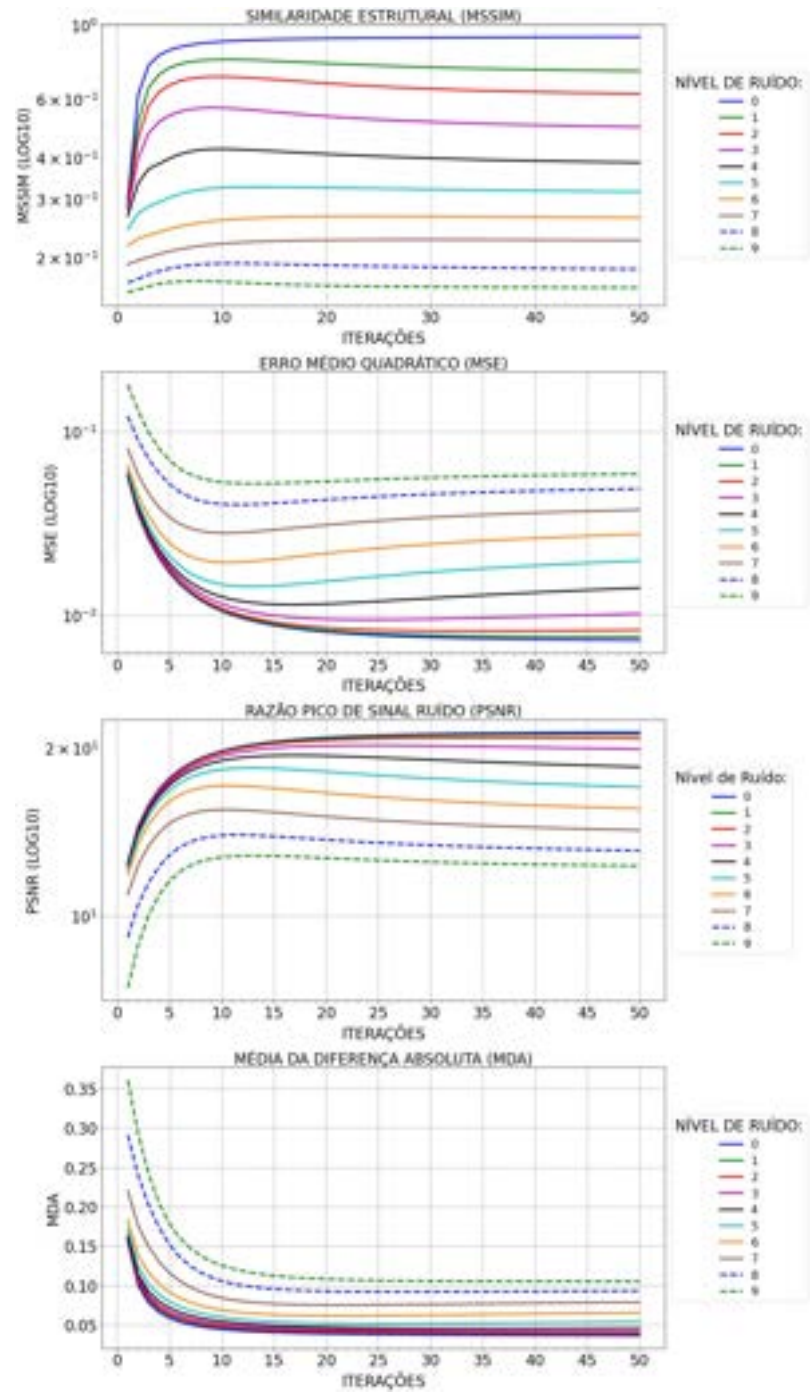


Figura 145 - OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom

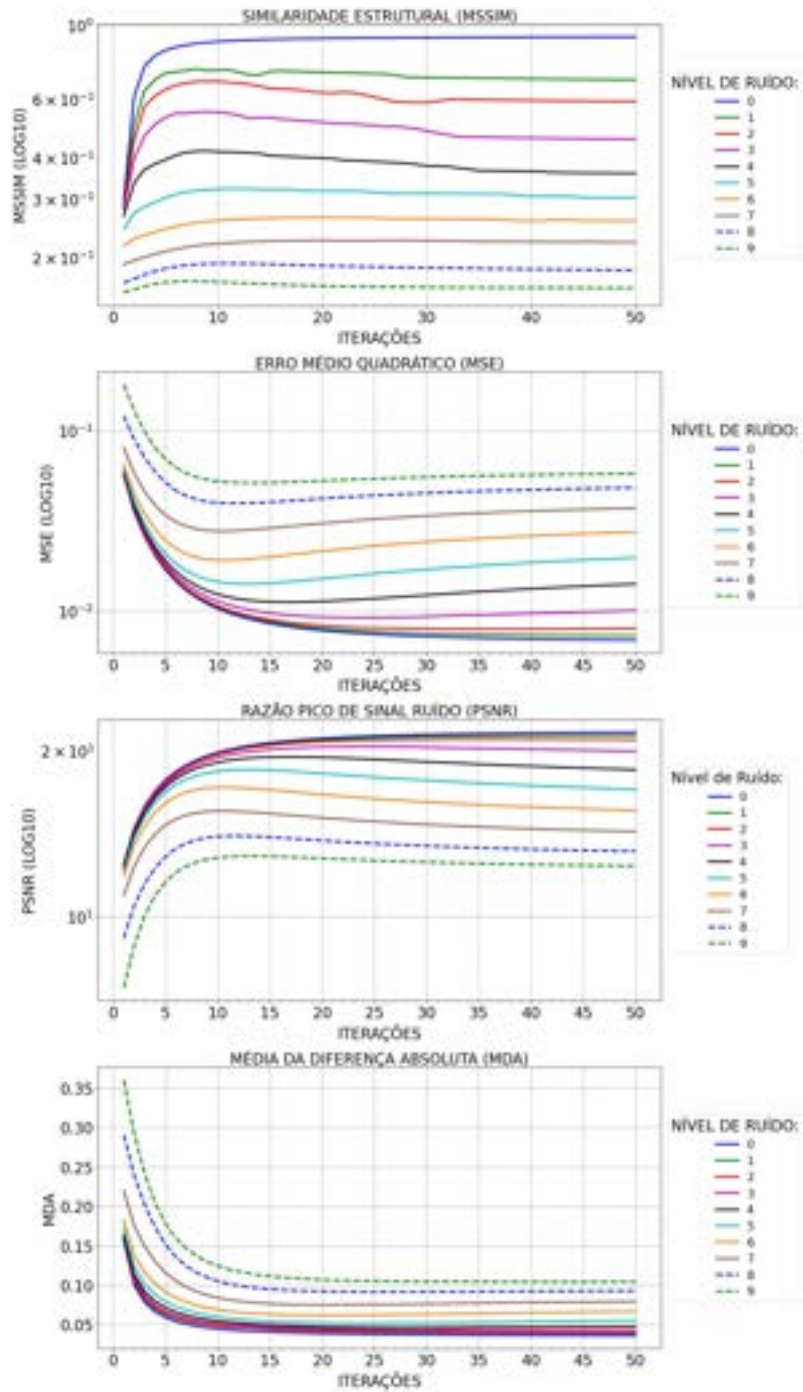


Figura 146 - OSPML-Quad com erro no Sinograma Phantom

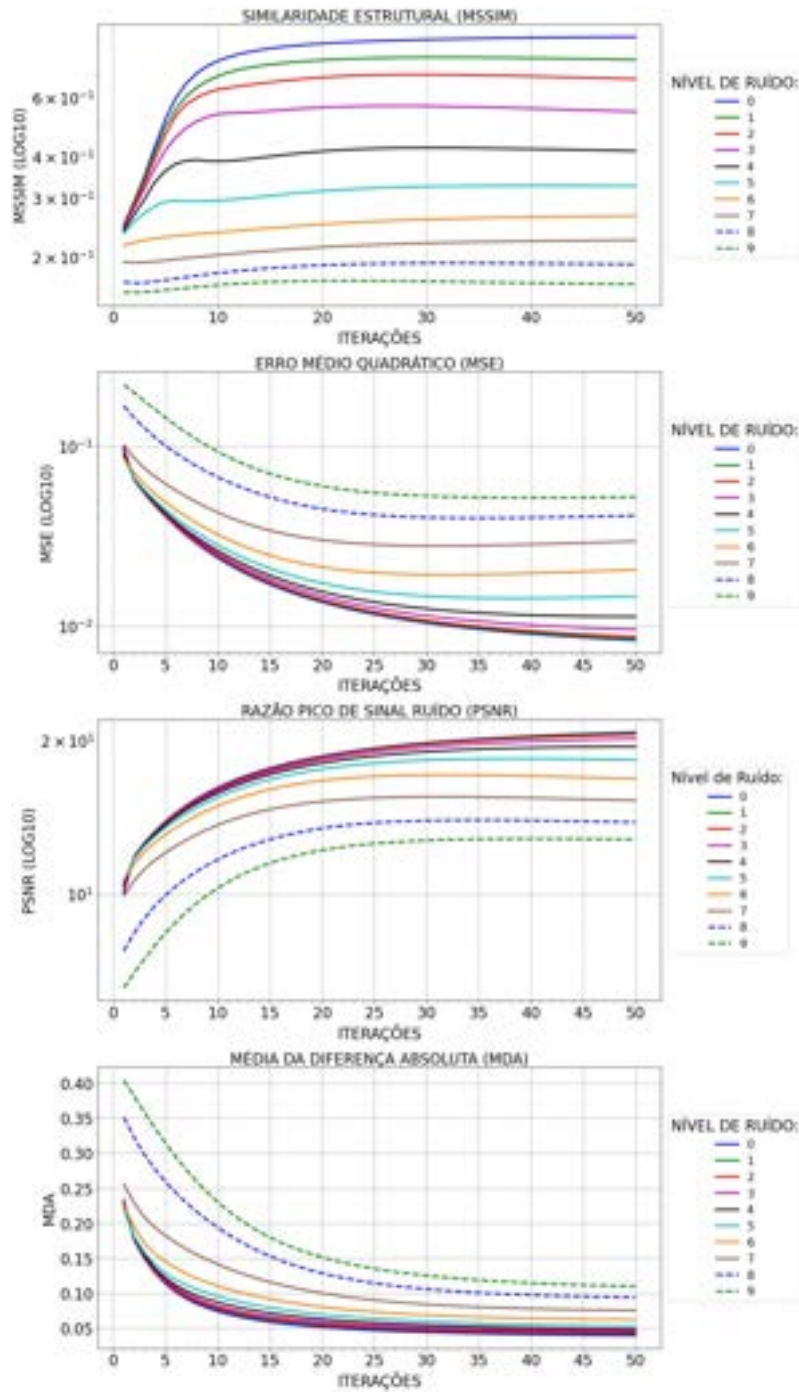


Figura 147 - PML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom

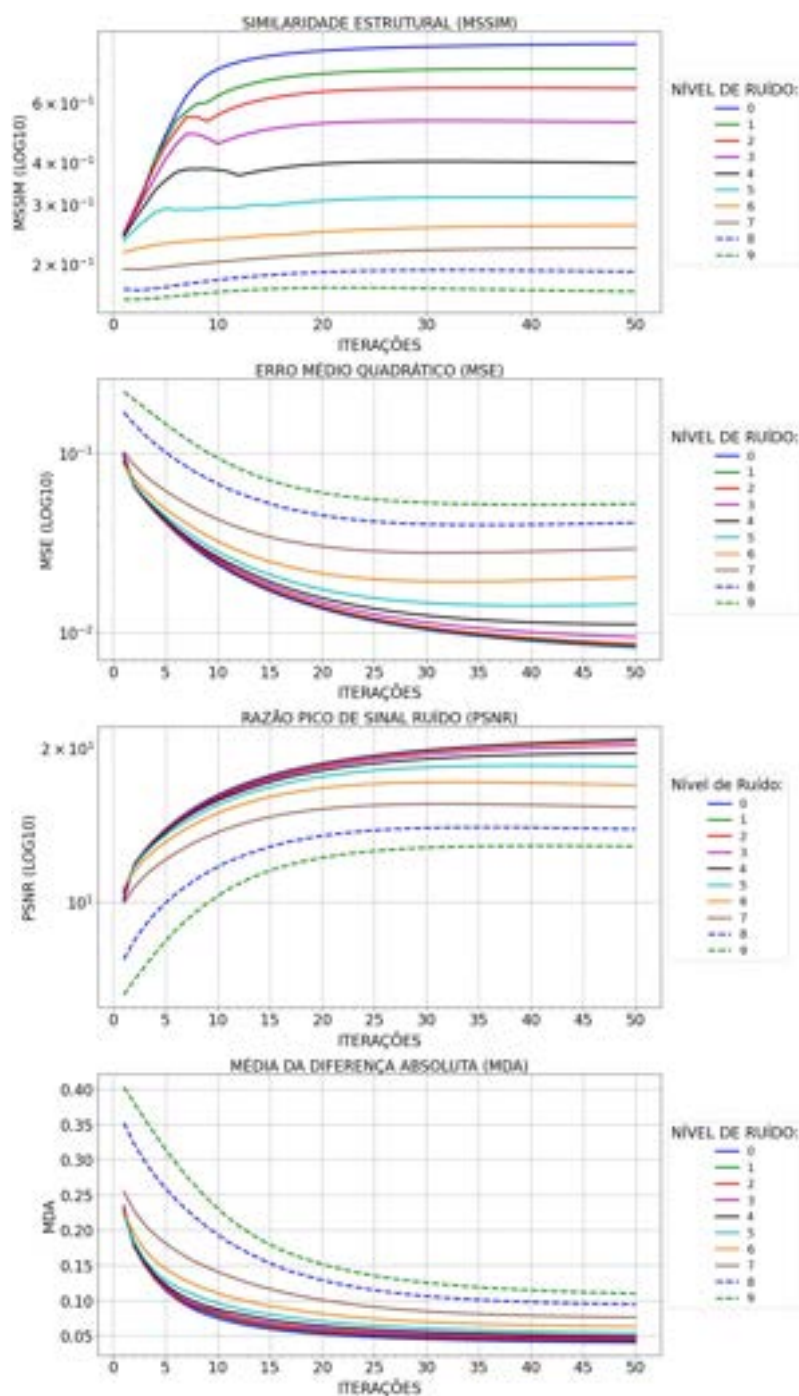


Figura 148 - PML-Quad com erro no Sinograma Phantom

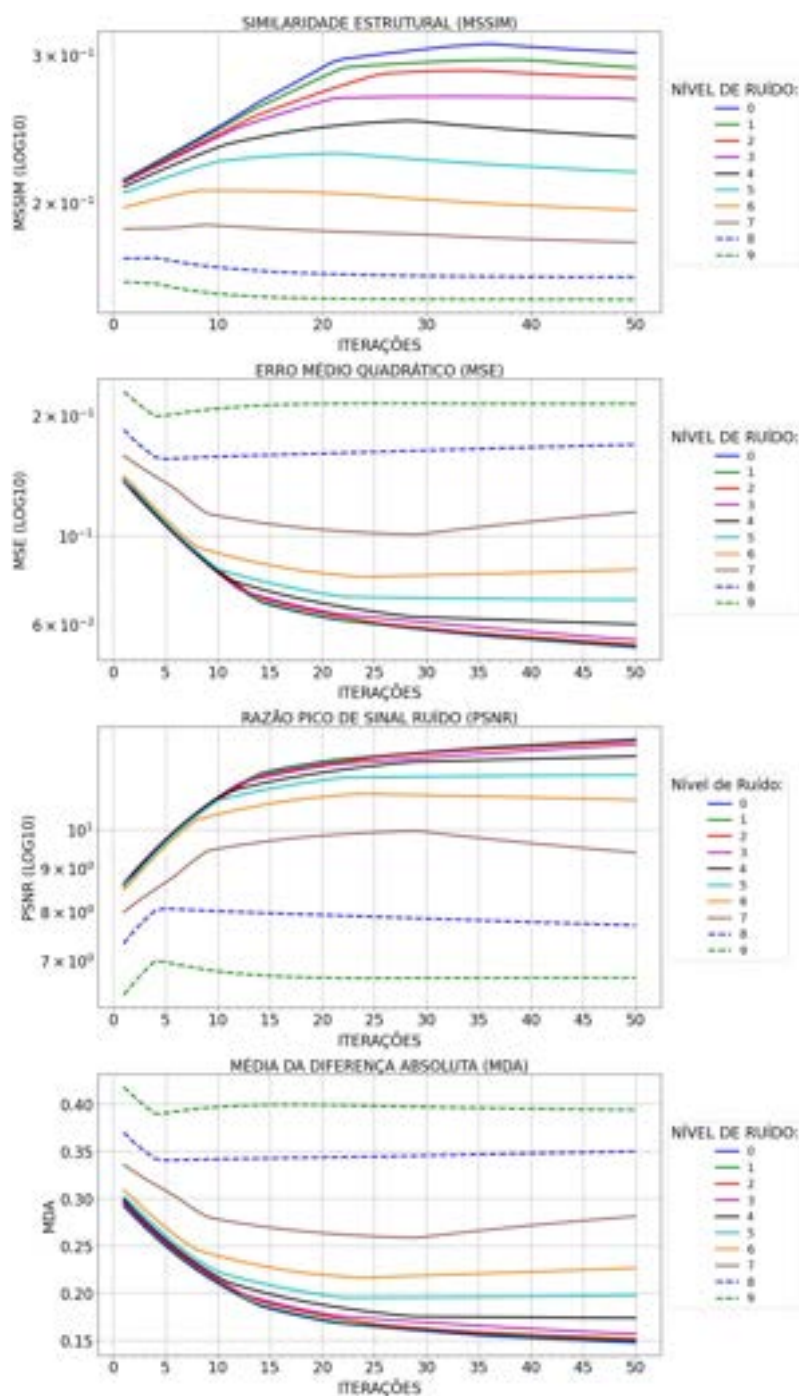


Figura 149 - TIKH com erro no Sinograma Phantom

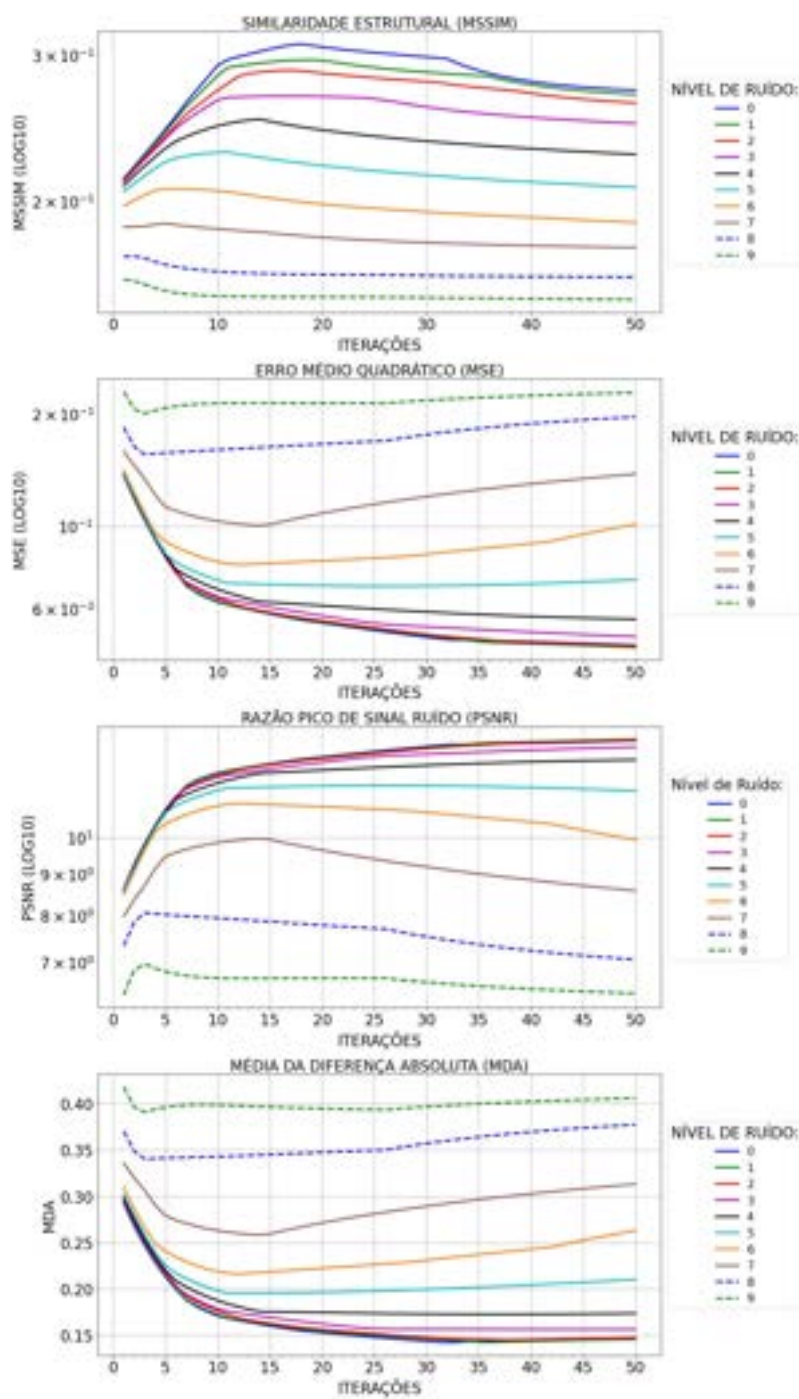


Figura 150 - GRAD com erro no Sinograma Phantom

B.3 Objeto-Alvo Horus

B.3.1 Adição de Erro no Objeto Horus

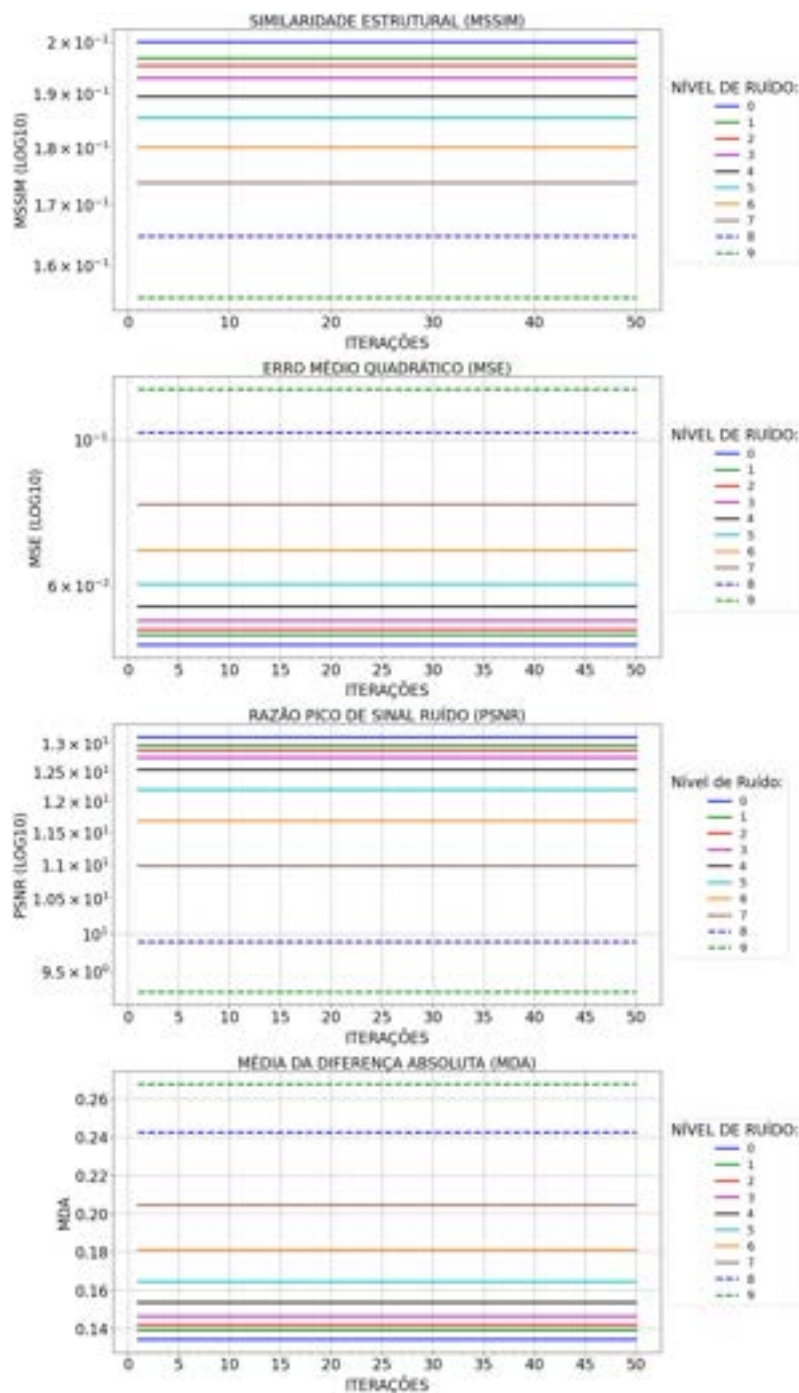


Figura 151 - CGLS com erro no Objeto Horus

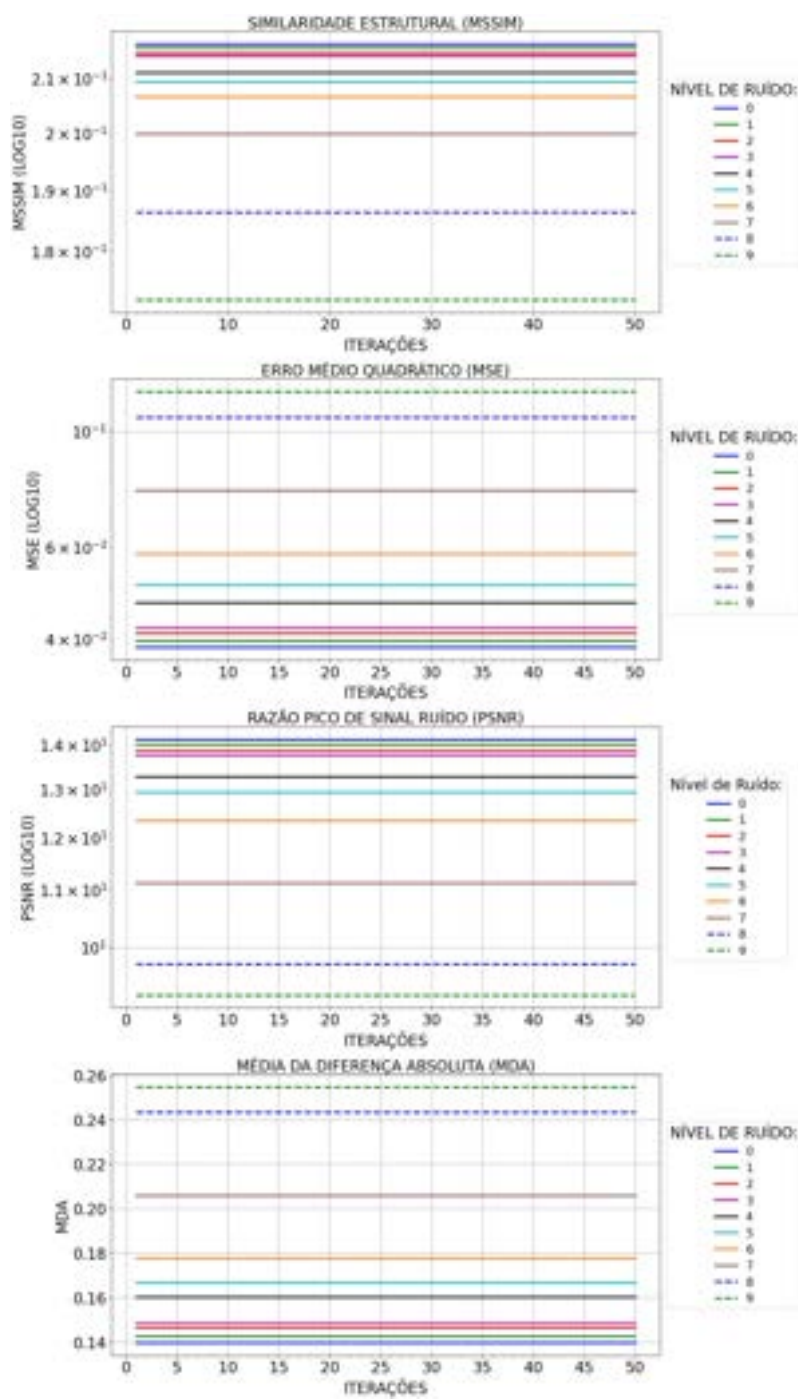


Figura 152 - FBP com erro no Objeto Horus

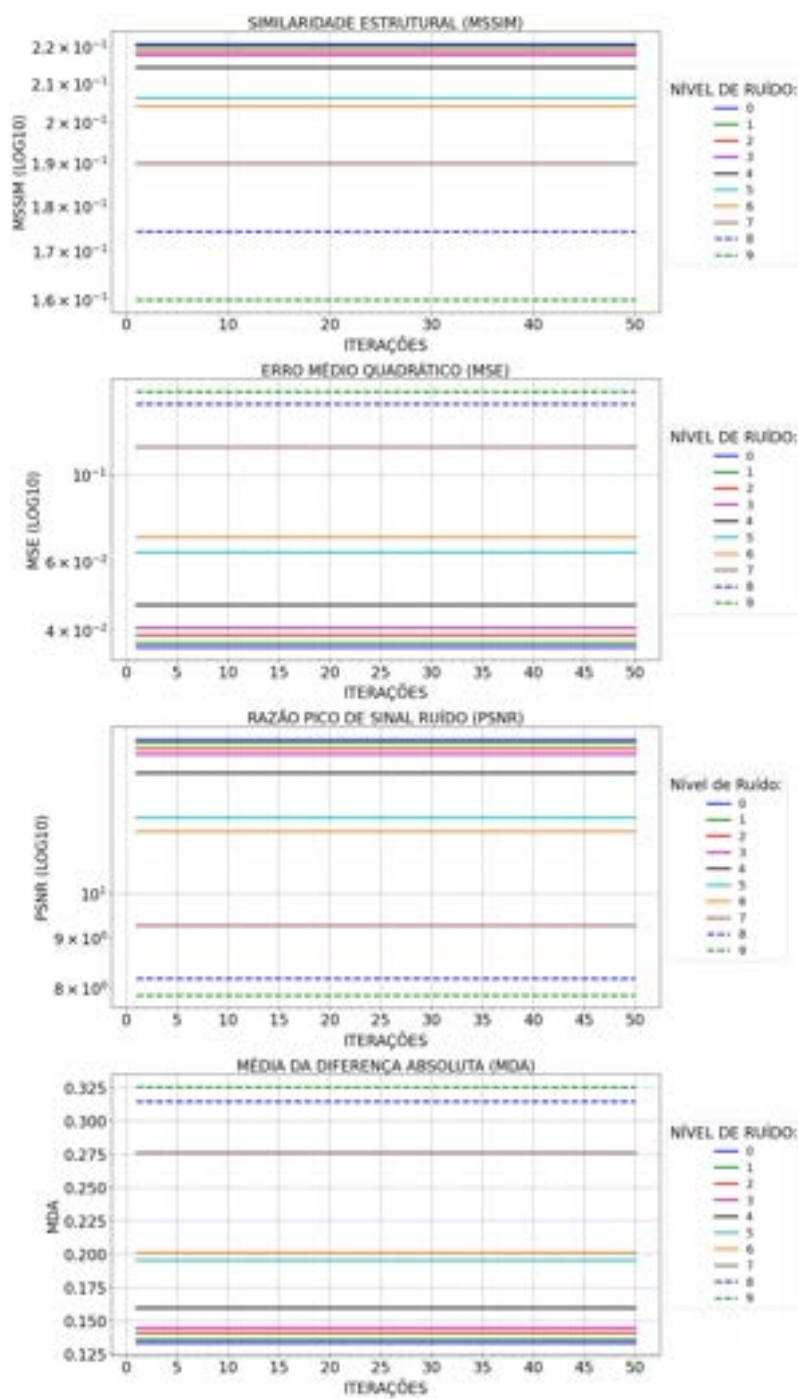


Figura 153 - GRIDREC com erro no Objeto Horus

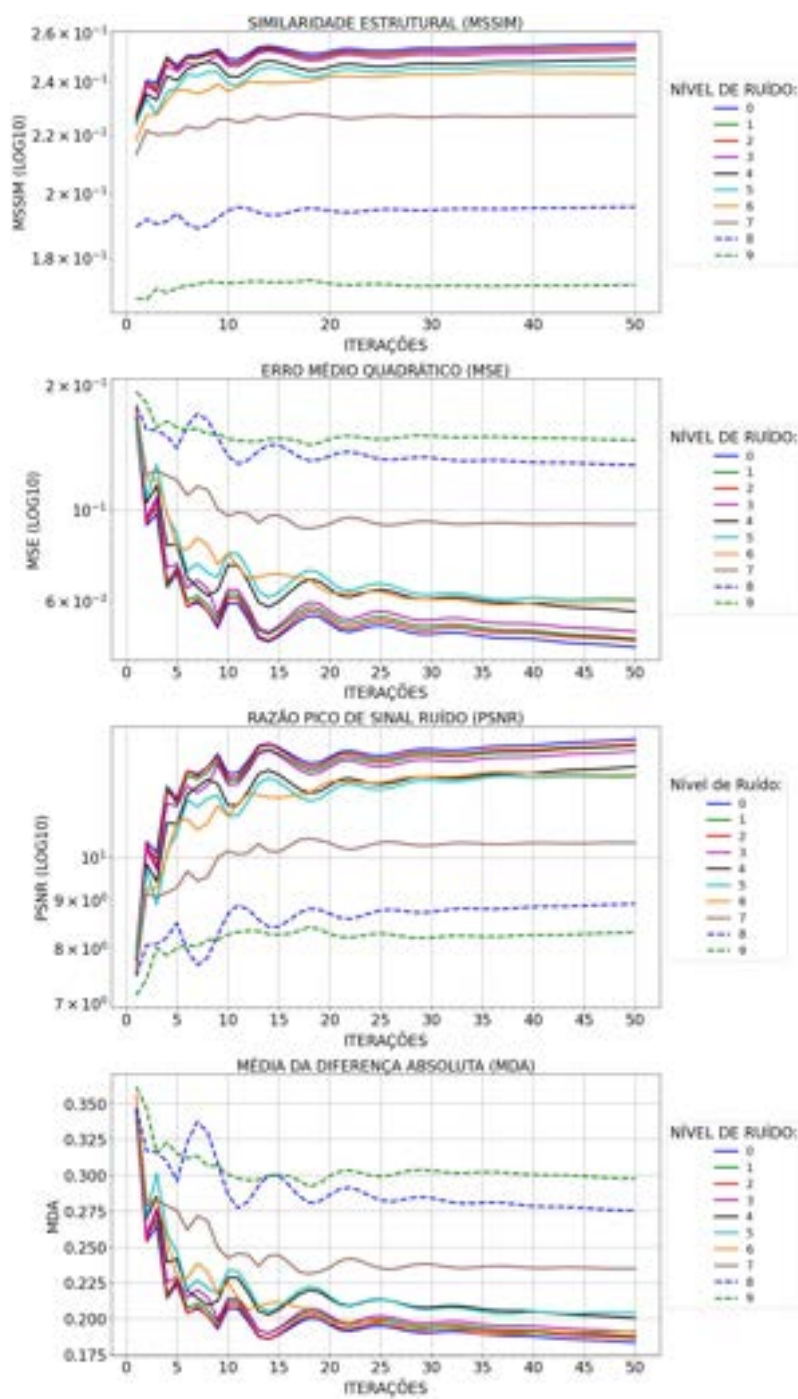


Figura 154 - ART com erro no Objeto Horus

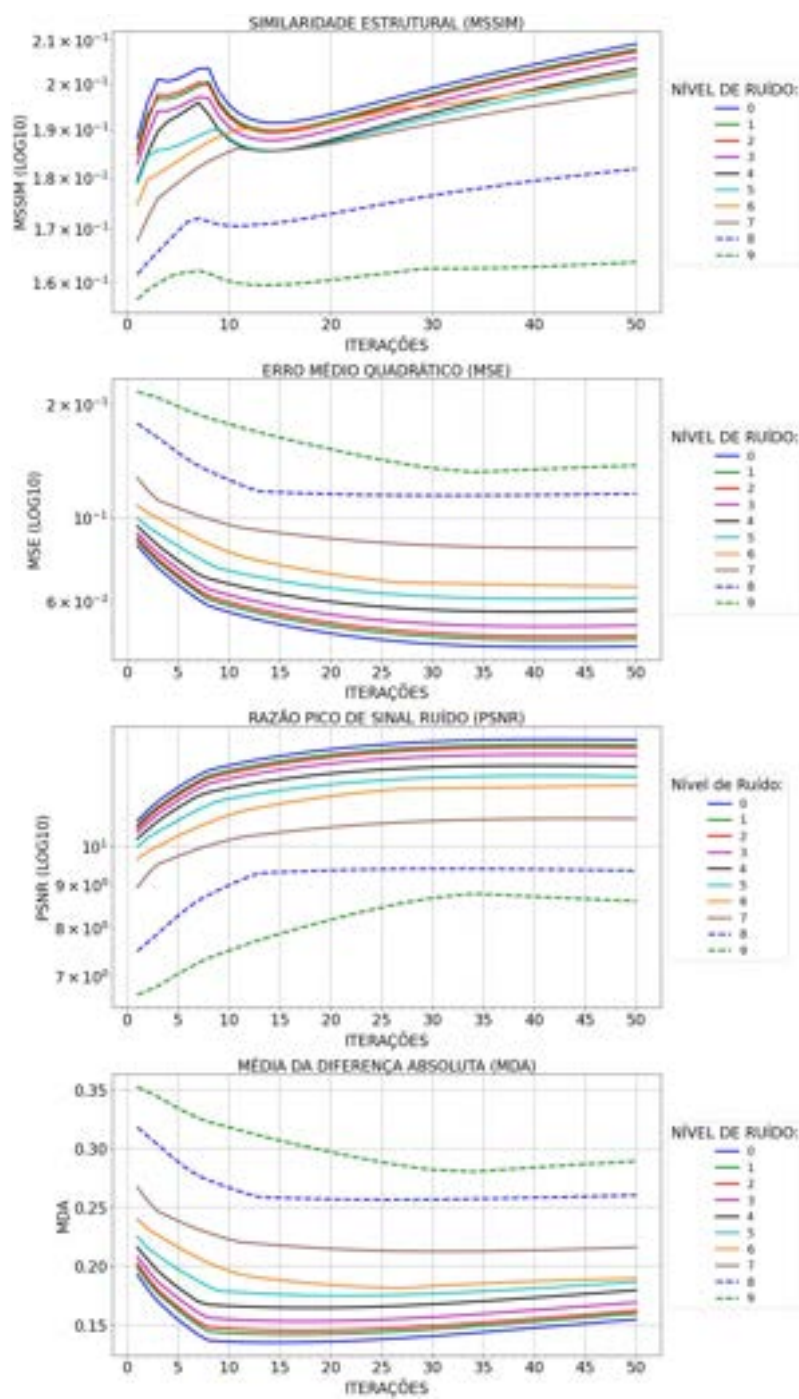


Figura 155 - SIRT com erro no Objeto Horus

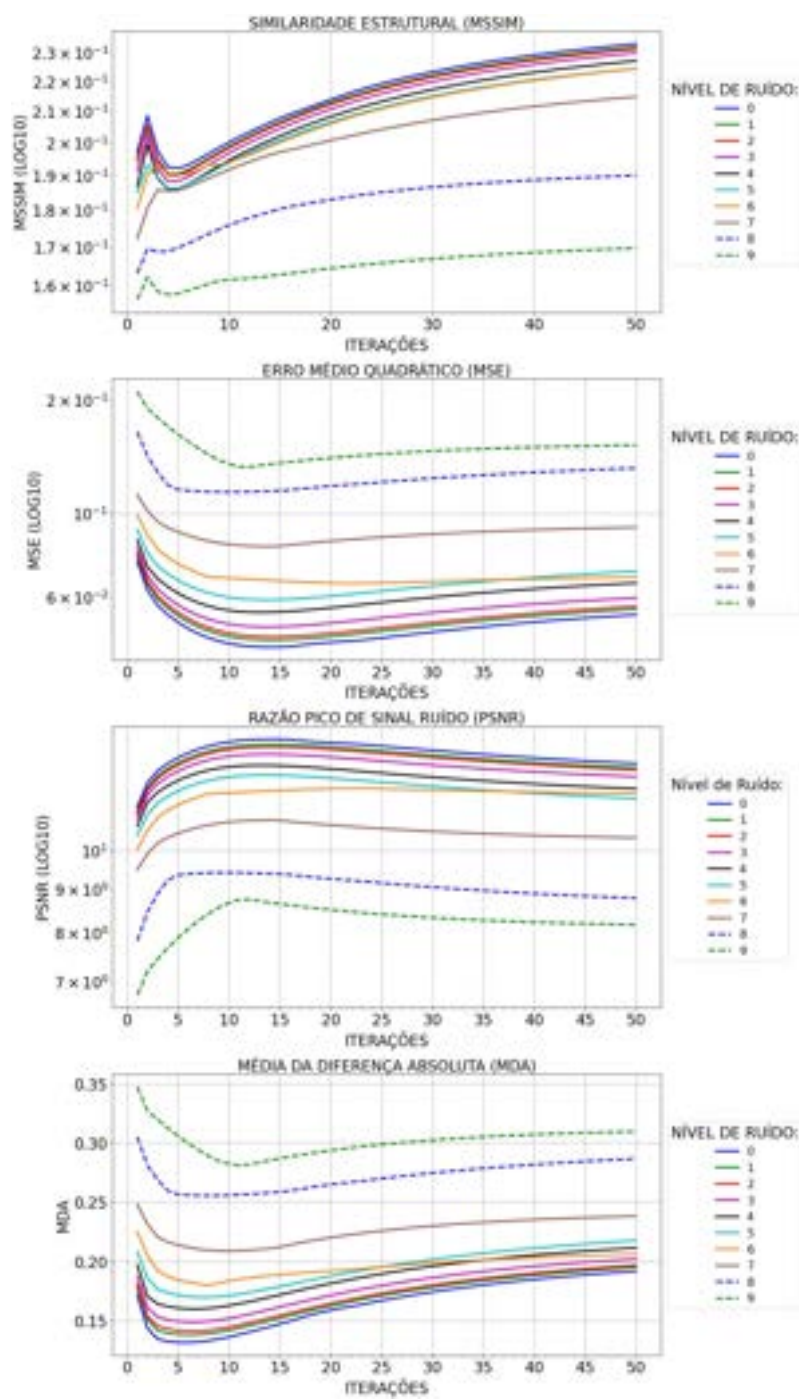


Figura 156 - BART com erro no Objeto Horus

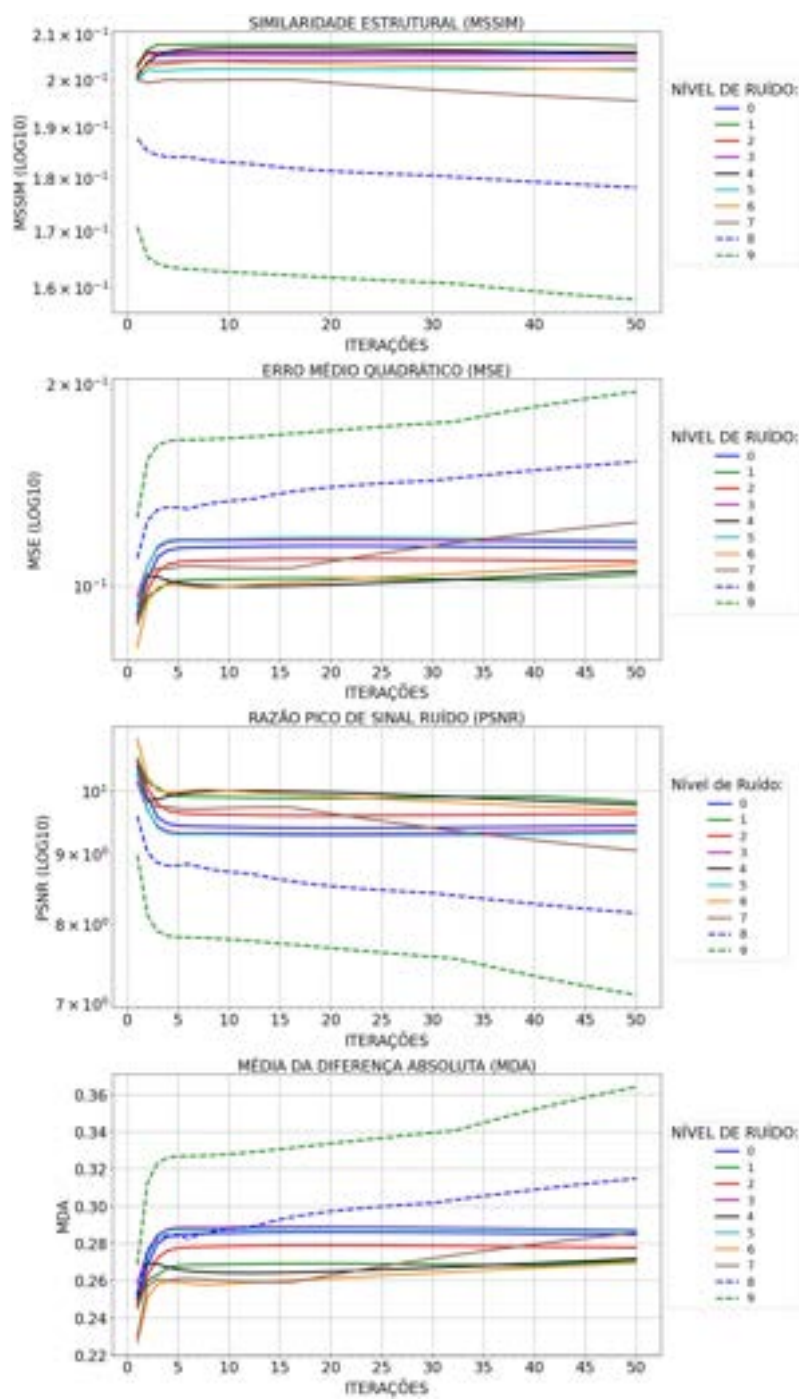


Figura 157 - SART com erro no Objeto Horus

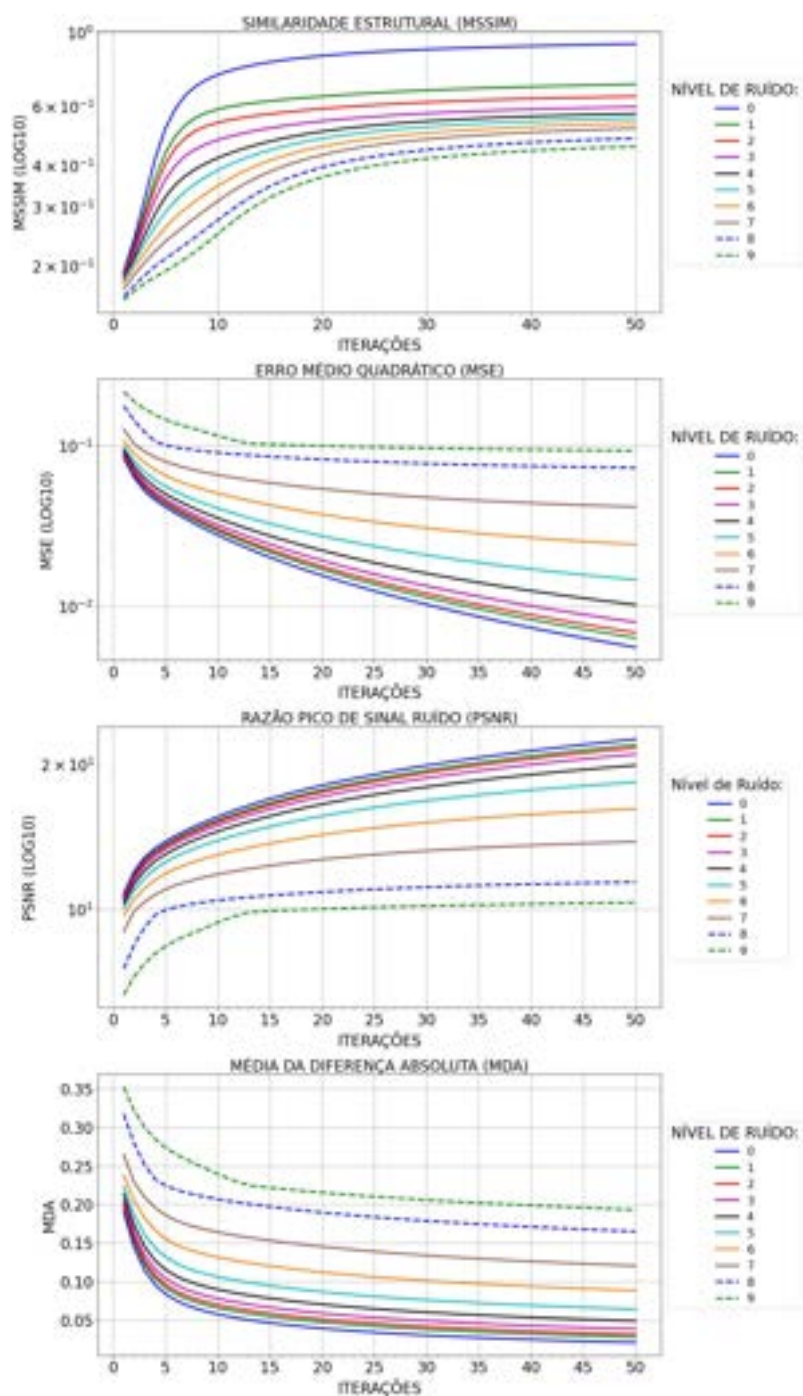


Figura 158 - MLEM com erro no Objeto Horus

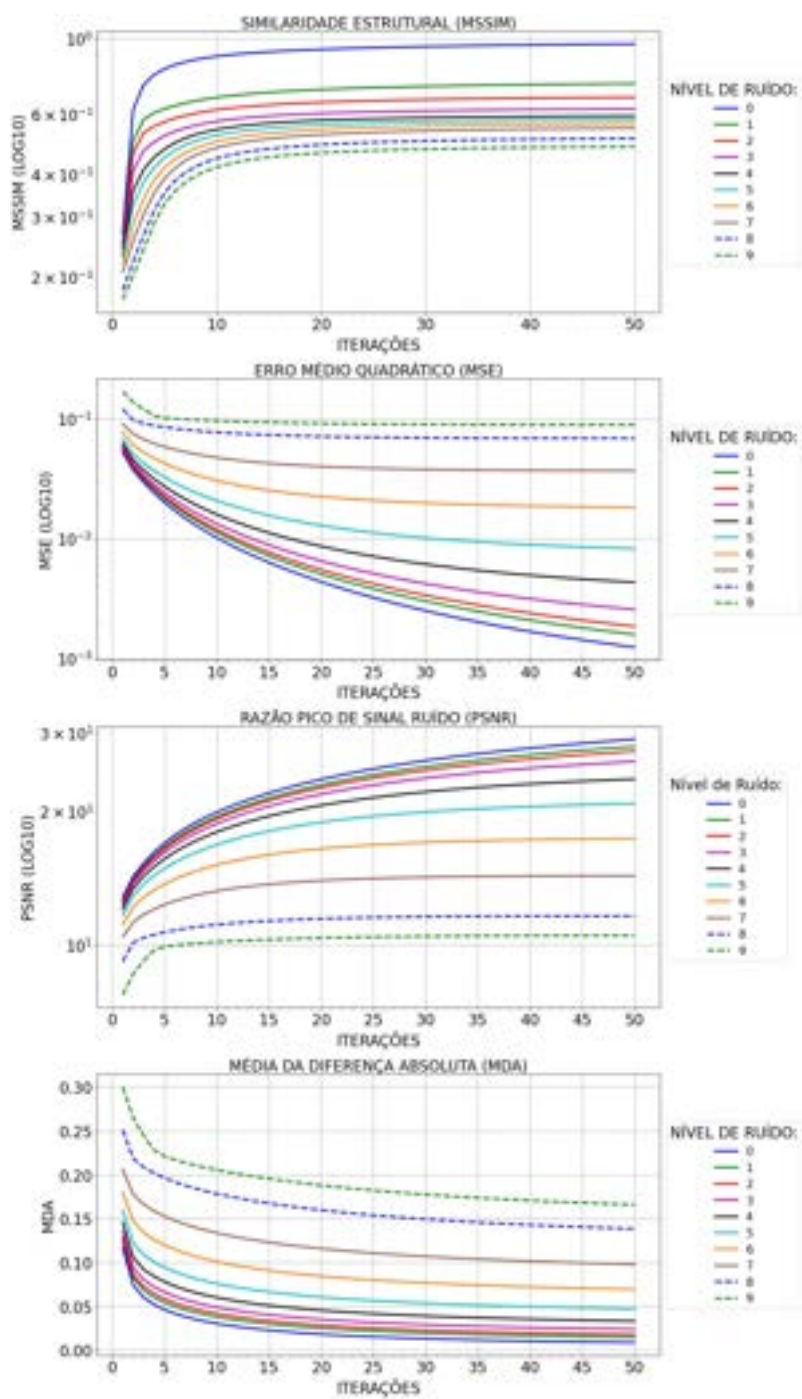


Figura 159 - OSEM com erro no Objeto Horus

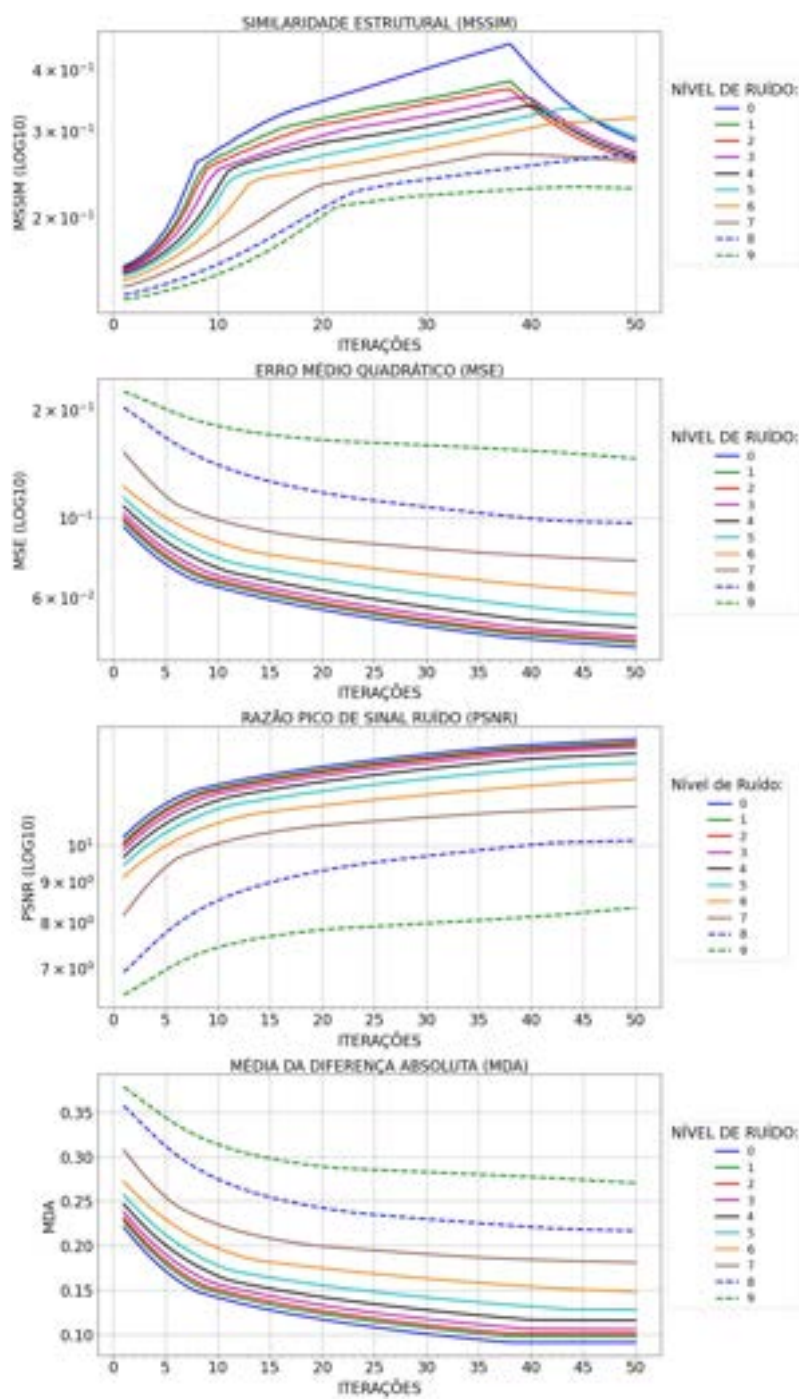


Figura 160 - TV com erro no Objeto Horus

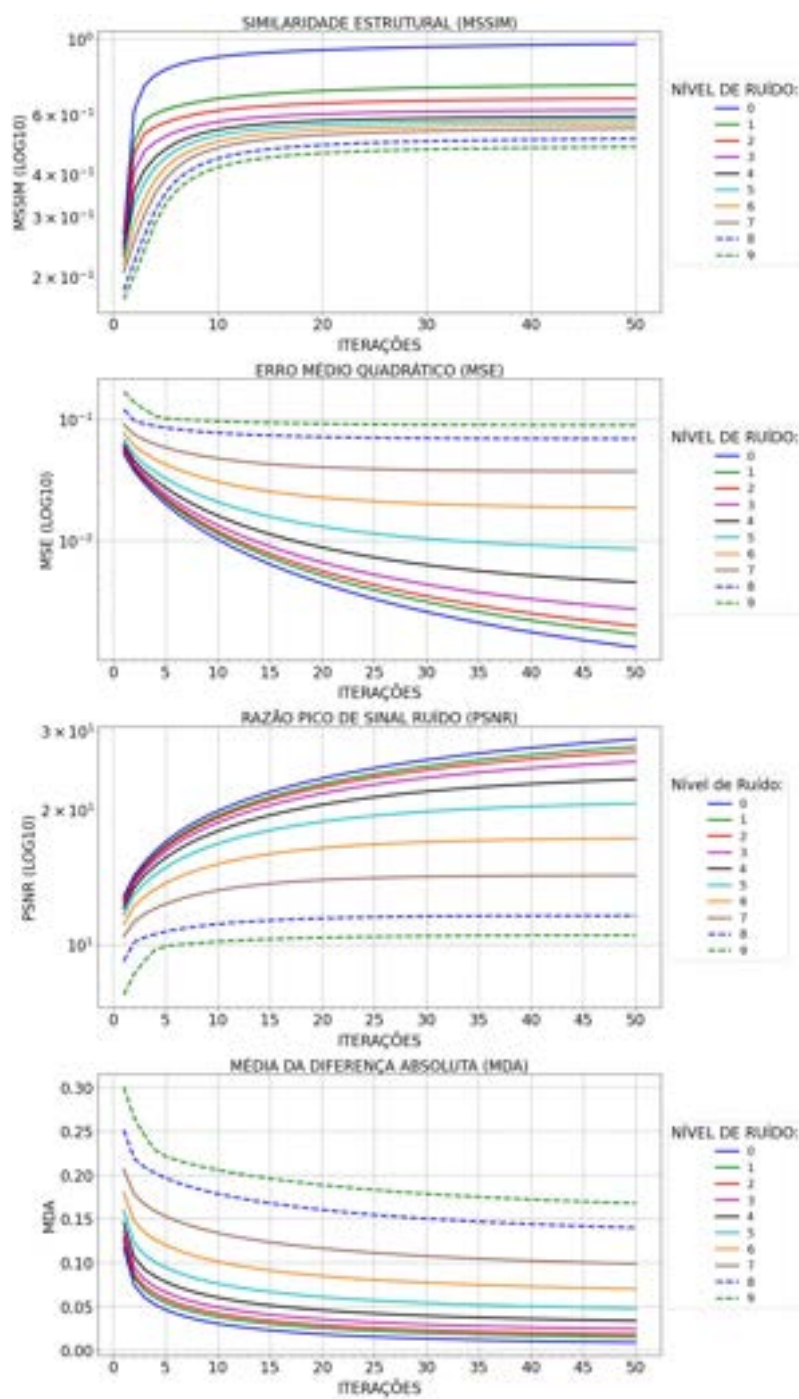


Figura 161 - OSPML-Hybrid com erro no Objeto Horus

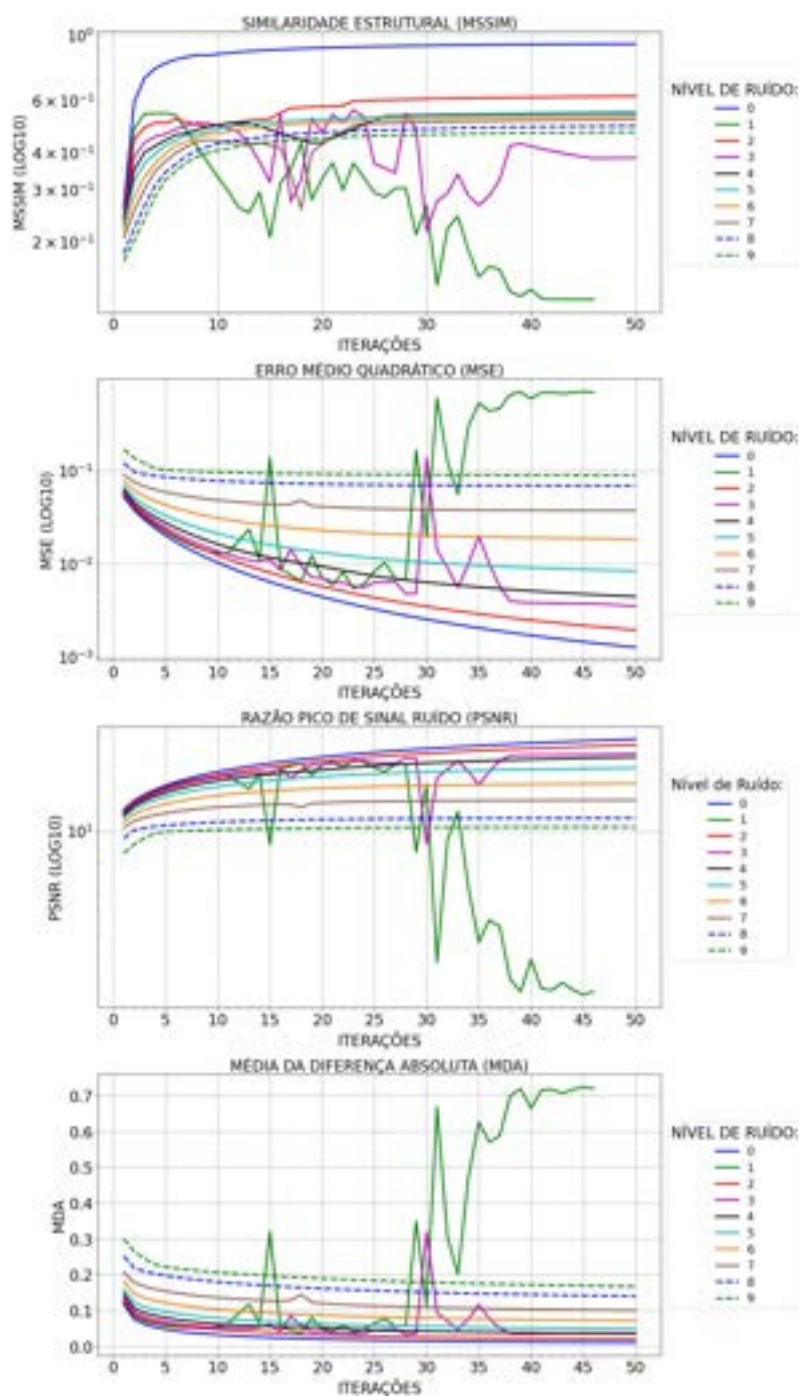


Figura 162 - OSPML-Quad com erro no Objeto Horus

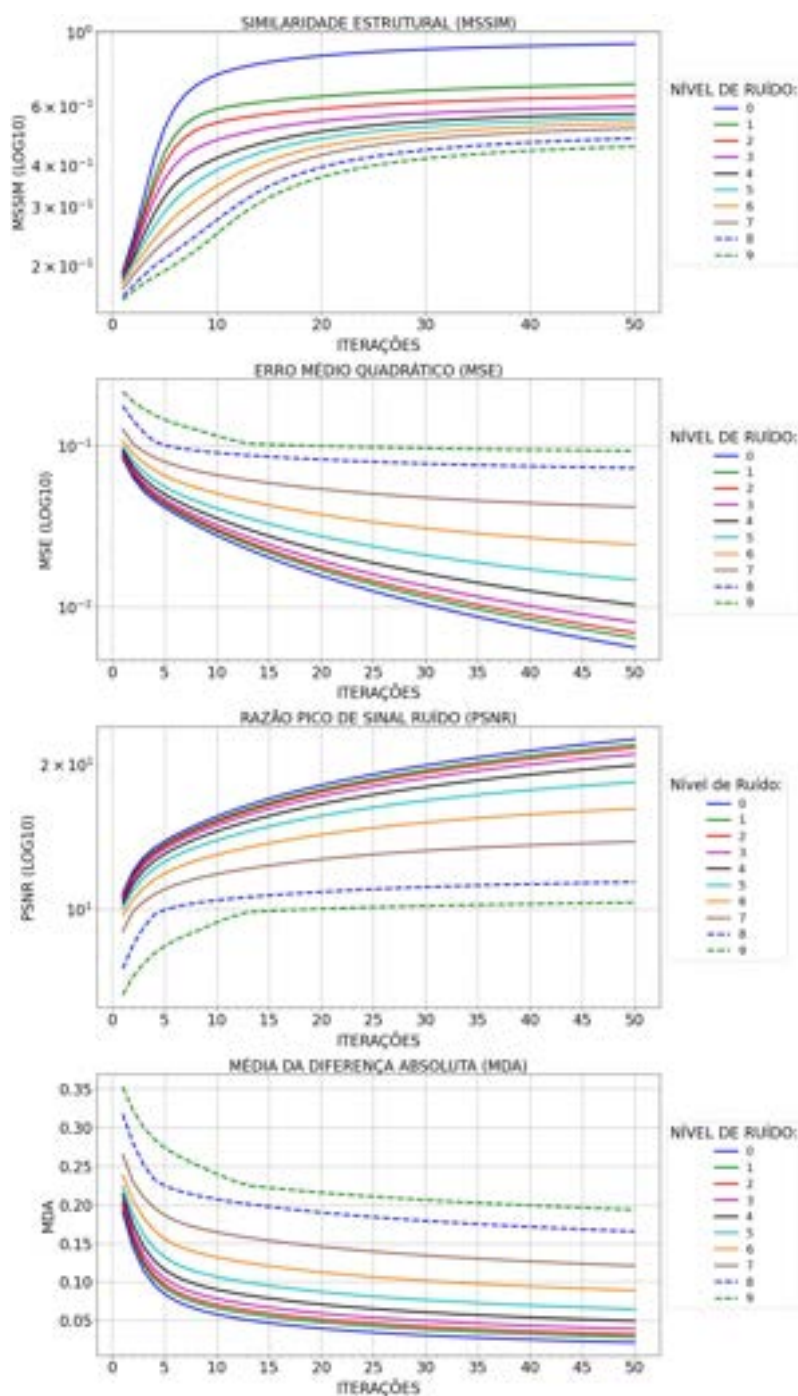


Figura 163 - PML-Hybrid com erro no Objeto Horus

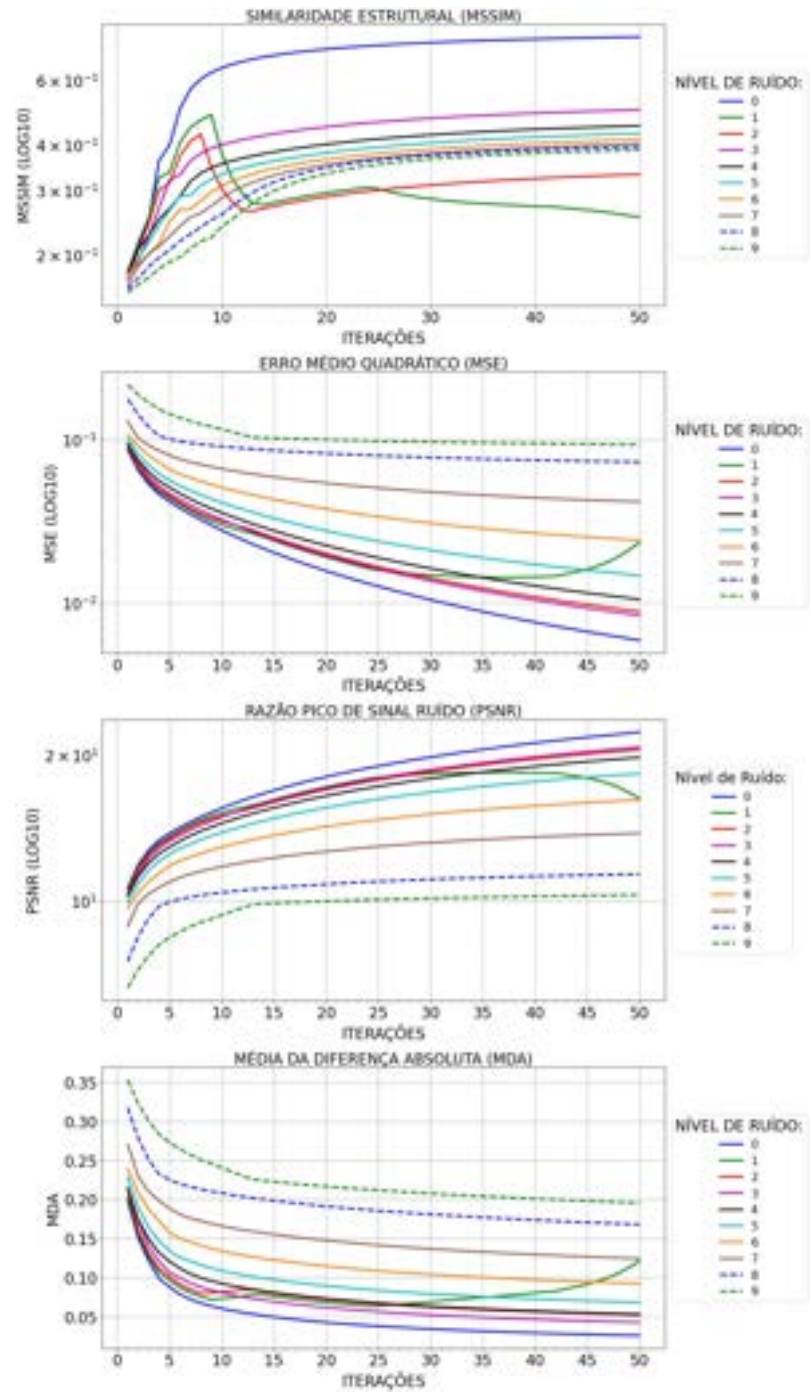


Figura 164 - PML-Quad com erro no Objeto Horus

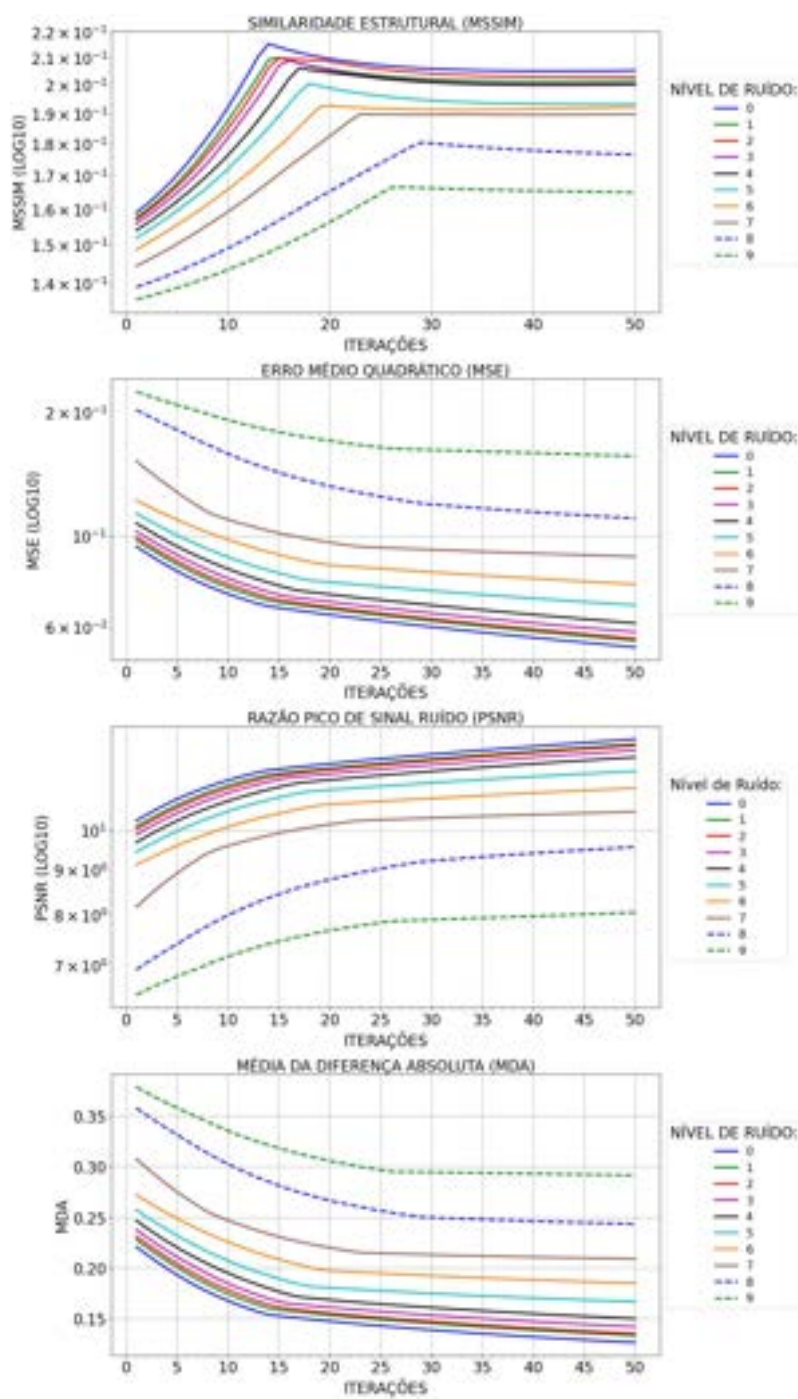


Figura 165 - TIKH com erro no Objeto Horus

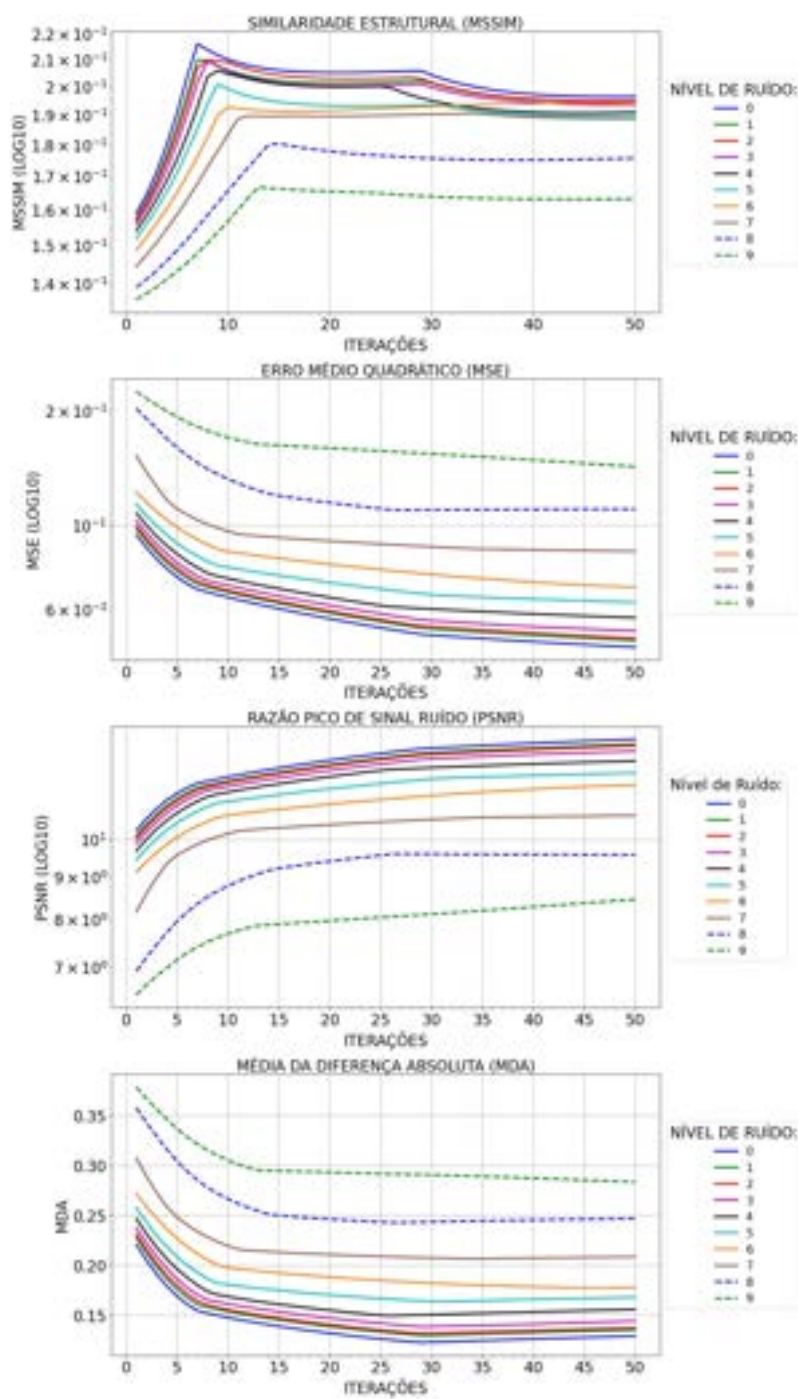


Figura 166 - GRAD com erro no Objeto Horus

B.3.2 Adição de Erro no Sinograma Horus

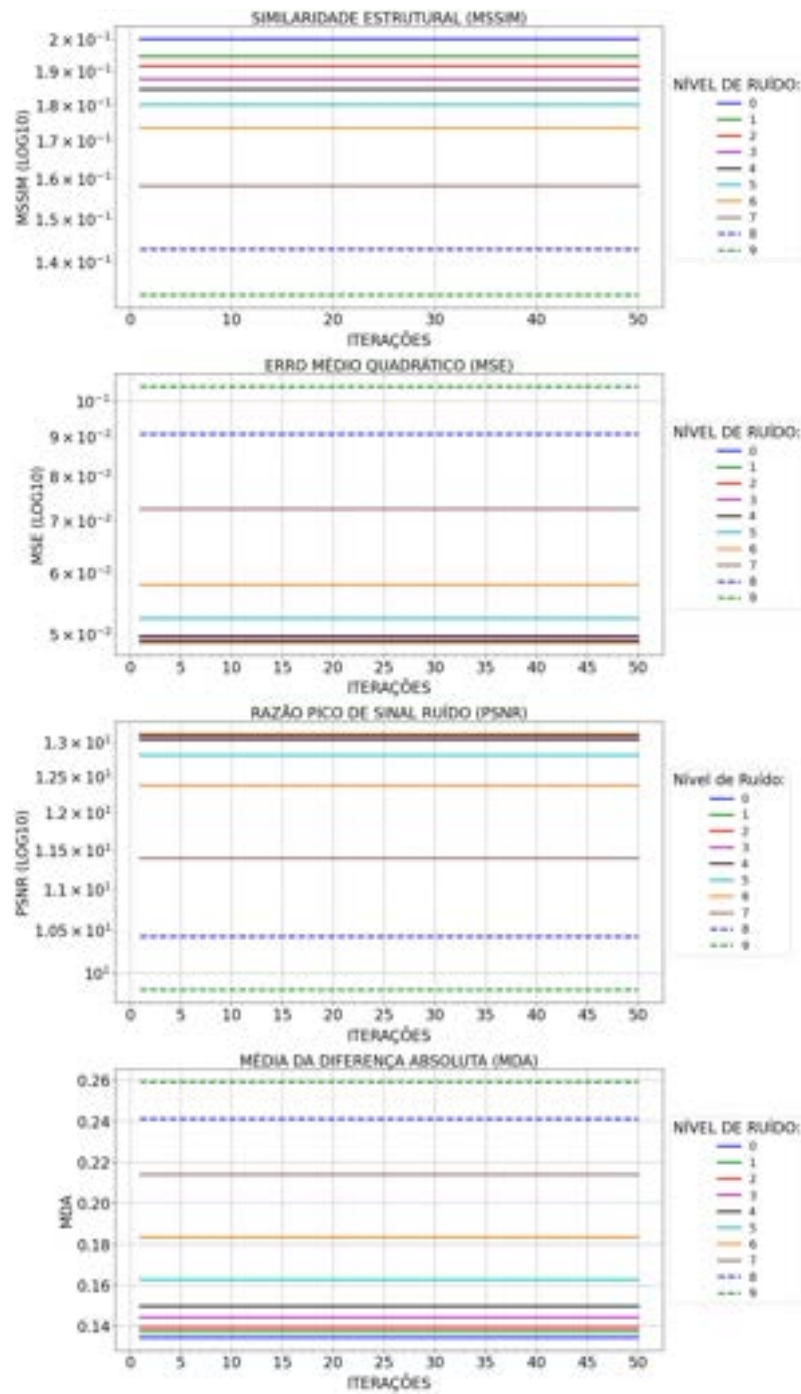


Figura 167 - CGLS com erro no Sinograma Horus

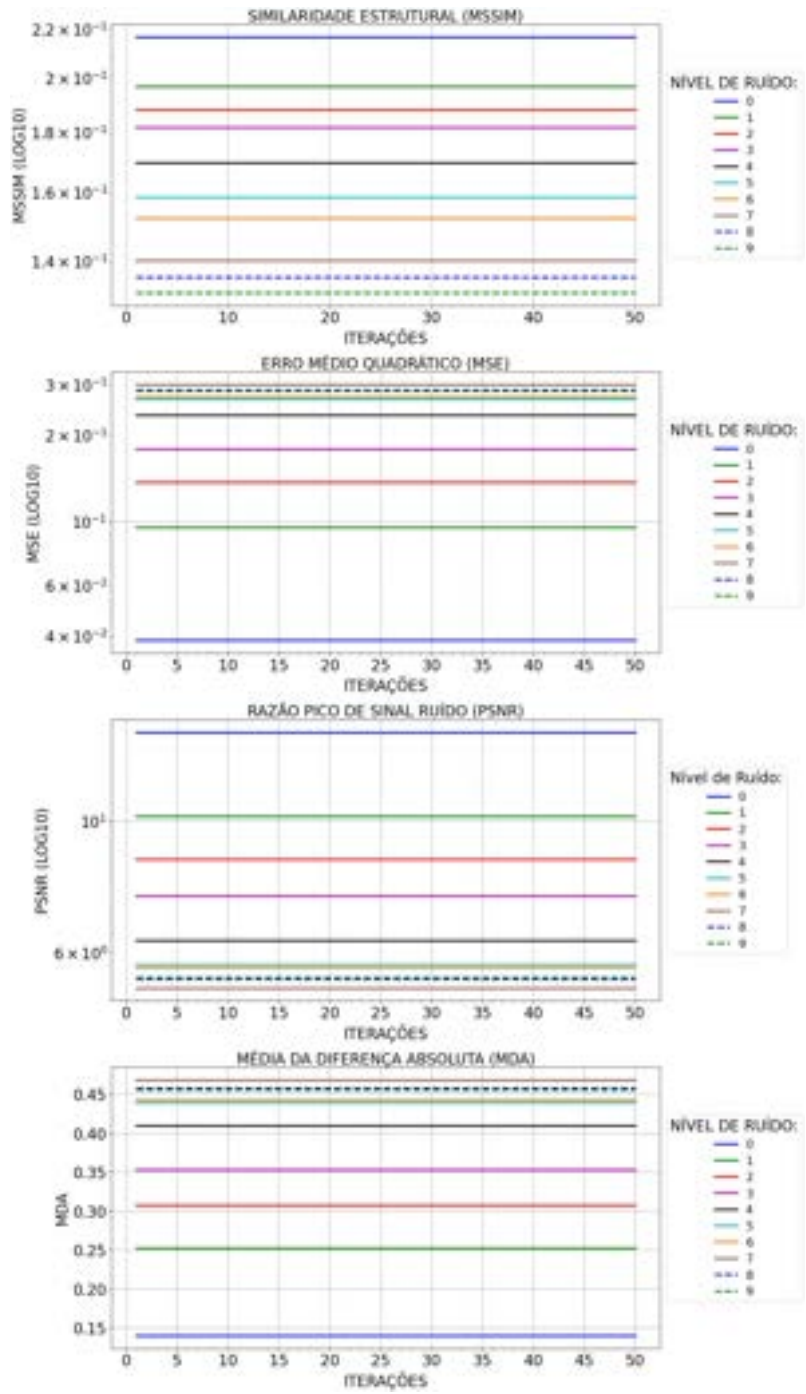


Figura 168 - FBP com erro no Sinograma Horus

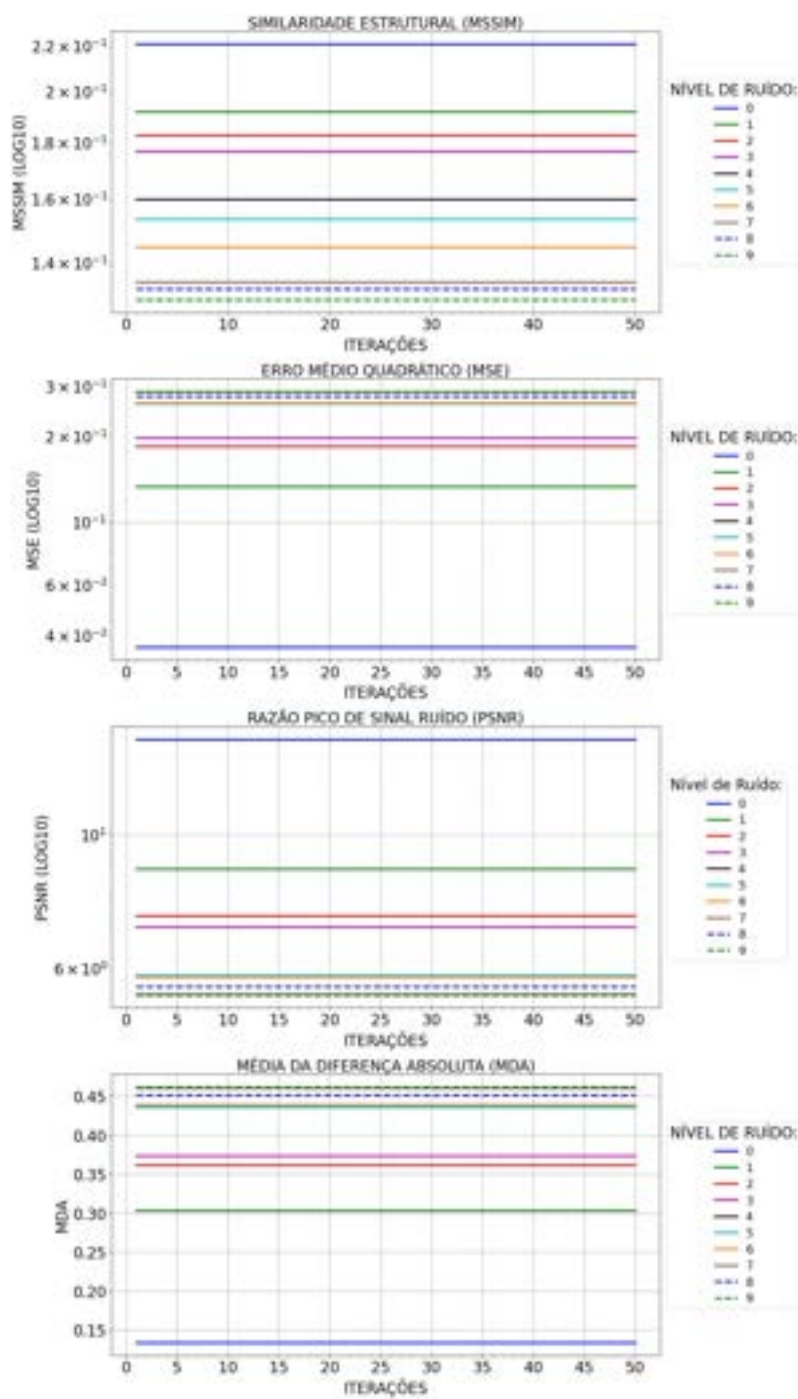


Figura 169 - GRIDREC com erro no Sinograma Horus

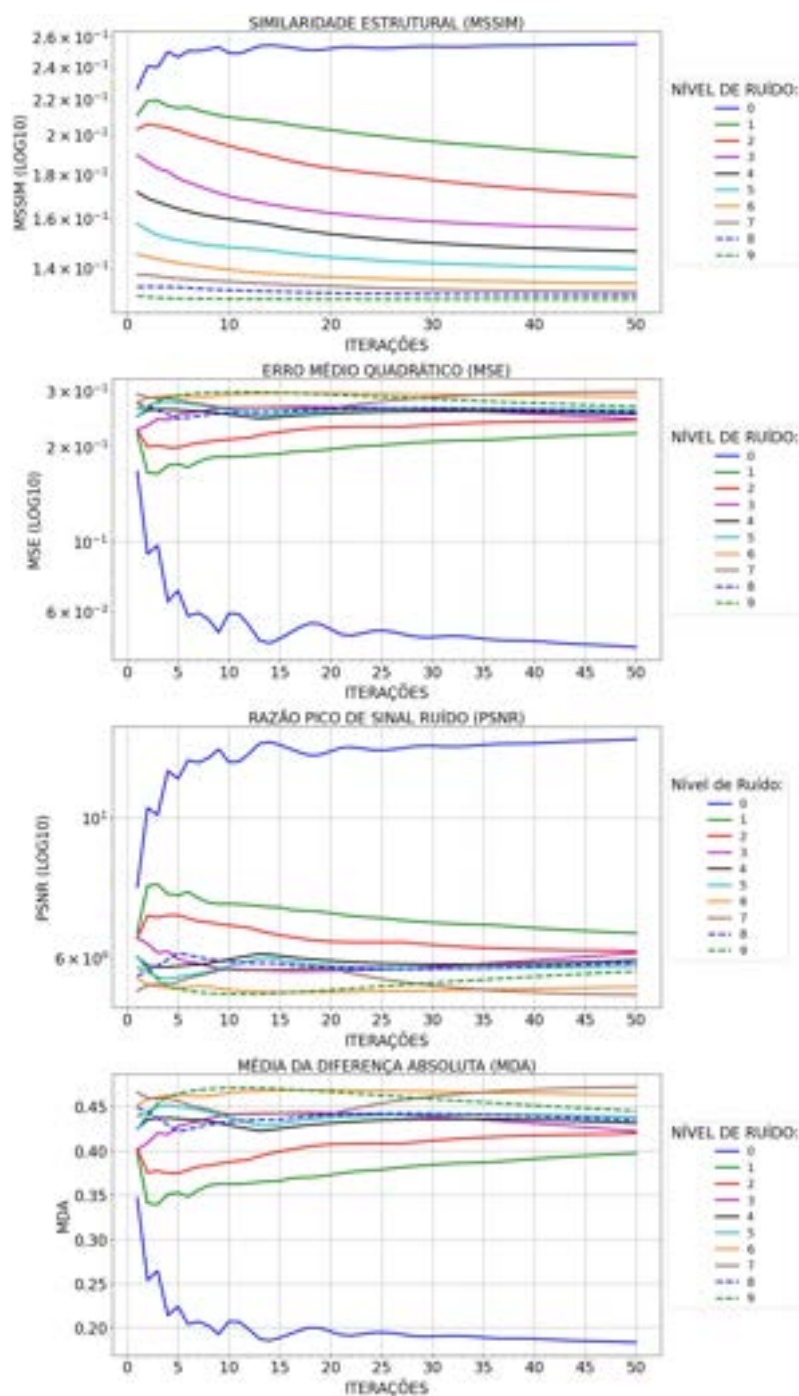


Figura 170 - ART com erro no Sinograma Horus

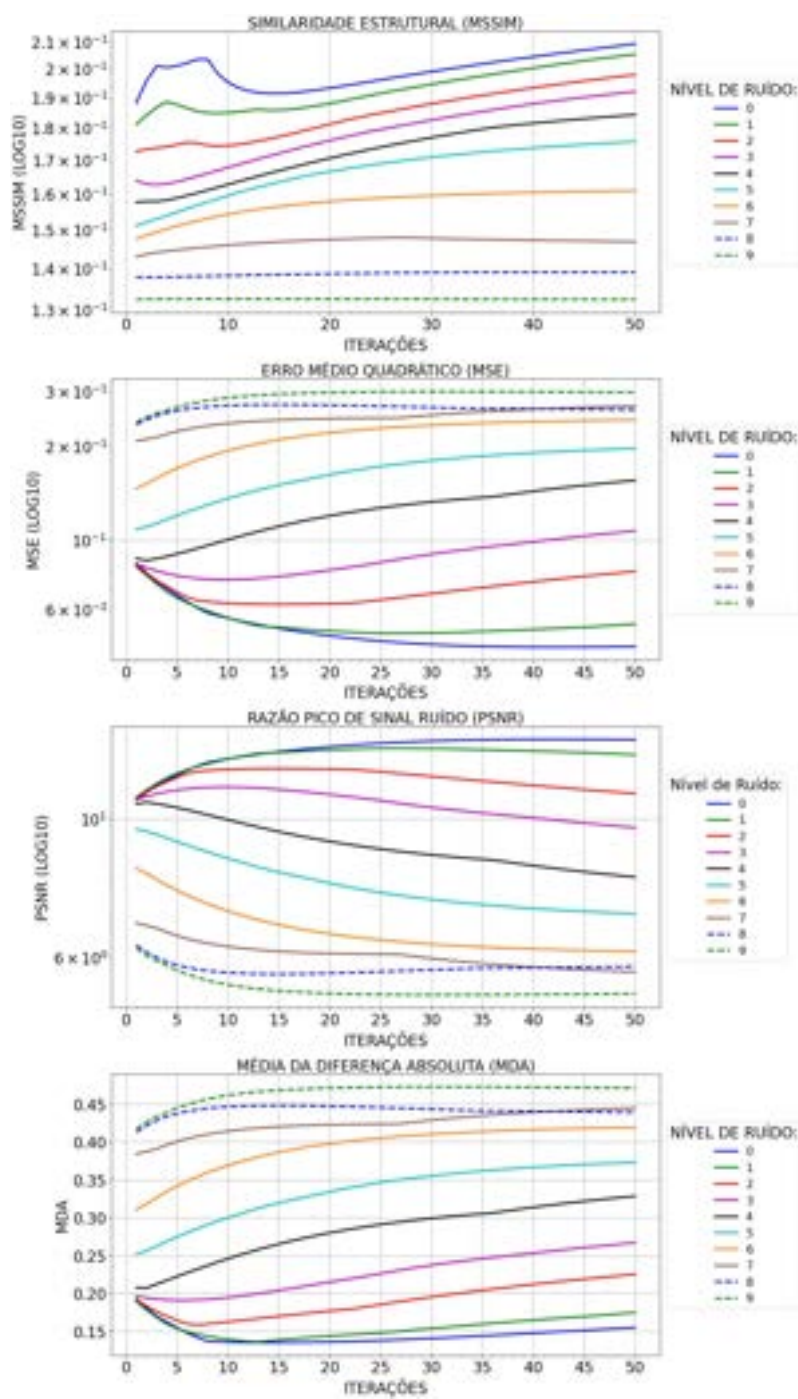


Figura 171 - SIRT com erro no Sinograma Horus

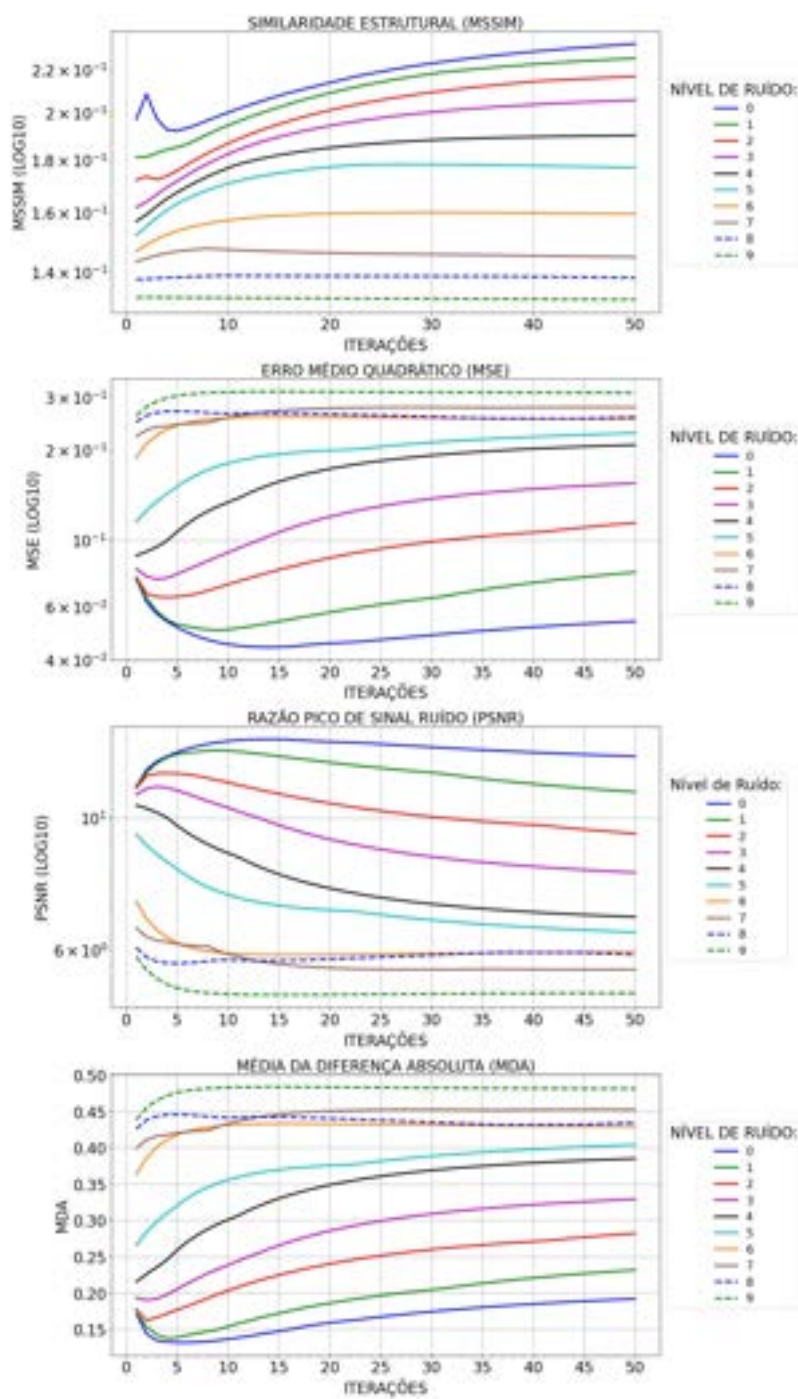


Figura 172 - BART com erro no Sinograma Horus

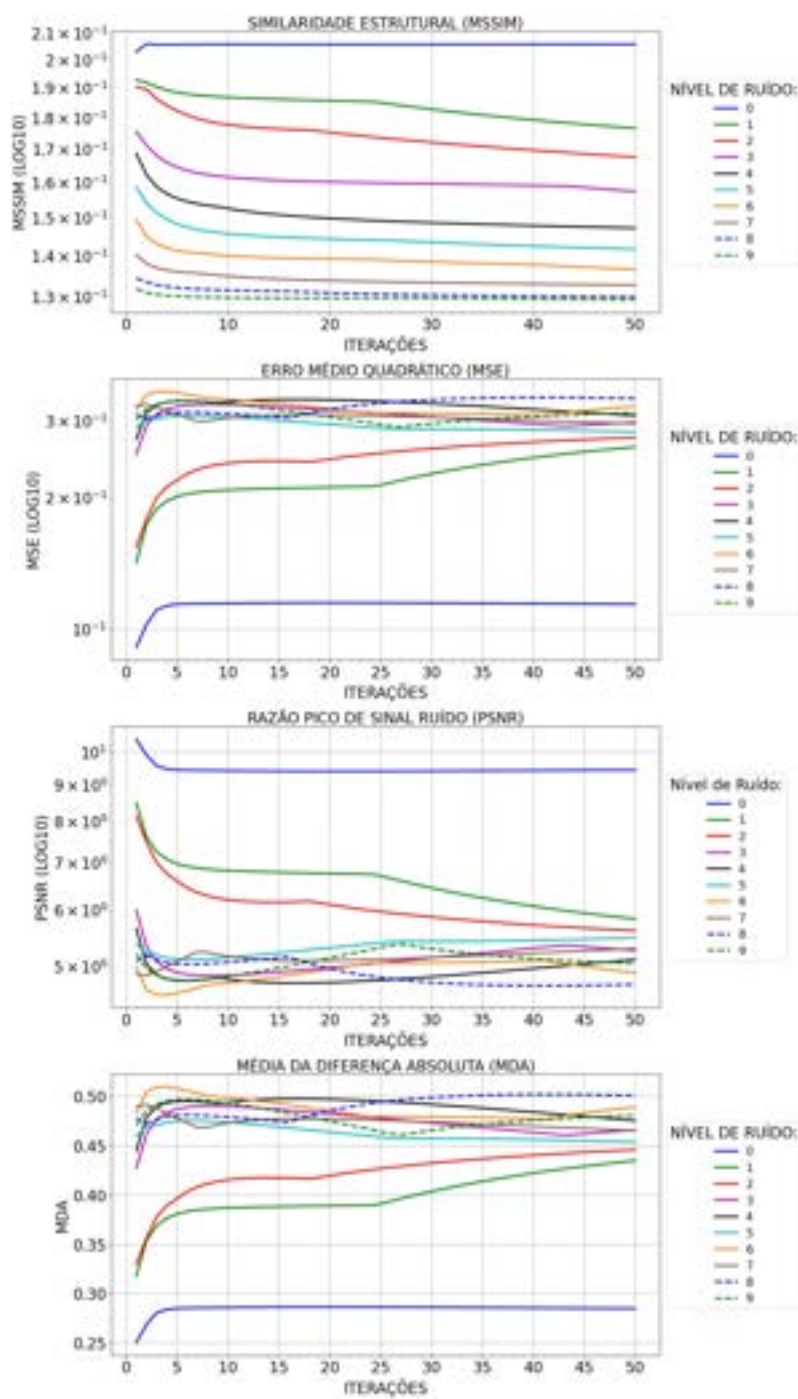


Figura 173 - SART com erro no Sinograma Horus

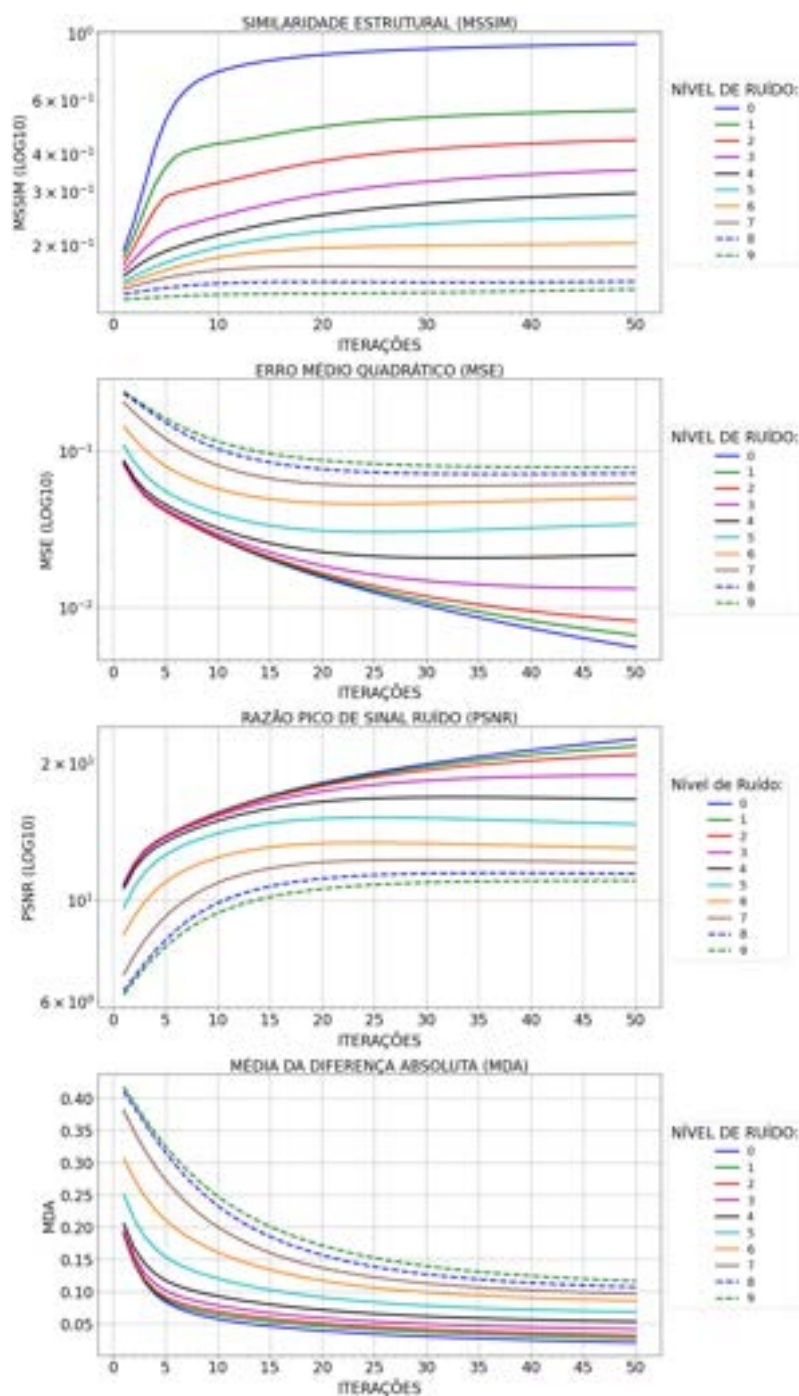


Figura 174 - MLEM com erro no Sinograma Horus

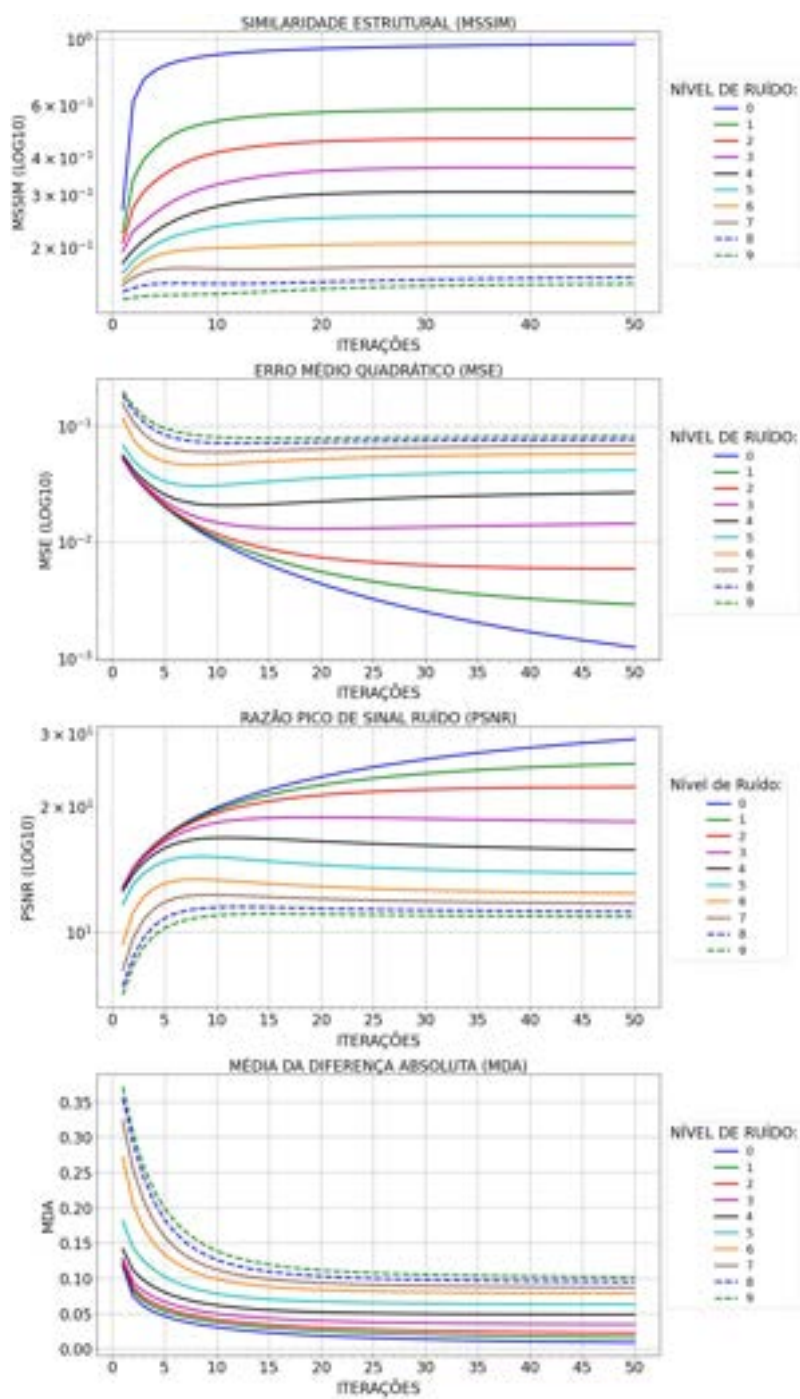


Figura 175 - OSEM com erro no Sinograma Horus

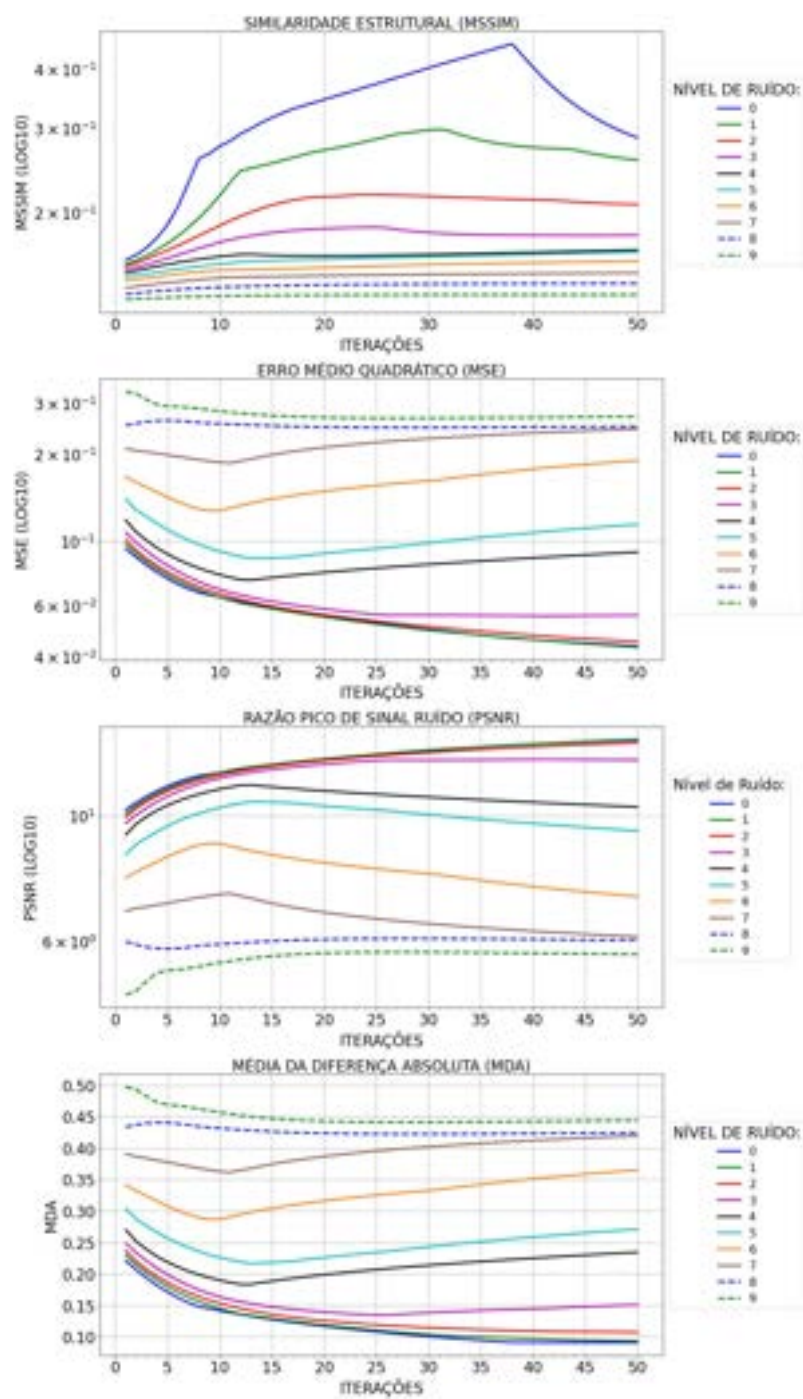


Figura 176 - TV com erro no Sinograma Horus

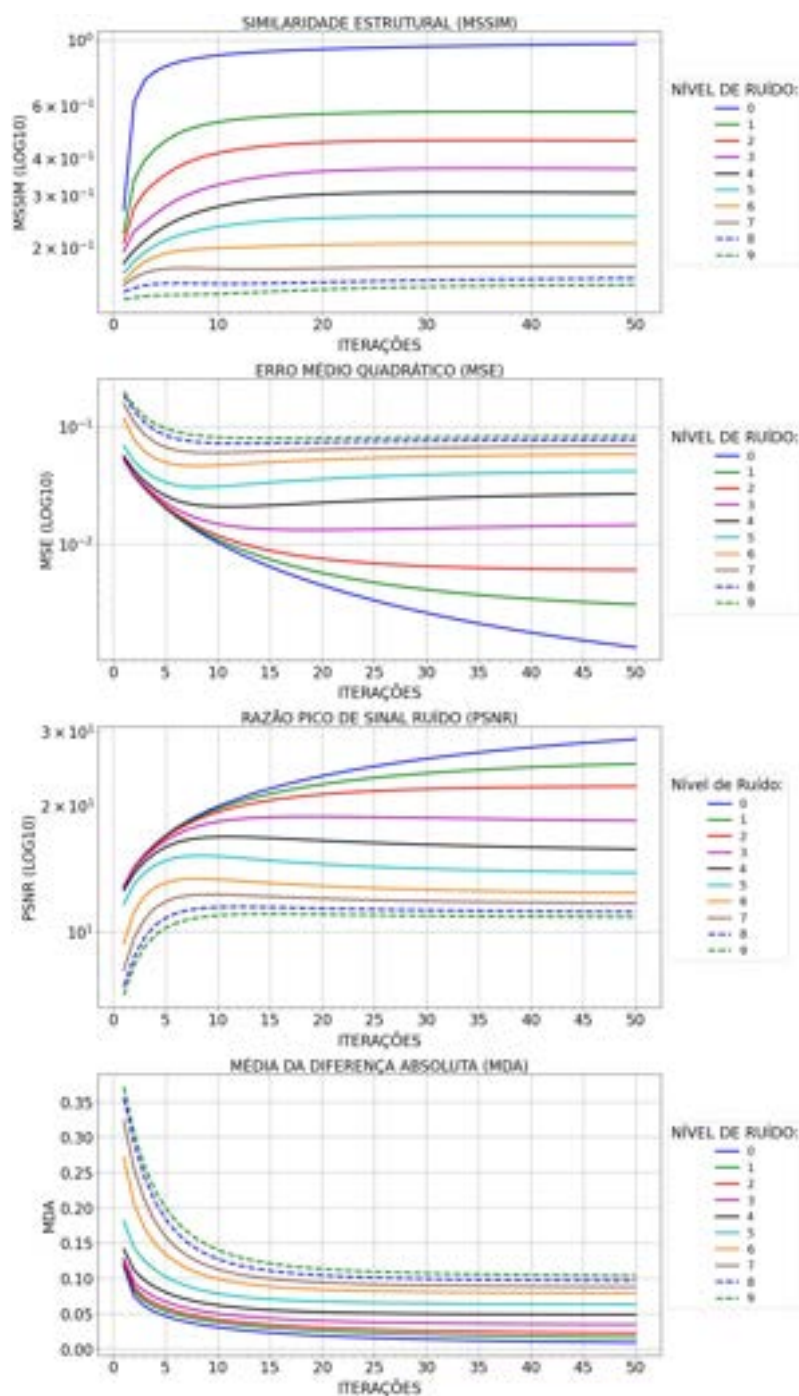


Figura 177 - OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Horus

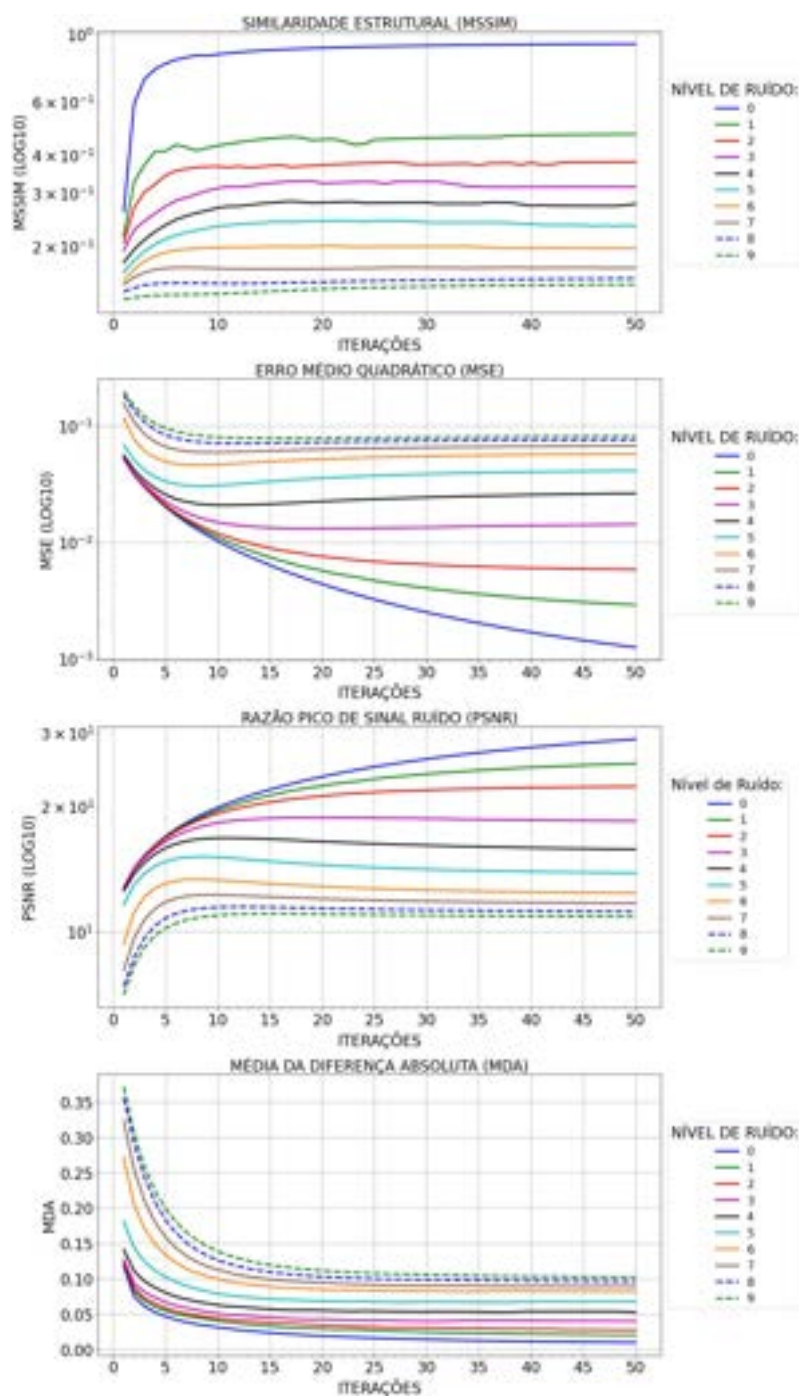


Figura 178 - OSPML-Quad com erro no Sinograma Horus

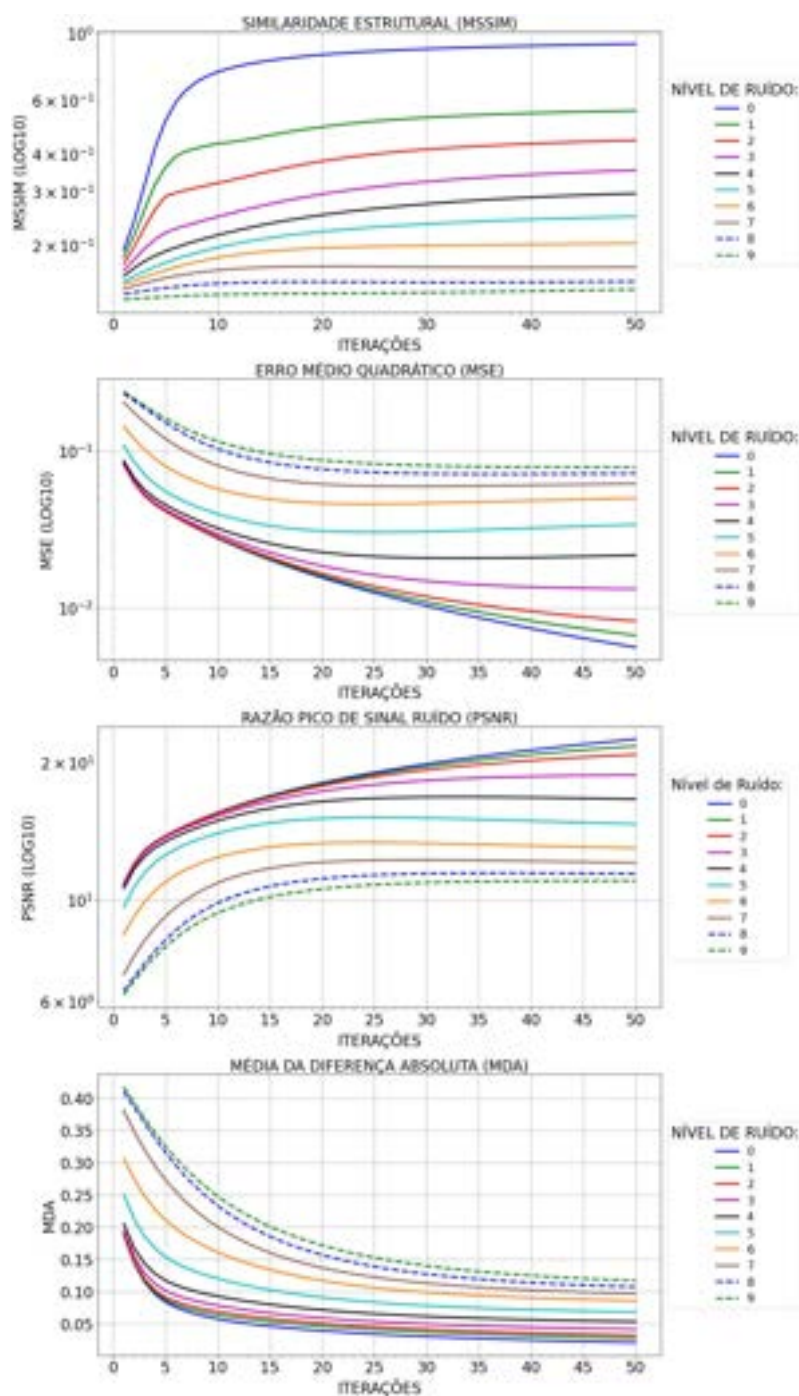


Figura 179 - PML-Hybrid com erro no Sinograma Horus

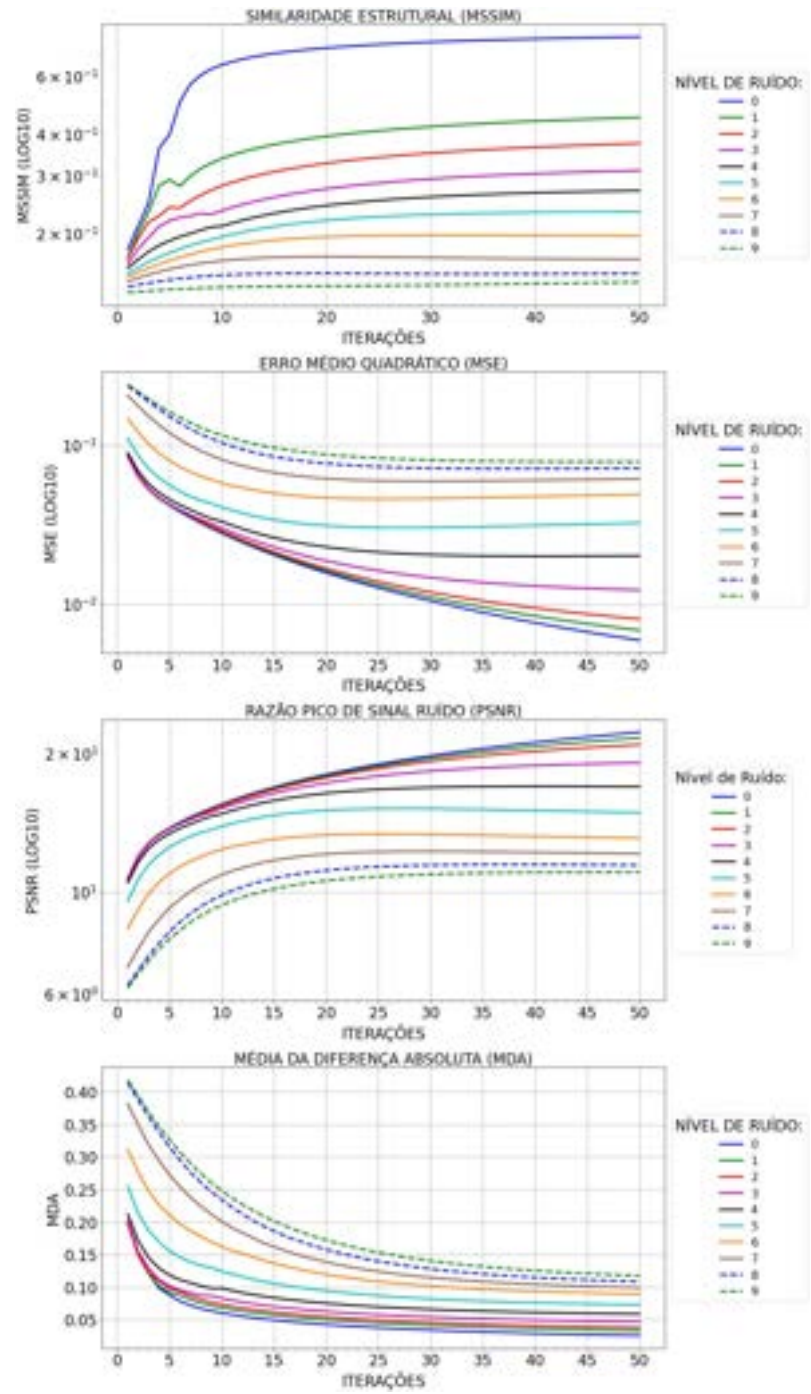


Figura 180 - PML-Quad com erro no Sinograma Horus

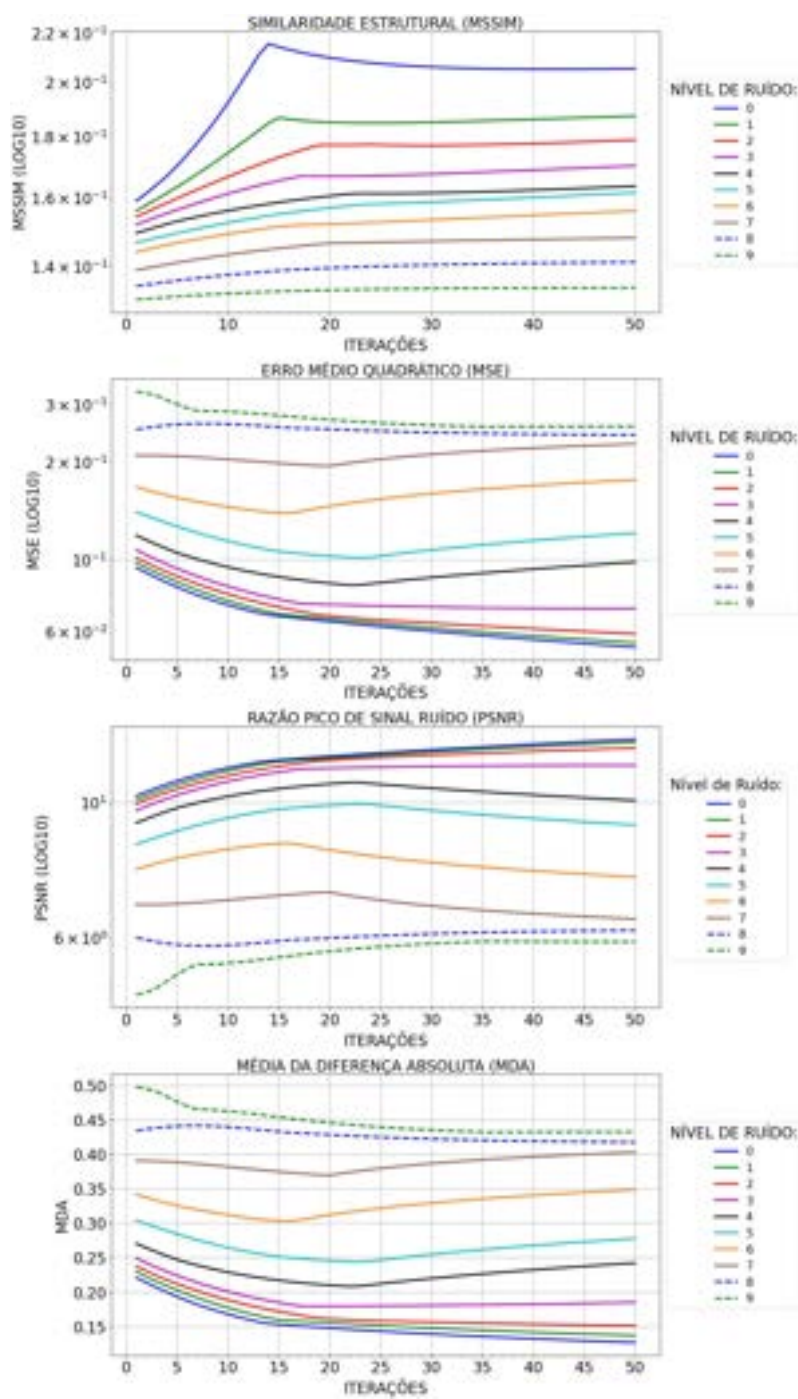


Figura 181 - TIKH com erro no Sinograma Horus

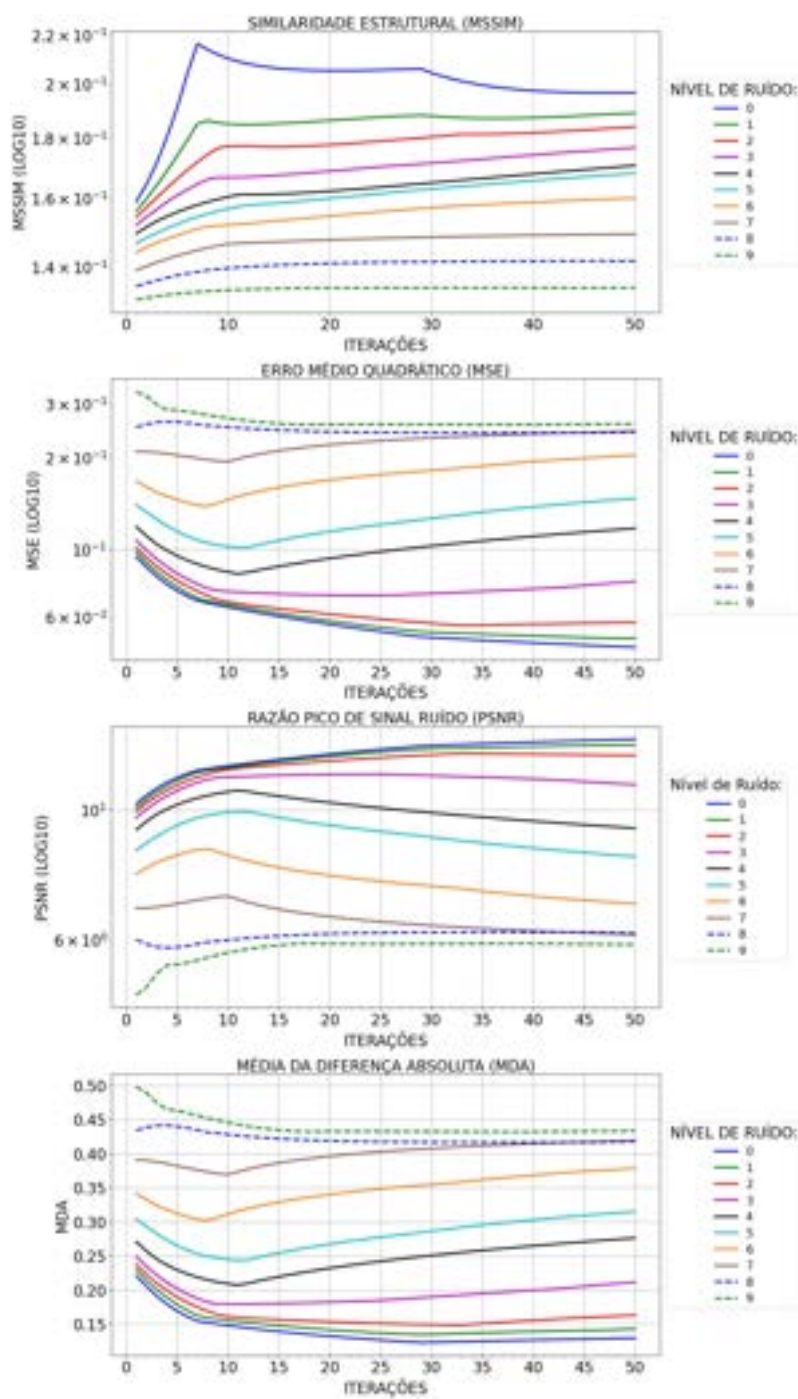
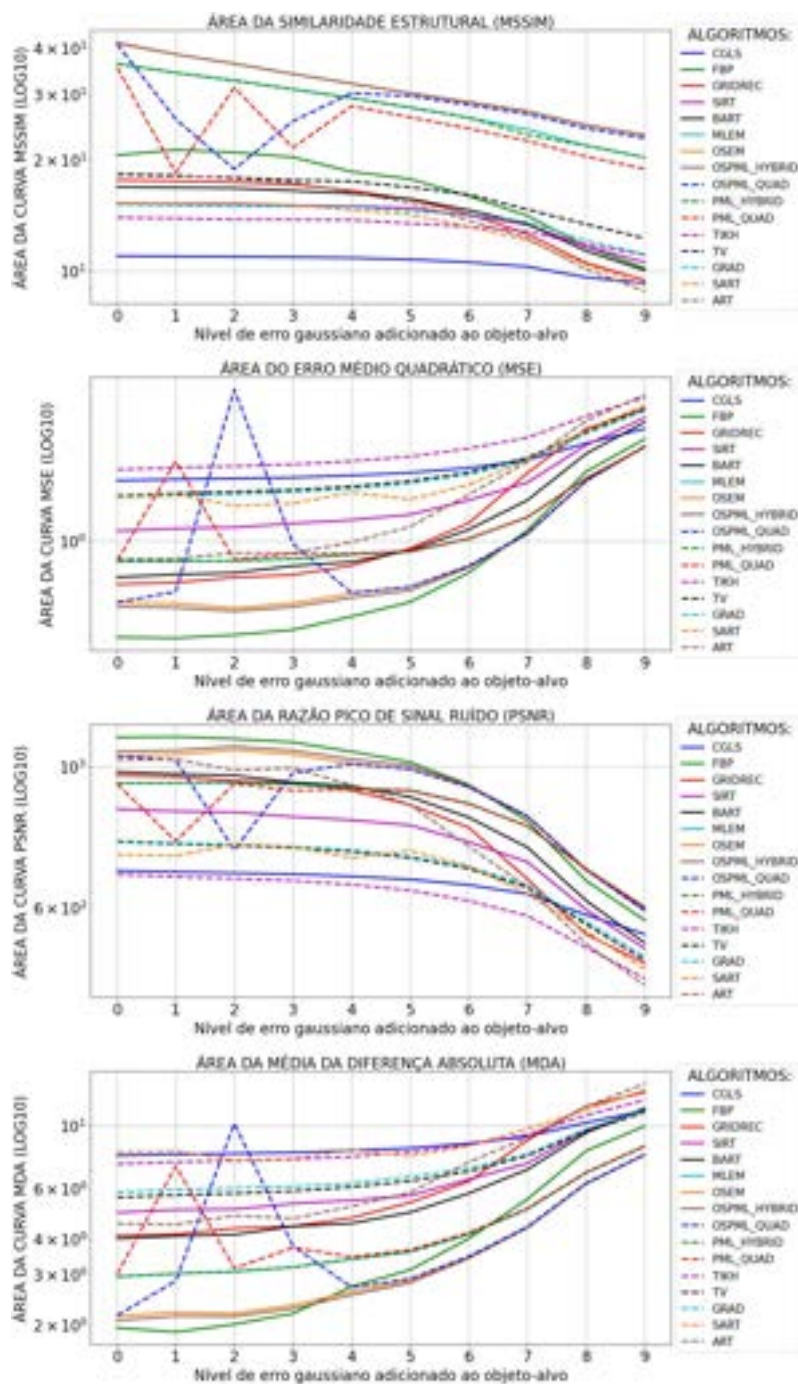


Figura 182 - GRAD com erro no Sinograma Horus

C CURVAS DE DESEMPENHO POR NÍVEL DE CORRUPÇÃO

Este apêndice traz curvas de desempenho da qualidade da reconstrução a partir dos índices agregados de qualidade. Cada gráfico apresentado neste apêndice está estruturado da seguinte forma: Índice Agregado de Qualidade, nas Ordenadas, pelo Nível de ruído nas Abcissas, e o algoritmo é indicado pela Cor da Curva. De tal sorte que cada seção traz as curvas obtidas para uma imagem base. A primeira traz as qualidades das reconstruções quando a adição de ruído ocorre no objeto em si e a segunda no sinograma. Em cada subseção, as curvas são apresentadas na mesma sequência de medida de qualidade integrada.

C.1 Objeto-Alvo Engrenagem

Figura 183 - D_{qe} , Corrupção no Objeto Engrenagem

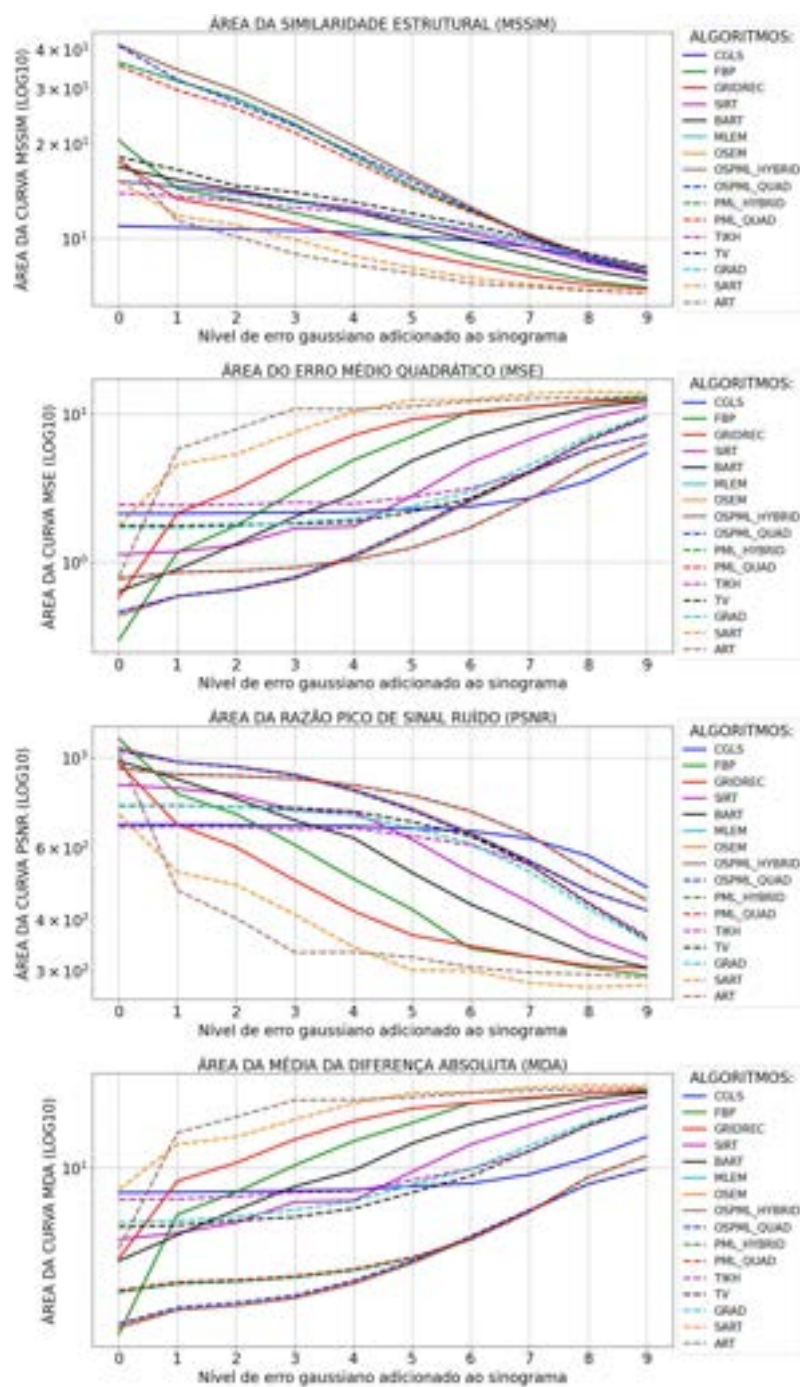
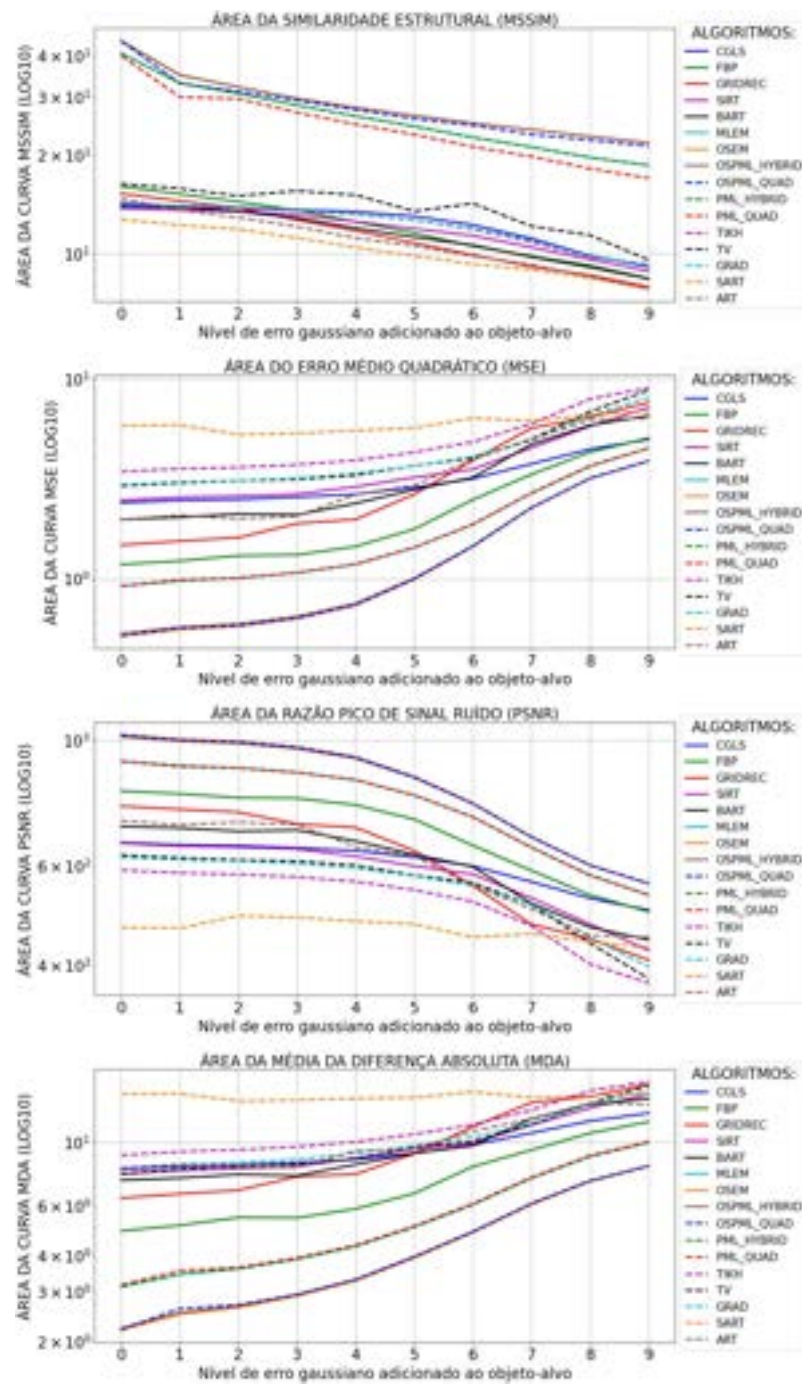


Figura 184 - D_{qe} , Corrupção no Sinograma Engrenagem

C.2 Objeto-Alvo Phantom

Figura 185 - D_{qe} , Corrupção no Objeto Phantom

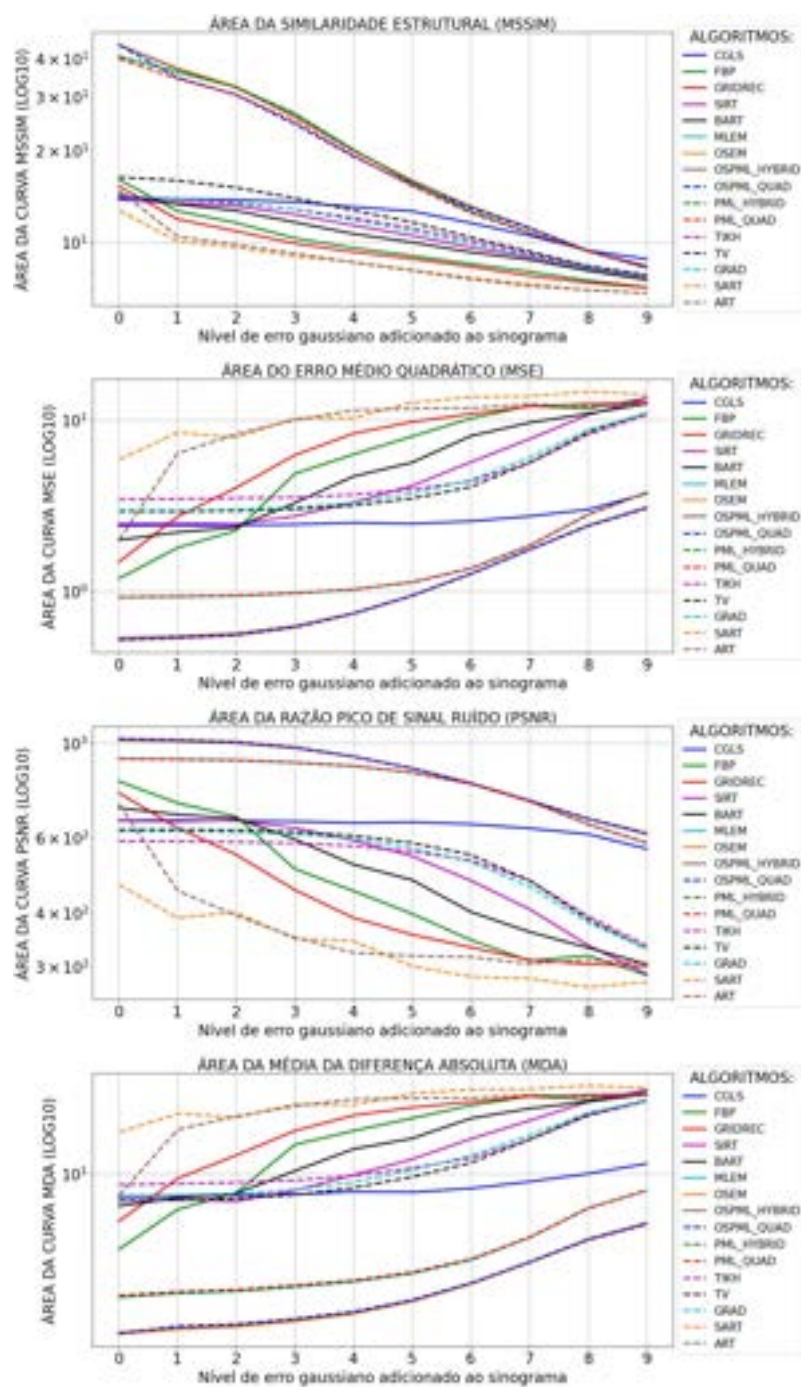


Figura 186 - D_{qe} , Corrupção no Sinograma Phantom

C.3 Objeto-Alvo Horus

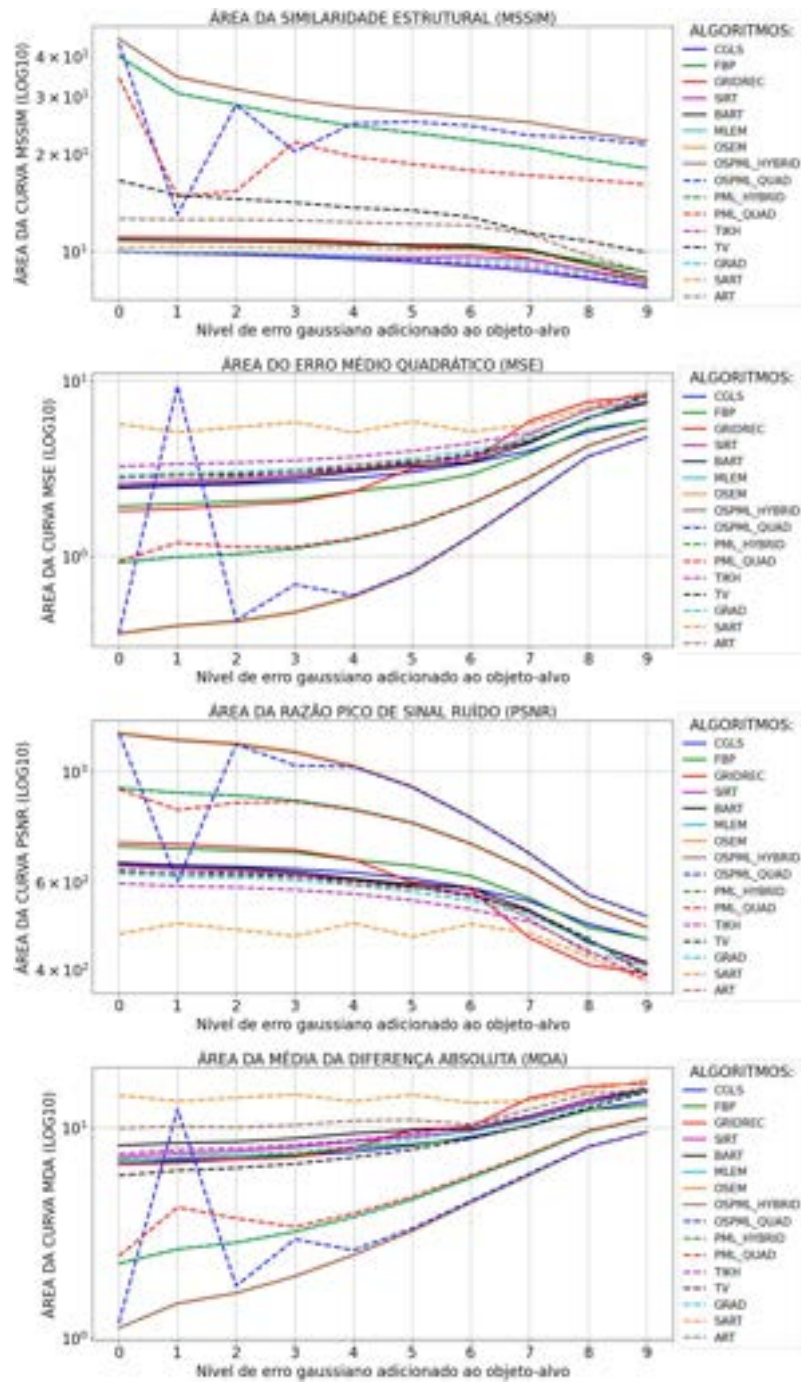


Figura 187 - D_{qe} , Corrupção no Objeto Horus

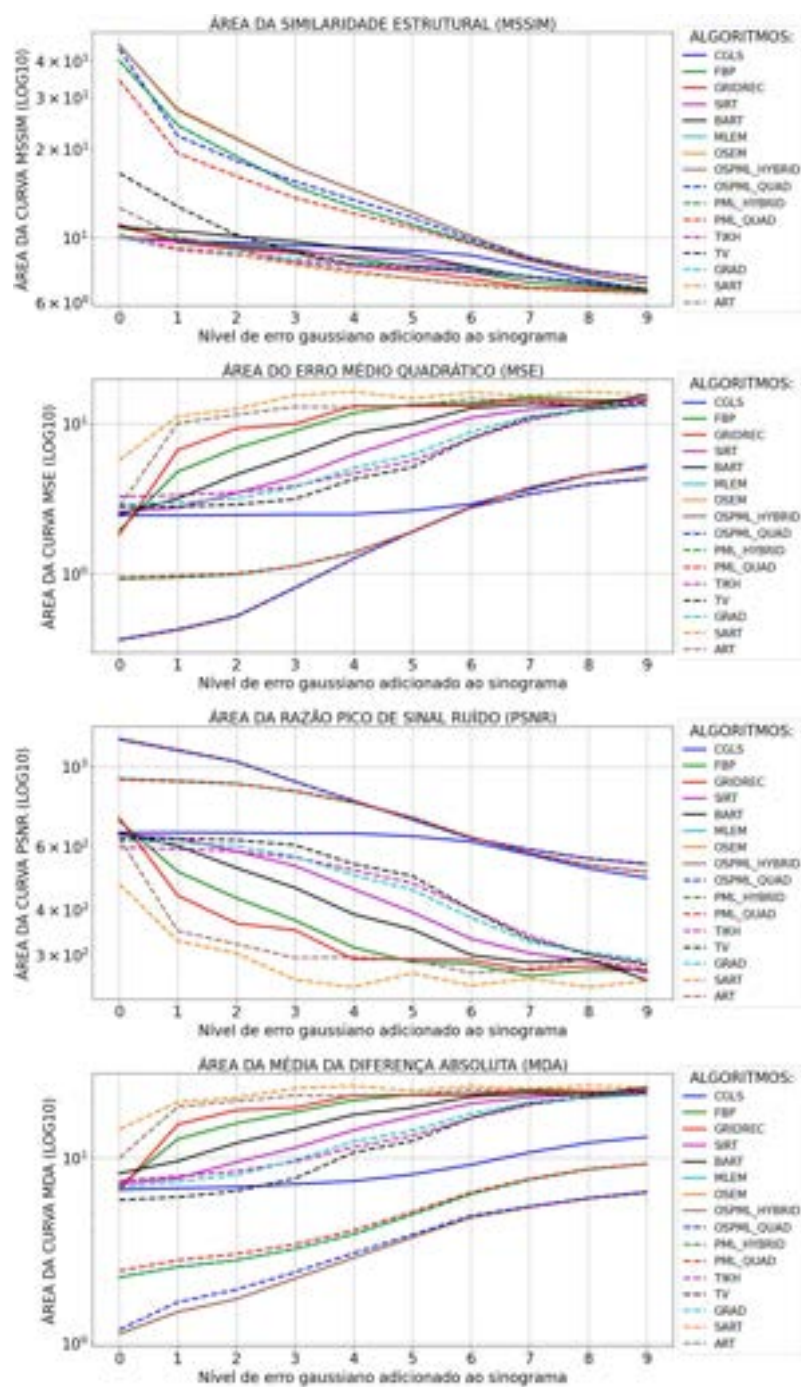


Figura 188 - D_{qe} , Corrupção no Sinograma Horus

D CORTES DAS RECONSTRUÇÕES OBTIDAS

A base da análise qualitativa deste trabalho é apresentada neste apêndice. Apresentam-se cortes das reconstruções de cada imagem ao longo iterações para cada algoritmo. Em cada corte, temos a curva que representa a estrutura do objeto ao longo do corte a qual superpomos a estrutura do objeto original. Além disso, avalia-se a interceptação dos cortes por limiares estatísticos. Analisa-se, para cada imagem, em maiores detalhes os limiares obtidos para os cortes de imagens reconstruídas na intensidade de erro de nível 5 (Tabela XIII).

Para cada objeto alvo, a seção correspondente apresenta uma subseção com os gráficos das análises dos cortes sem corrupção, outra a segue com a análise dos cortes com ruído de nível 05 no objeto, e em sequência temos a análise dos cortes com ruído de nível 05 no sinograma.

D.1 Objeto-Alvo Engrenagem

D.1.1 Objeto-Alvo Original (erro Nível 0)

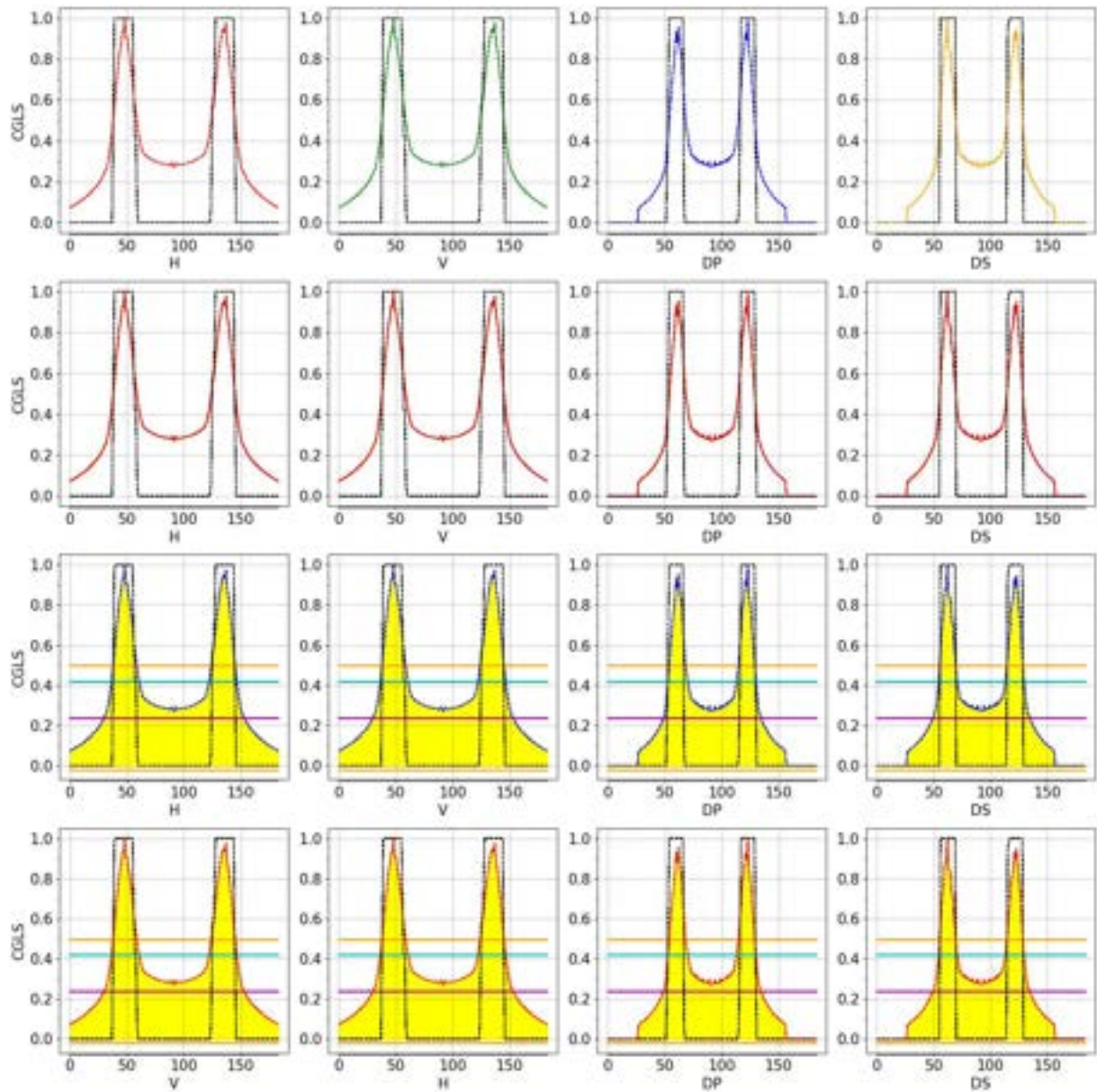


Figura 189 - Cortes CGLS com Original Engrenagem

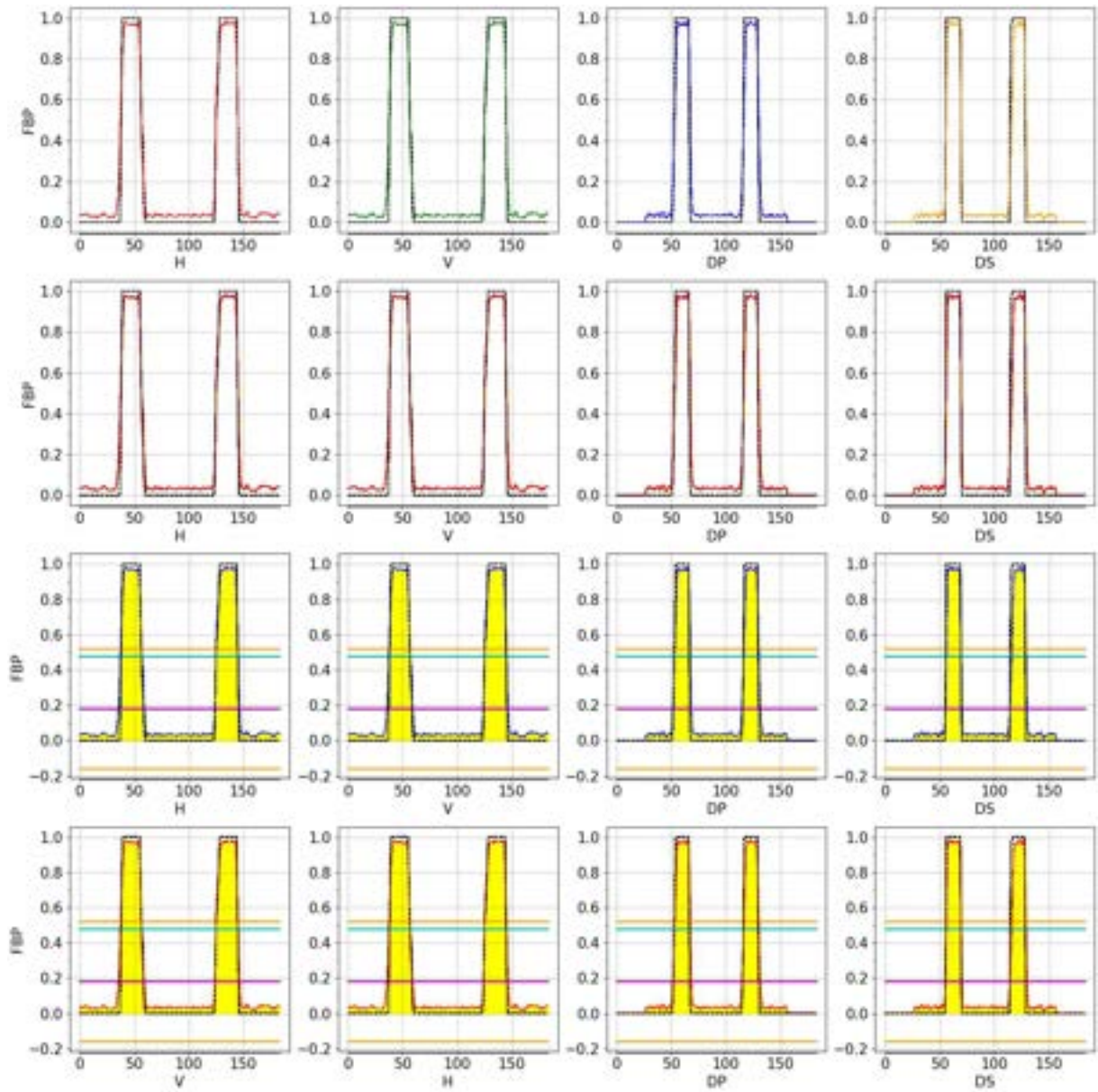


Figura 190 - Cortes FBP com Original Engrenagem

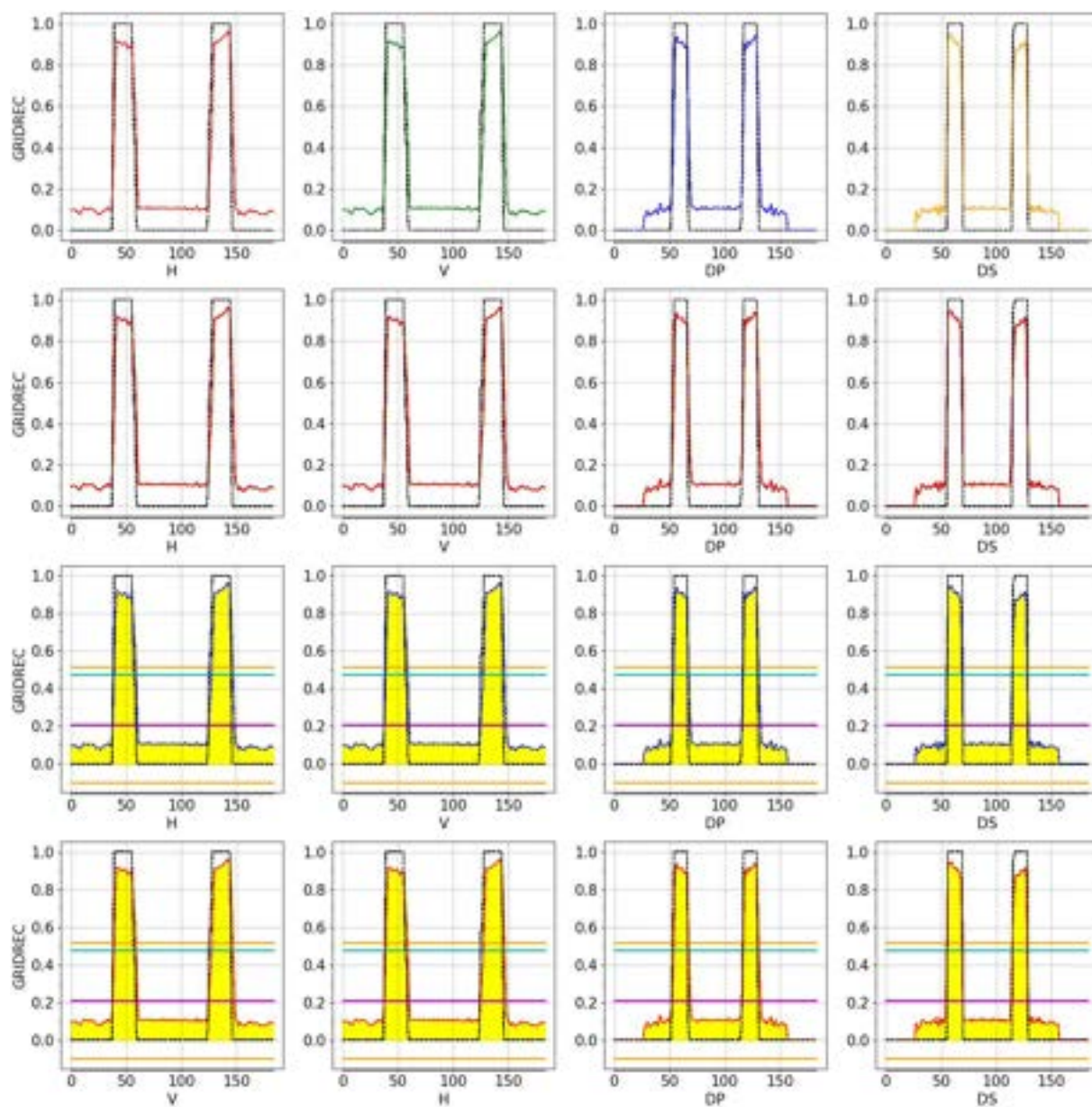


Figura 191 - Cortes GRIDREC com Original Engrenagem

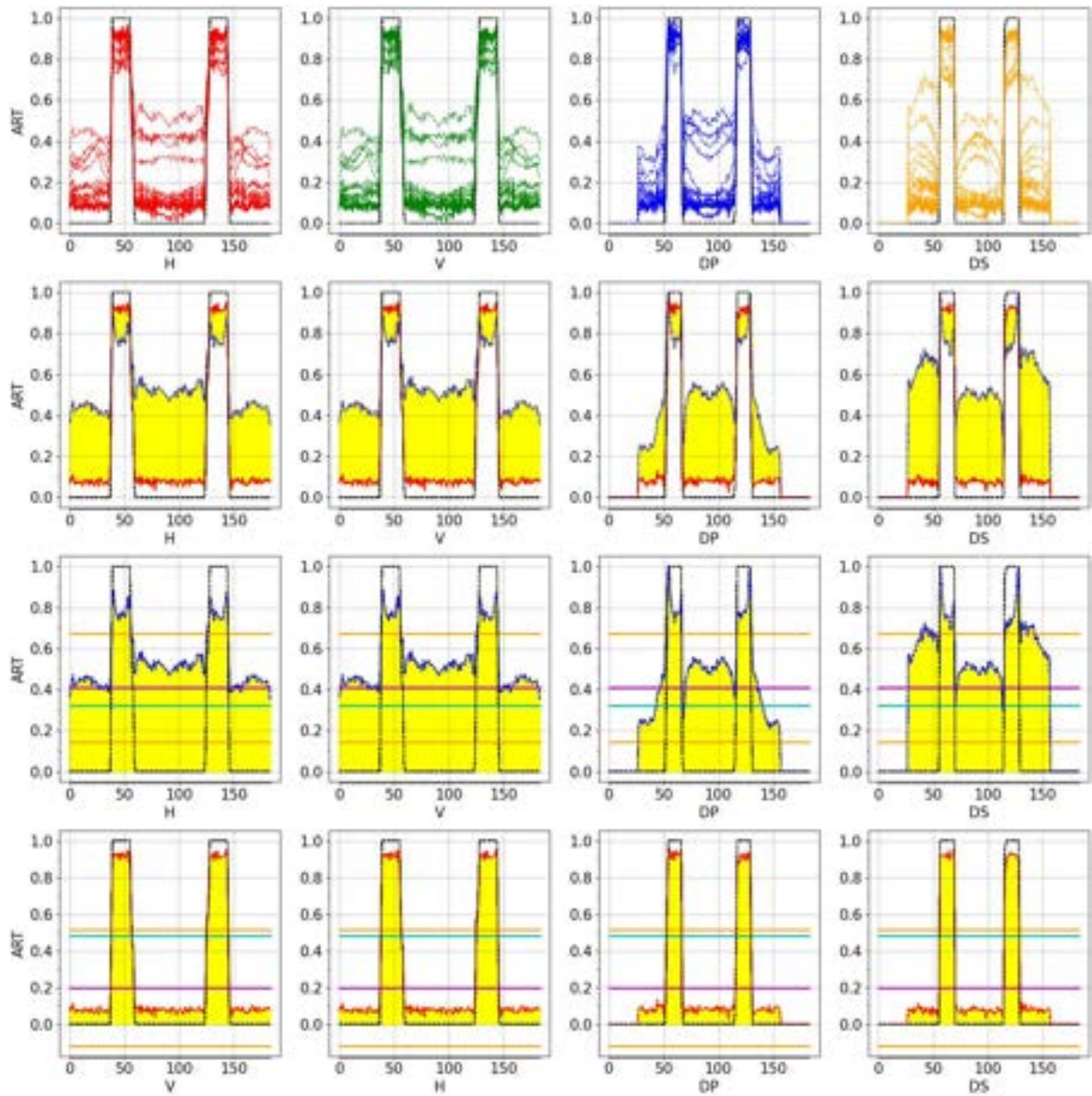


Figura 192 - Cortes ART com Original Engrenagem

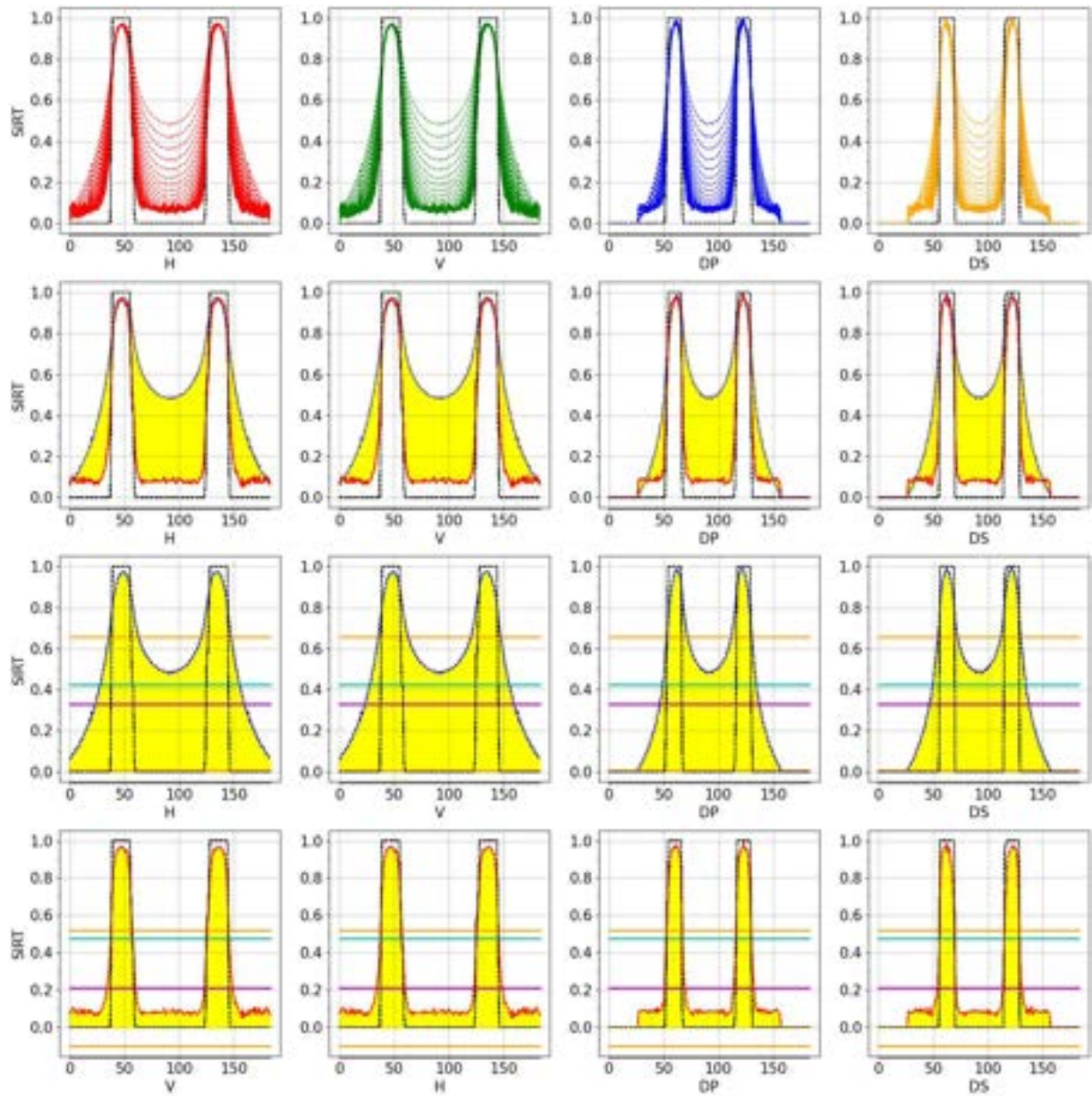


Figura 193 - Cortes SIRT com Original Engrenagem

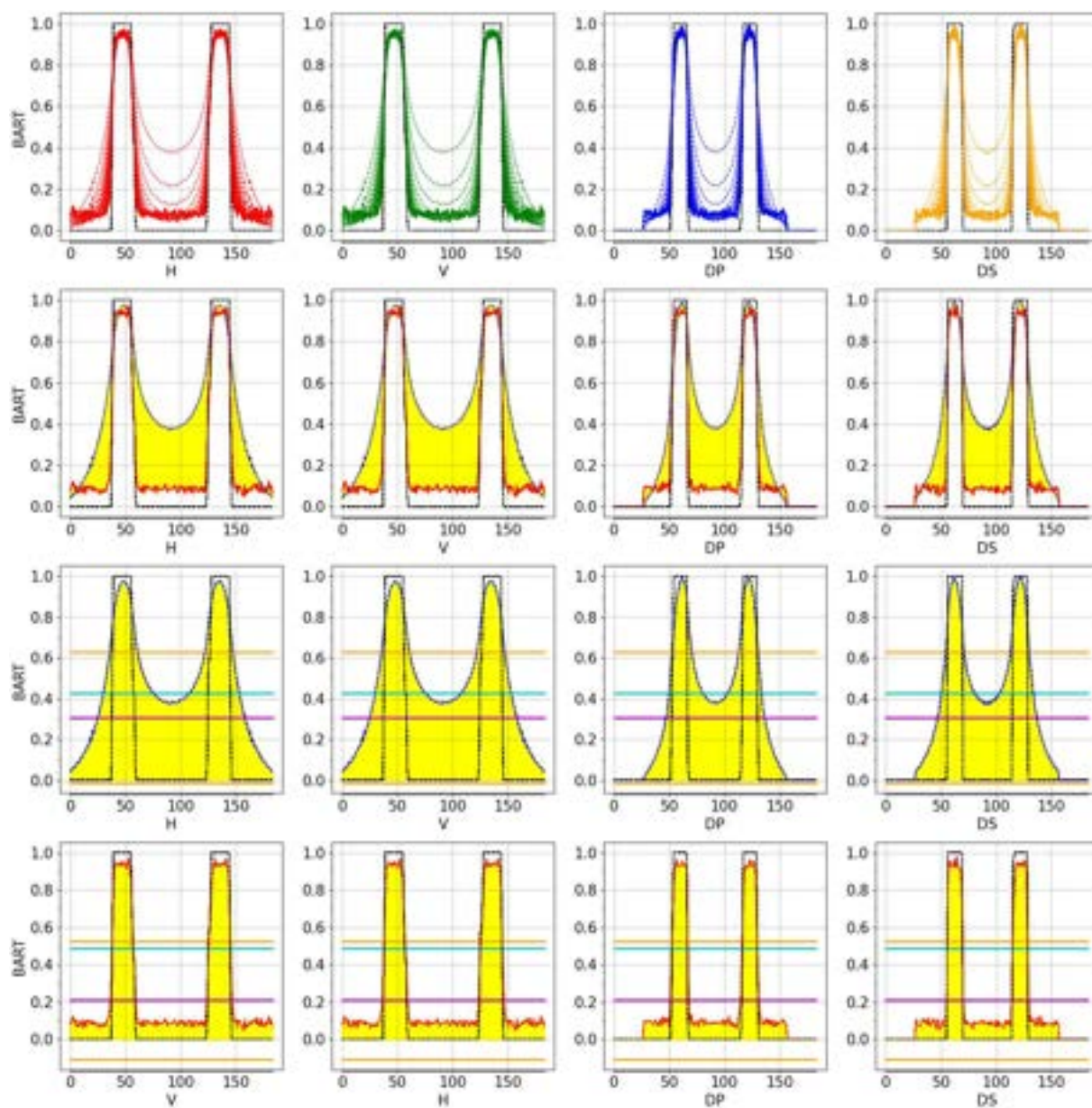


Figura 194 - Cortes BART com Original Engrenagem

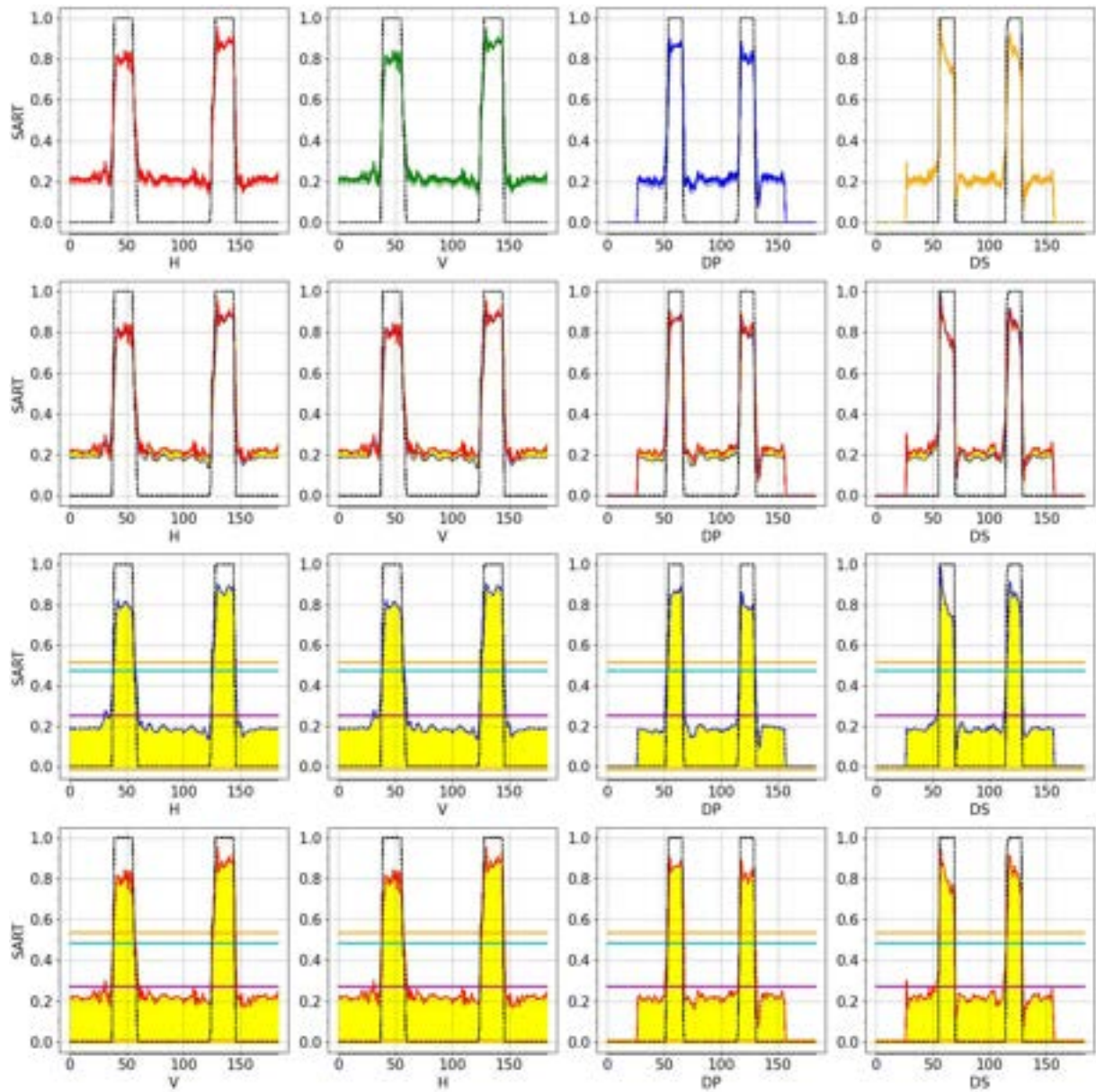


Figura 195 - Cortes SART com Original Engrenagem

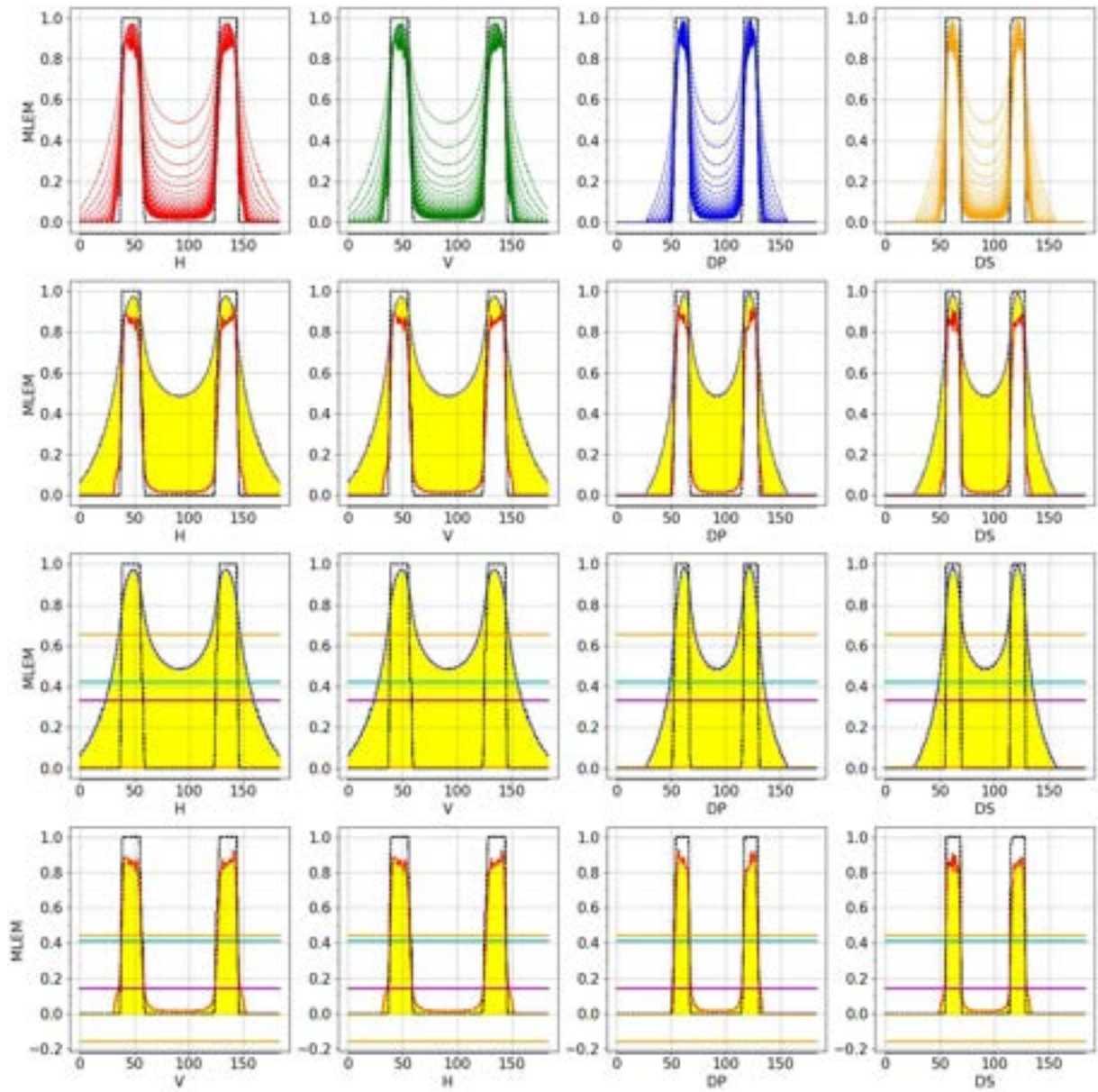


Figura 196 - Cortes MLEM com Original Engrenagem

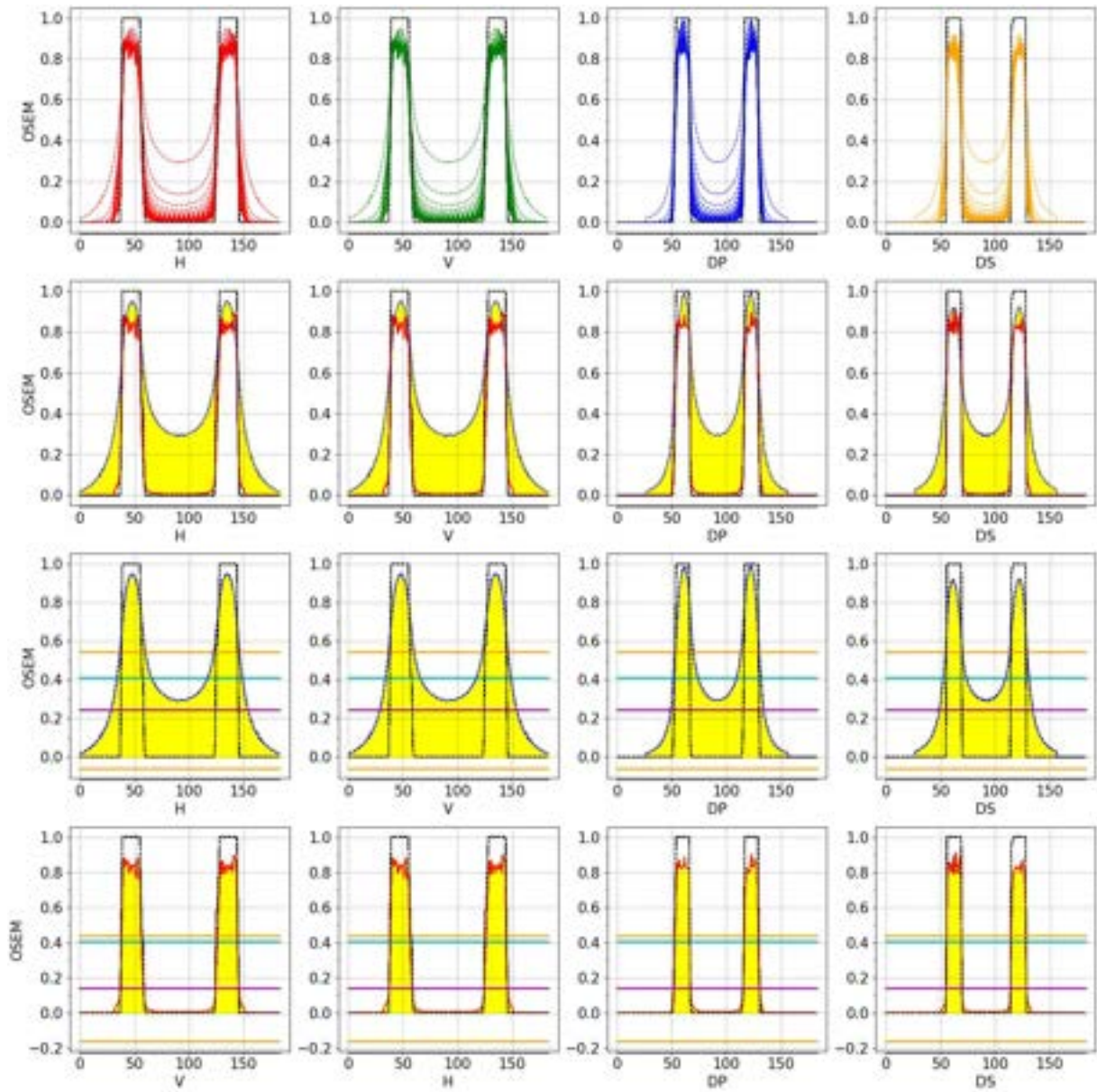


Figura 197 - Cortes OSEM com Original Engrenagem

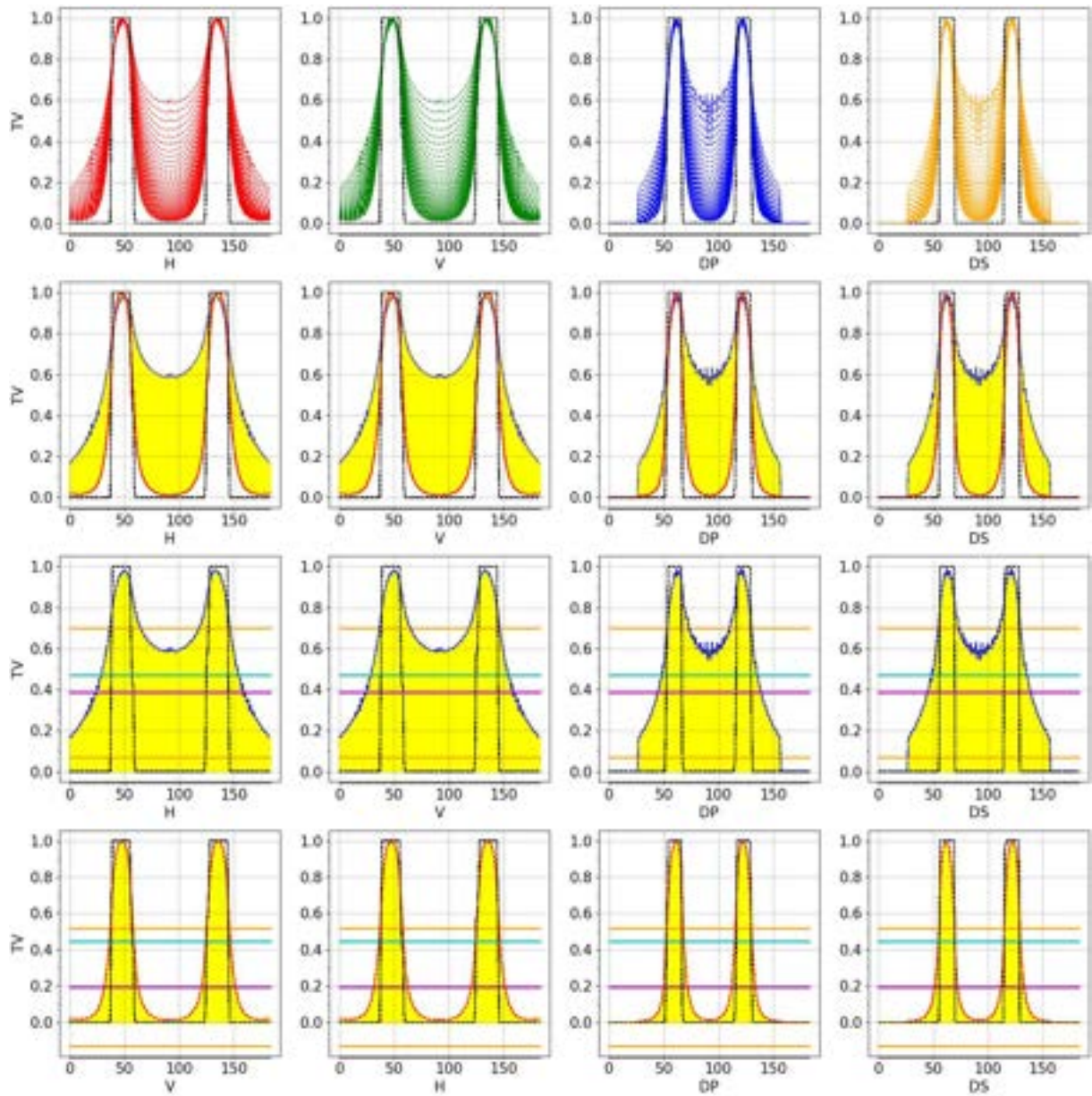


Figura 198 - Cortes TV com Original Engrenagem

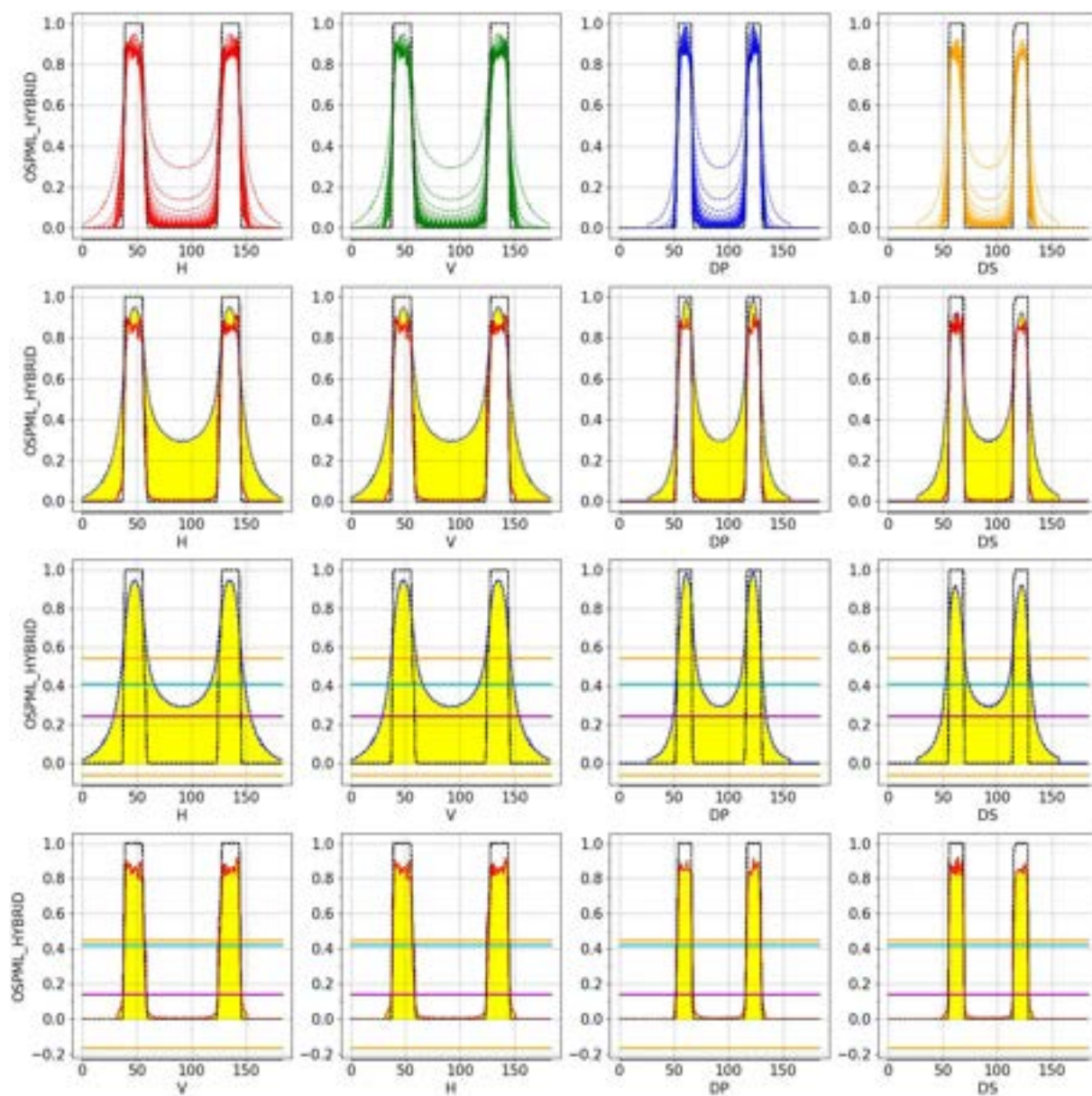


Figura 199 - Cortes OSPML-Hybrid com Original Engrenagem

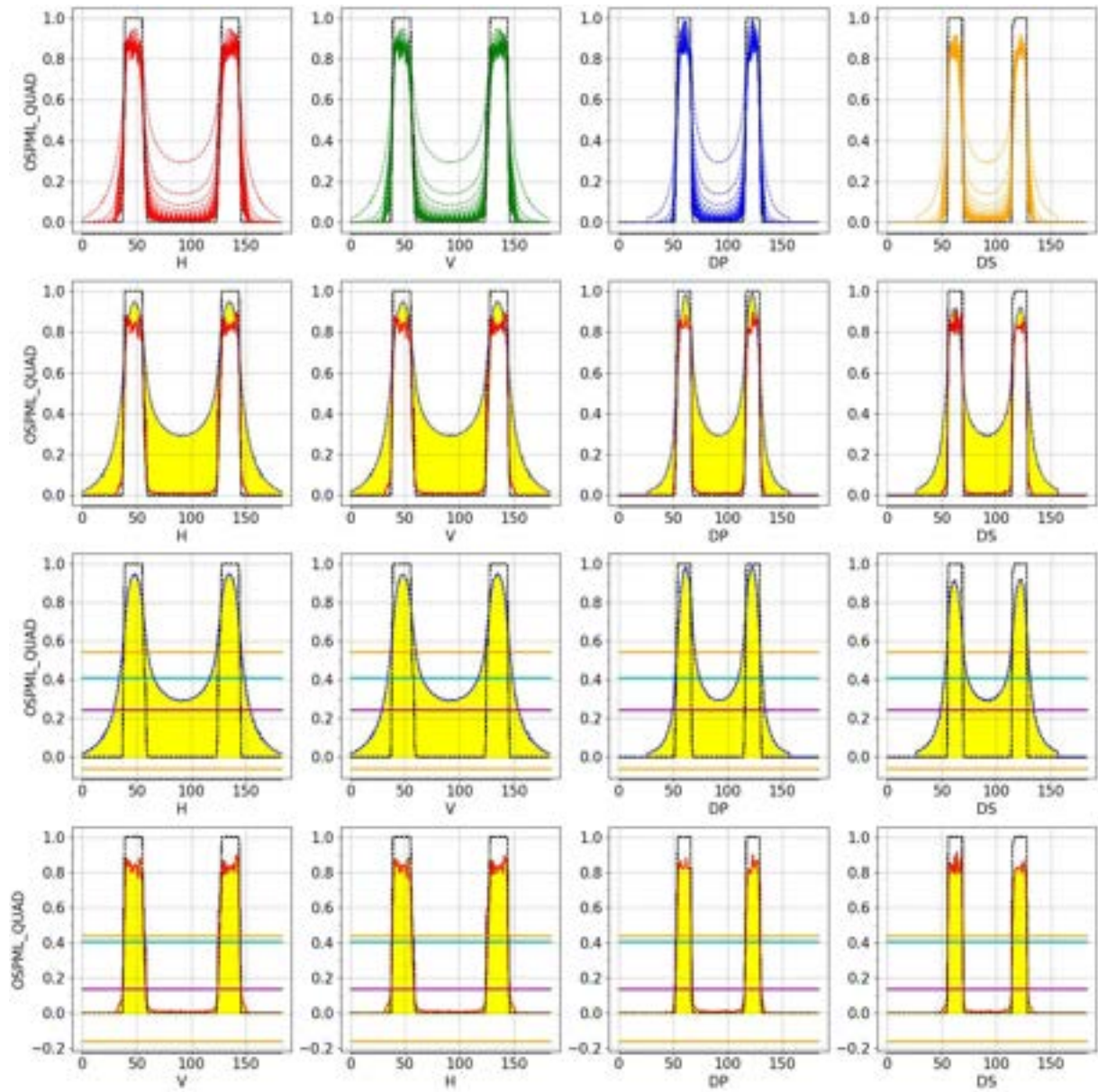


Figura 200 - Cortes OSPML-Quad com Original Engrenagem

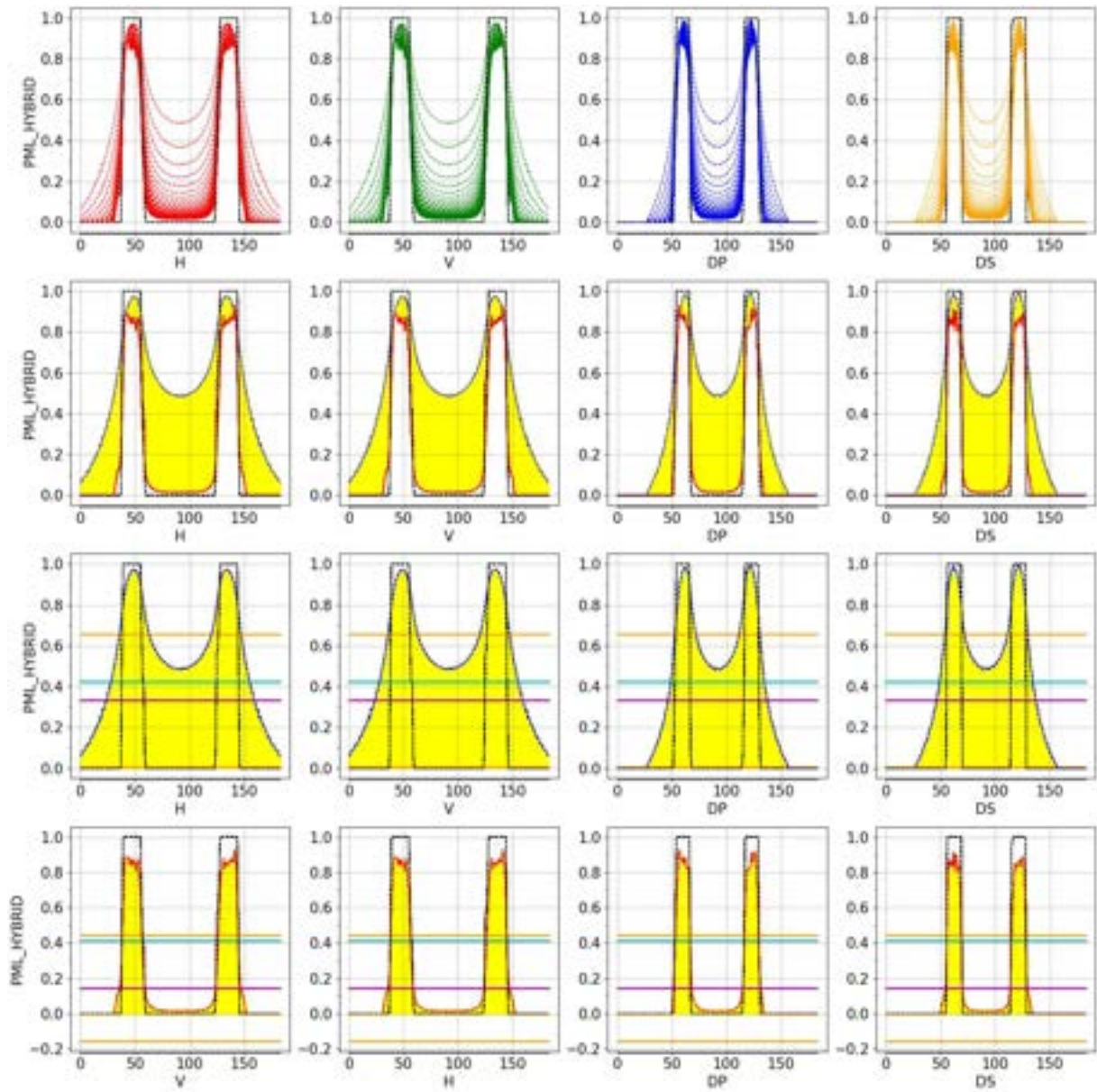


Figura 201 - Cortes PML-Hybrid com Original Engrenagem

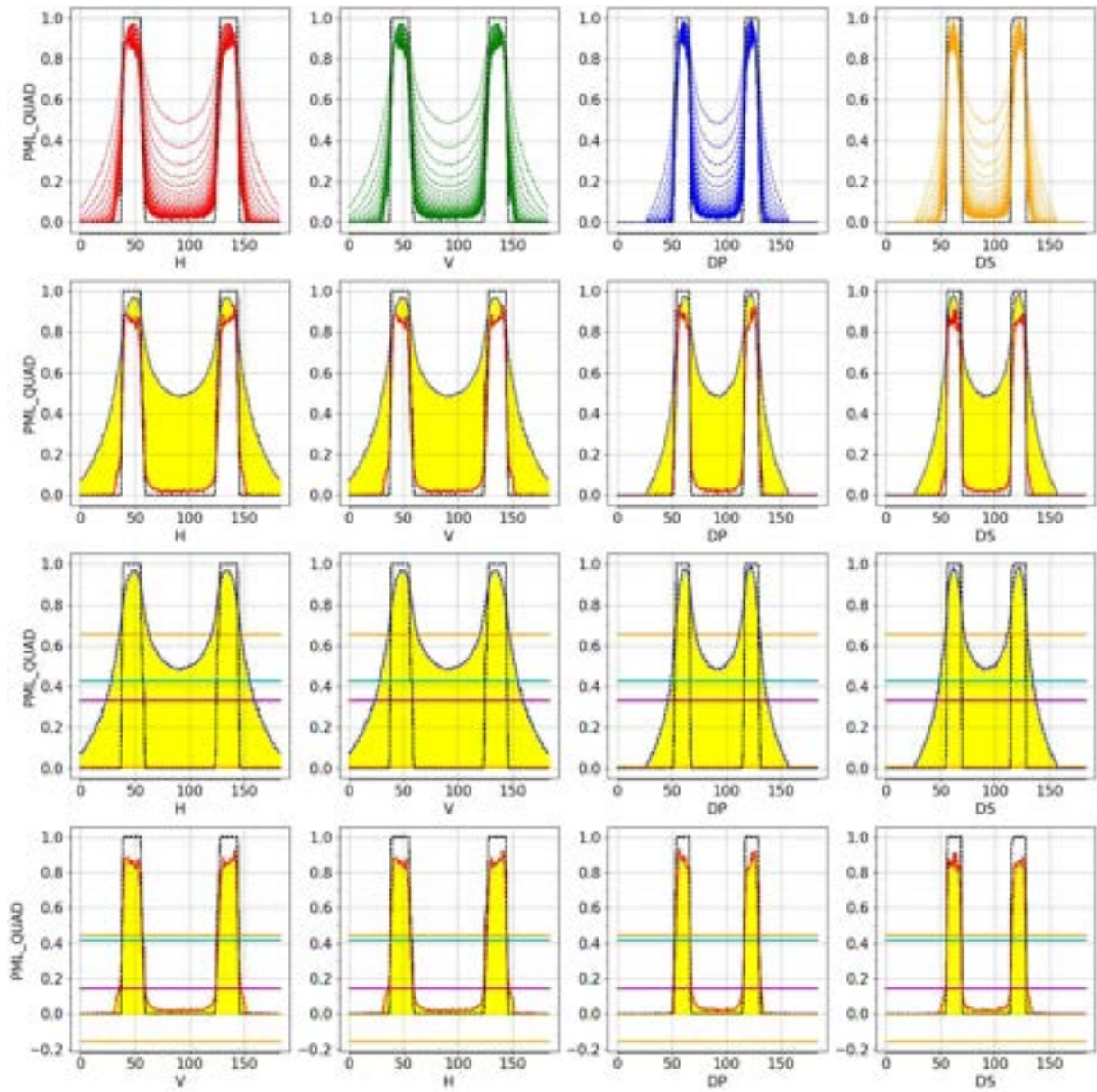


Figura 202 - Cortes PML-Quad com Original Engrenagem

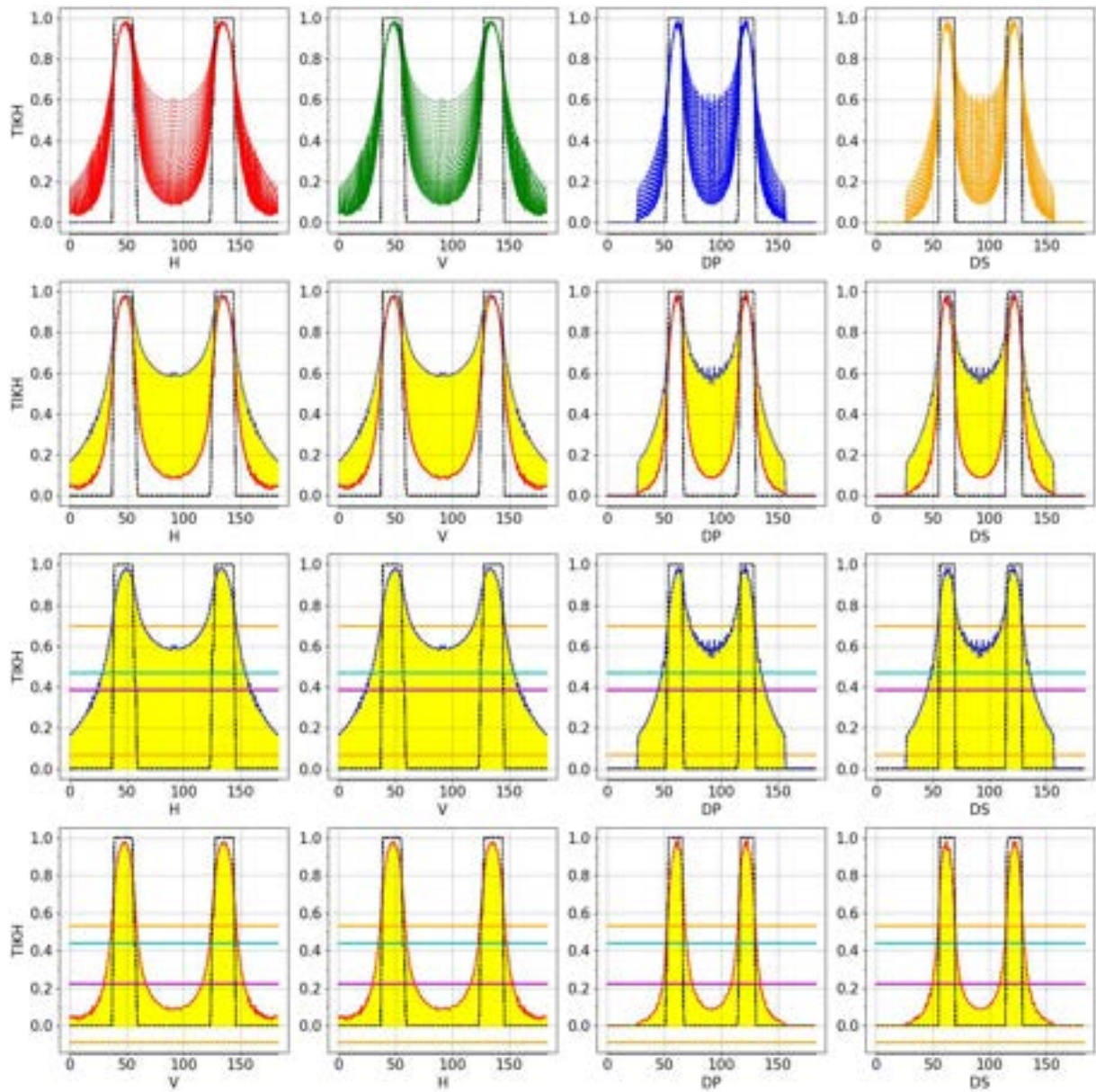


Figura 203 - Cortes TIKH com Original Engrenagem

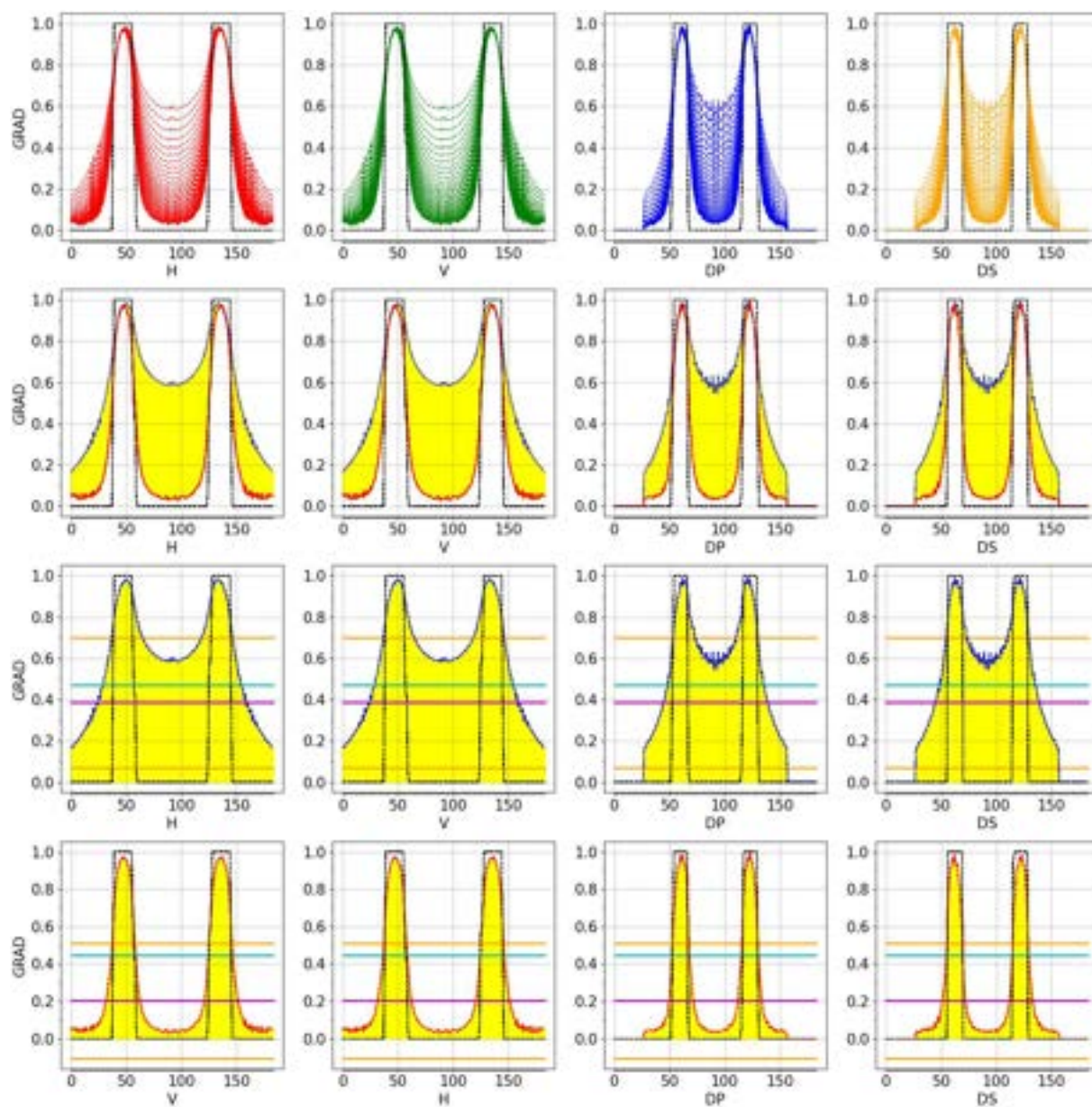


Figura 204 - Cortes GRAD com Original Engrenagem

D.1.2 Erro Nível 5 no Objeto Engrenagem

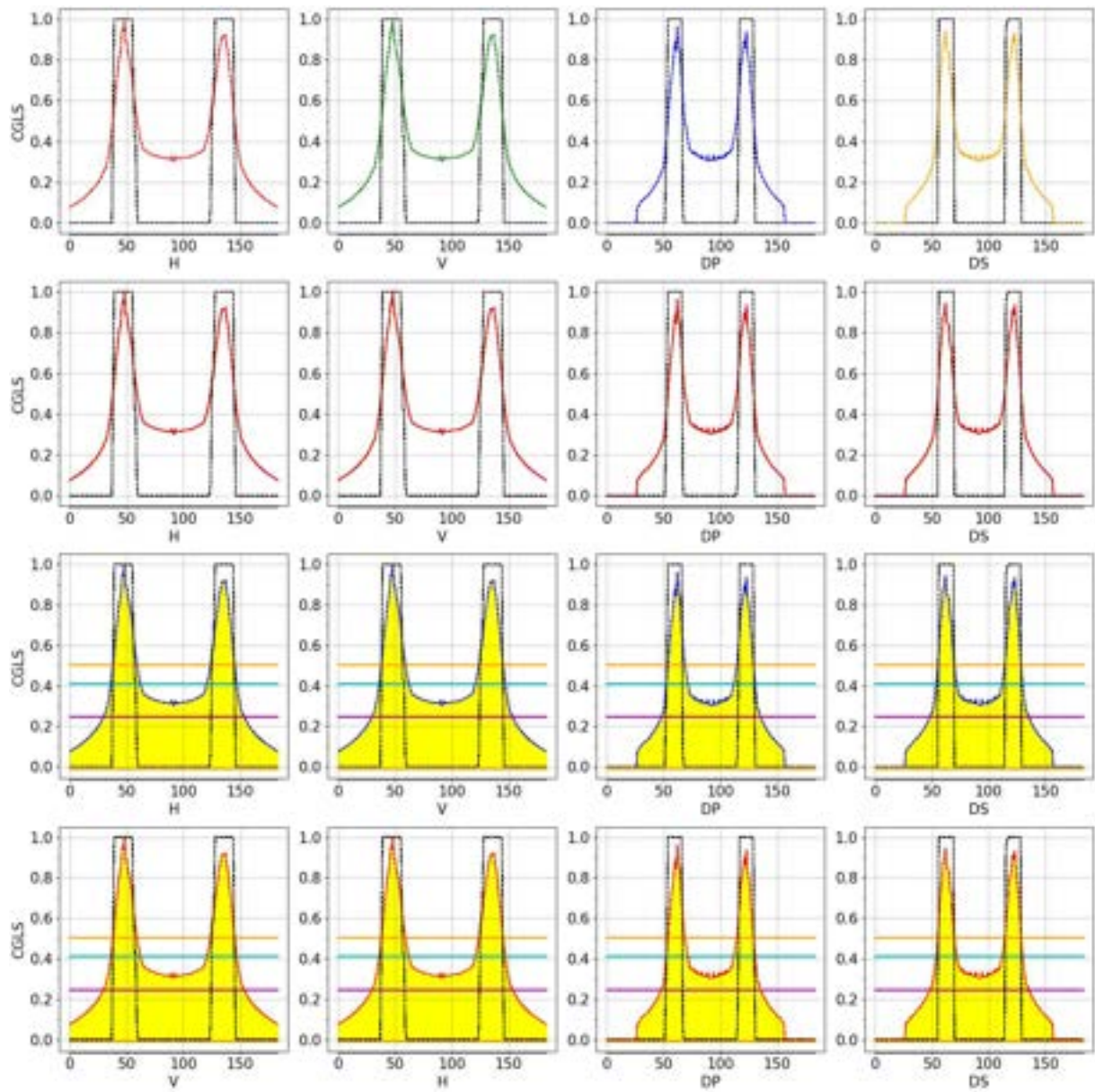


Figura 205 - Cortes CGLS com erro no Objeto Engrenagem

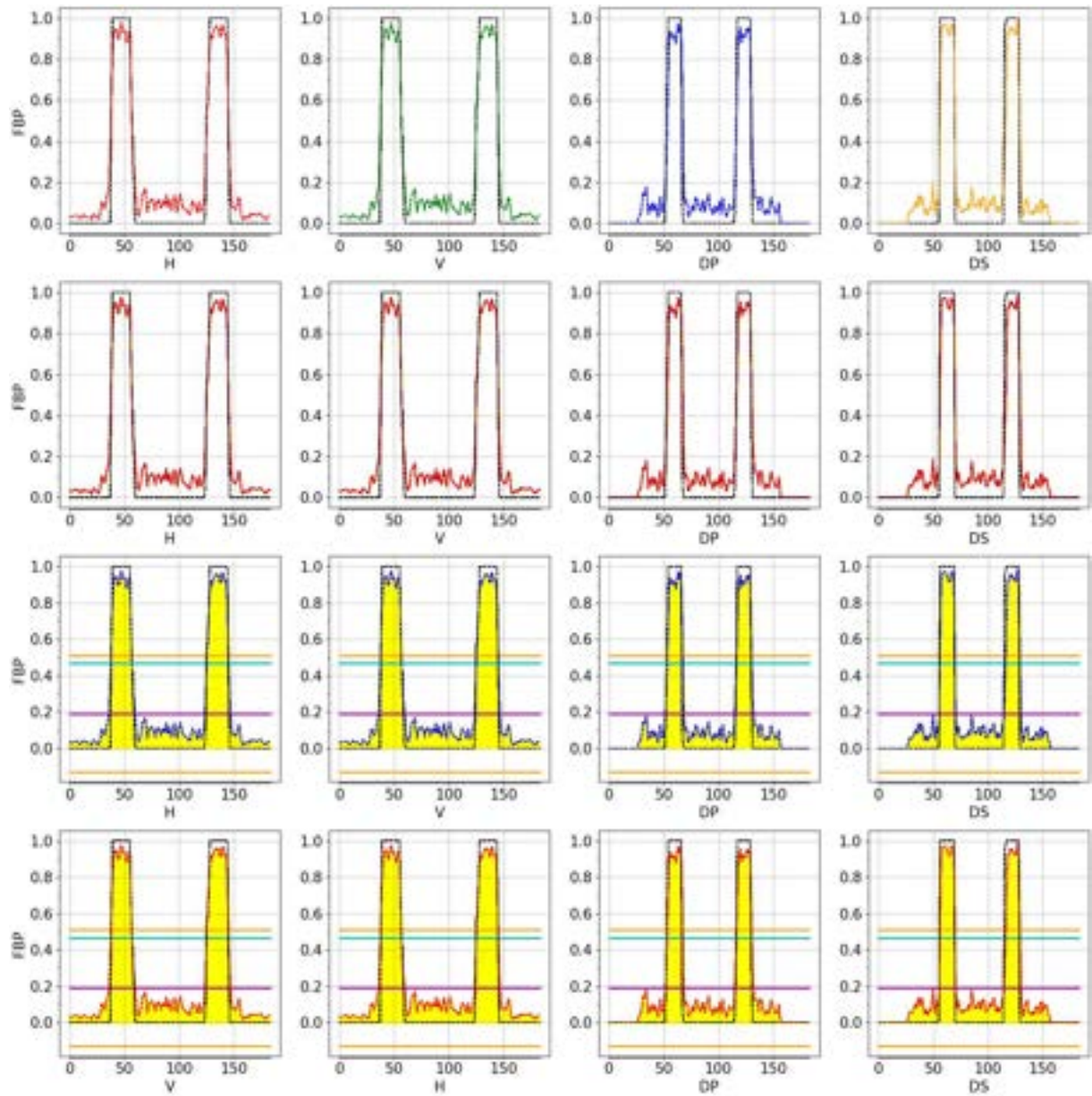


Figura 206 - Cortes FBP com erro no Objeto Engrenagem

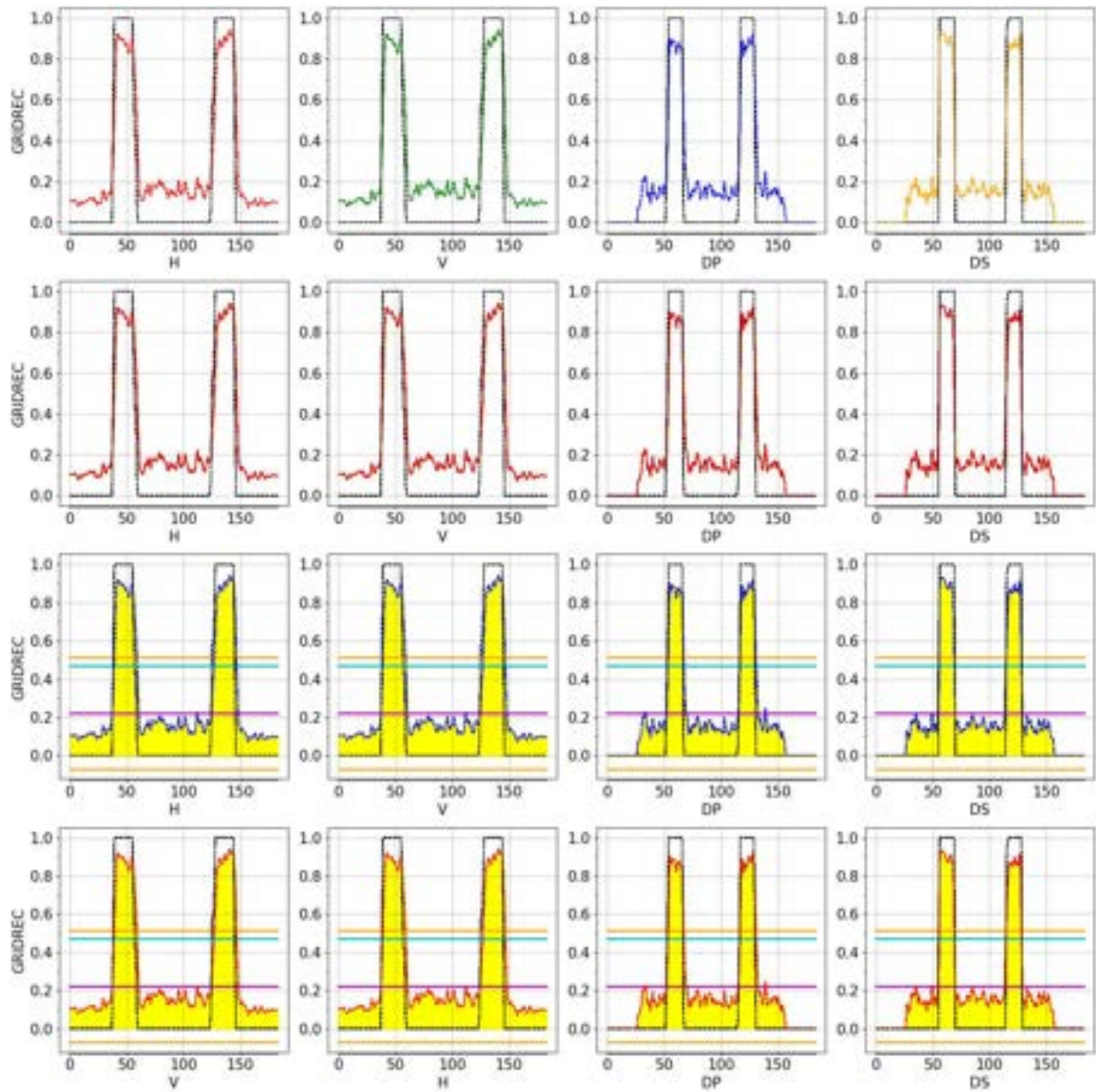


Figura 207 - Cortes GRIDREC com erro no Objeto Engrenagem

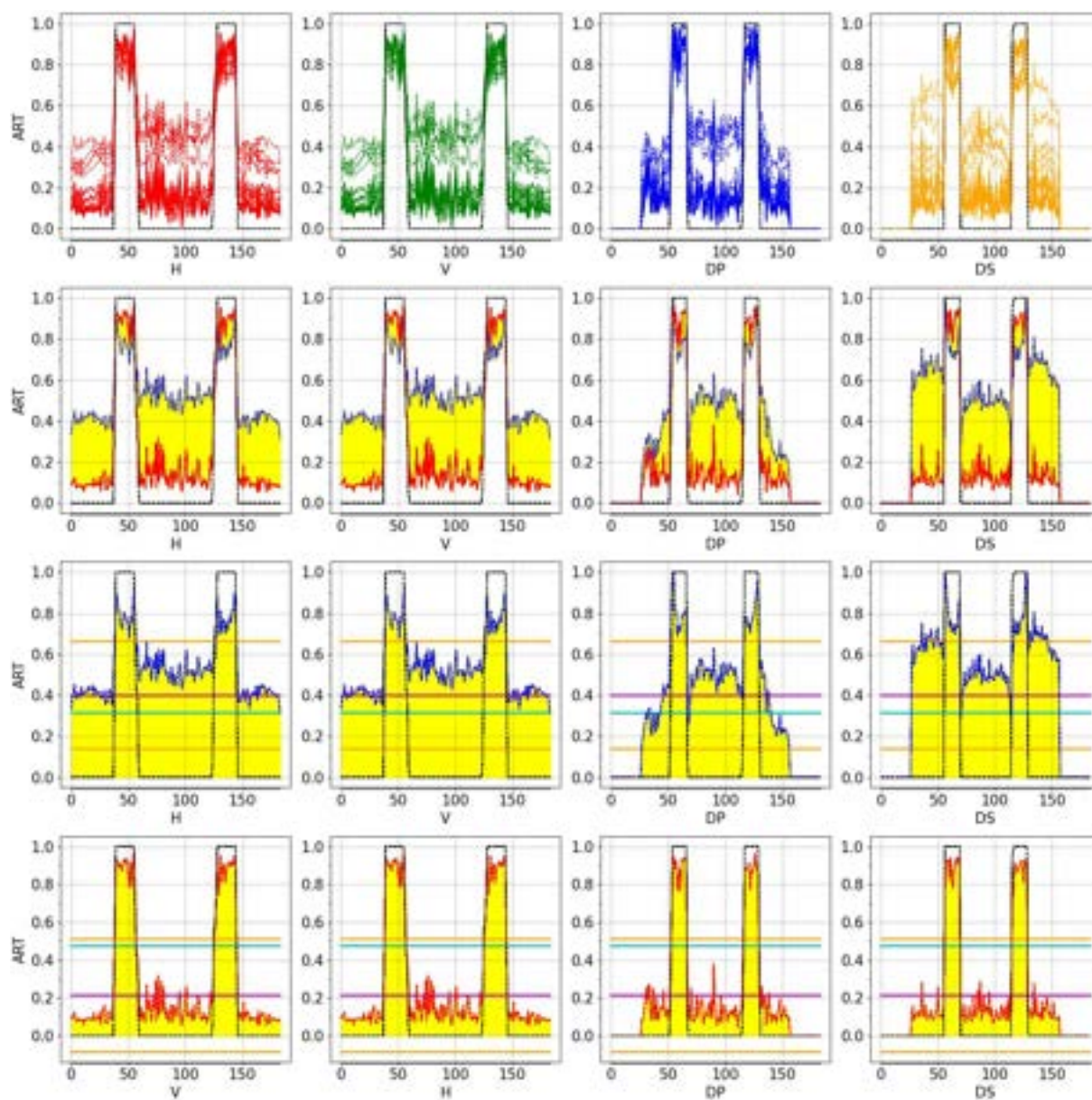


Figura 208 - Cortes ART com erro no Objeto Engrenagem

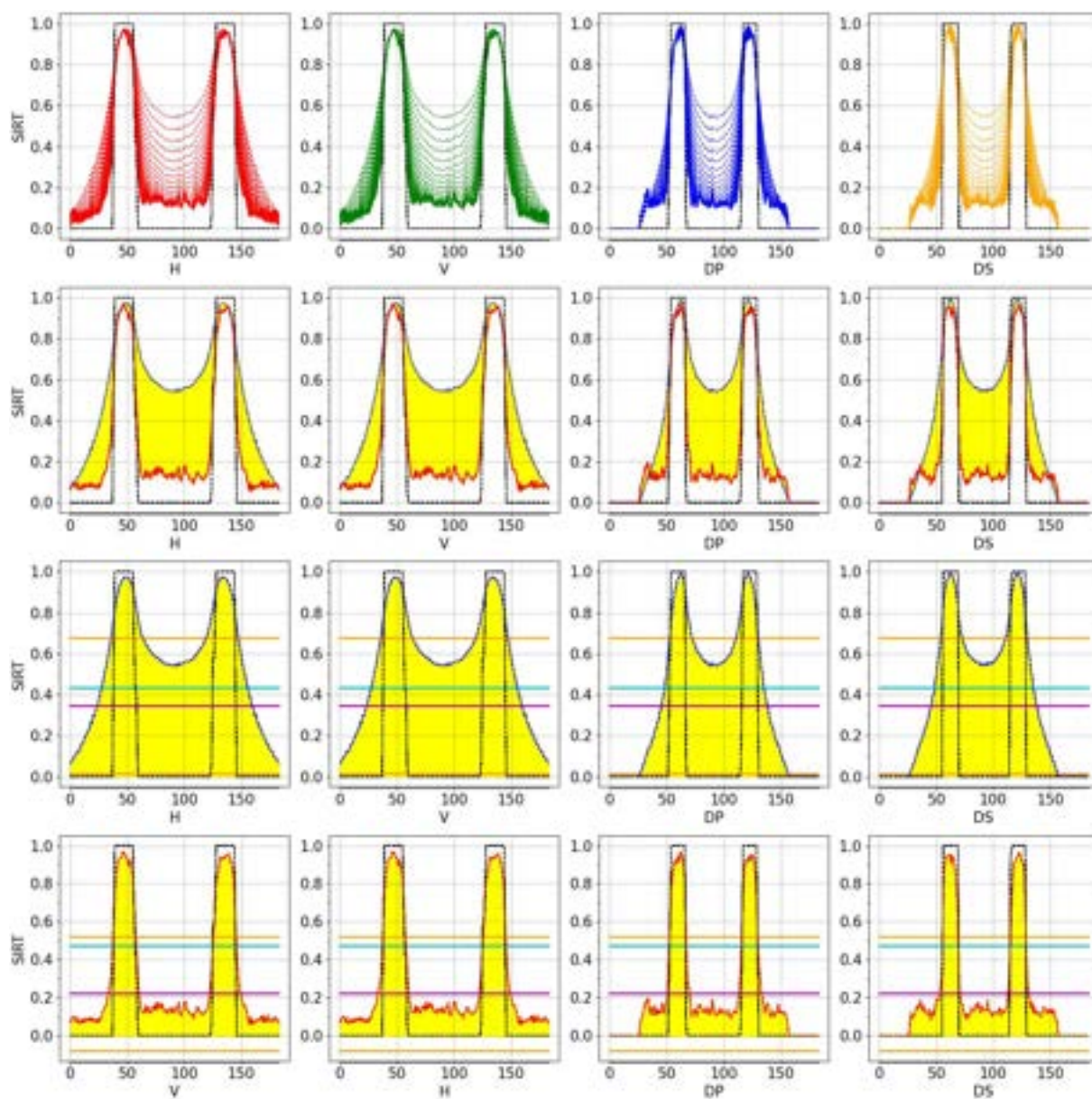


Figura 209 - Cortes SIRT com erro no Objeto Engrenagem

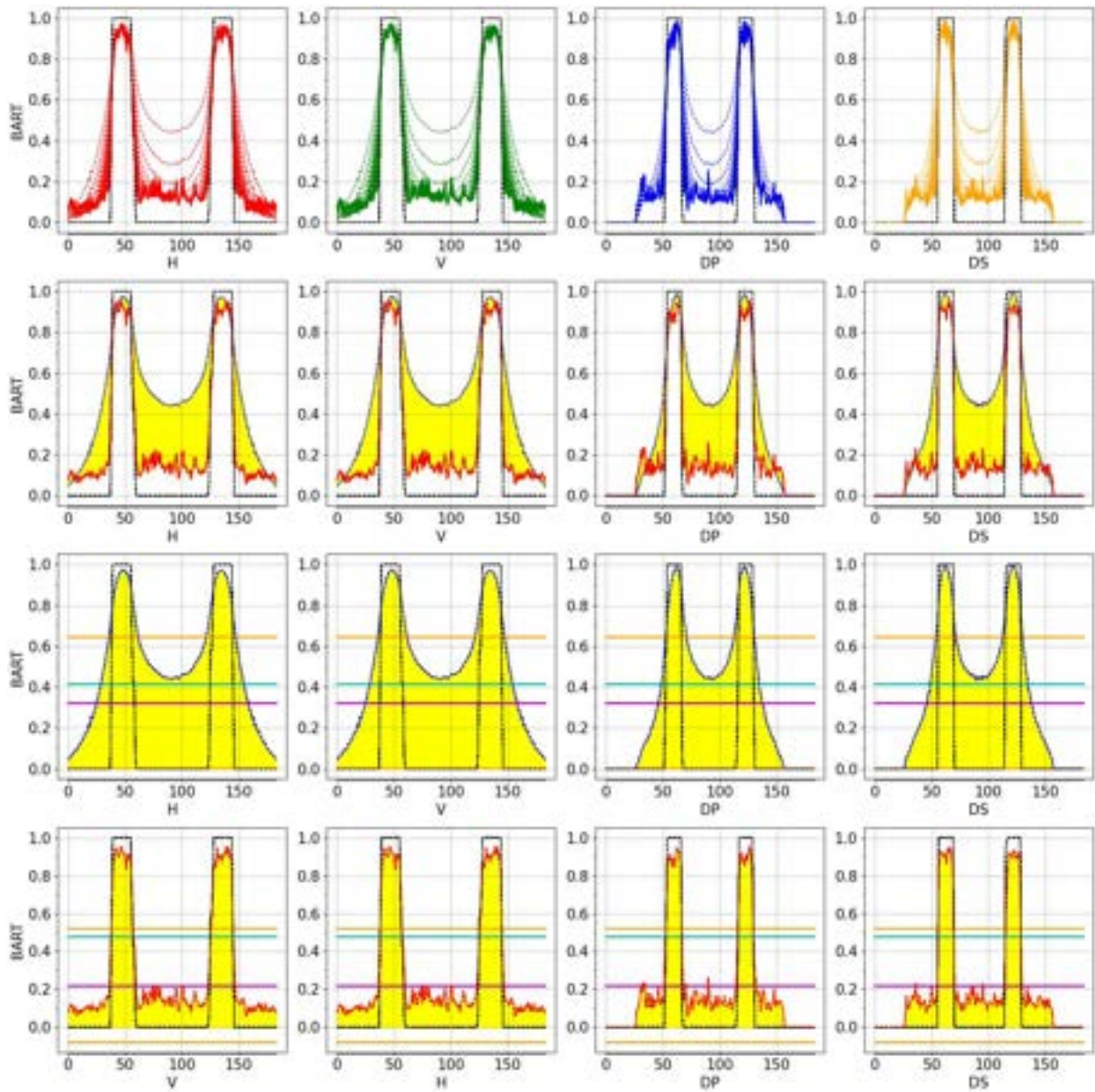


Figura 210 - Cortes BART com erro no Objeto Engrenagem

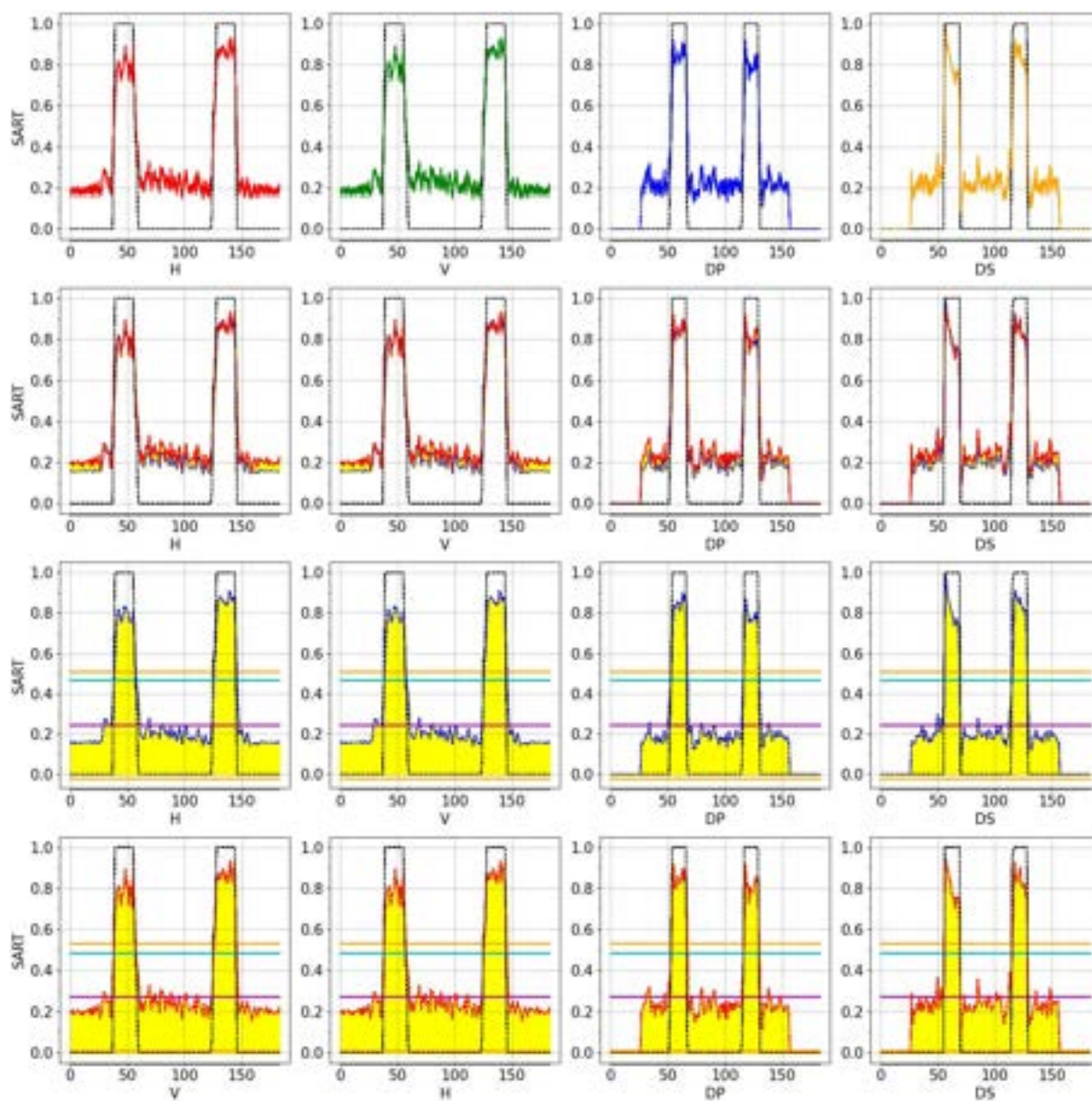


Figura 211 - Cortes SART com erro no Objeto Engrenagem

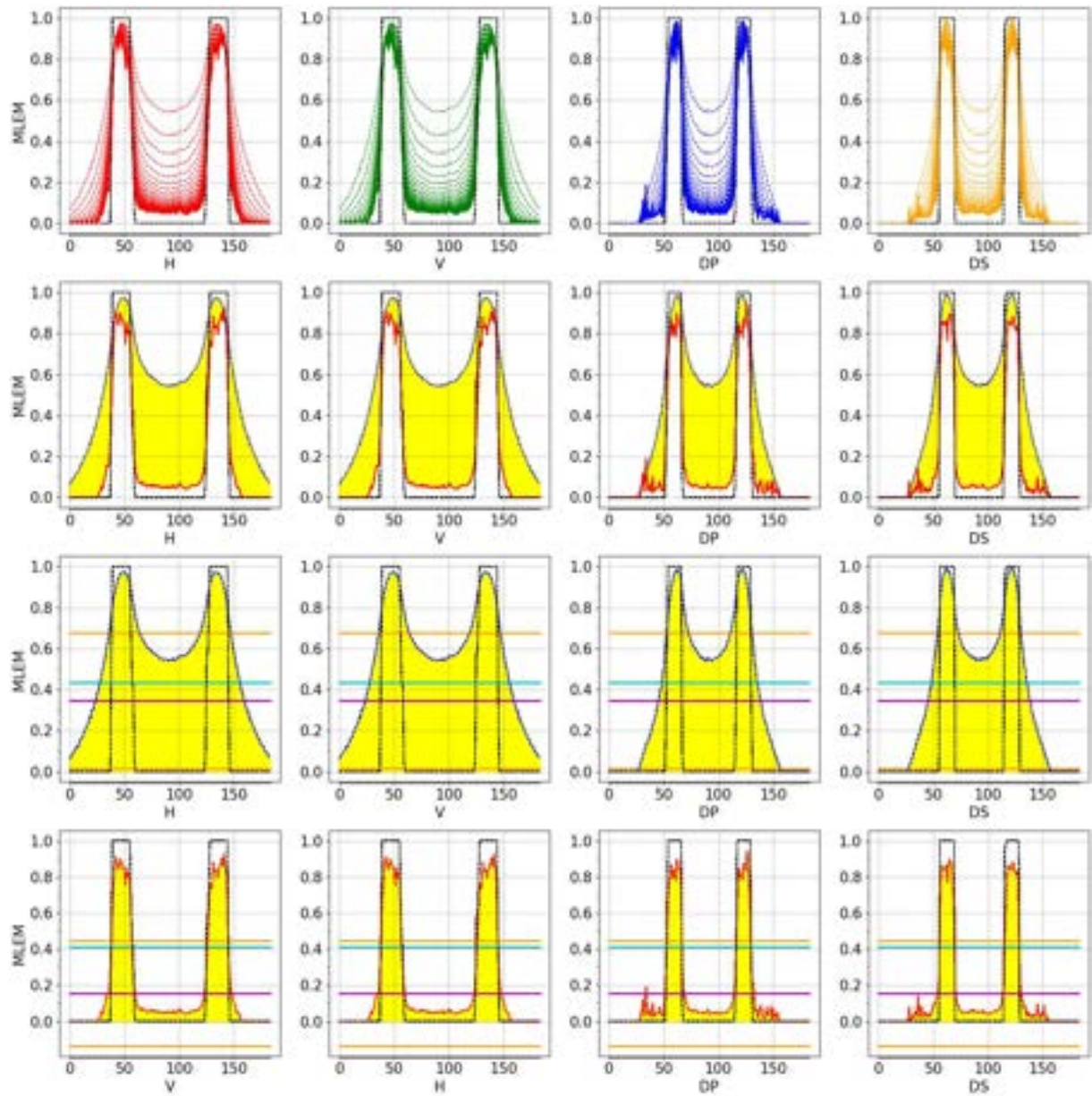


Figura 212 - Cortes MLEM com erro no Objeto Engrenagem

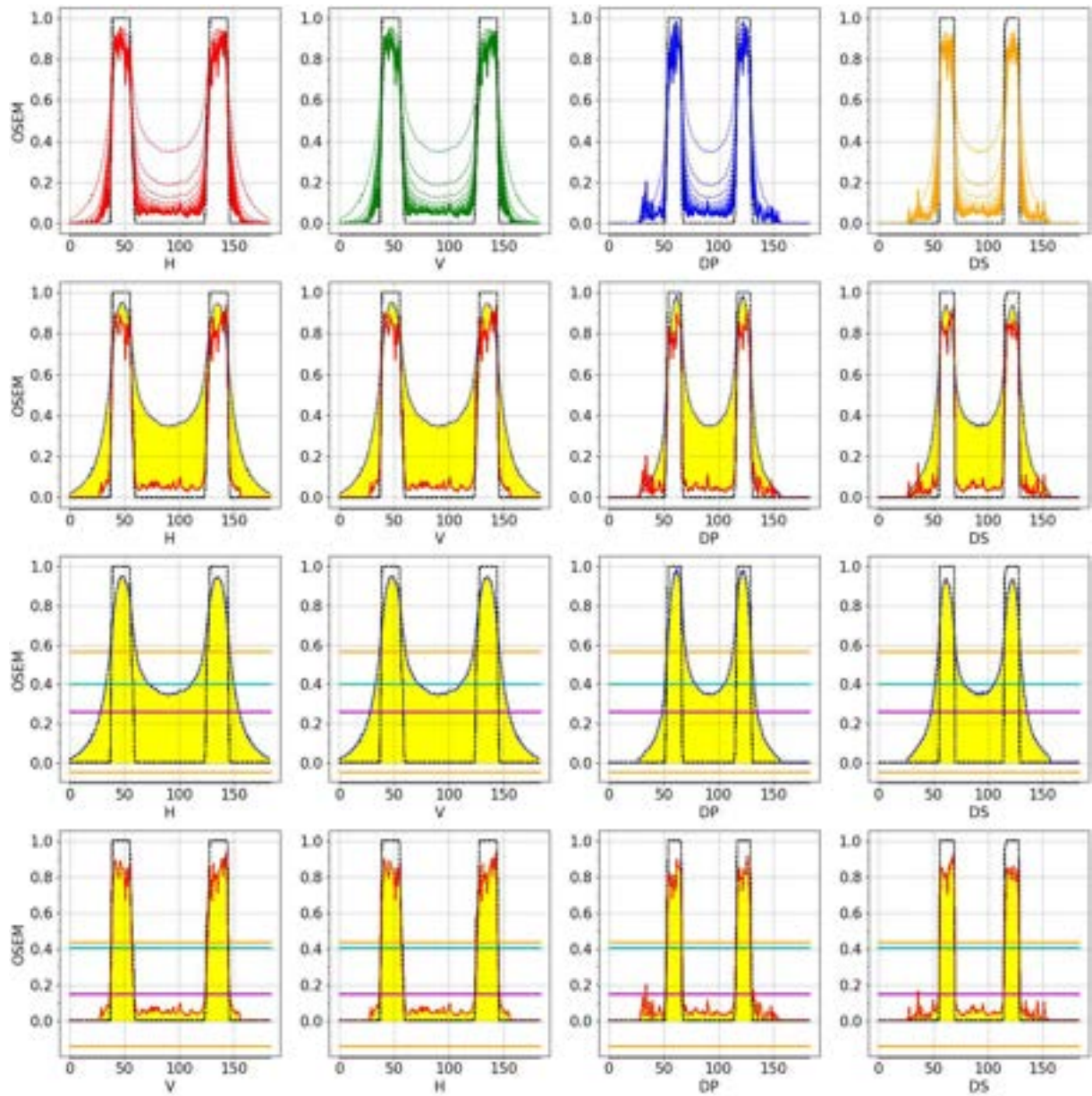


Figura 213 - Cortes OSEM com erro no Objeto Engrenagem

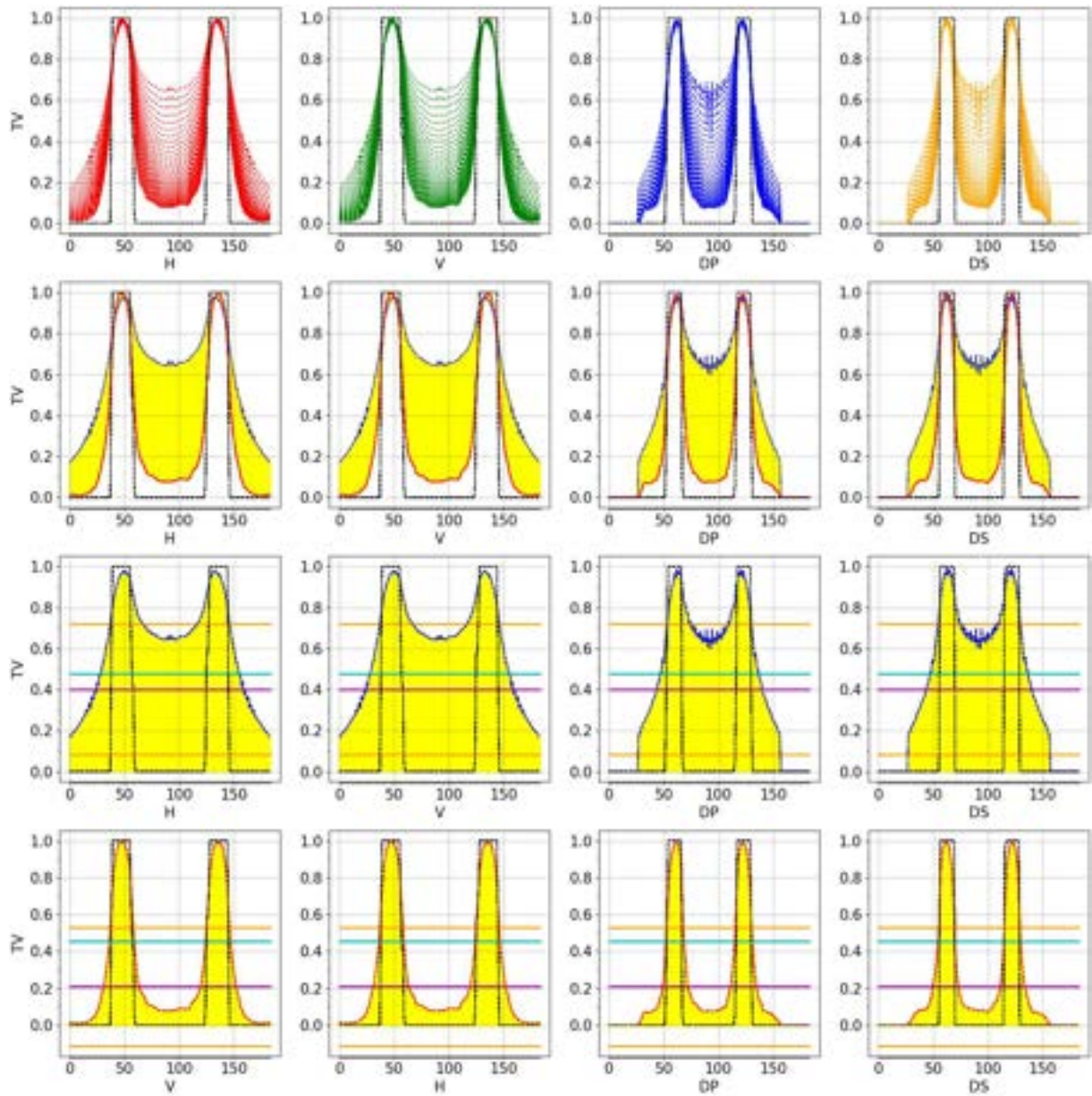


Figura 214 - Cortes TV com erro no Objeto Engrenagem

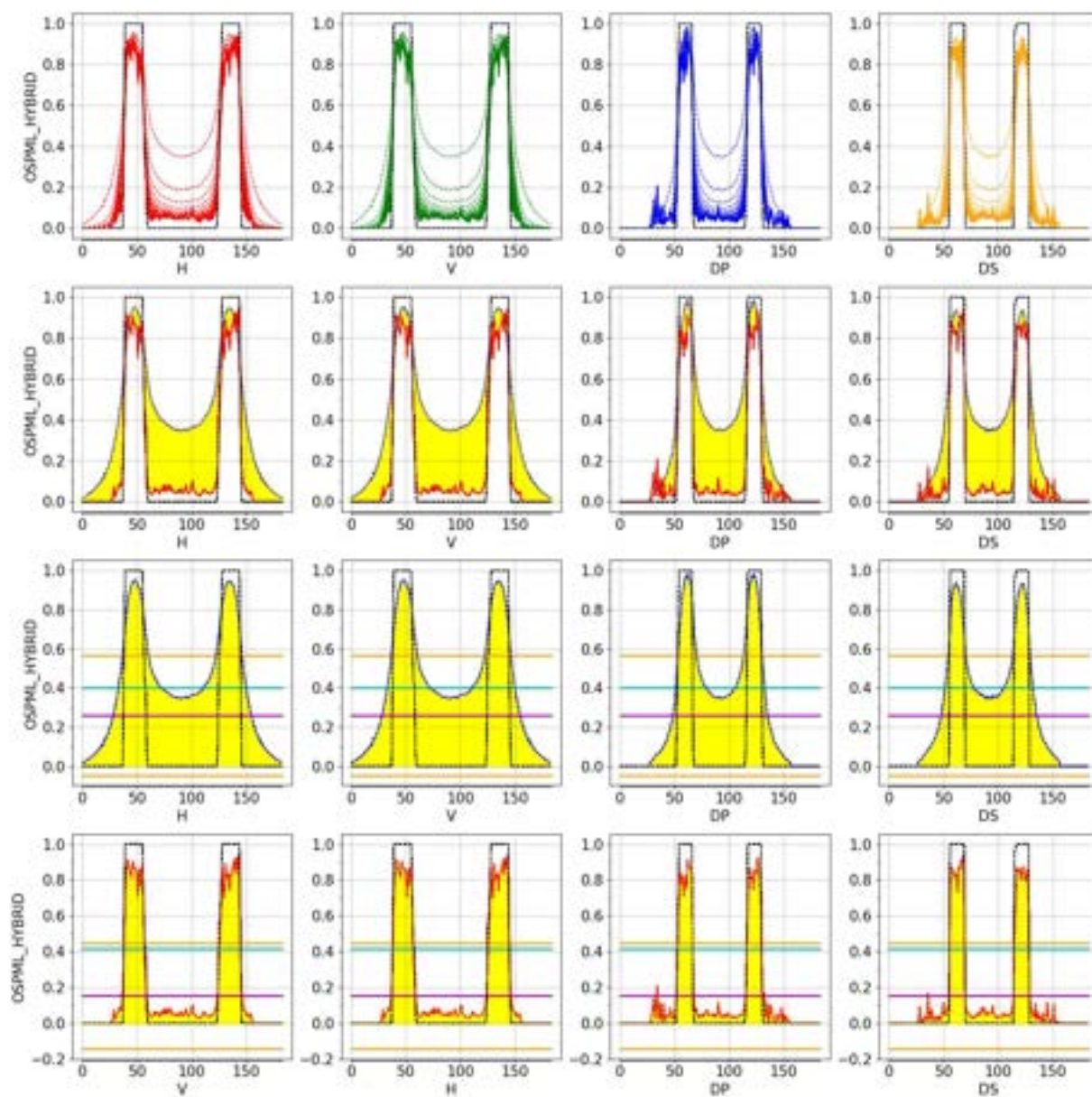


Figura 215 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem

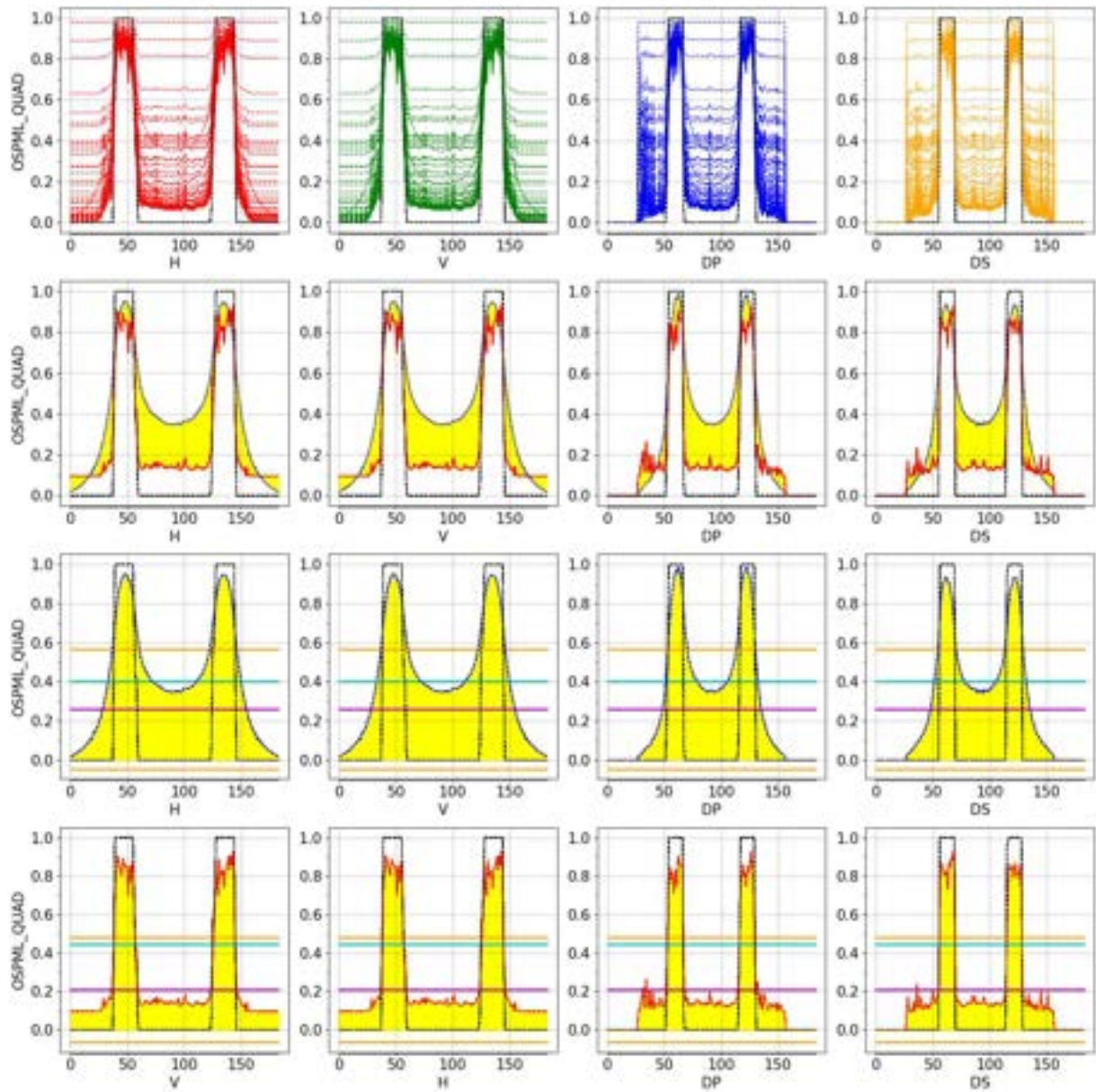


Figura 216 - Cortes OSPML-Quad com erro no Objeto Engrenagem

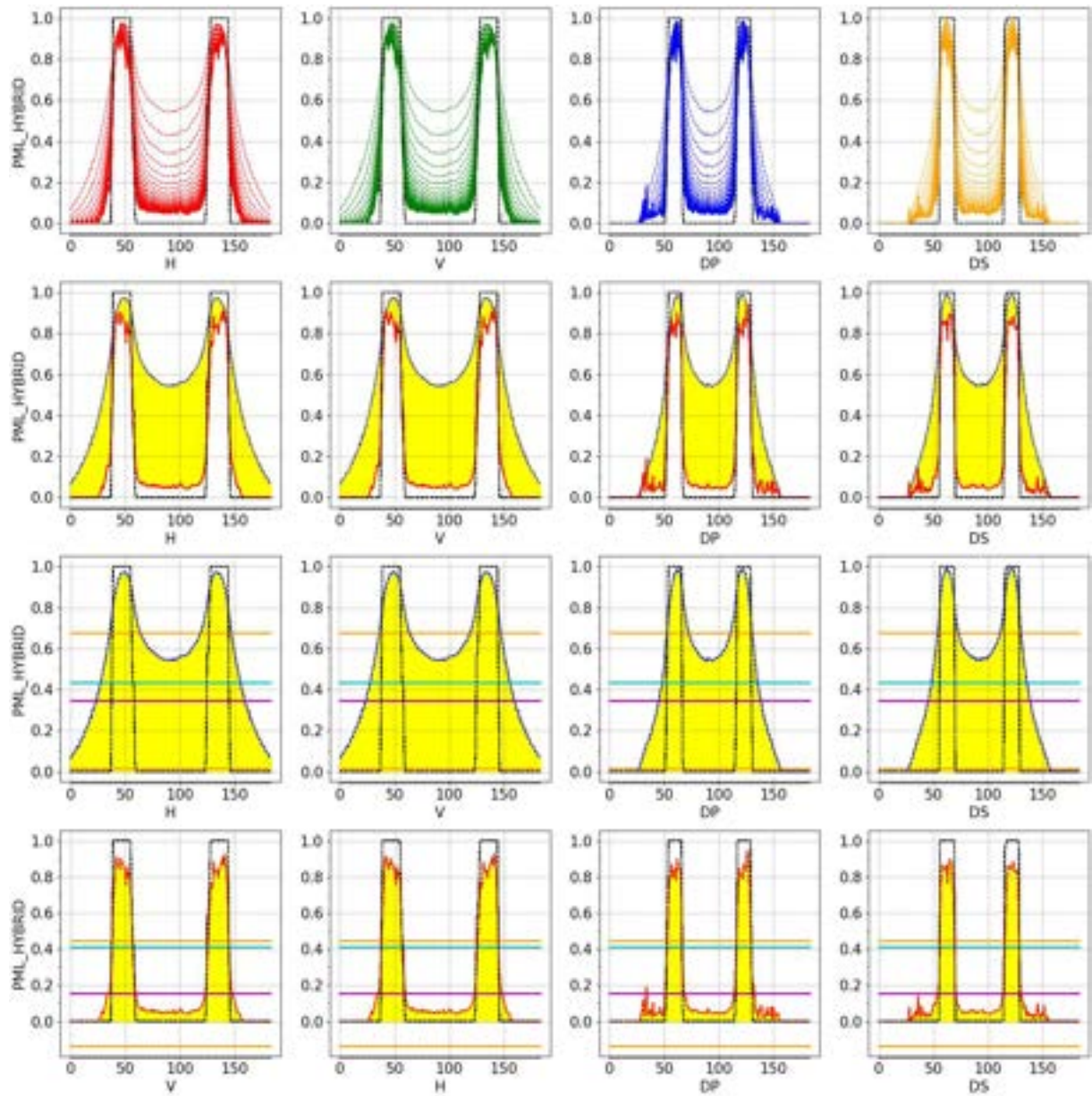


Figura 217 - Cortes PML-Hybrid com erro no Objeto Engrenagem

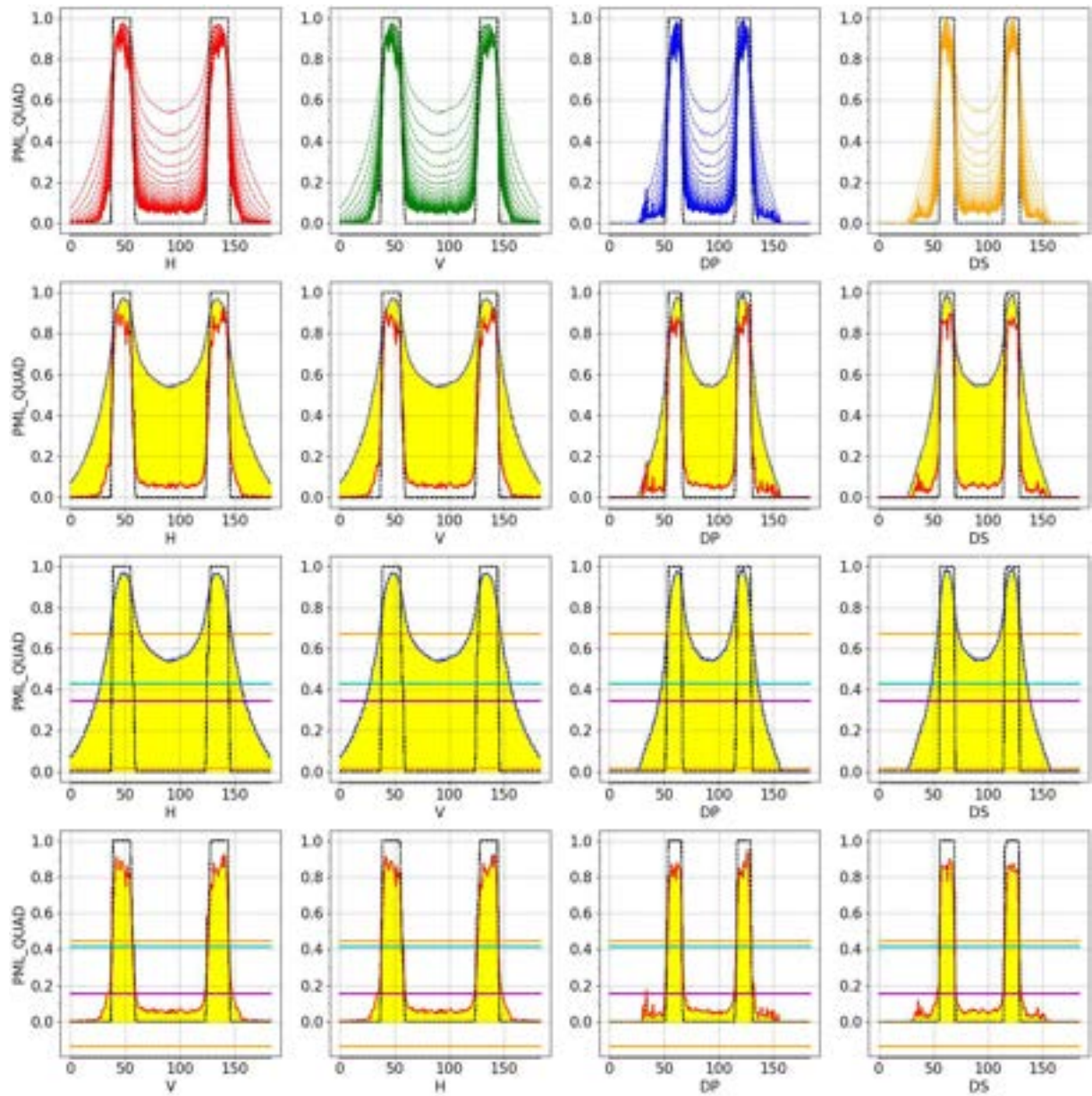


Figura 218 - Cortes PML-Quad com erro no Objeto Engrenagem

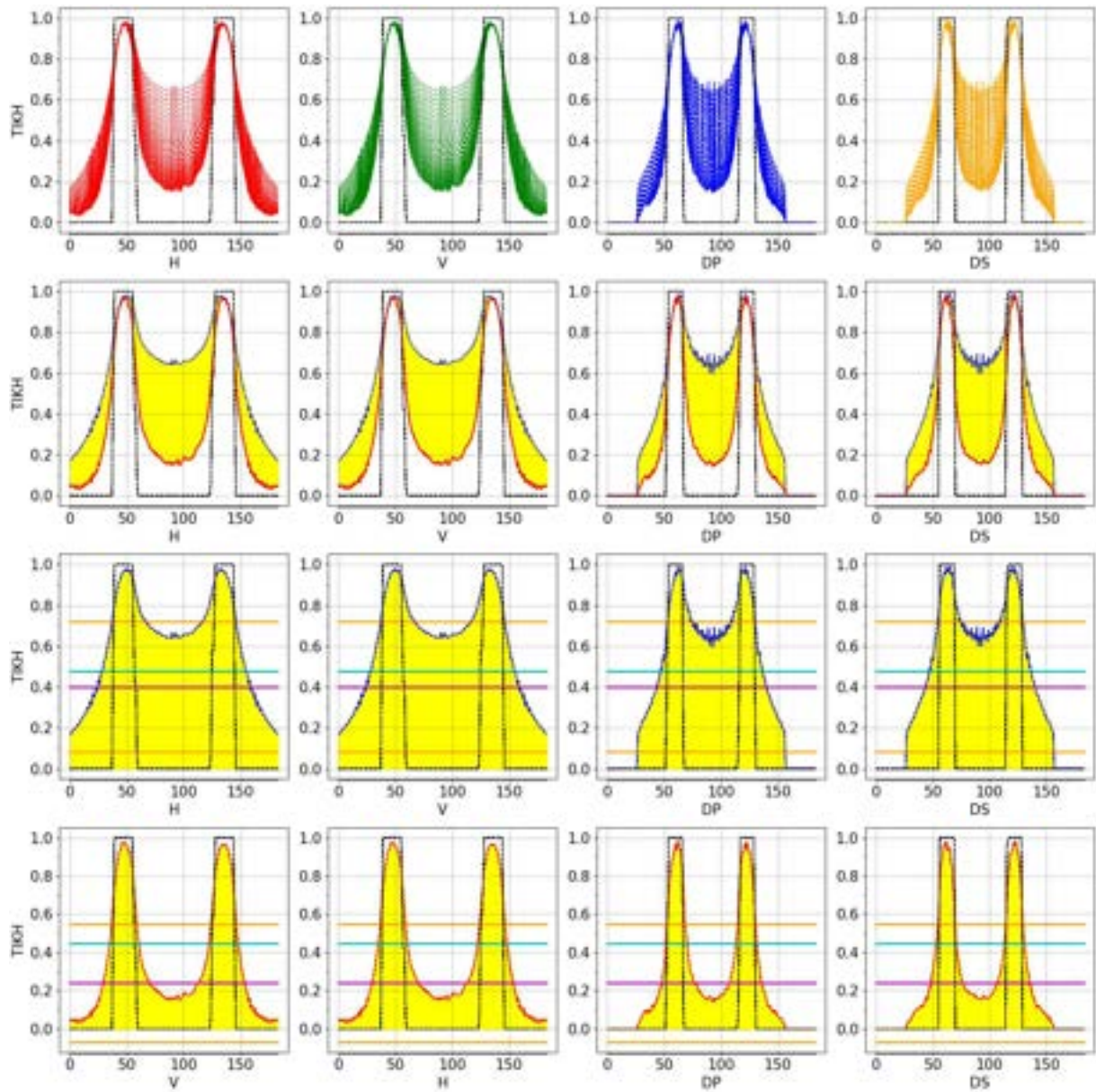


Figura 219 - Cortes TIKH com erro no Objeto Engrenagem

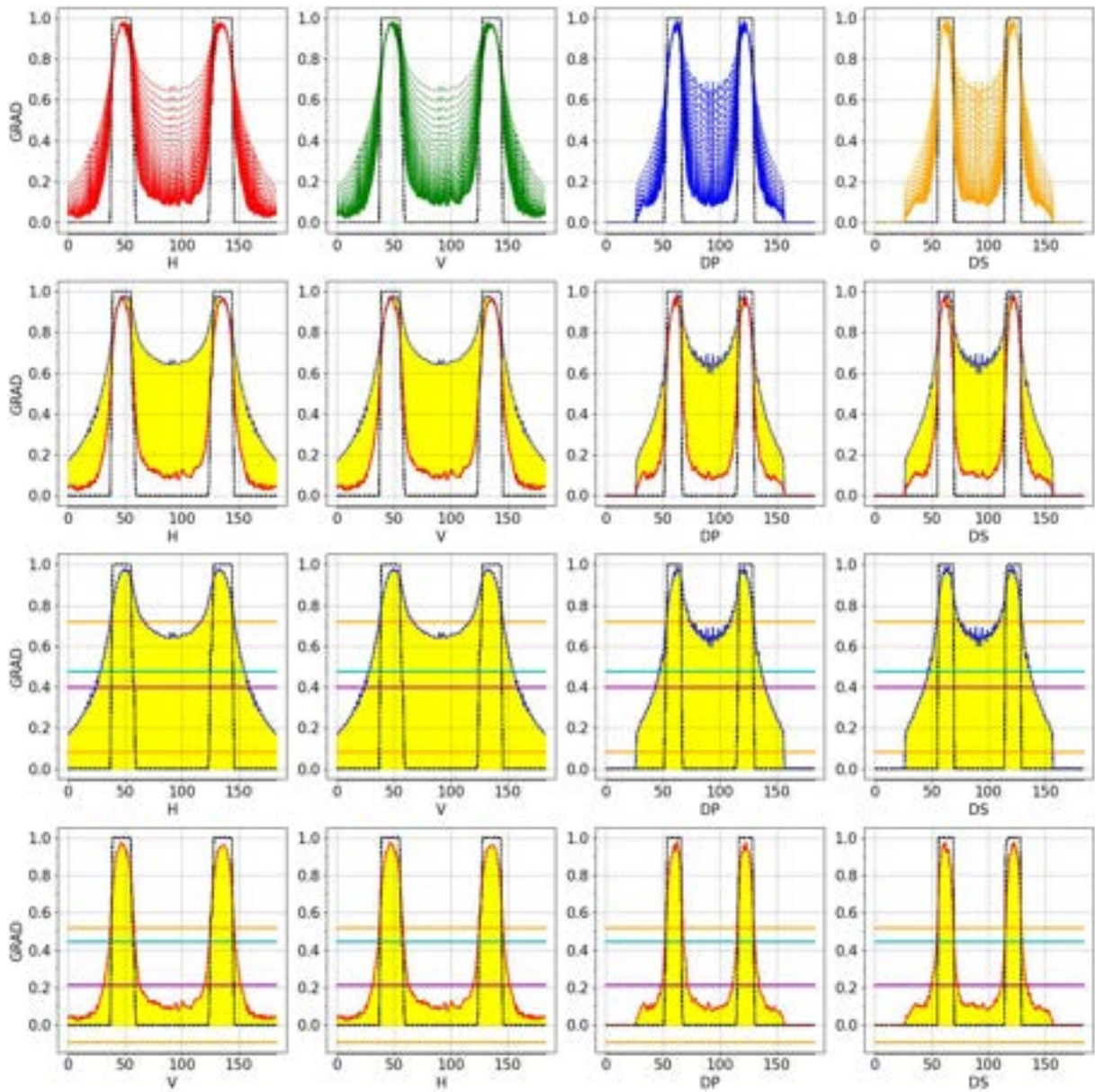


Figura 220 - Cortes GRAD com erro no Objeto Engrenagem

D.1.3 Erro Nível 5 no Sinograma Engrenagem

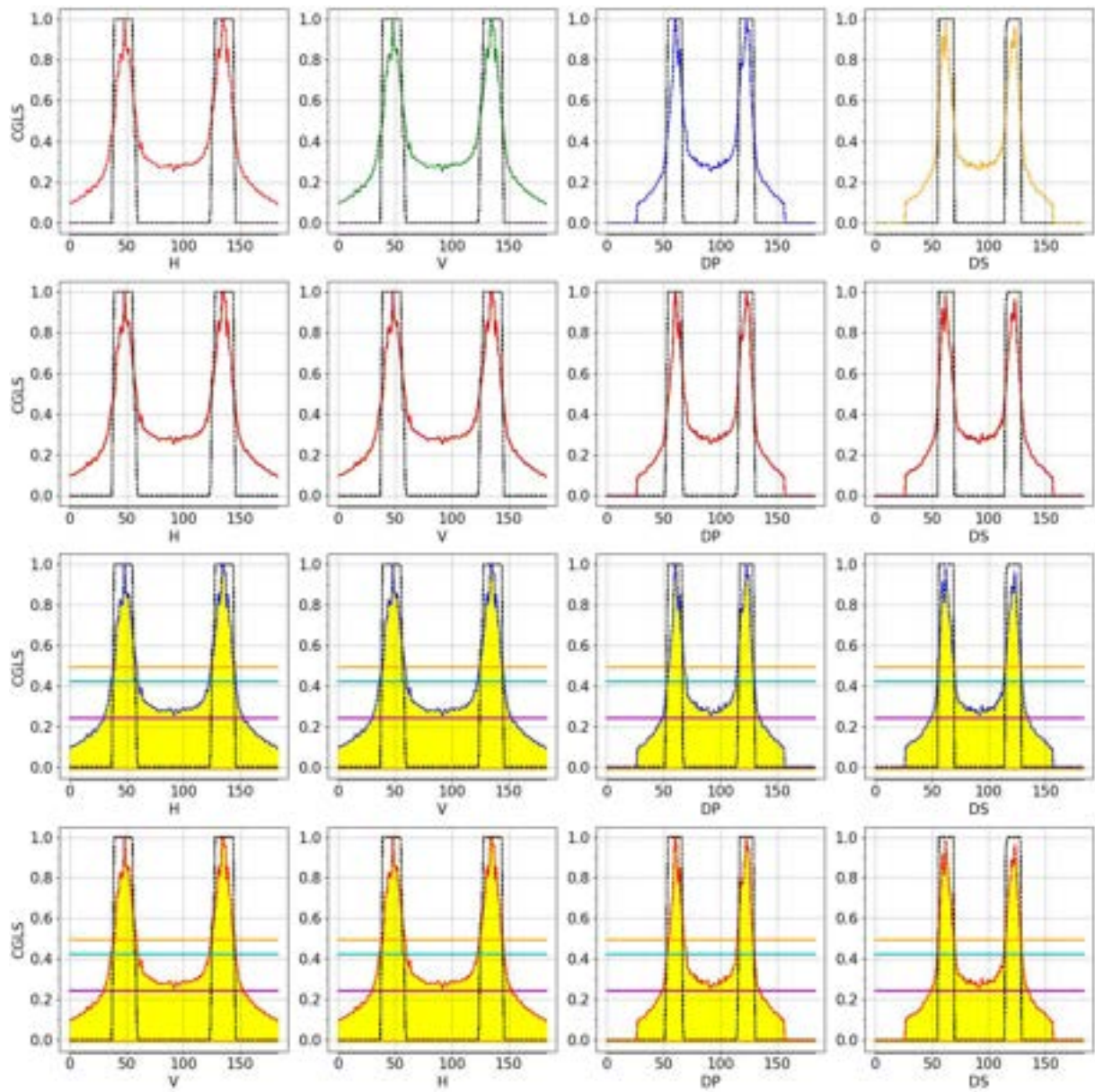


Figura 221 - Cortes CGLS com erro no Sinograma Engrenagem

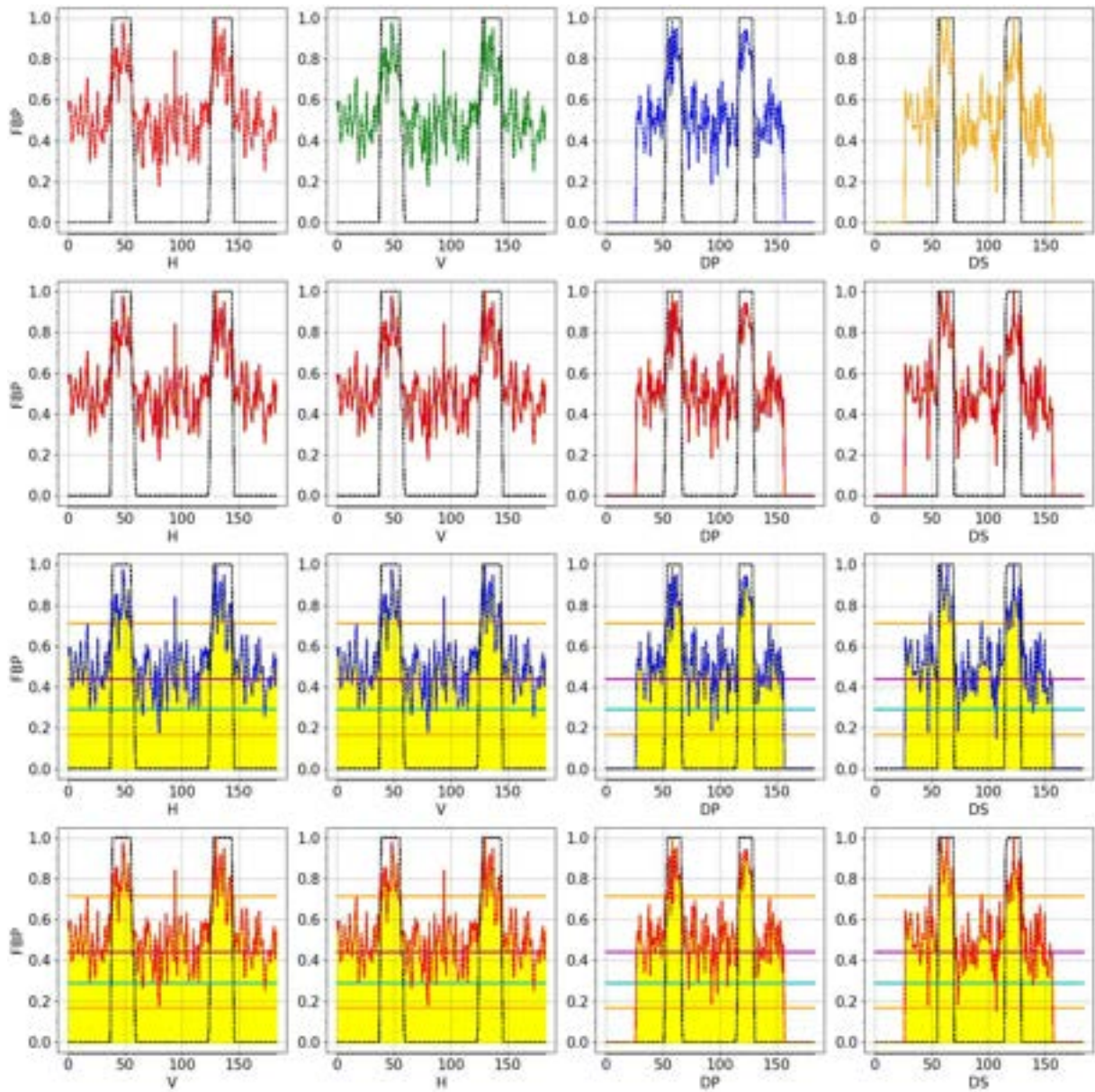


Figura 222 - Cortes FBP com erro no Sinograma Engrenagem

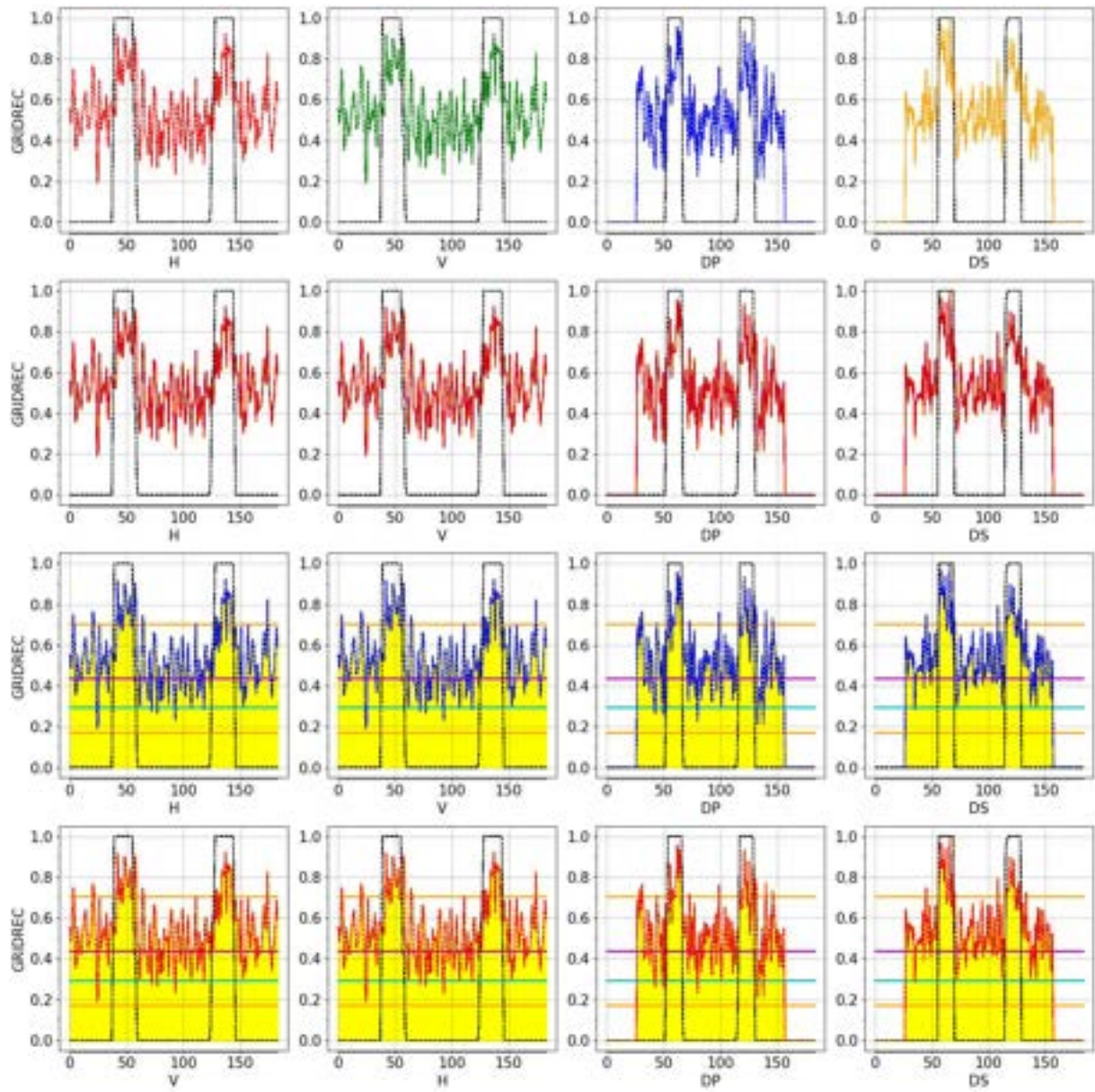


Figura 223 - Cortes GRIDREC com erro no Sinograma Engrenagem

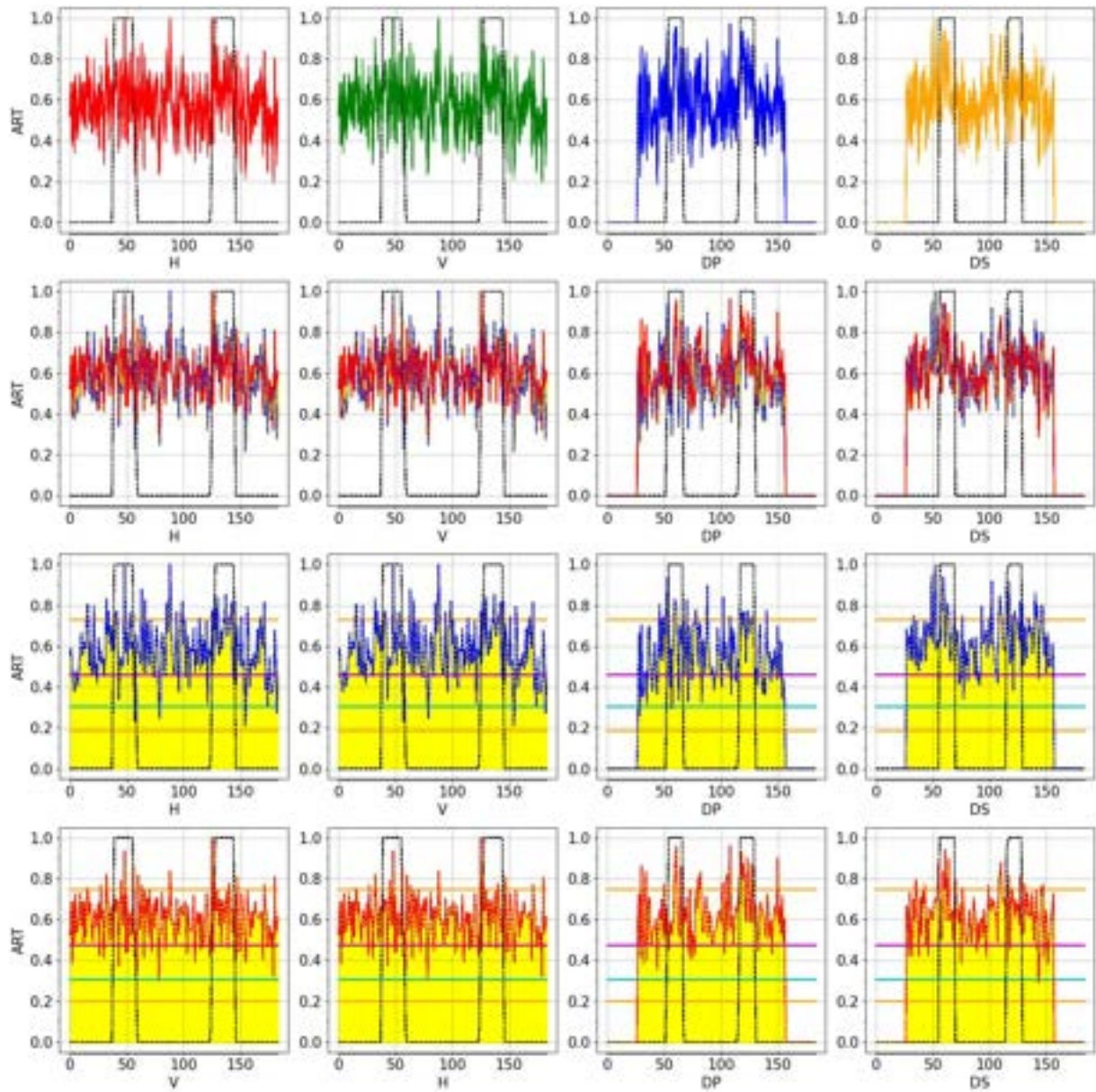


Figura 224 - Cortes ART com erro no Sinograma Engrenagem

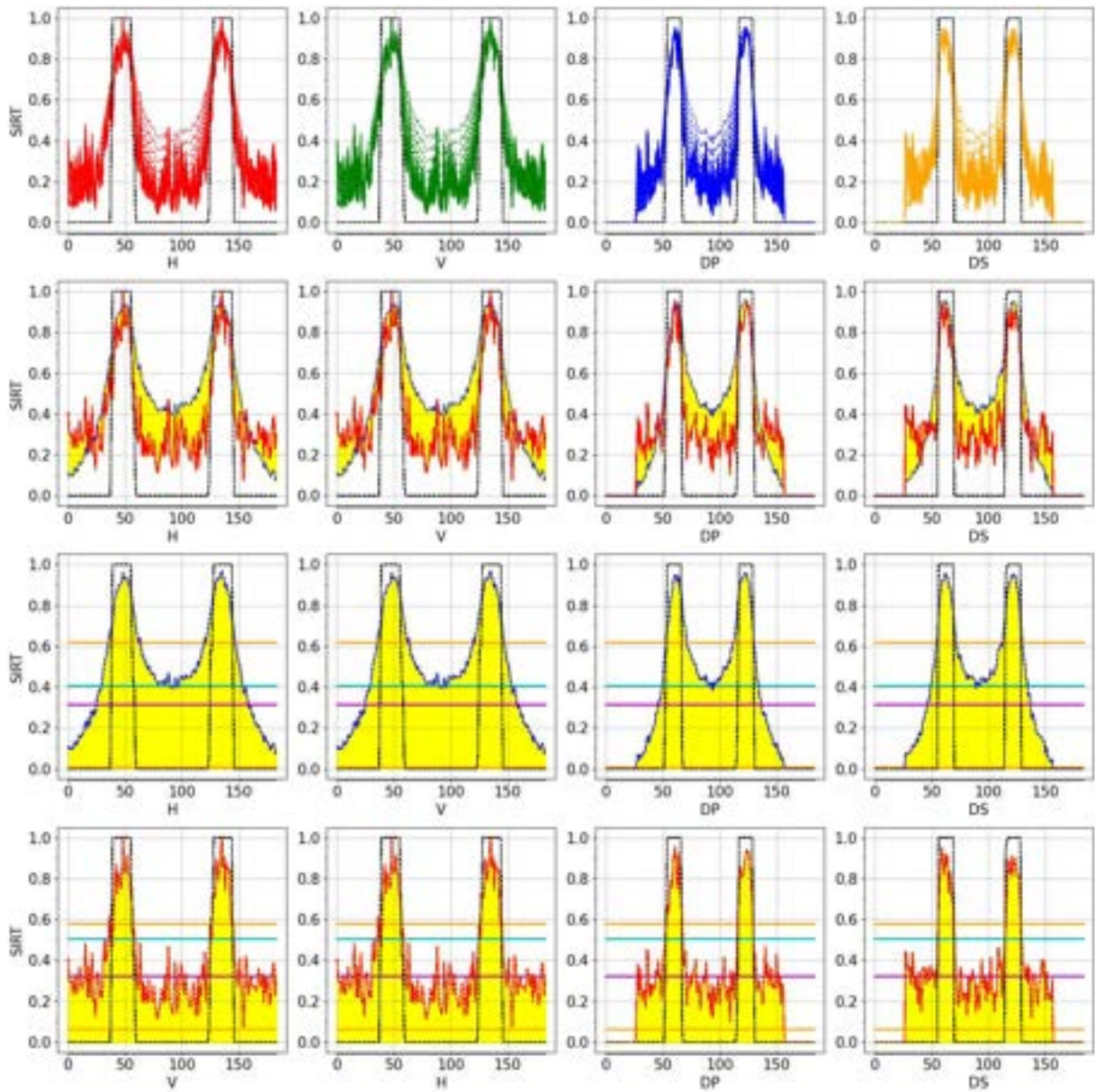


Figura 225 - Cortes SIRT com erro no Sinograma Engrenagem

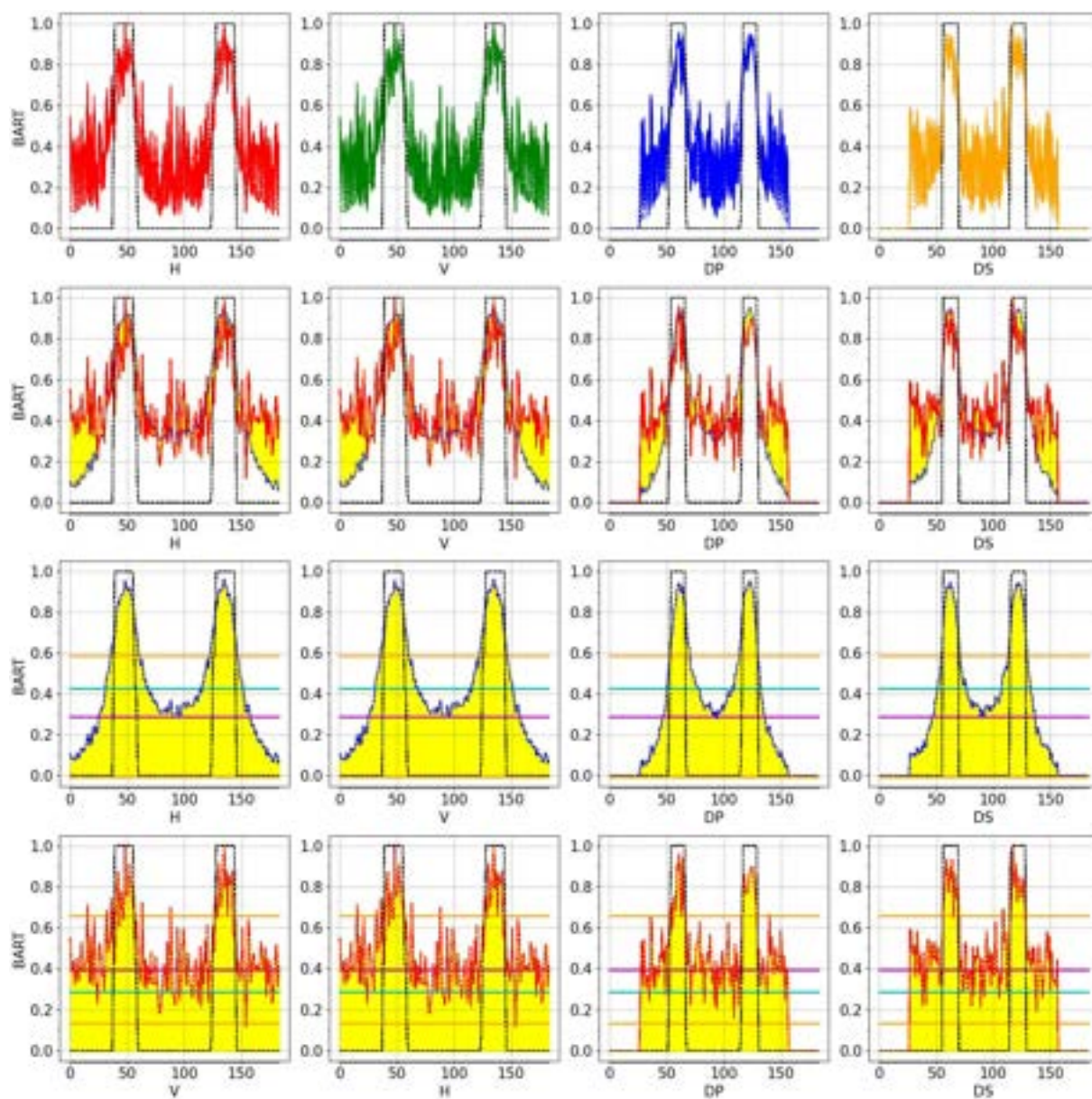


Figura 226 - Cortes BART com erro no Sinograma Engrenagem

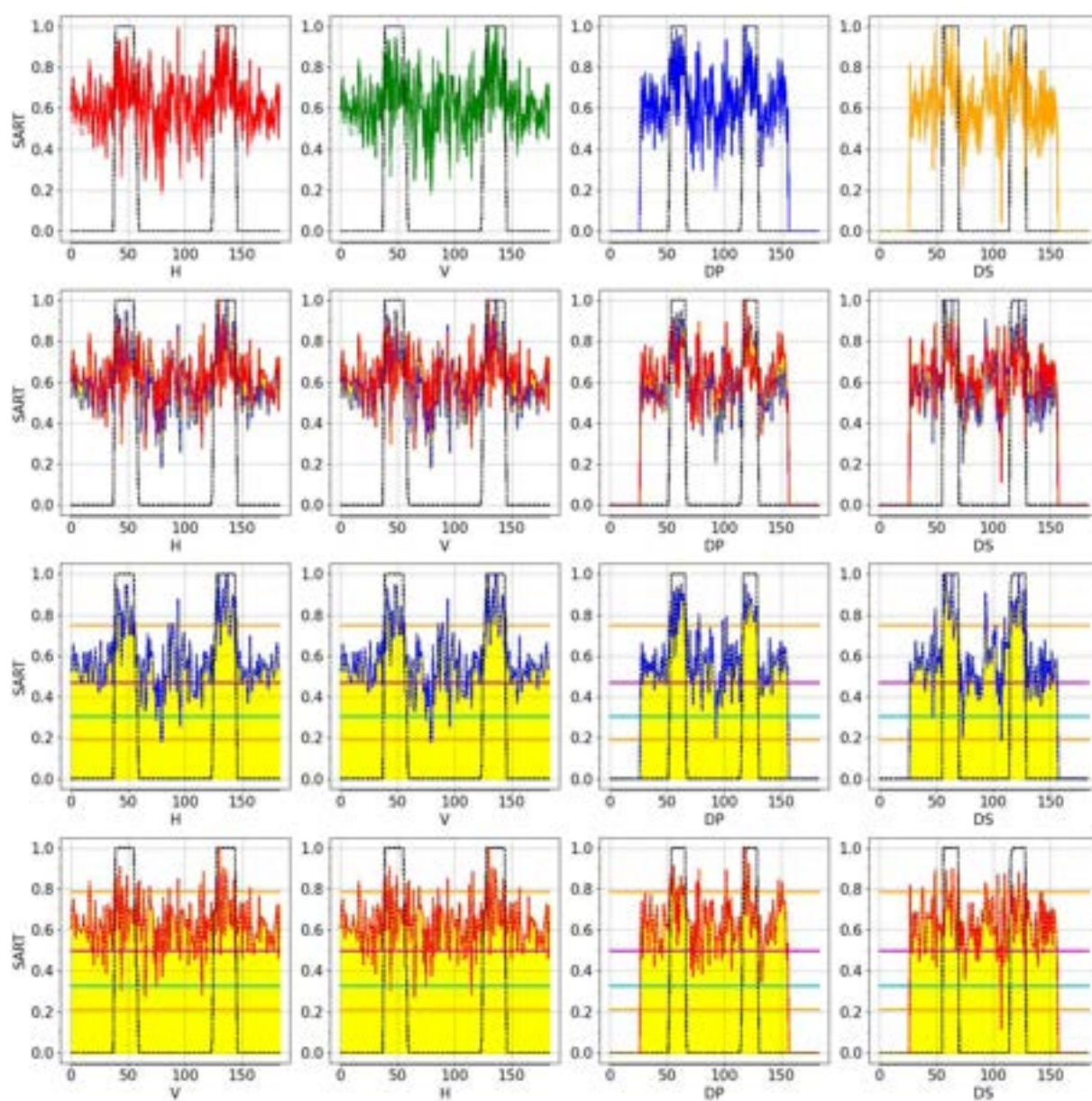


Figura 227 - Cortes SART com erro no Sinograma Engrenagem

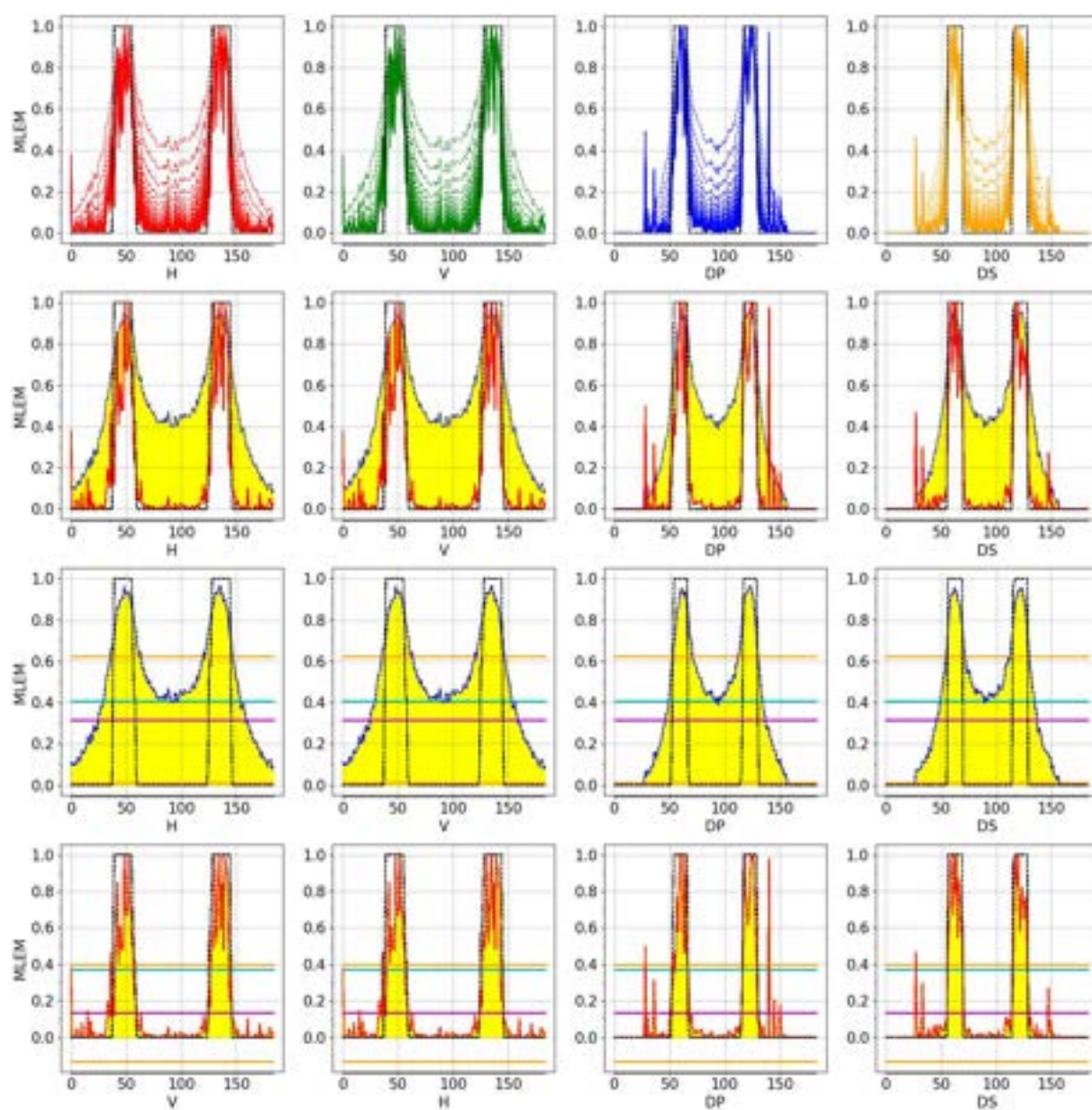


Figura 228 - Cortes MLEM com erro no Sinograma Engrenagem

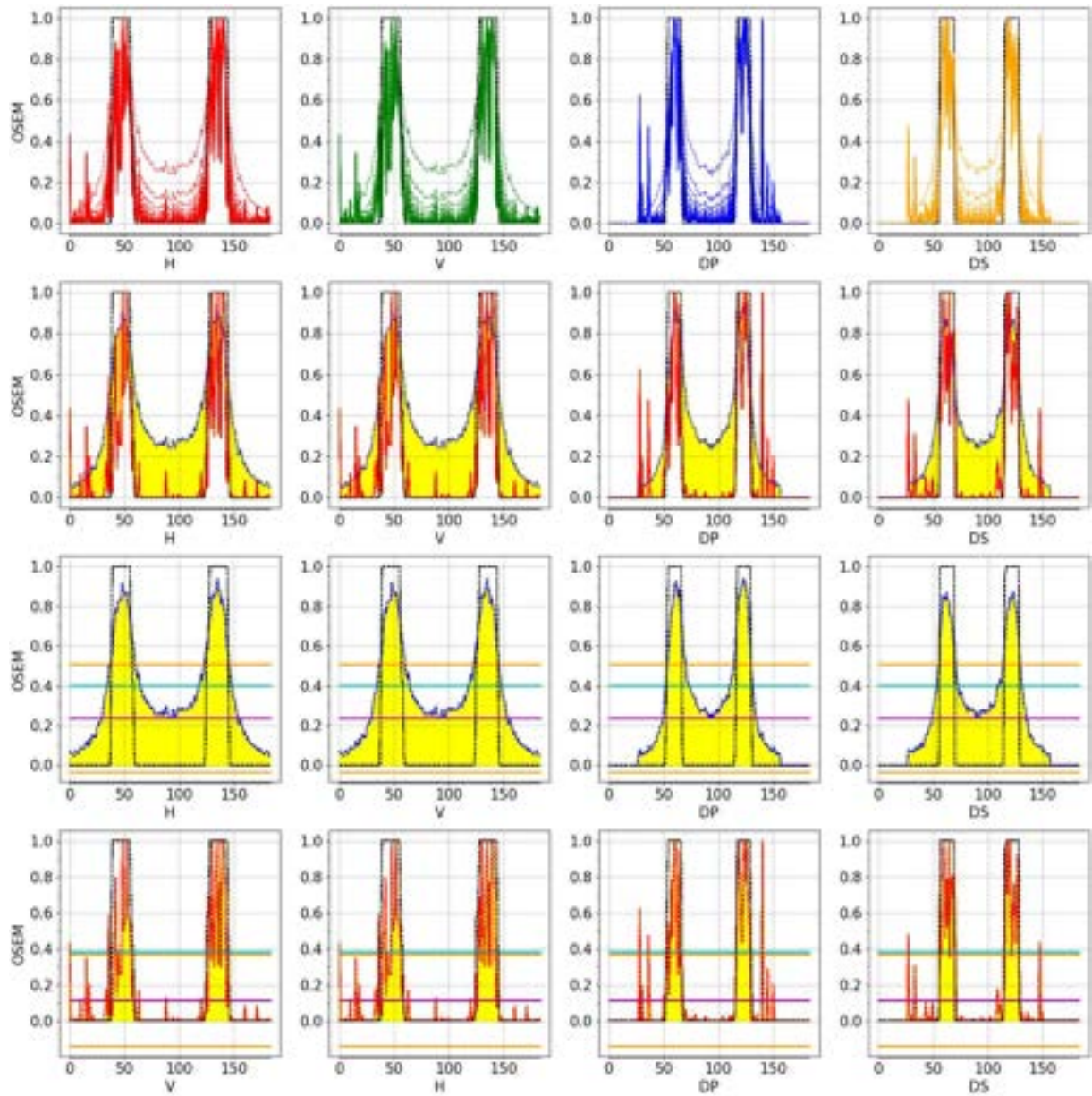


Figura 229 - Cortes OSEM com erro no Sinograma Engrenagem

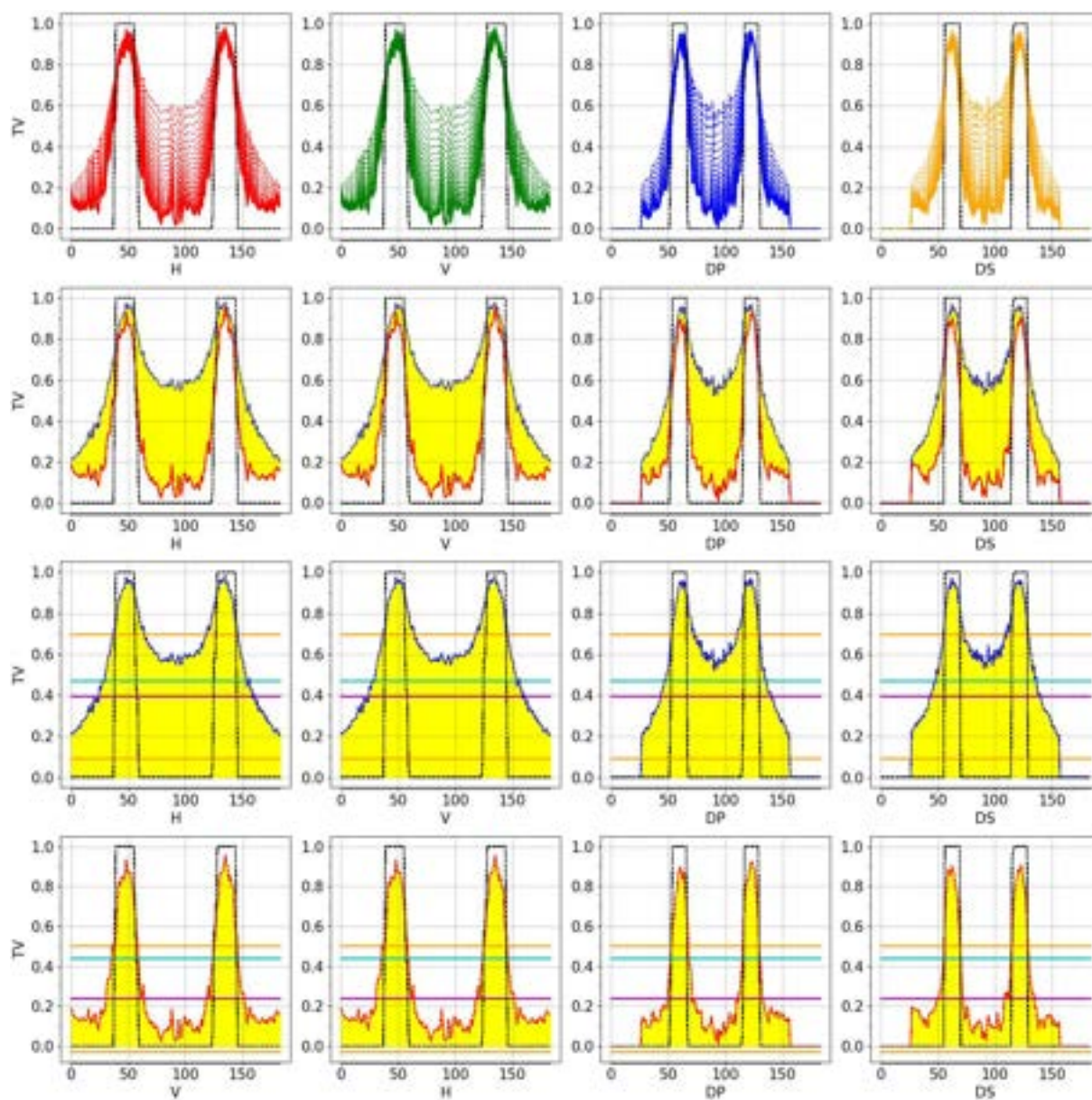


Figura 230 - Cortes TV com erro no Sinograma Engrenagem

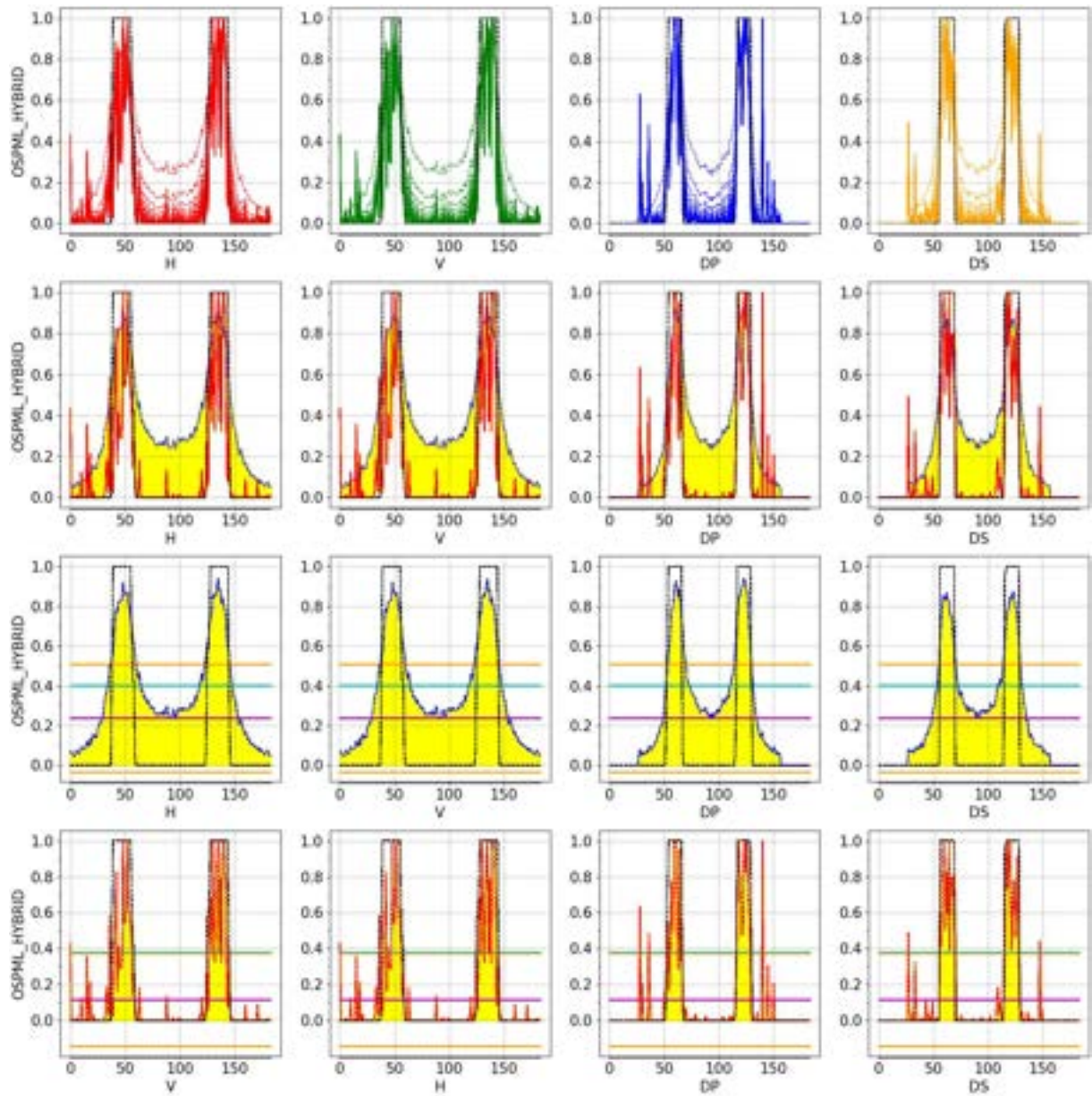


Figura 231 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem

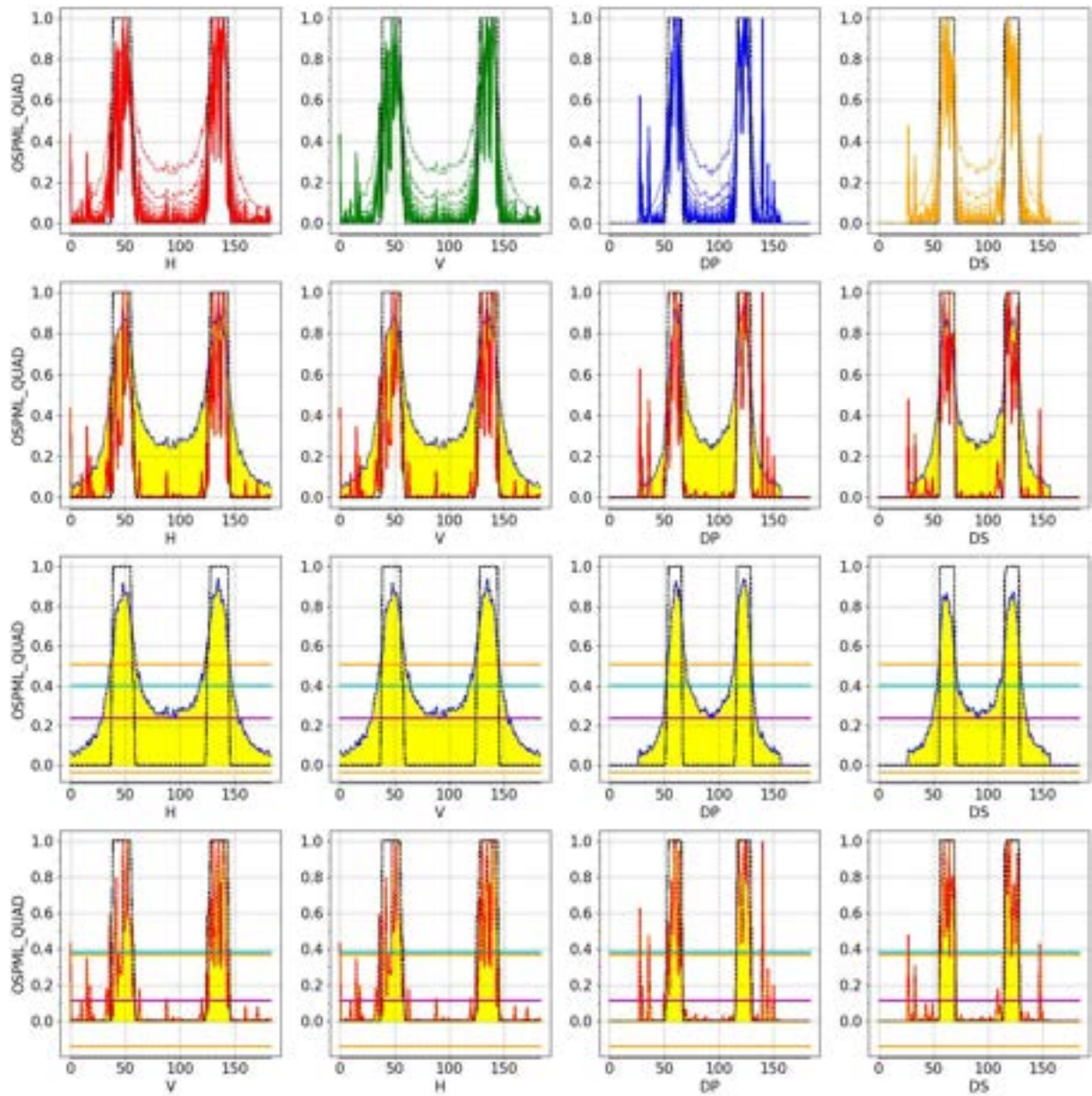


Figura 232 - Cortes OSPML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem

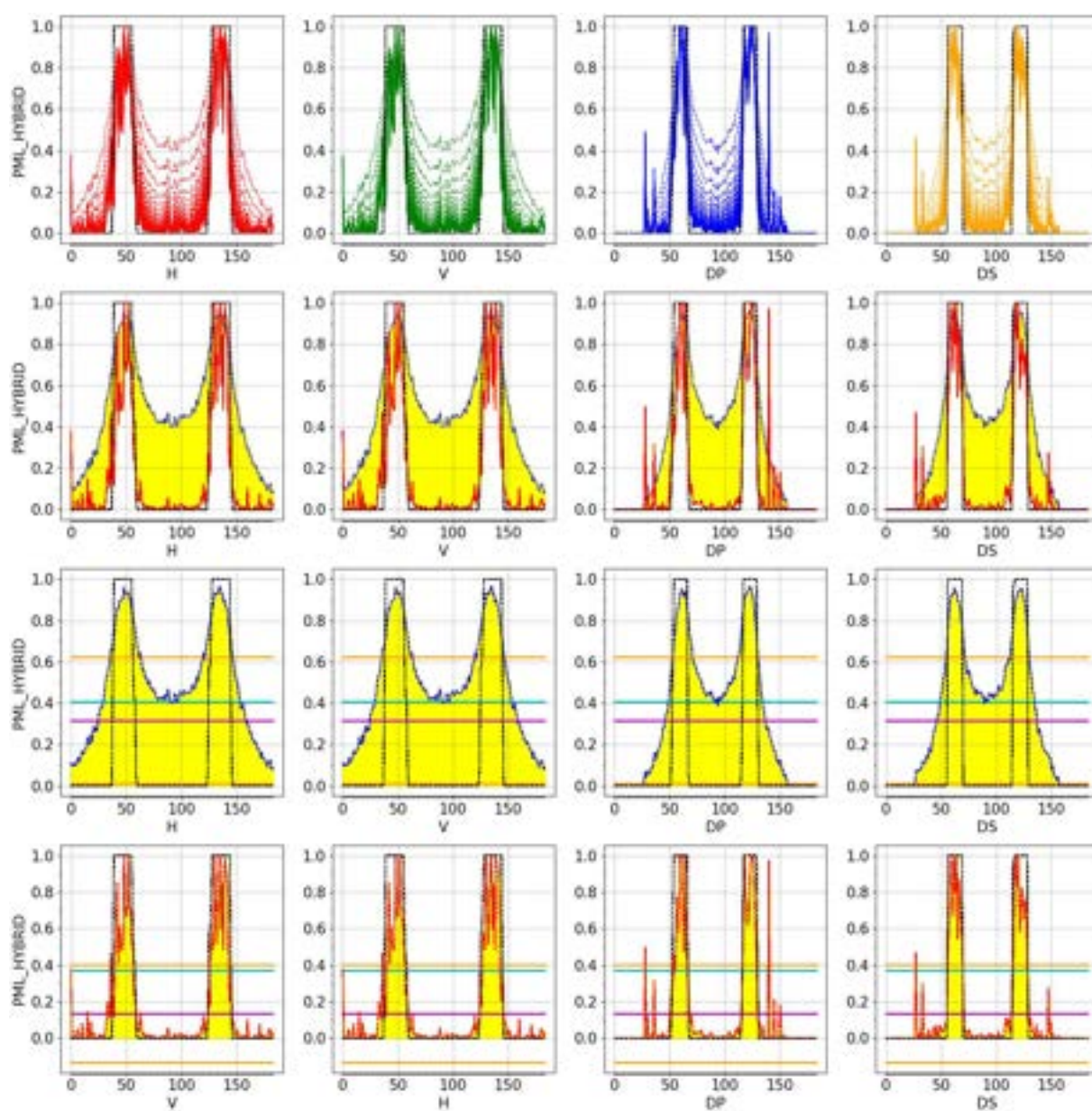


Figura 233 - Cortes PML-Hybrid com erro no Sinograma Engrenagem

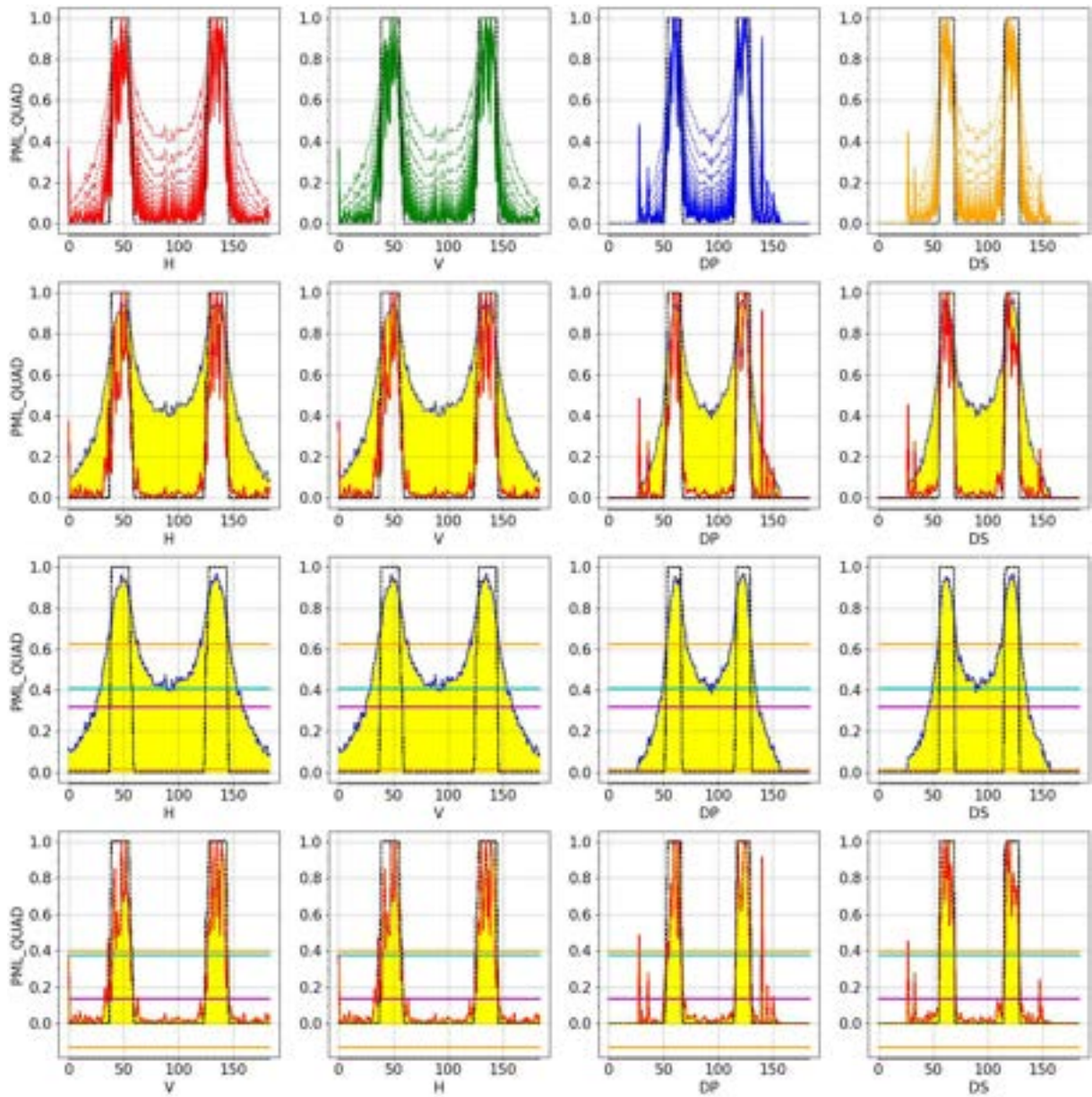


Figura 234 - Cortes PML-Quad com erro no Sinograma Engrenagem

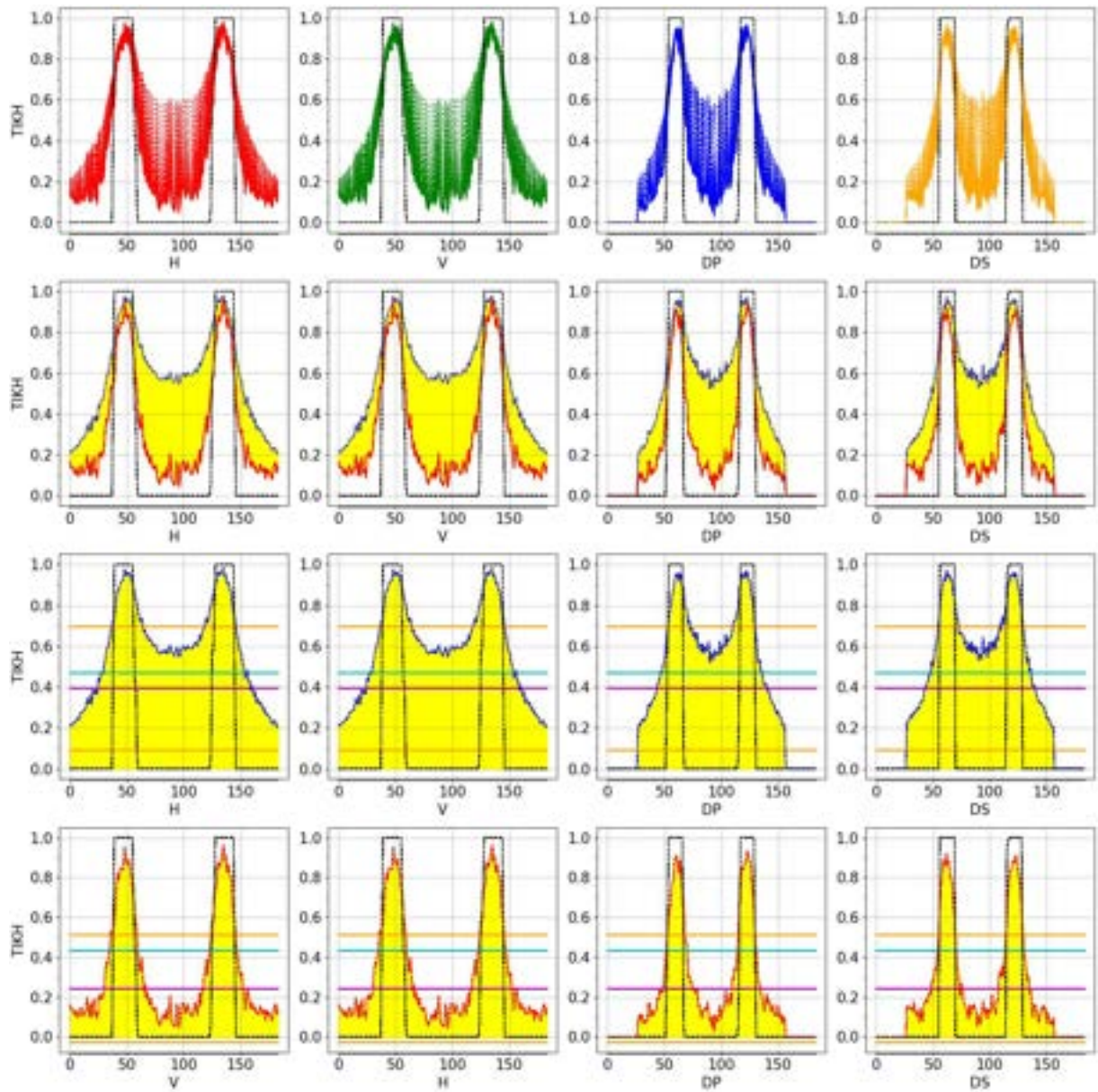


Figura 235 - Cortes TIKH com erro no Sinograma Engrenagem

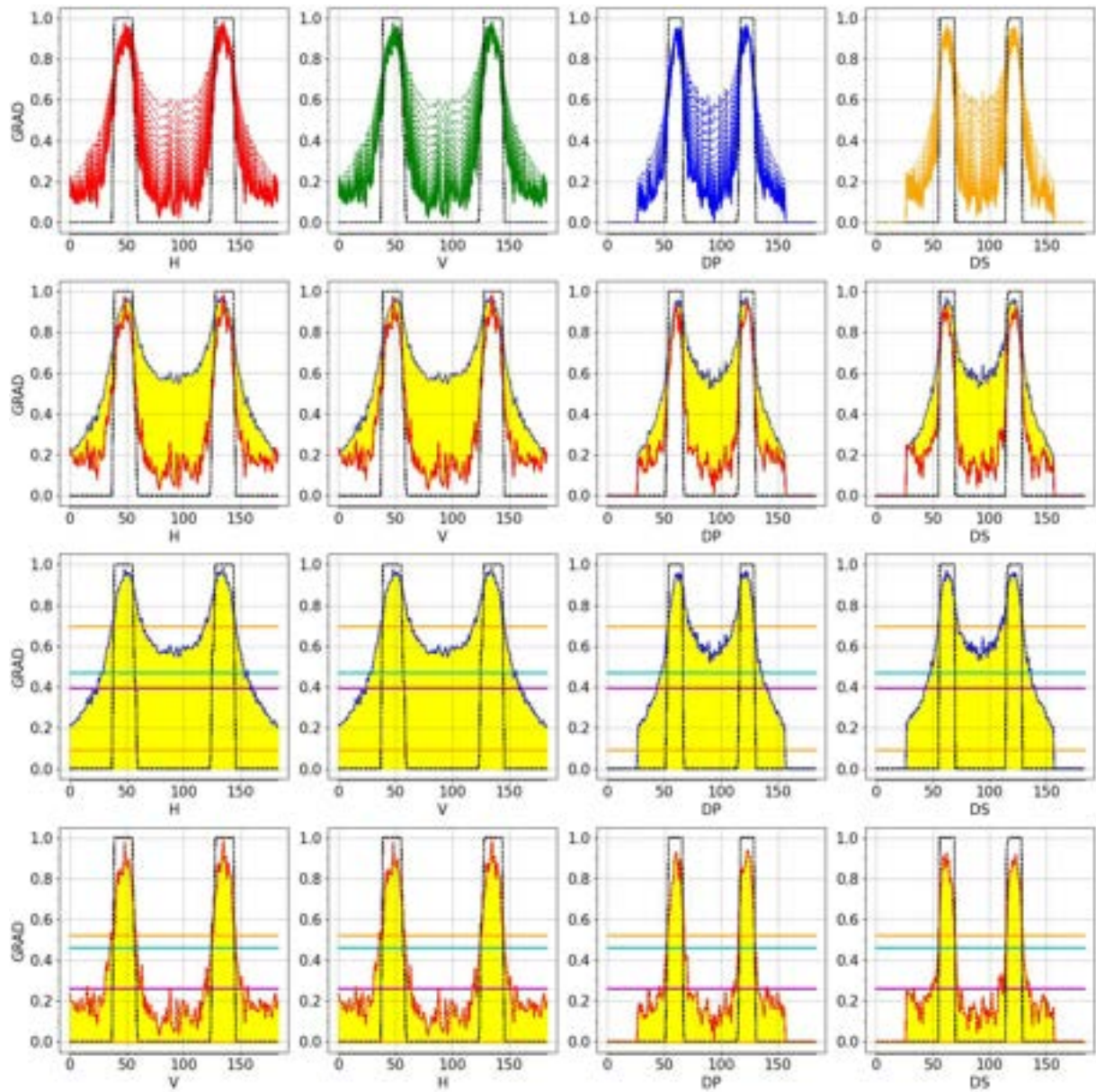


Figura 236 - Cortes GRAD com erro no Sinograma Engrenagem

D.2 Objeto-Alvo Phantom

D.2.1 Objeto-Alvo Original (erro Nível 0)

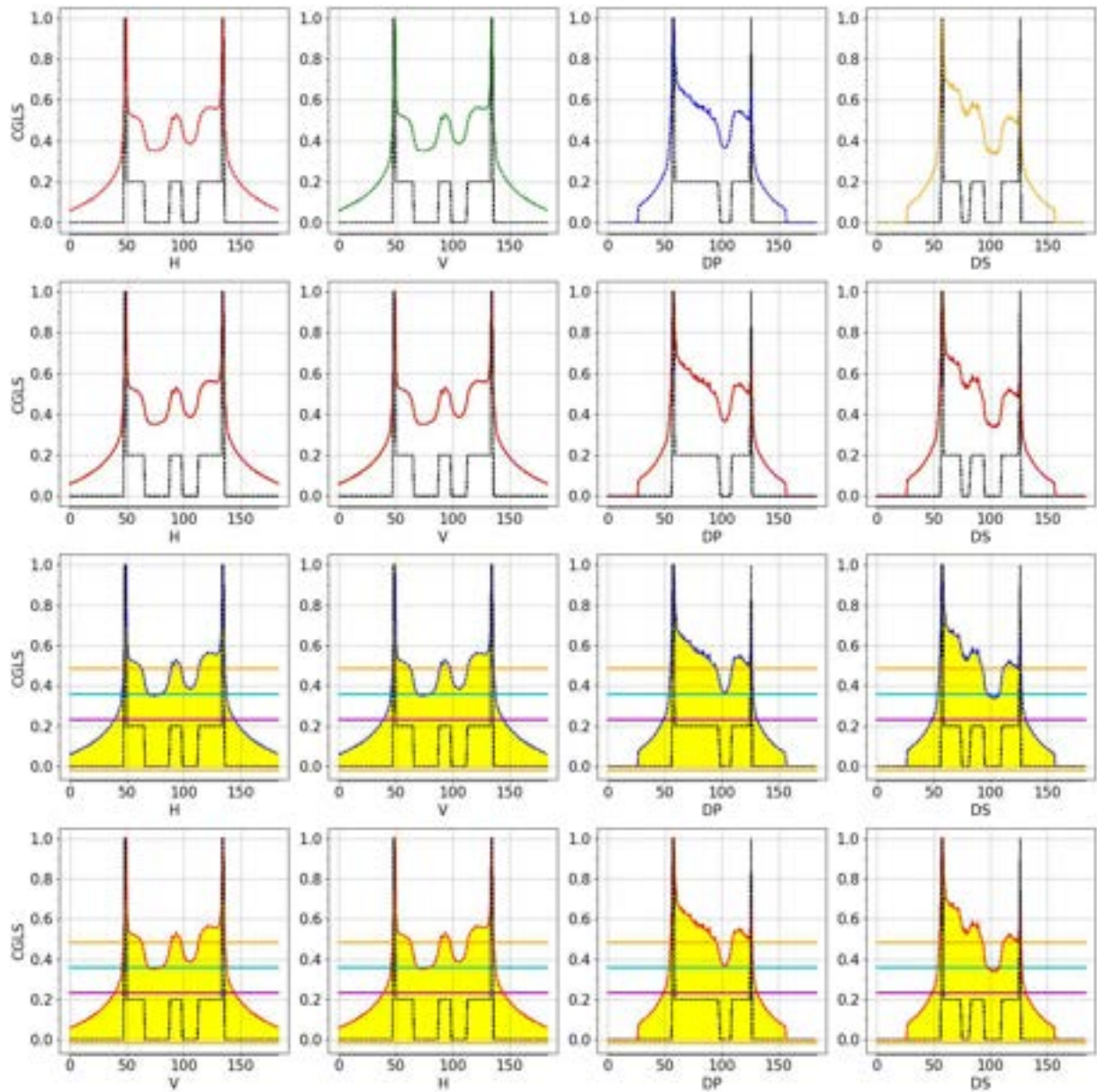


Figura 237 - Cortes CGLS com Original Phantom

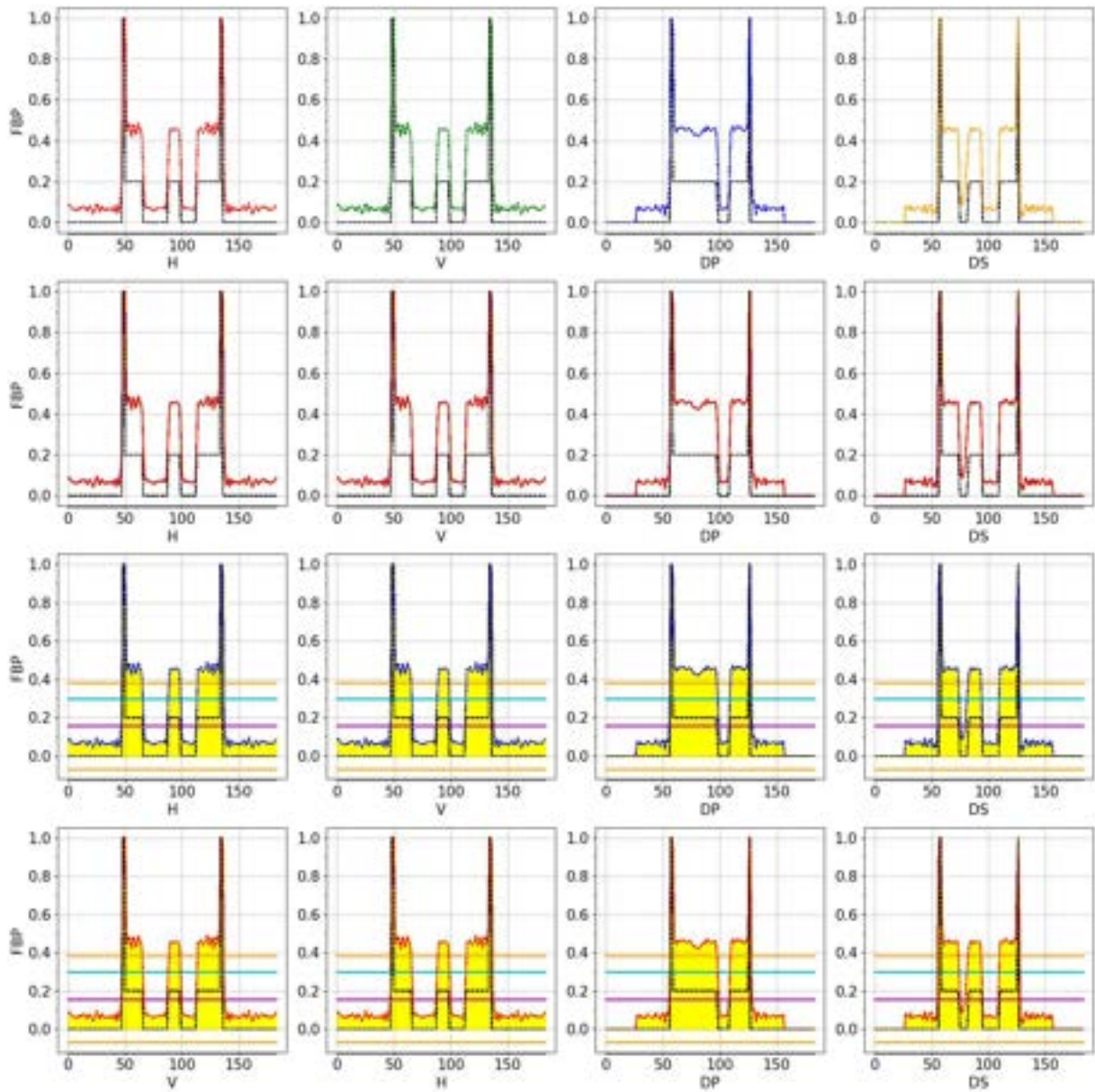


Figura 238 - Cortes FBP com Original Phantom

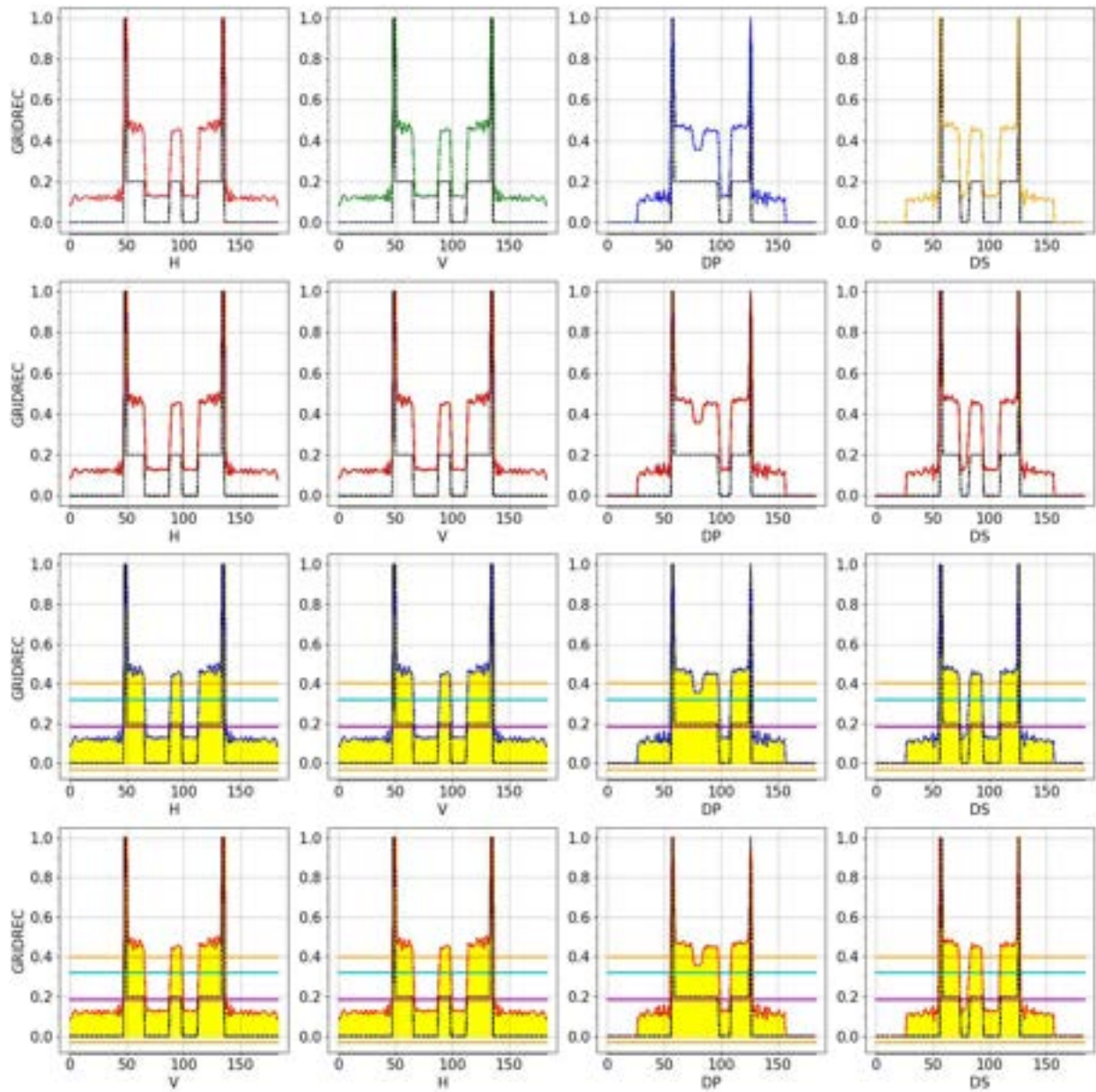


Figura 239 - Cortes GRIDREC com Original Phantom

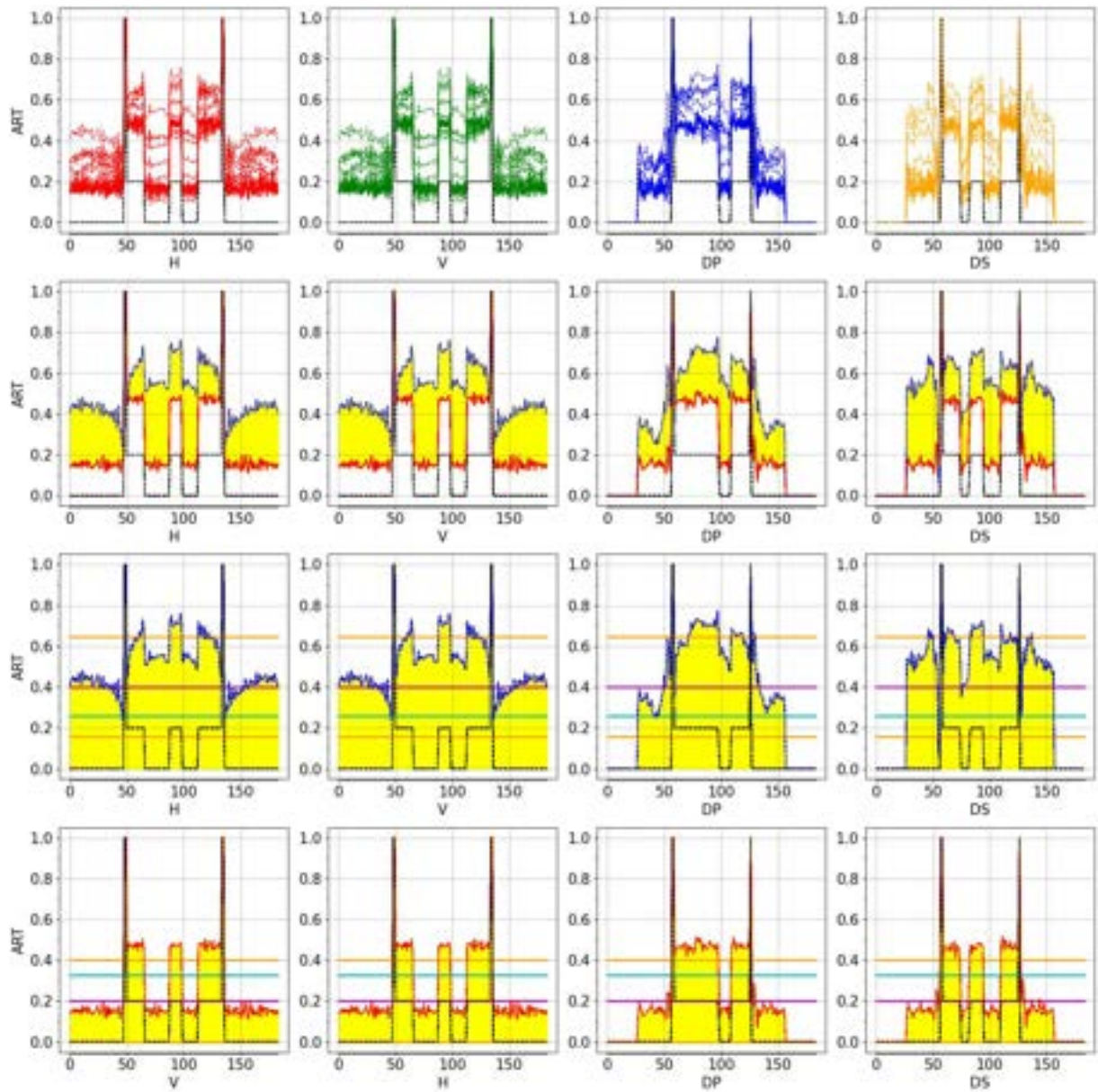


Figura 240 - Cortes ART com Original Phantom

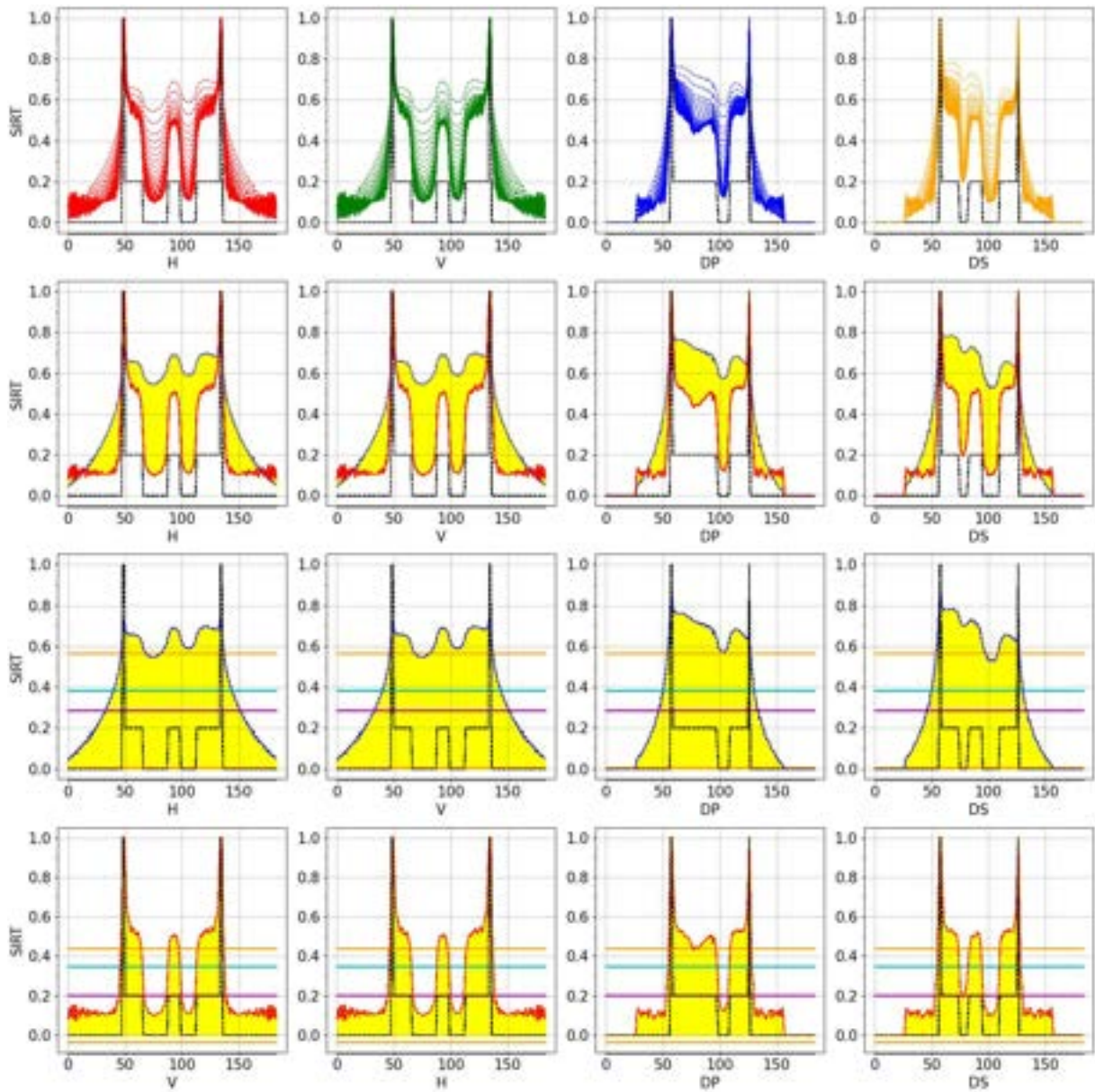


Figura 241 - Cortes SIRT com Original Phantom

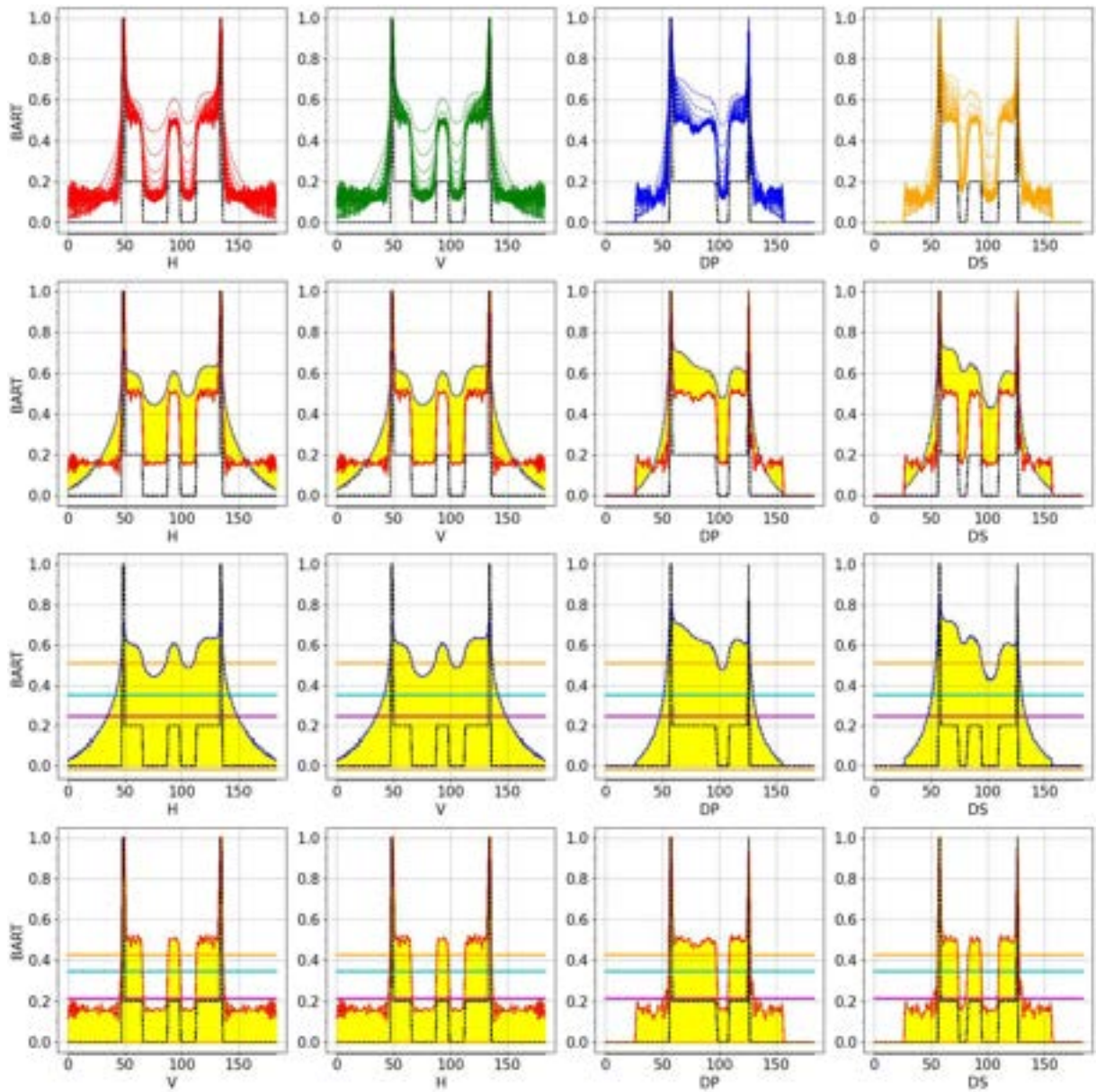


Figura 242 - Cortes BART com Original Phantom

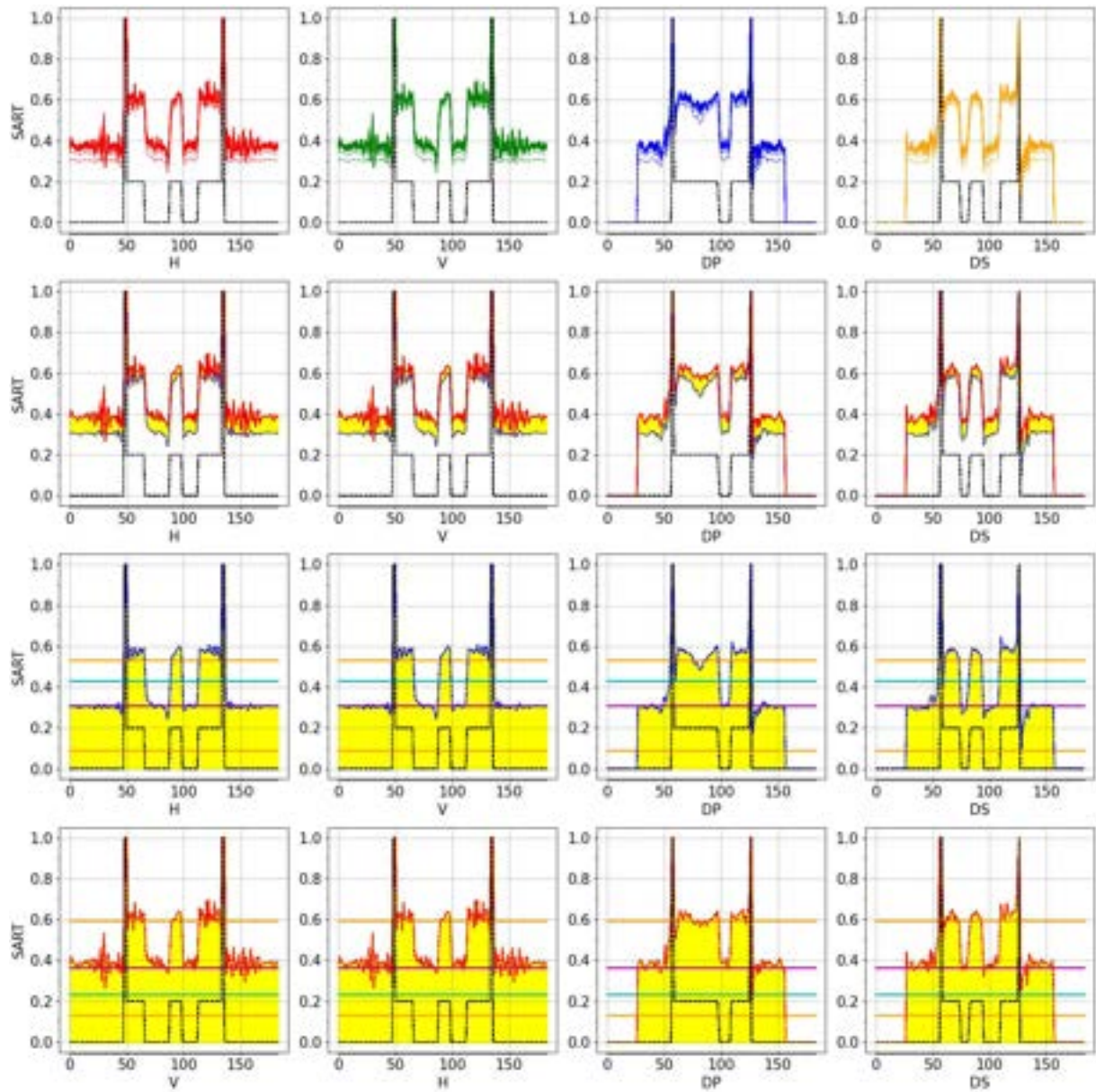


Figura 243 - Cortes SART com Original Phantom

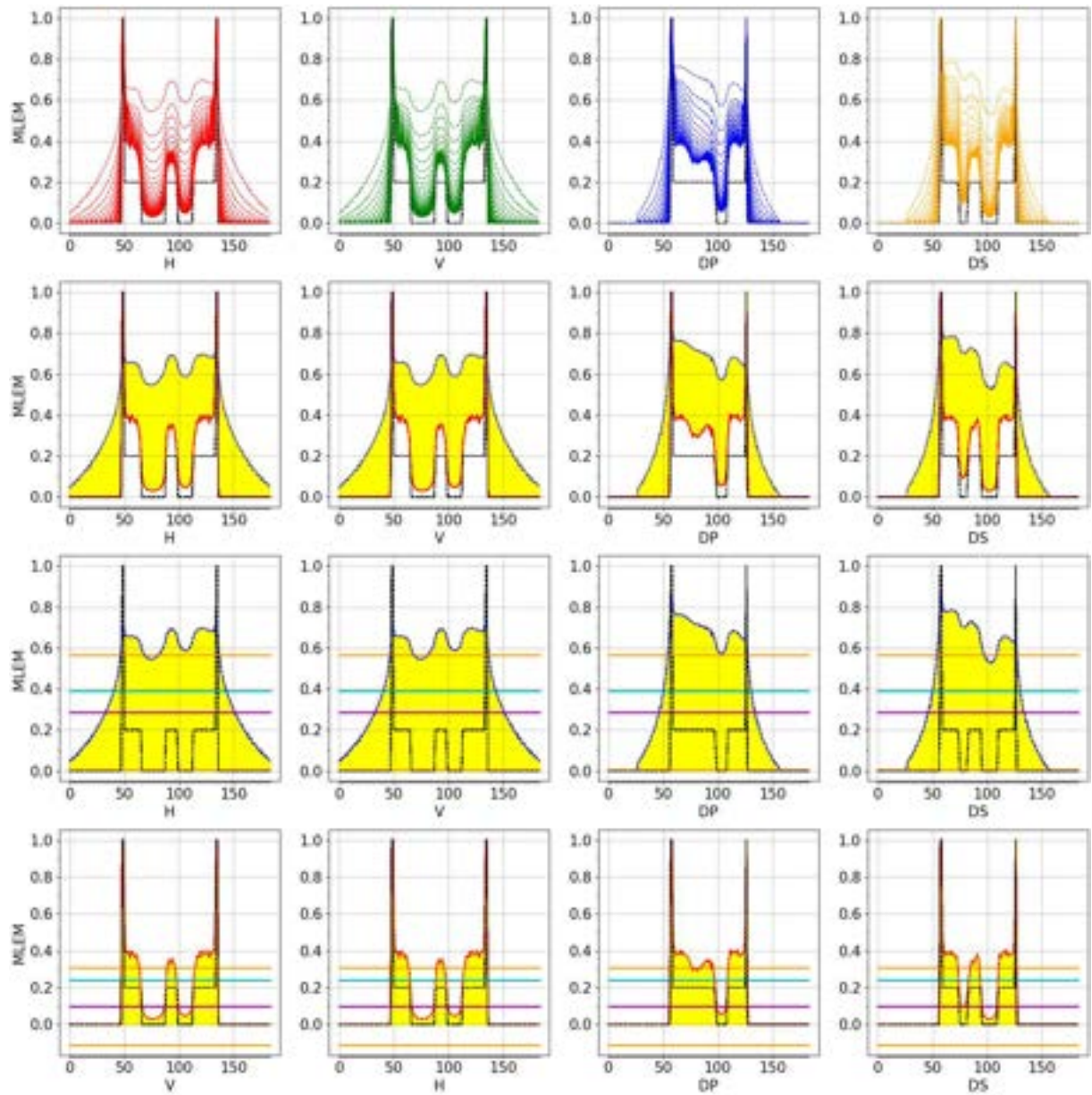


Figura 244 - Cortes MLEM com Original Phantom

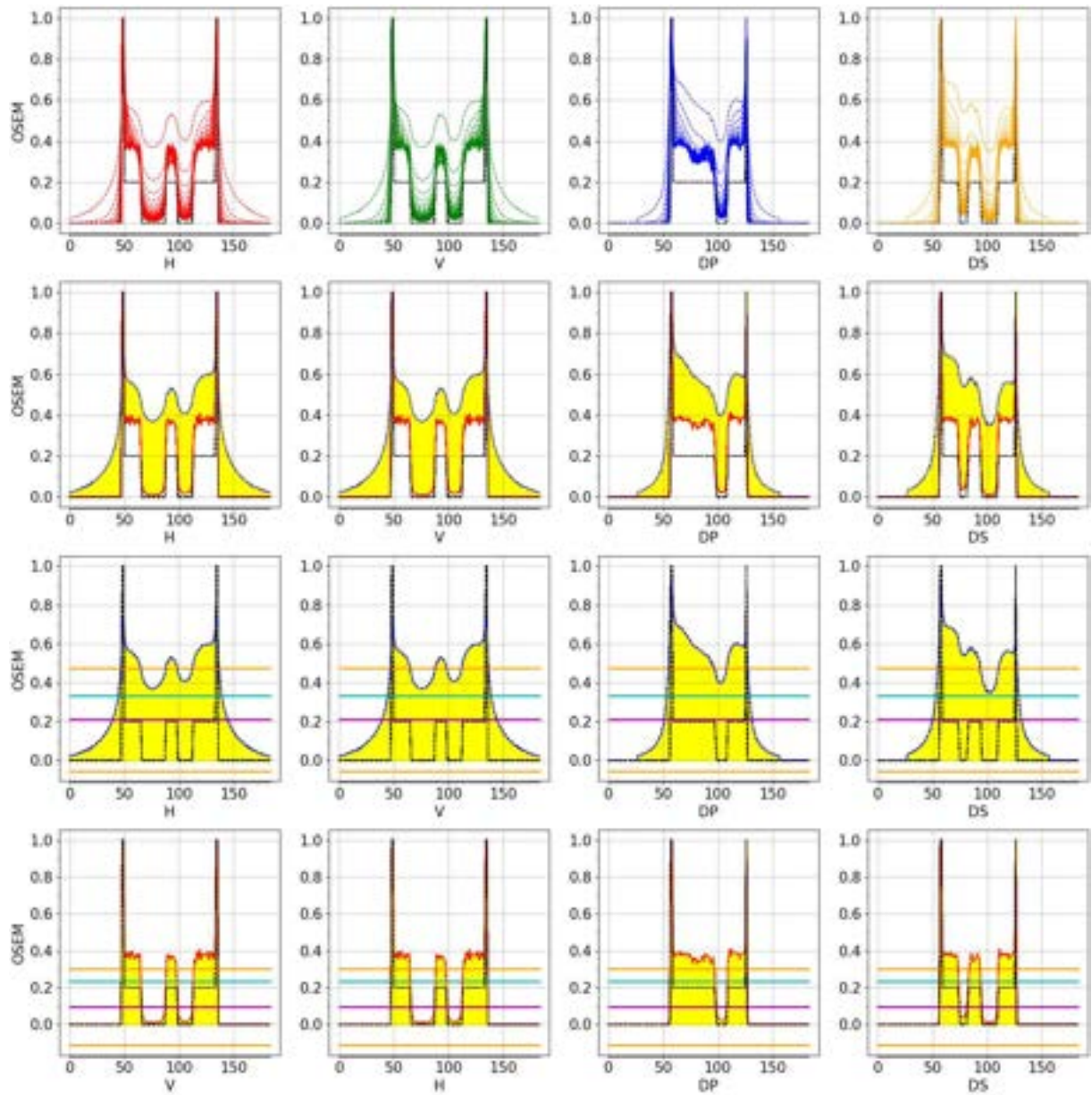


Figura 245 - Cortes OSEM com Original Phantom

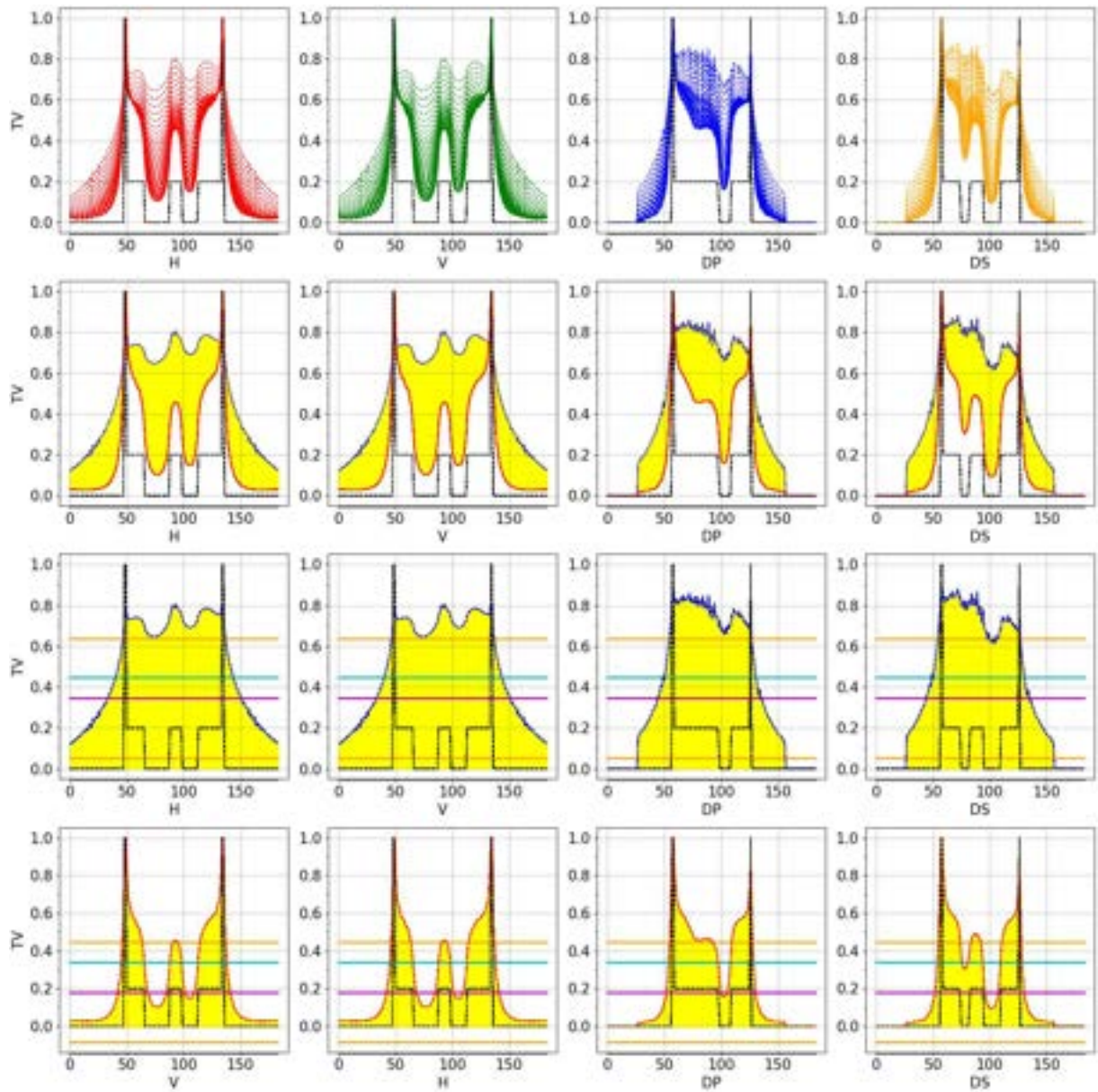


Figura 246 - Cortes TV com Original Phantom

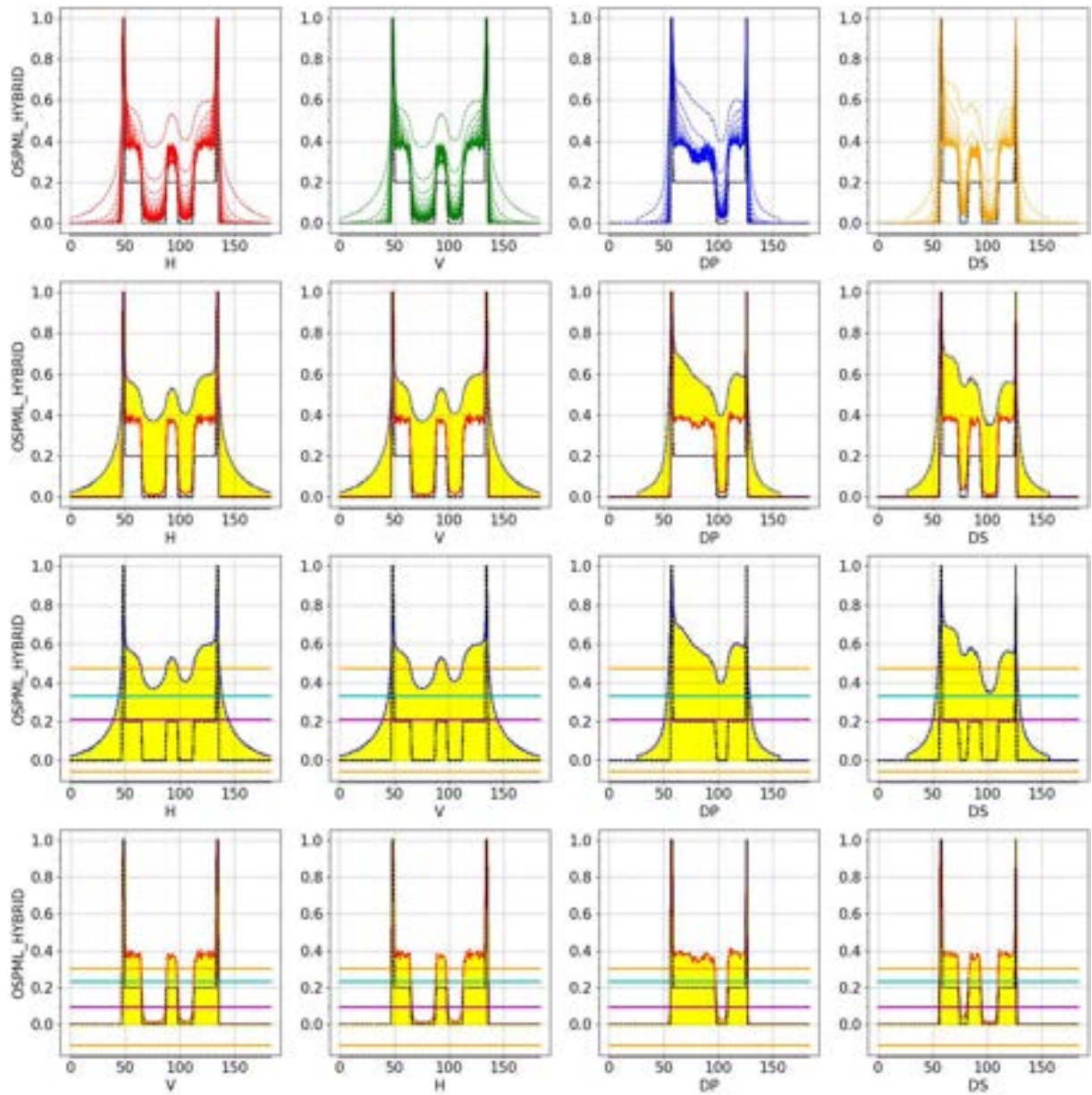


Figura 247 - Cortes OSPML-Hybrid com Original Phantom

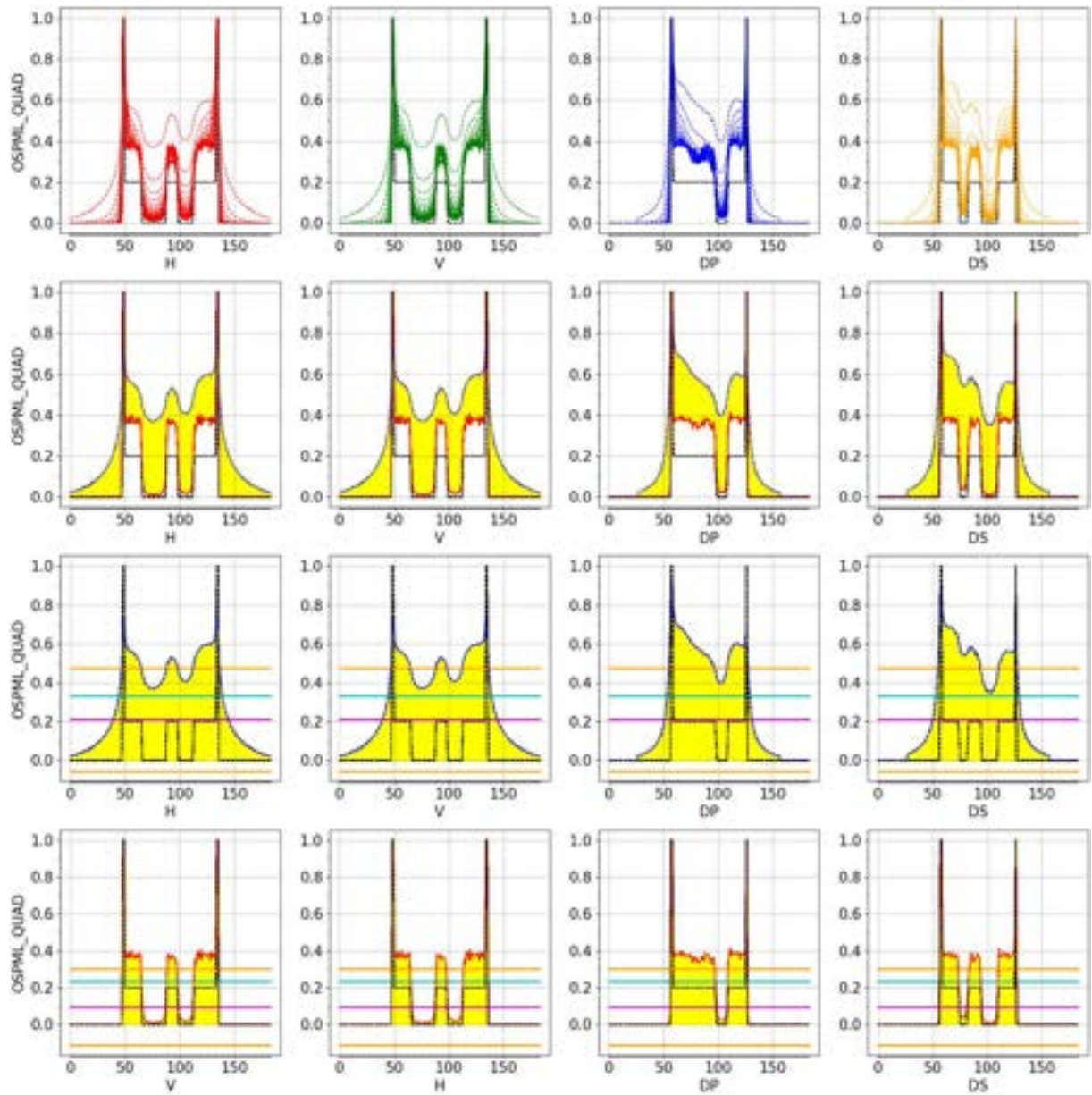


Figura 248 - Cortes OSPML-Quad com Original Phantom

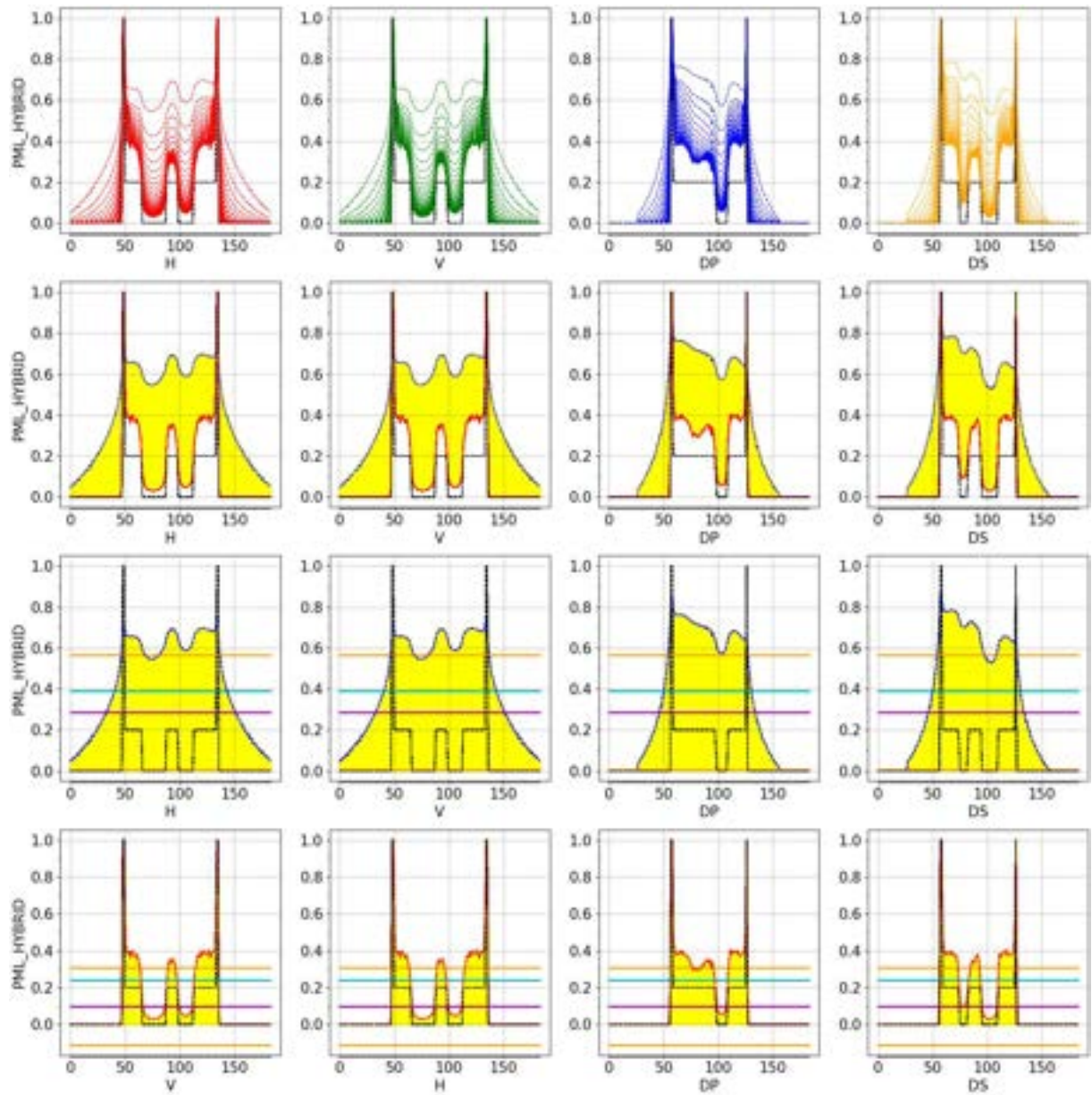


Figura 249 - Cortes PML-Hybrid com Original Phantom

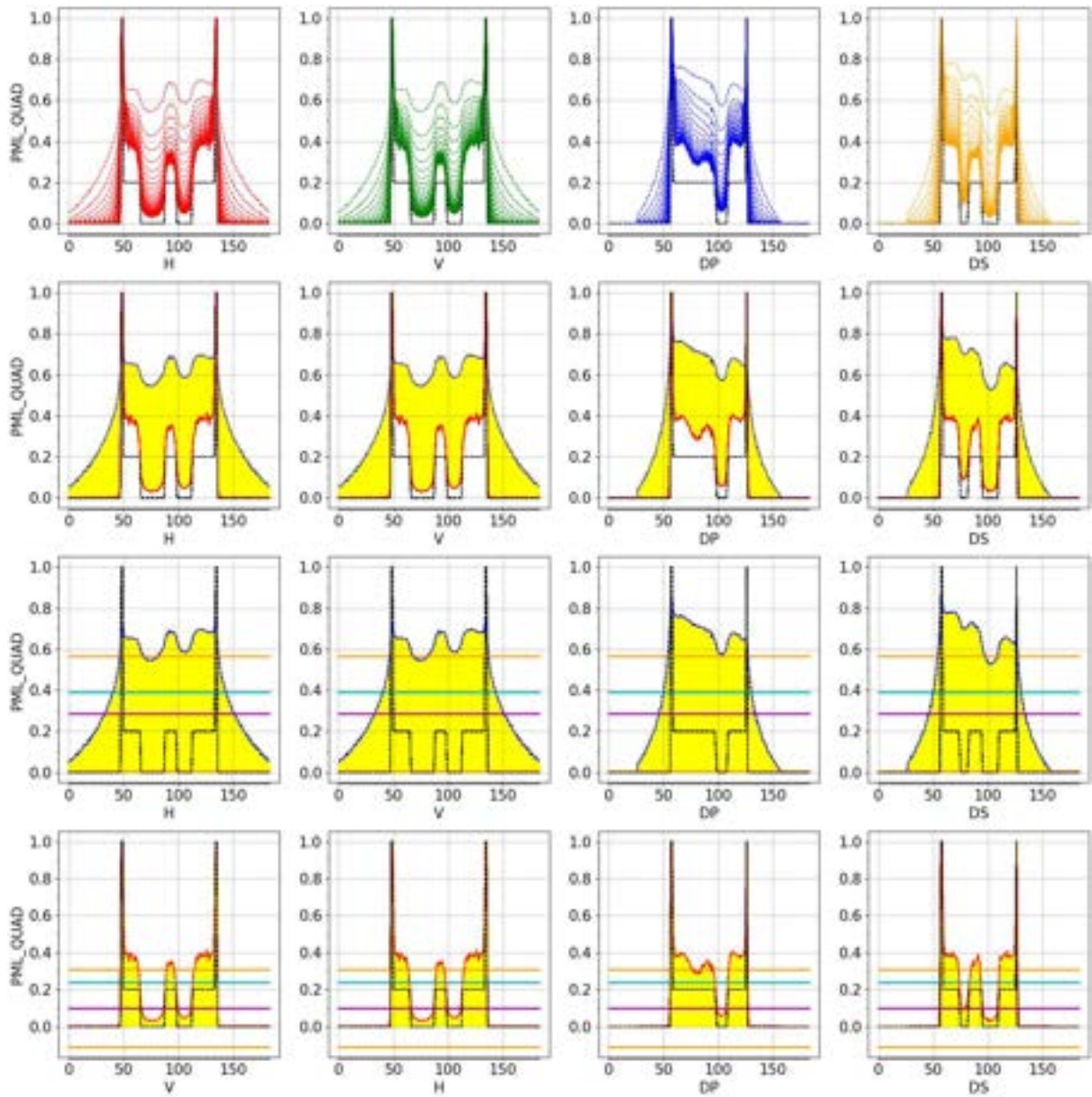


Figura 250 - Cortes PML-Quad com Original Phantom

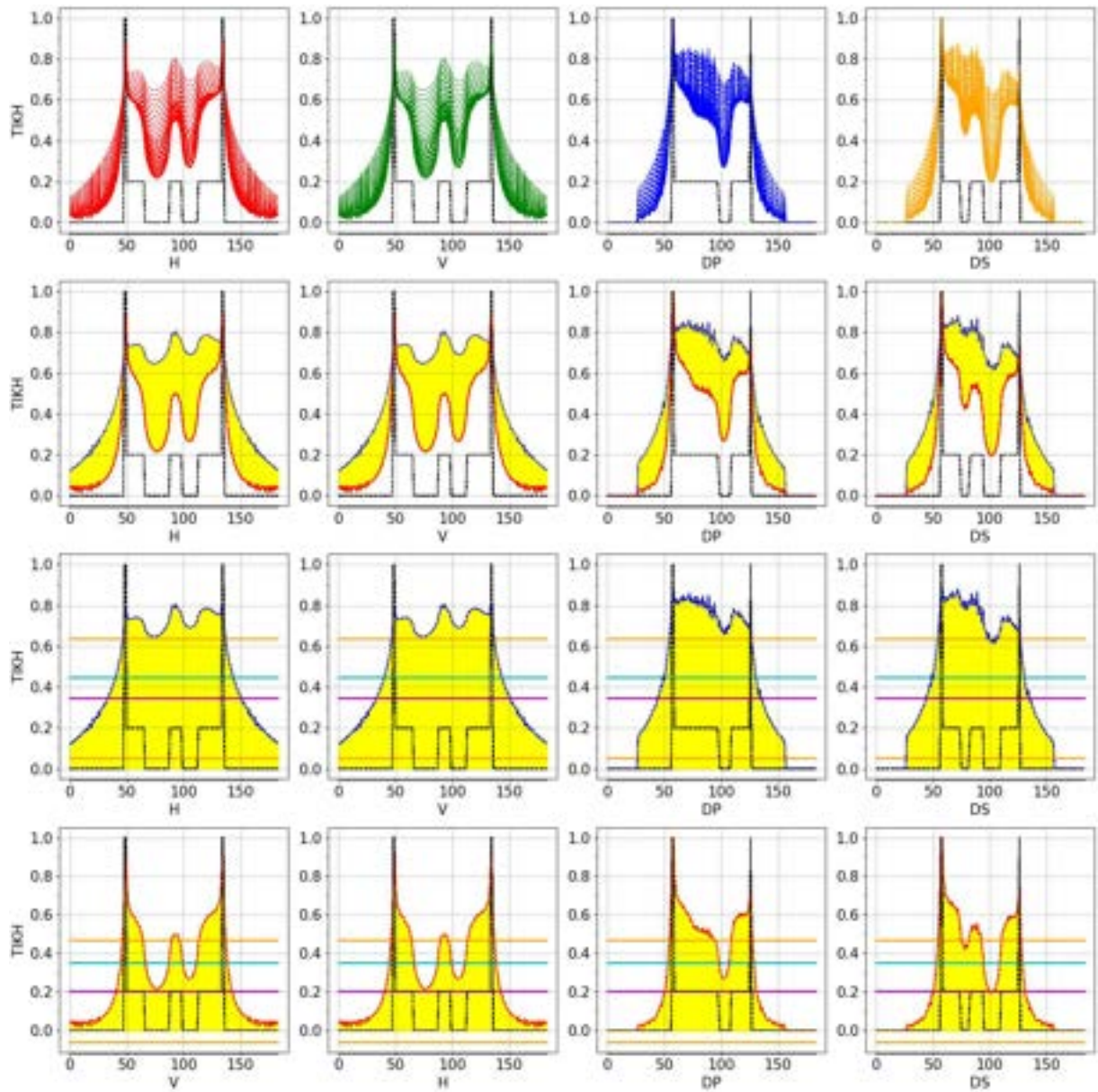


Figura 251 - Cortes TIKH com Original Phantom

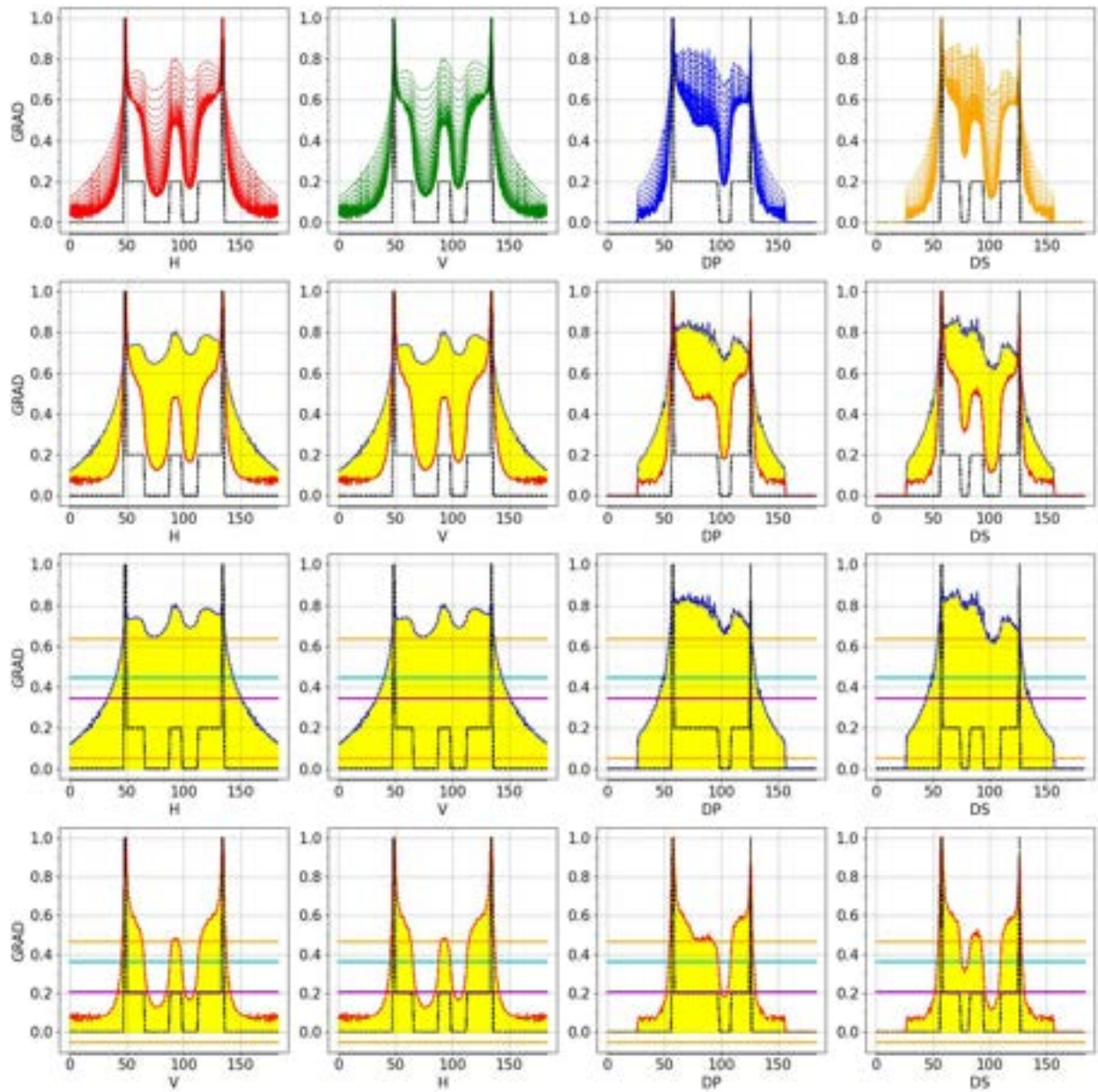


Figura 252 - Cortes GRAD com Original Phantom

D.2.2 Erro Nível 5 no Objeto Phantom

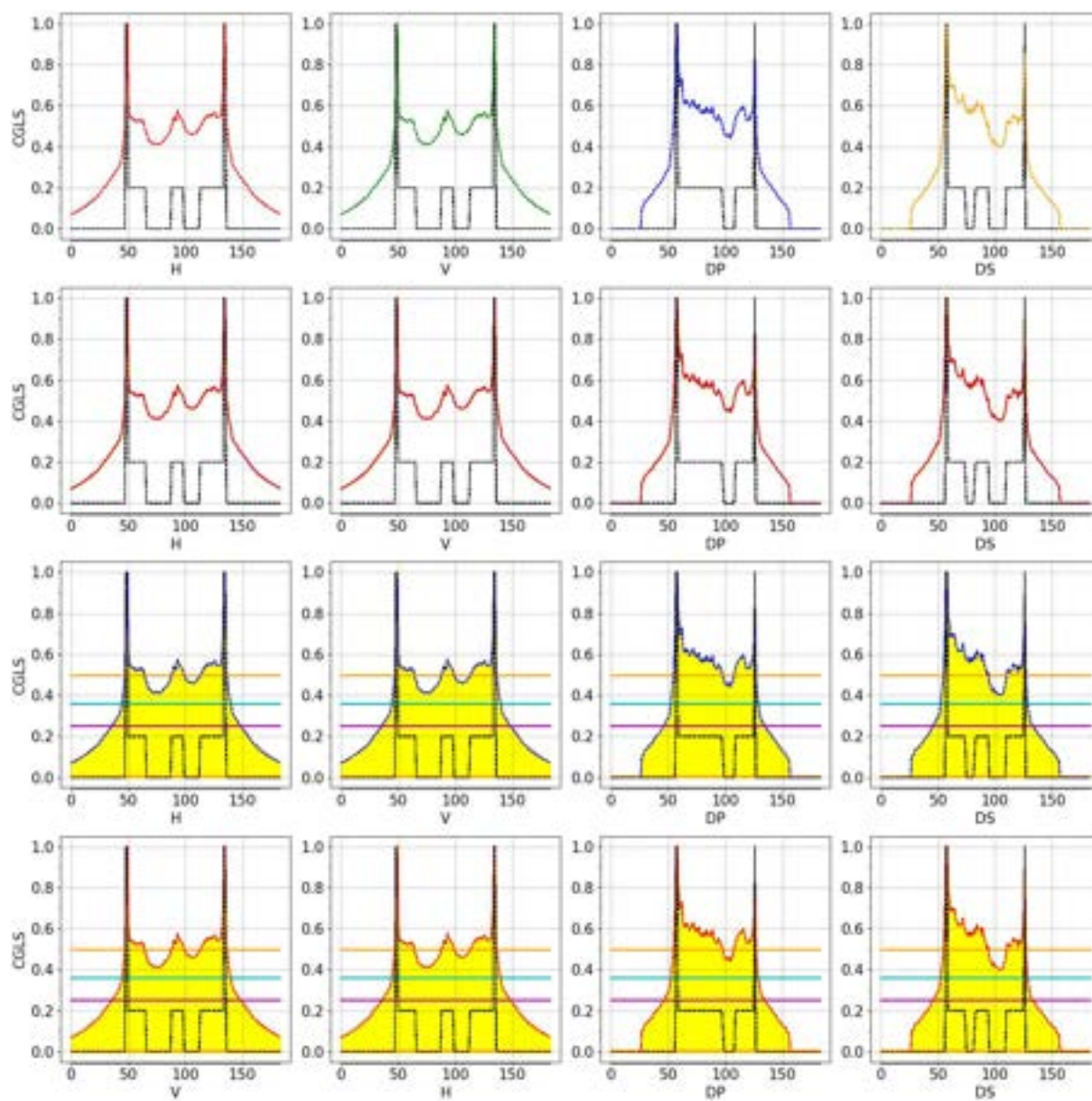


Figura 253 - Cortes CGLS com erro no Objeto Phantom

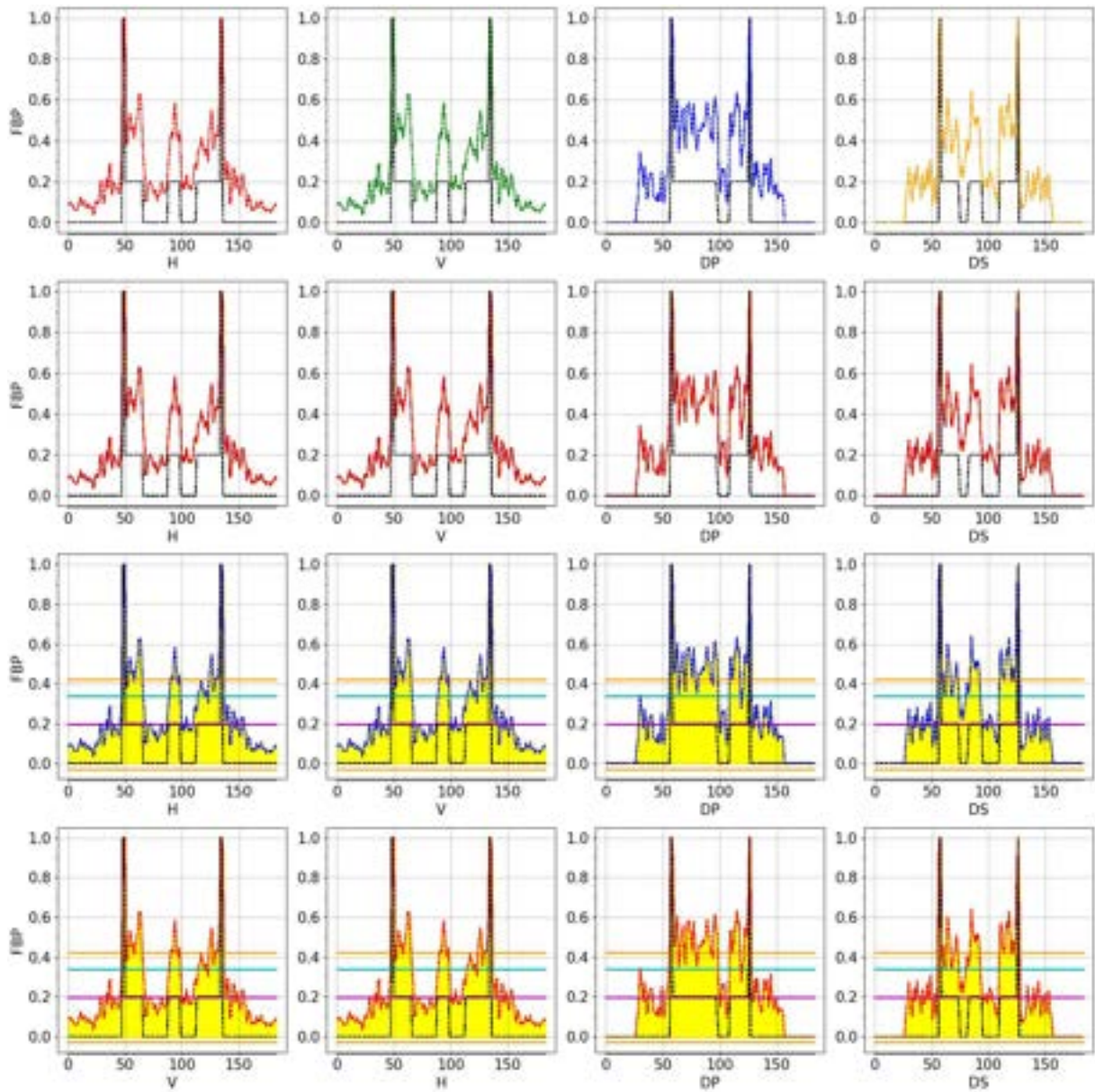


Figura 254 - Cortes FBP com erro no Objeto Phantom

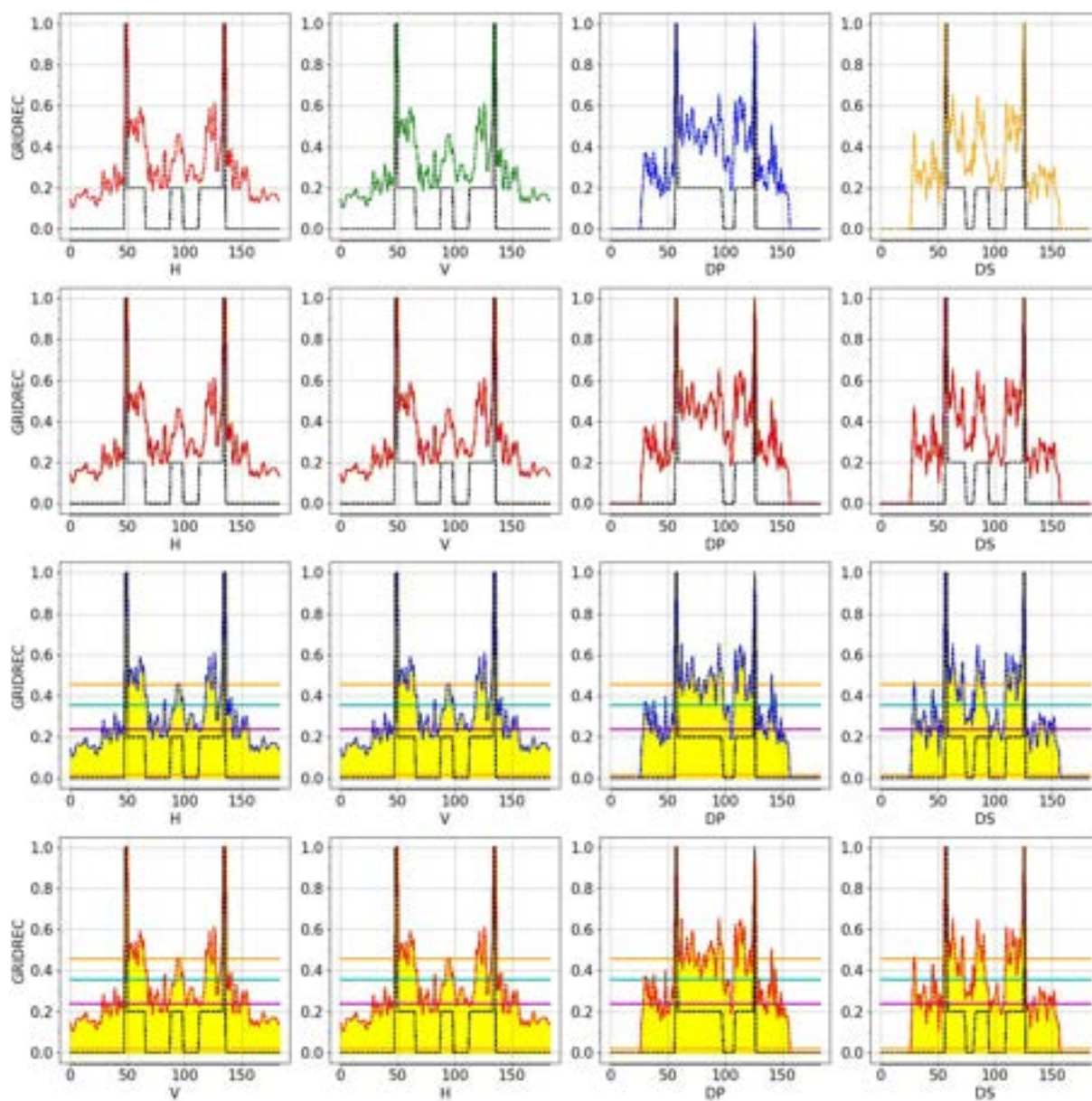


Figura 255 - Cortes GRIDREC com erro no Objeto Phantom

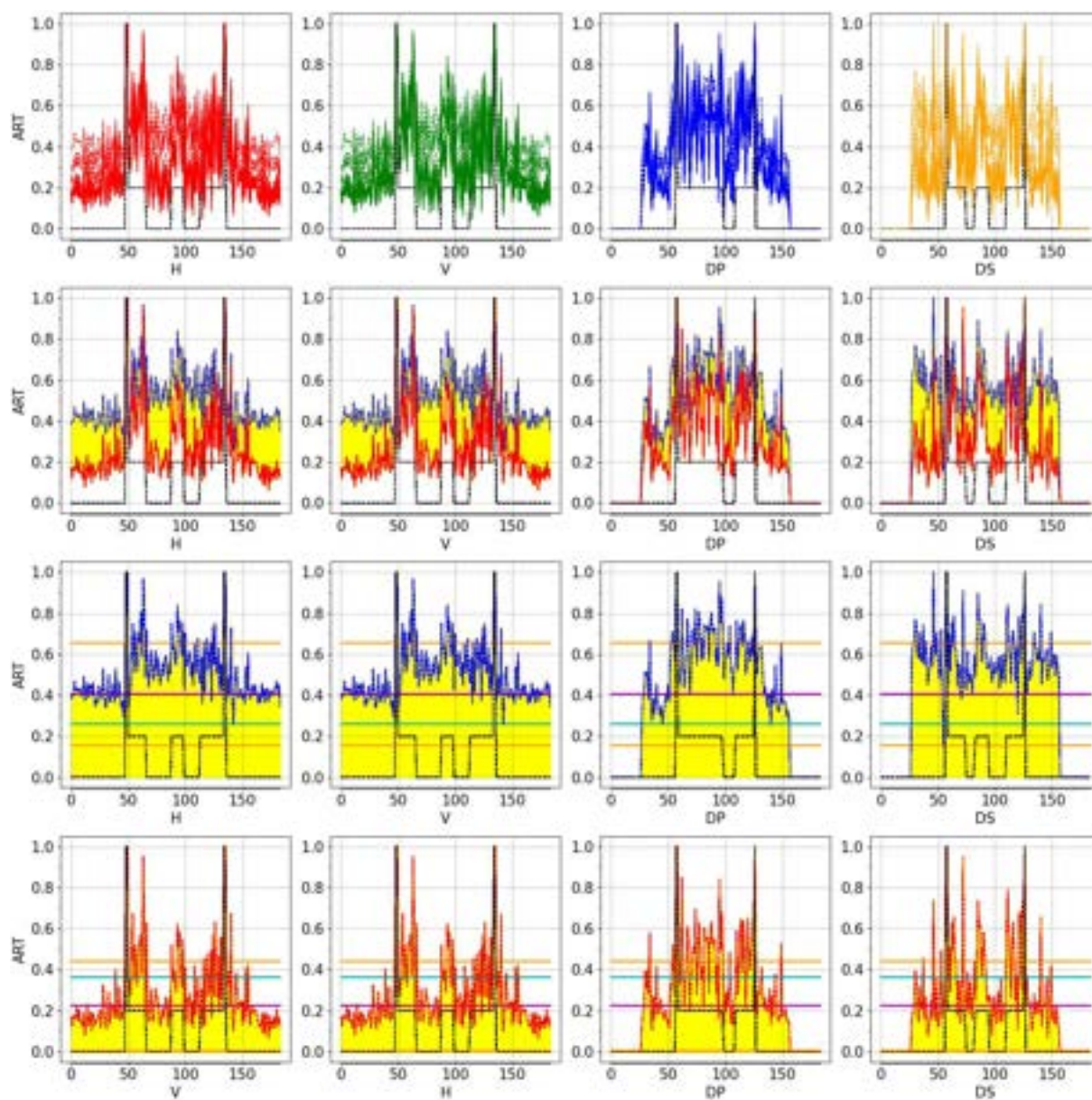


Figura 256 - Cortes ART com erro no Objeto Phantom

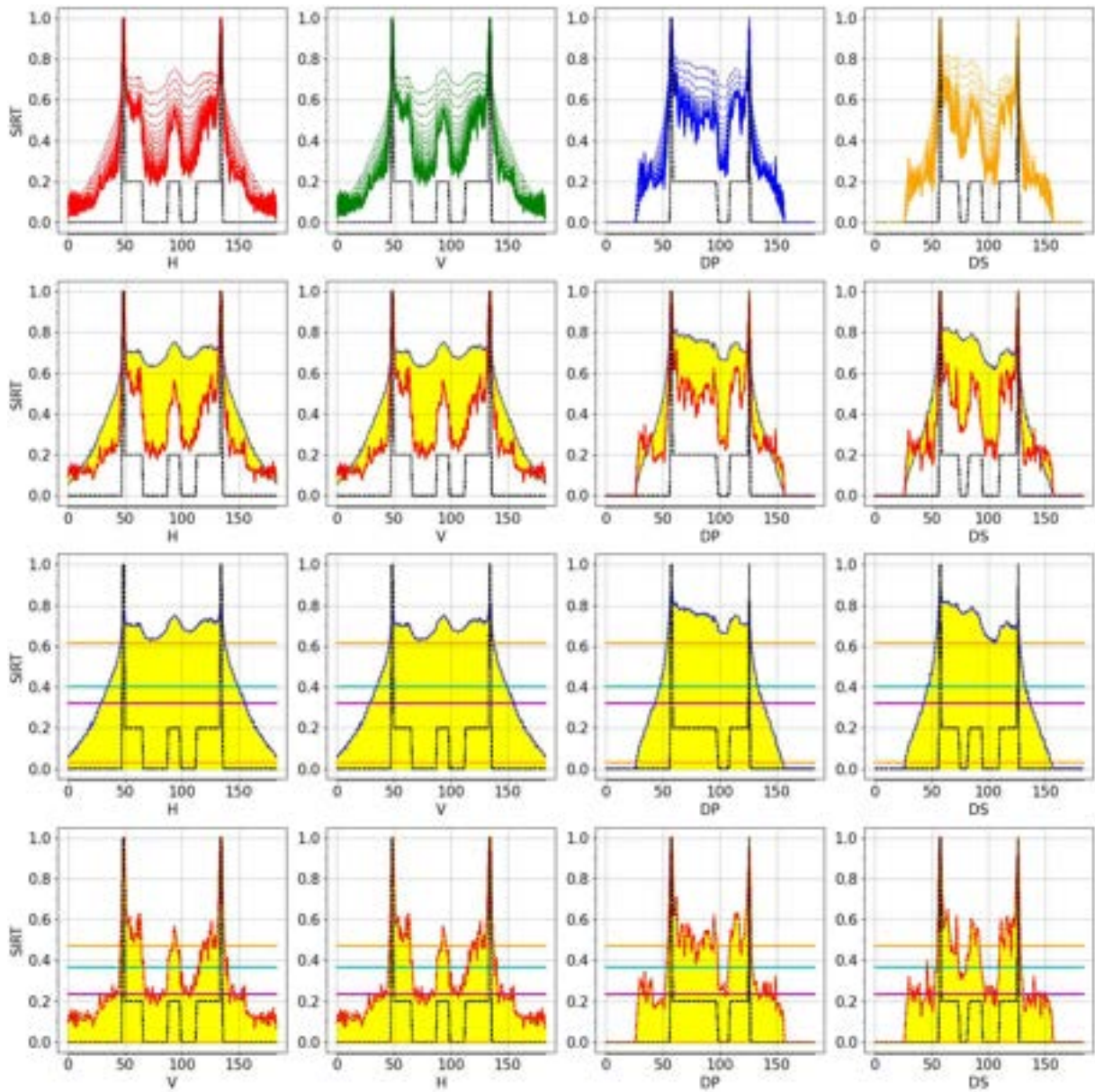


Figura 257 - Cortes SIRT com erro no Objeto Phantom

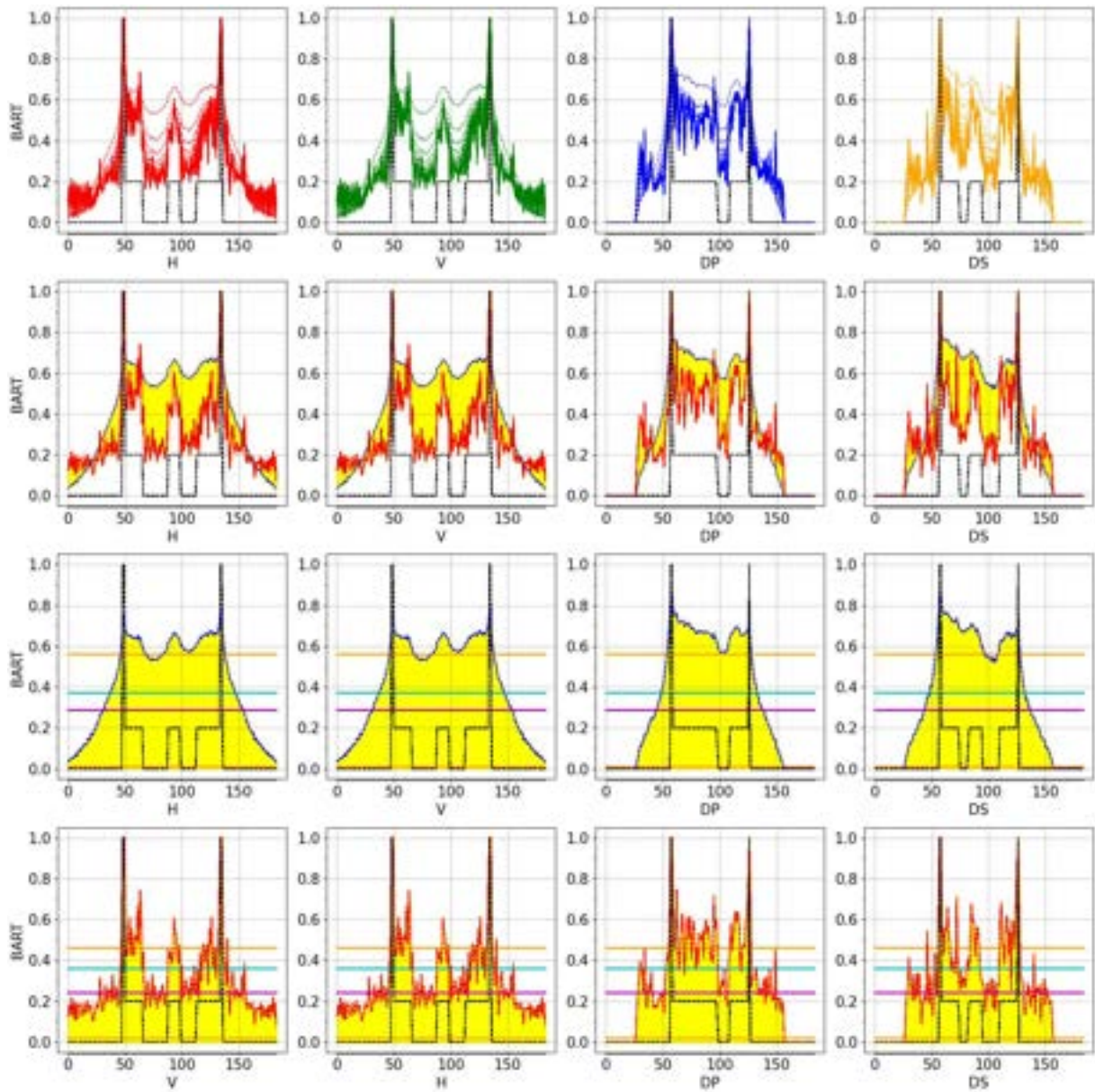


Figura 258 - Cortes BART com erro no Objeto Phantom

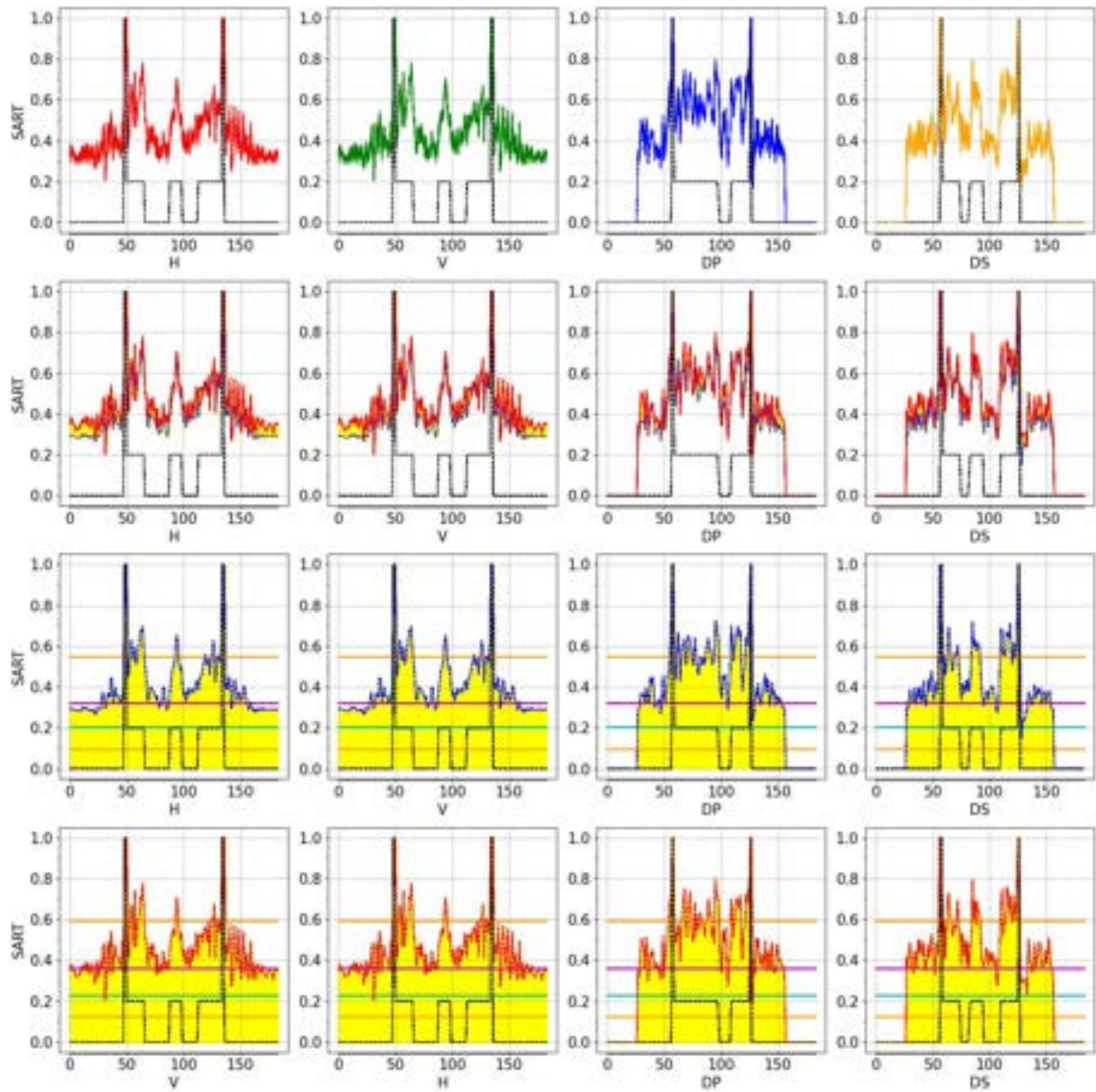


Figura 259 - Cortes SART com erro no Objeto Phantom

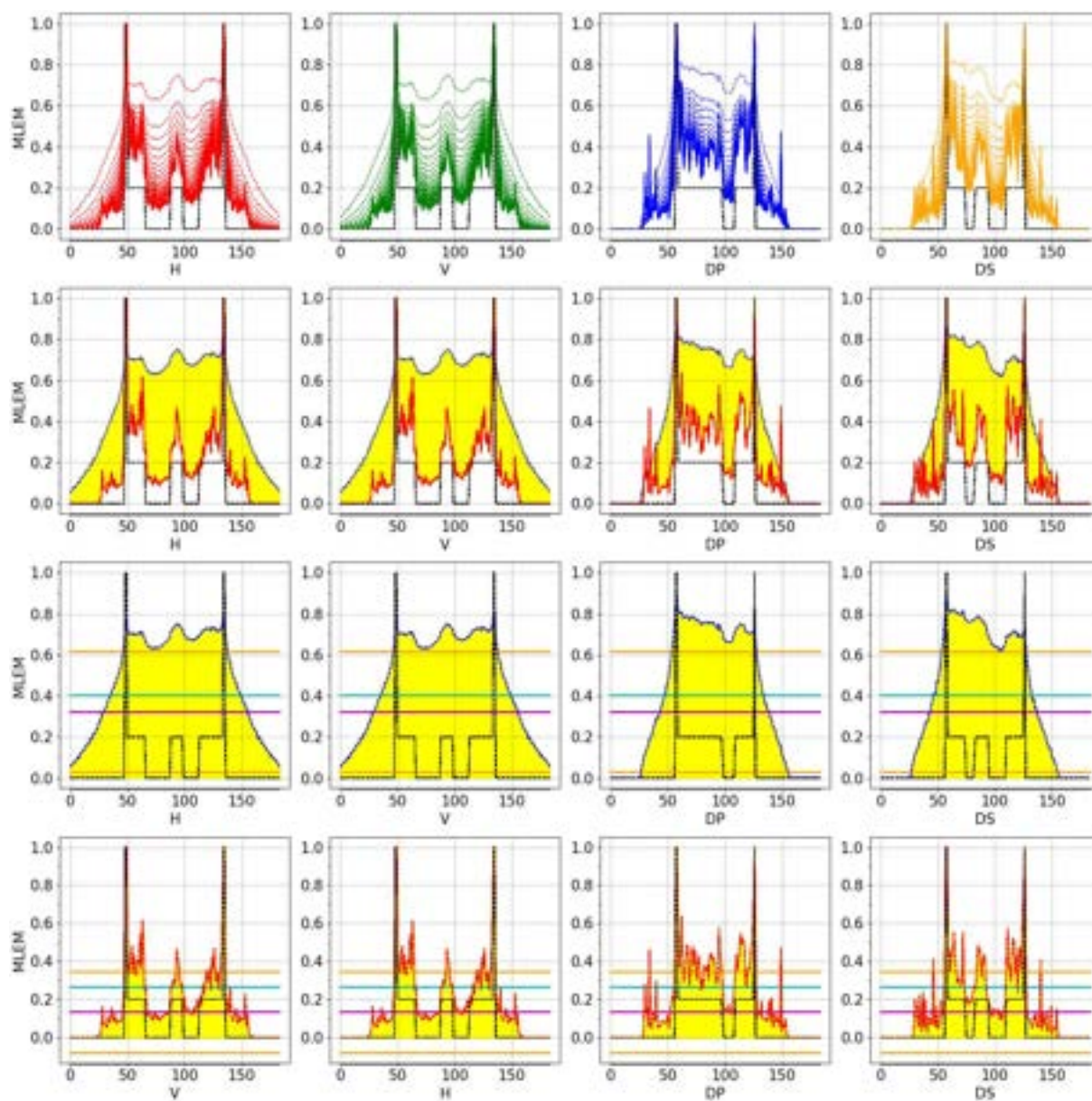


Figura 260 - Cortes MLEM com erro no Objeto Phantom

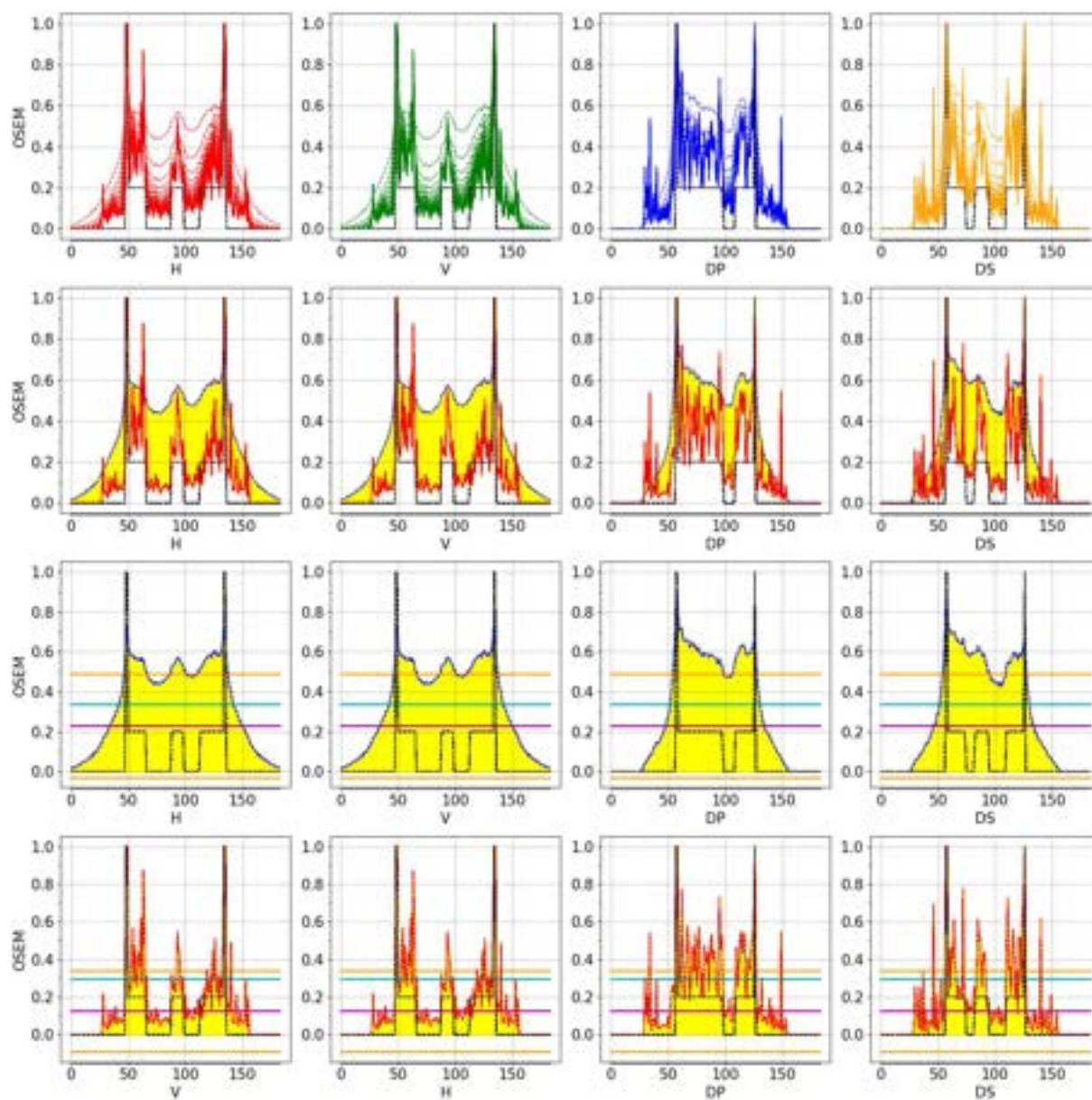


Figura 261 - Cortes OSEM com erro no Objeto Phantom

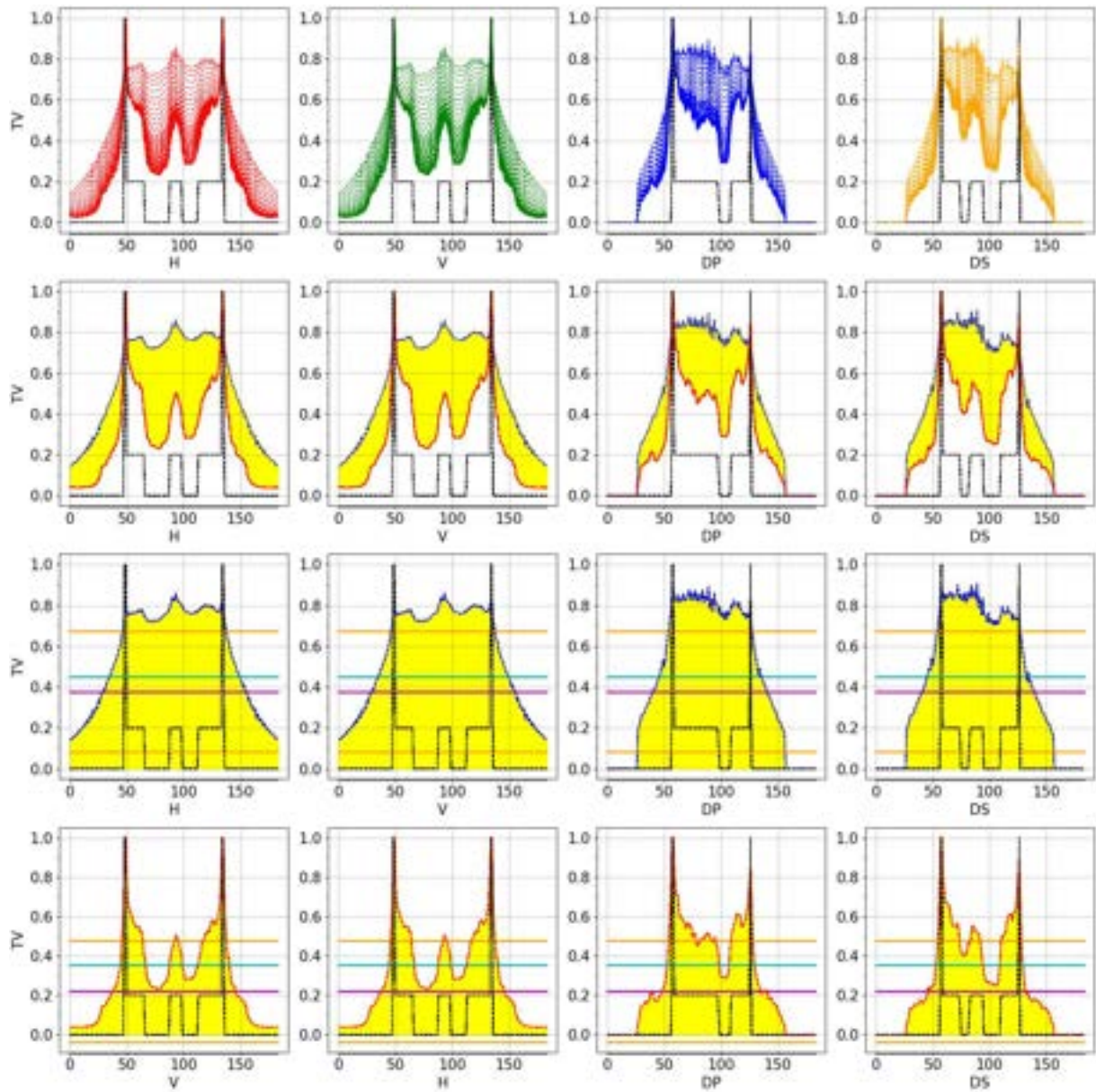


Figura 262 - Cortes TV com erro no Objeto Phantom

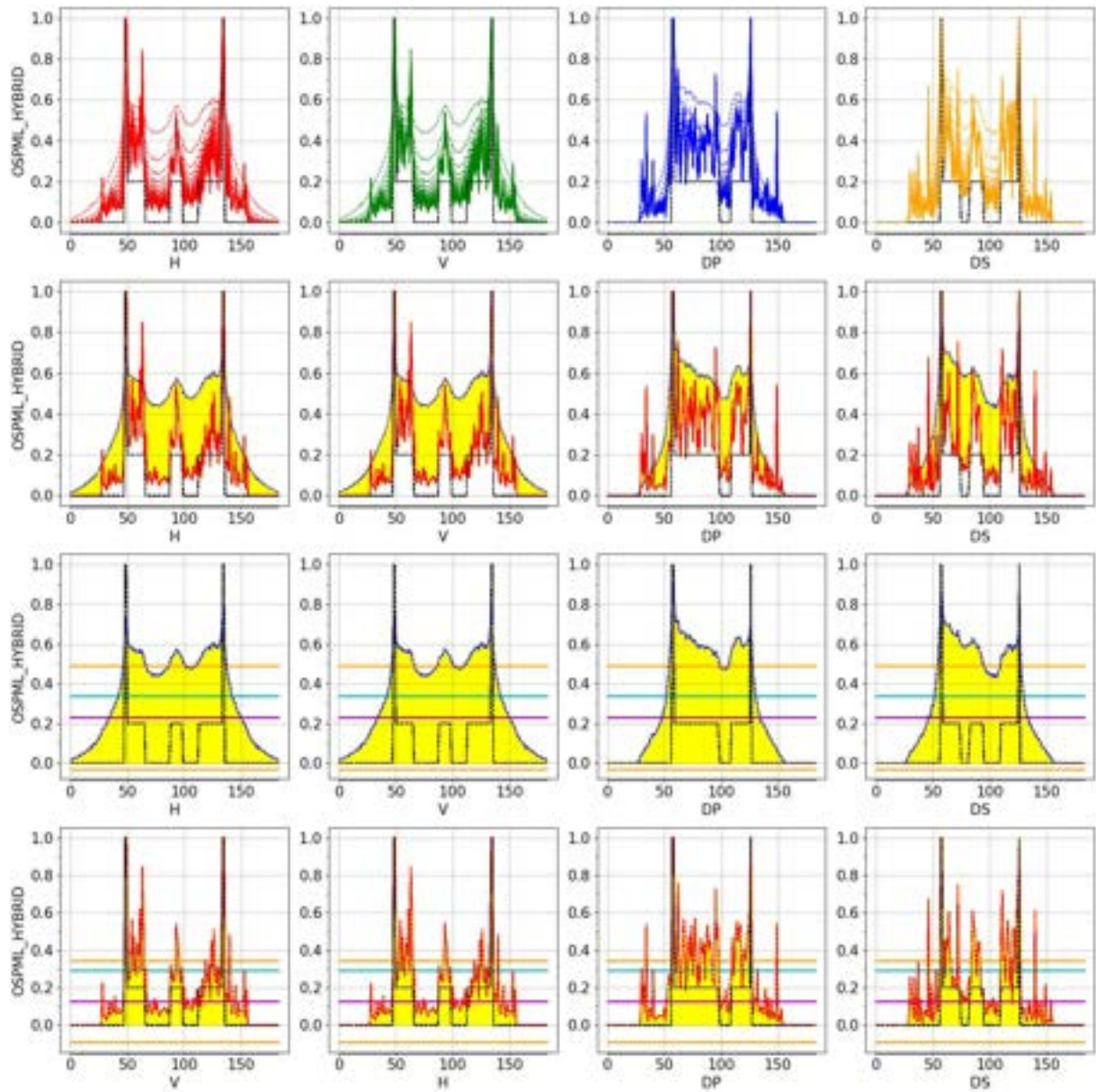


Figura 263 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Objeto Phantom

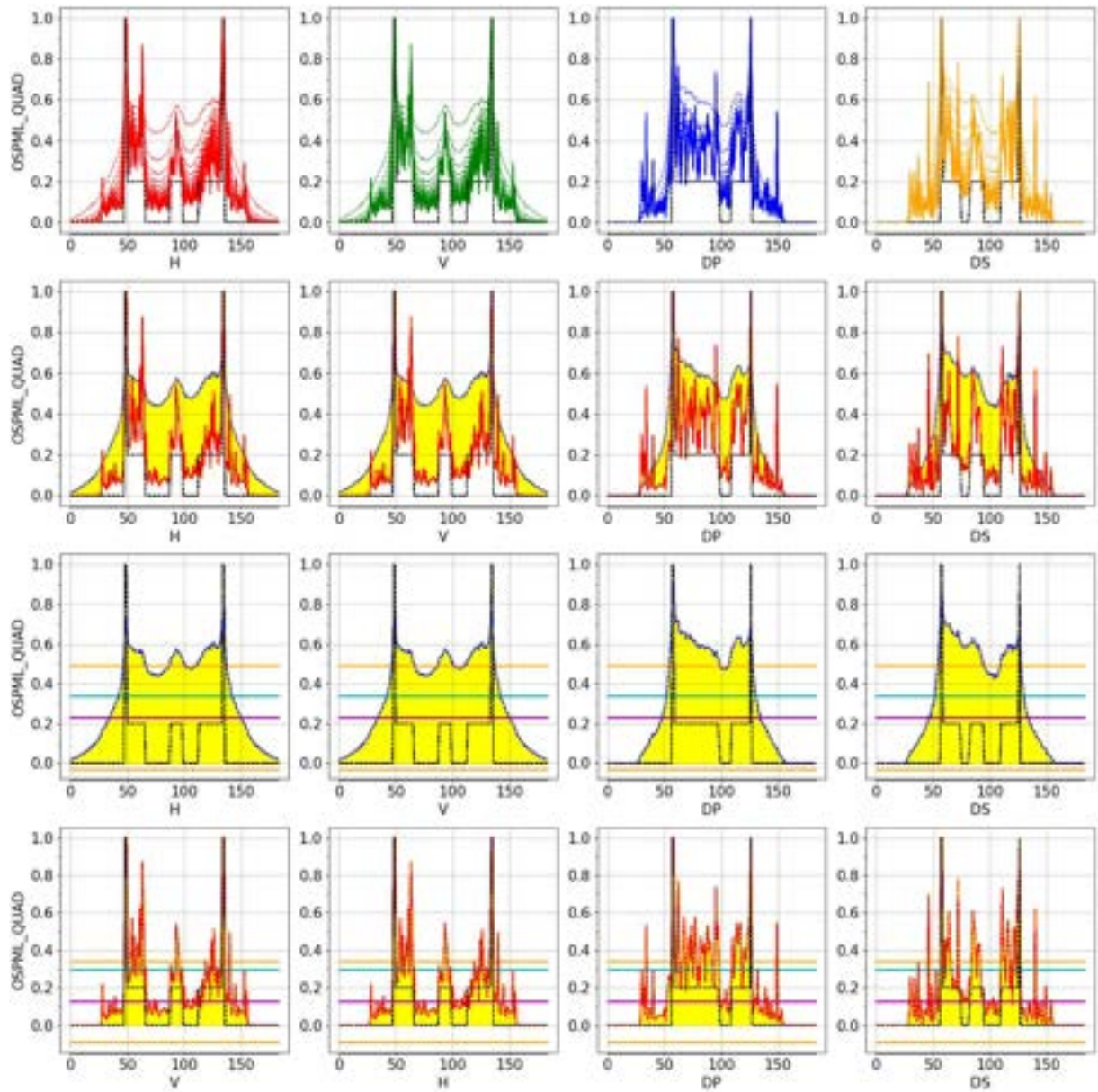


Figura 264 - Cortes OSPML-Quad com erro no Objeto Phantom

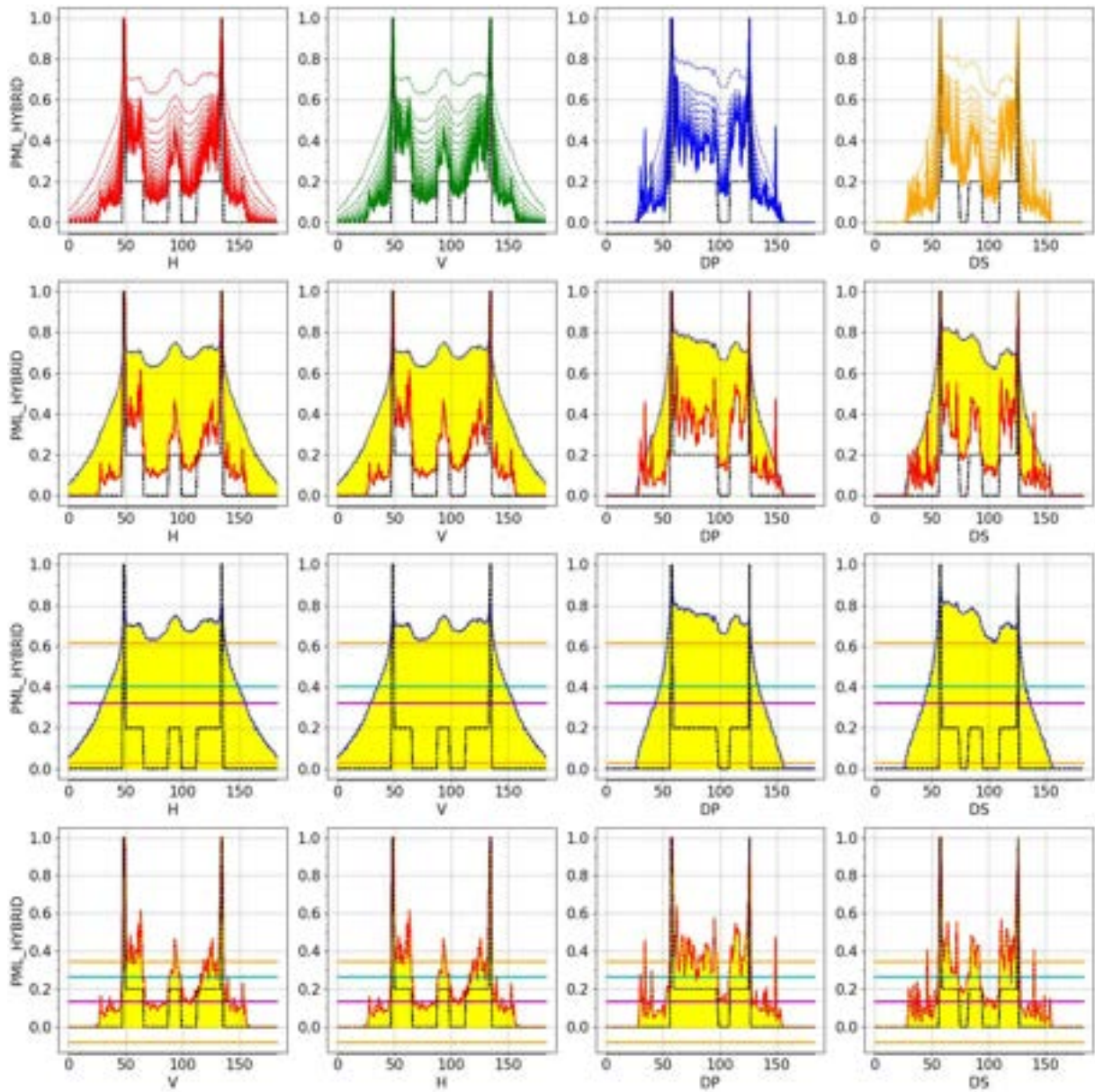


Figura 265 - Cortes PML-Hybrid com erro no Objeto Phantom

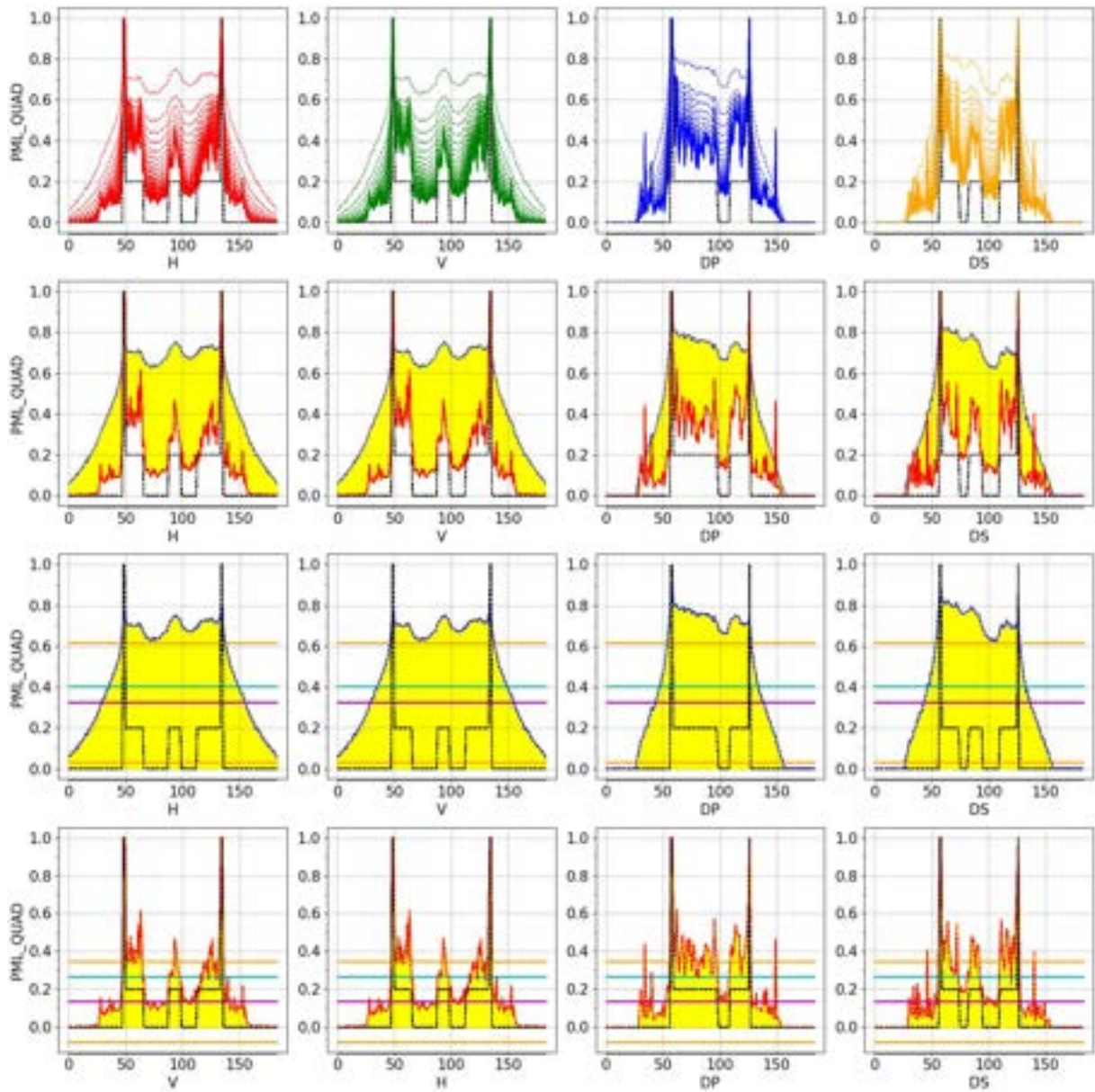


Figura 266 - Cortes PML-Quad com erro no Objeto Phantom

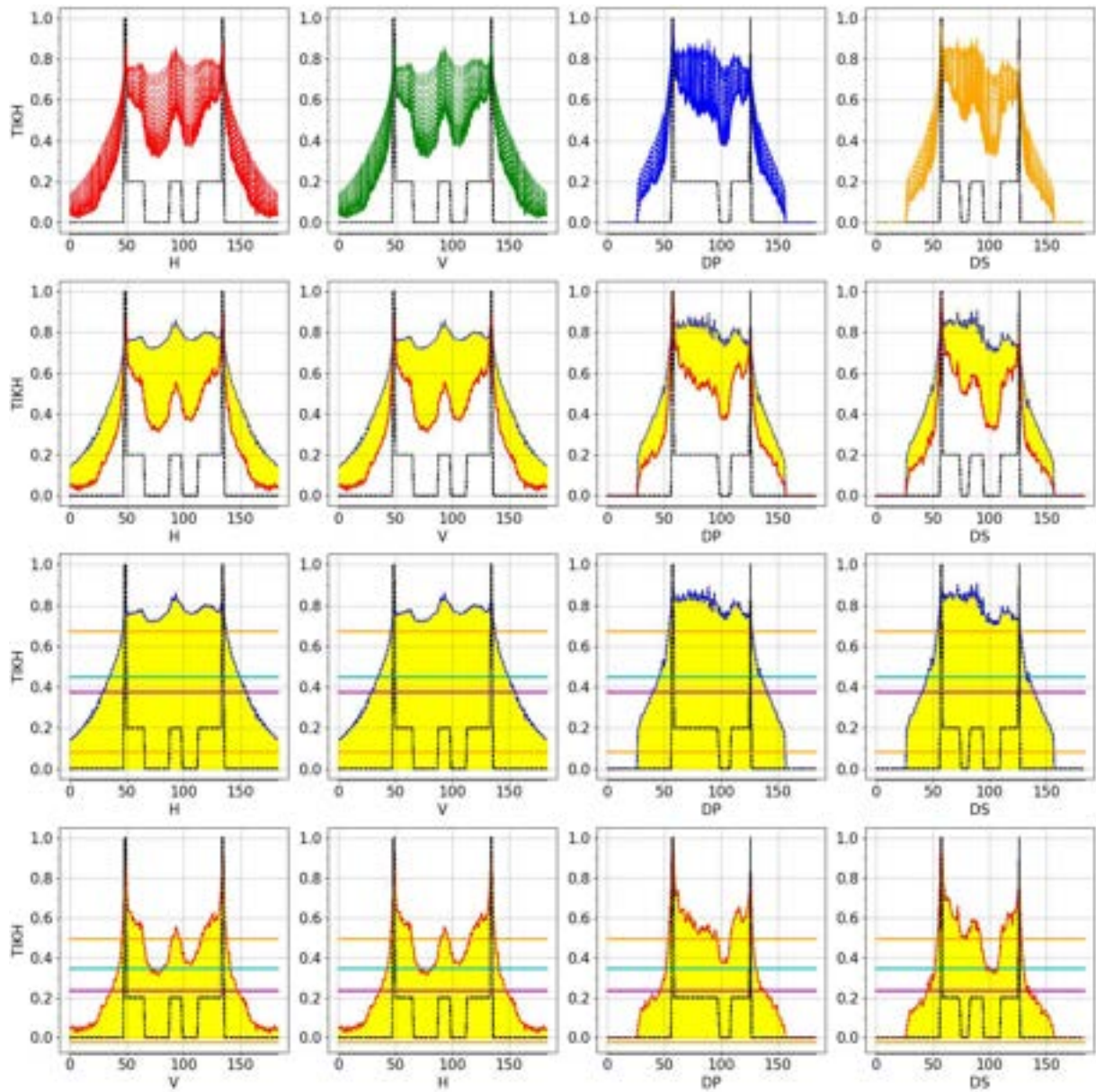


Figura 267 - Cortes TIKH com erro no Objeto Phantom

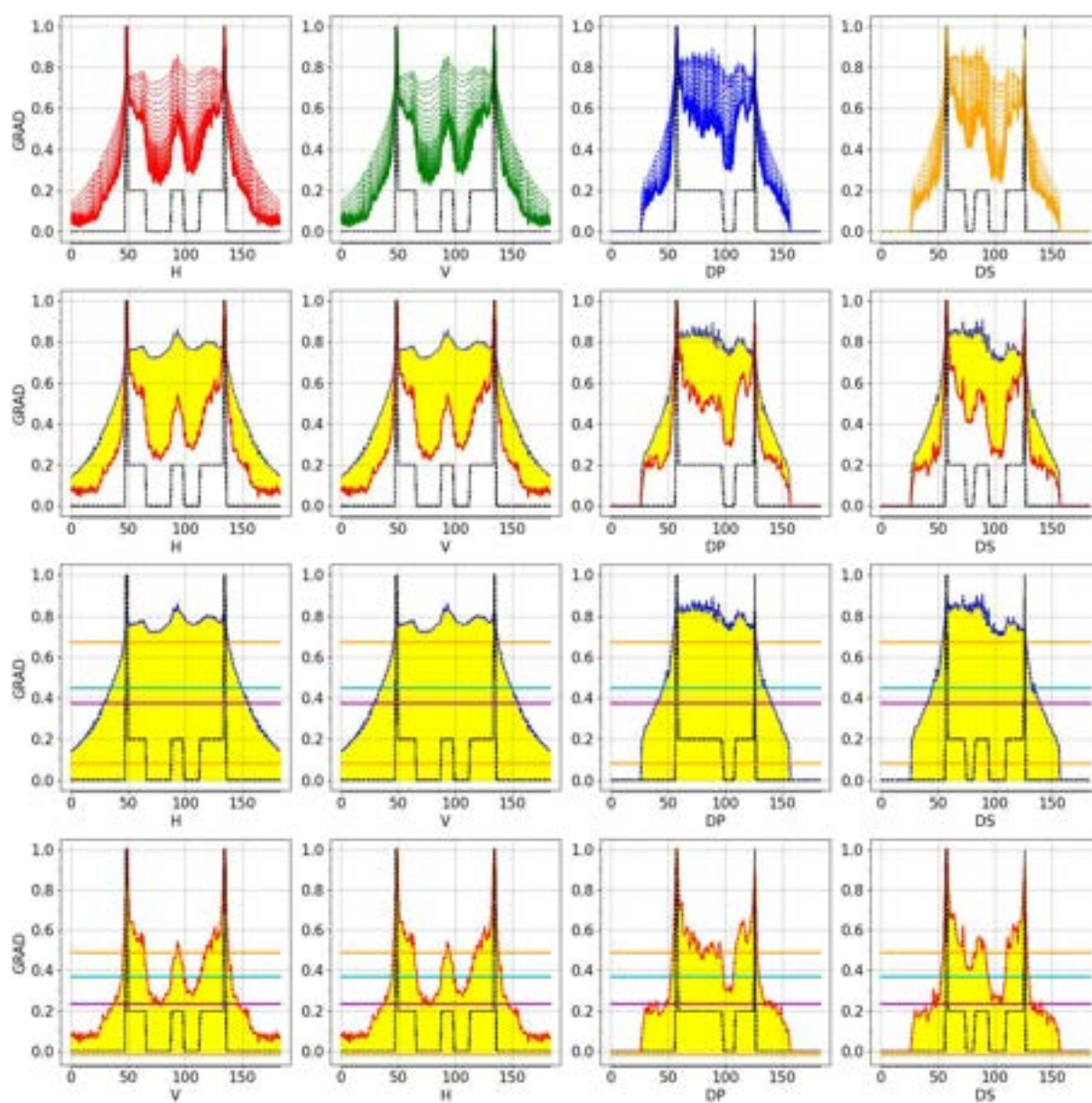


Figura 268 - Cortes GRAD com erro no Objeto Phantom

D.2.3 Erro Nível 5 no Sinograma Phantom

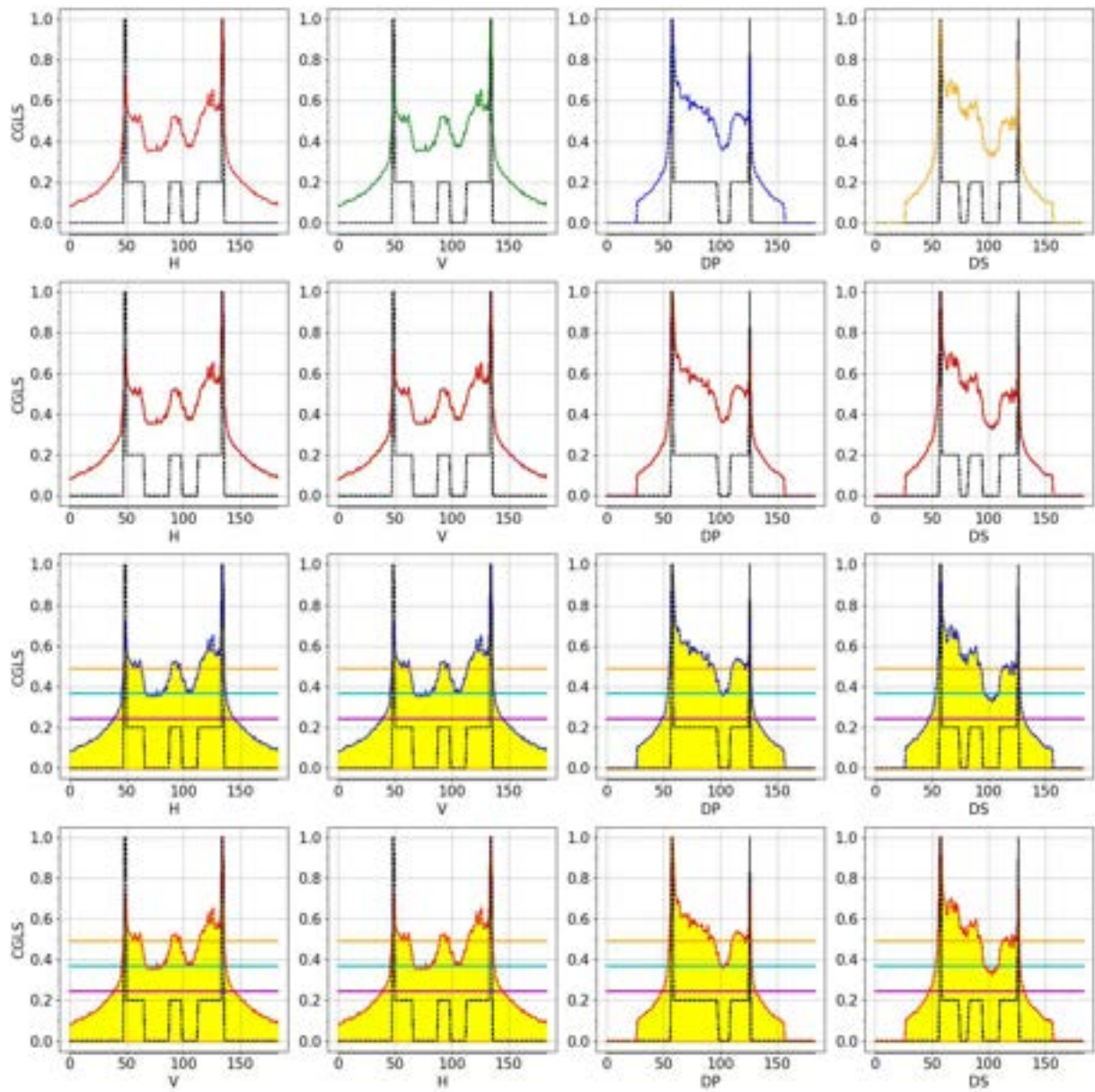


Figura 269 - Cortes CGLS com erro no Sinograma Phantom

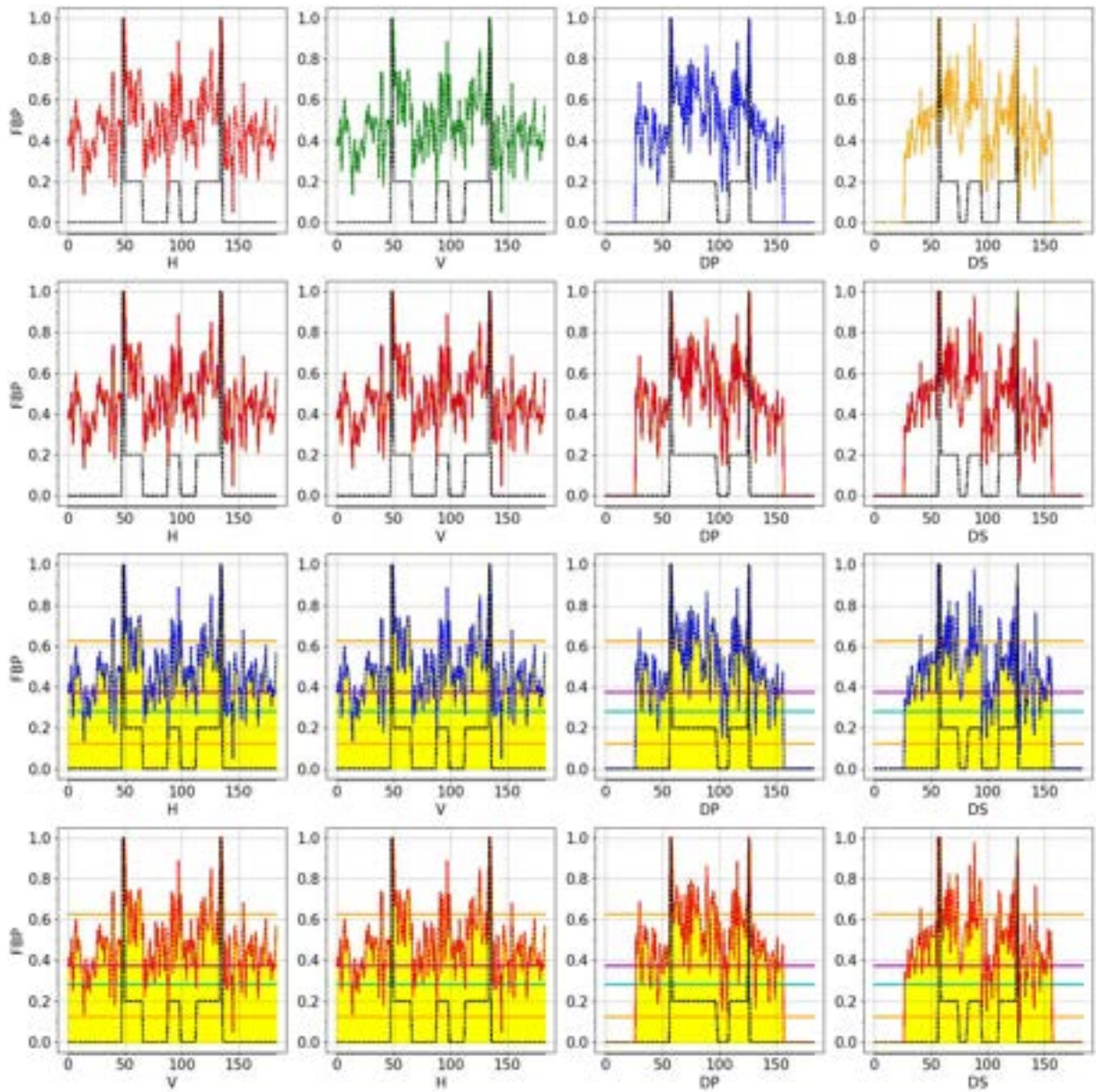


Figura 270 - Cortes FBP com erro no Sinograma Phantom

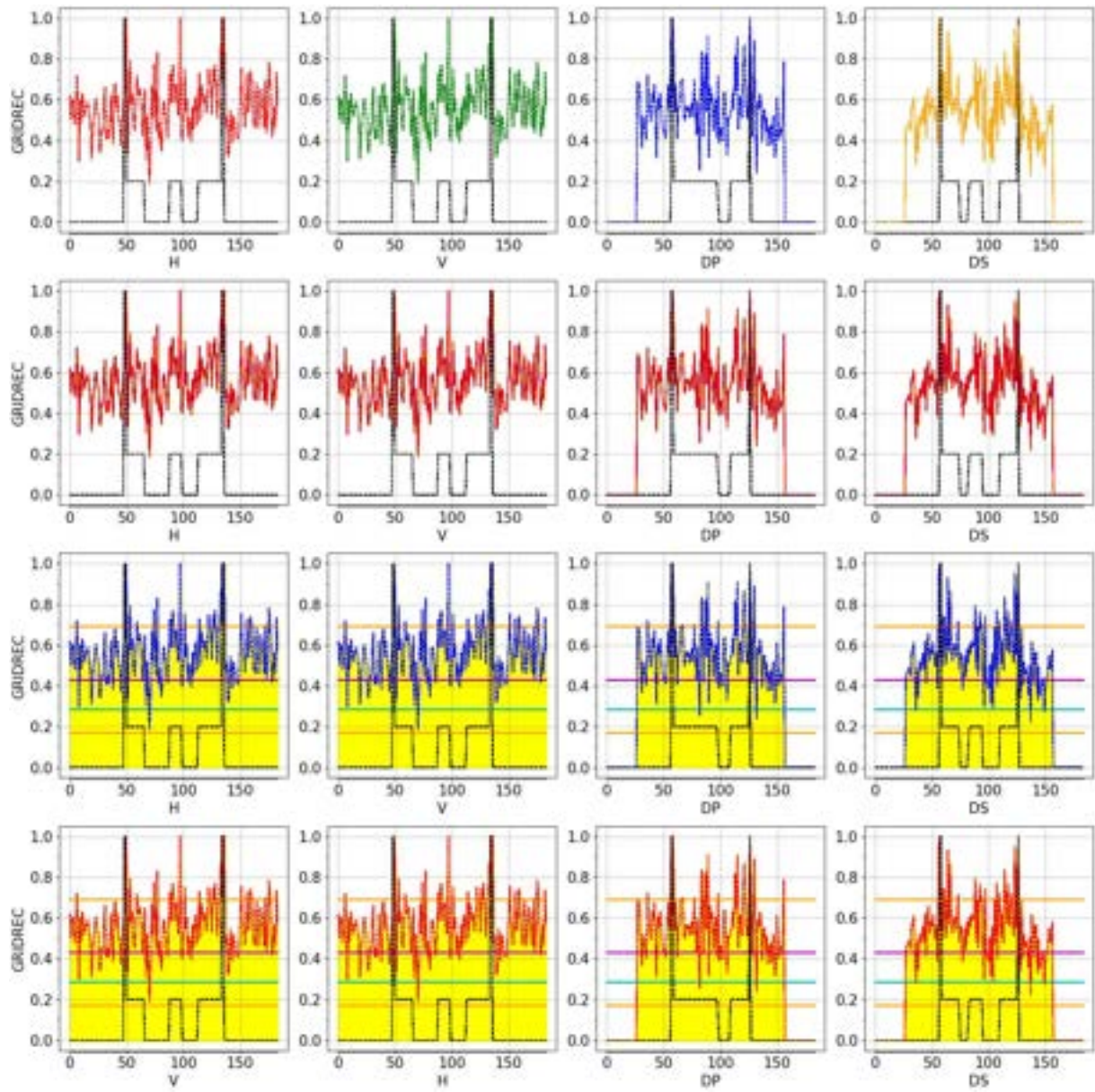


Figura 271 - Cortes GRIDREC com erro no Sinograma Phantom

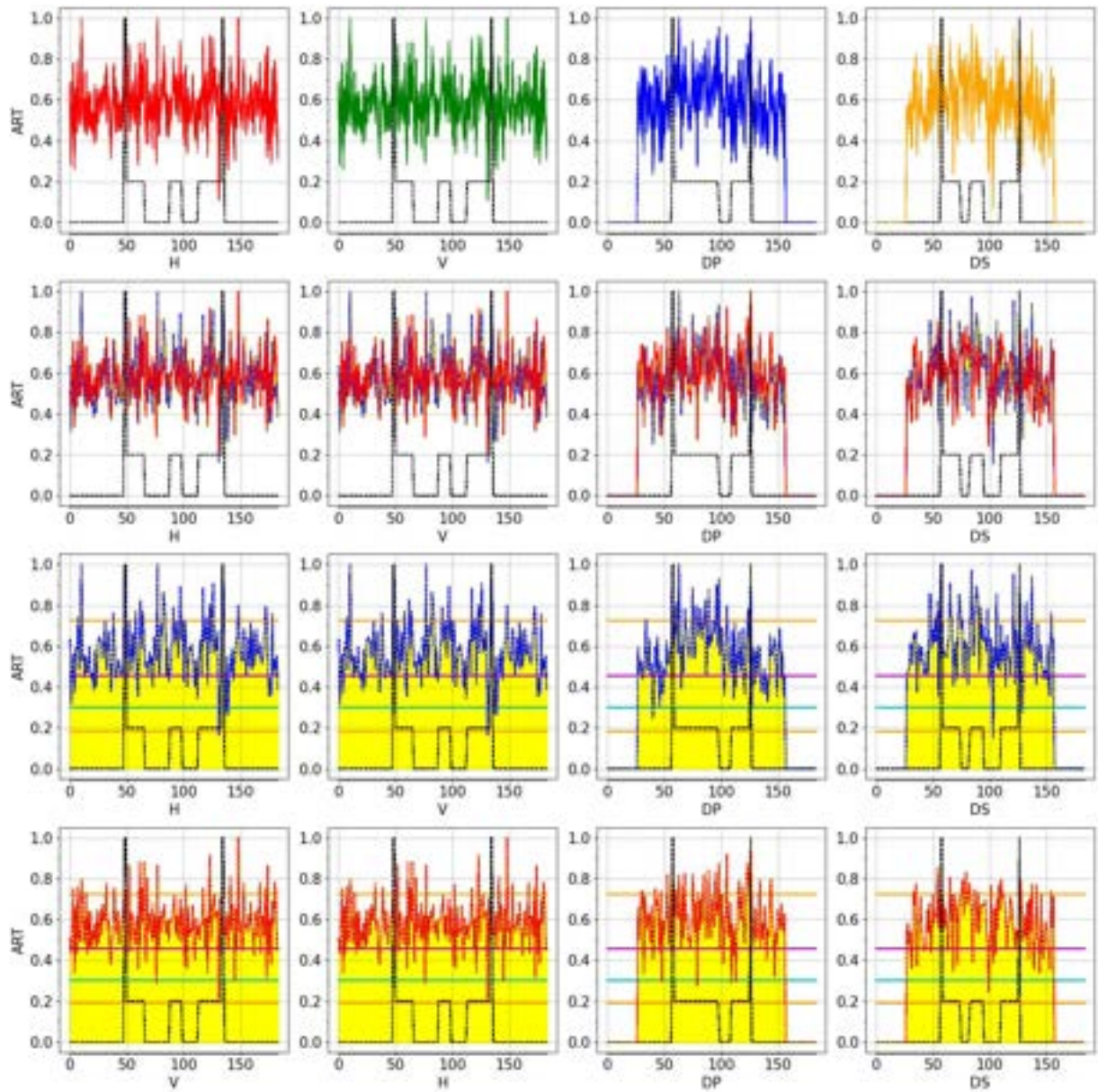


Figura 272 - Cortes ART com erro no Sinograma Phantom

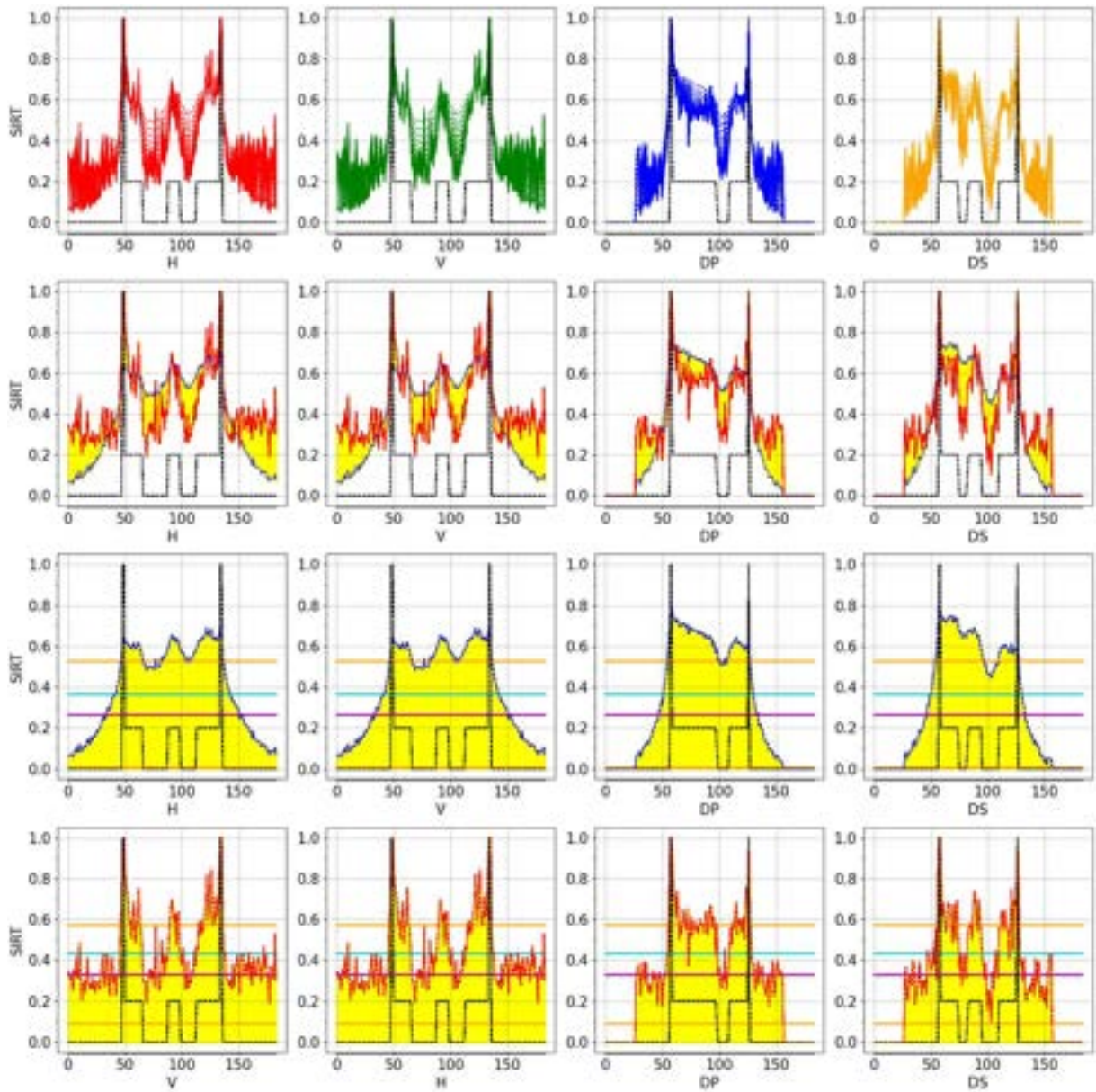


Figura 273 - Cortes SIRT com erro no Sinograma Phantom

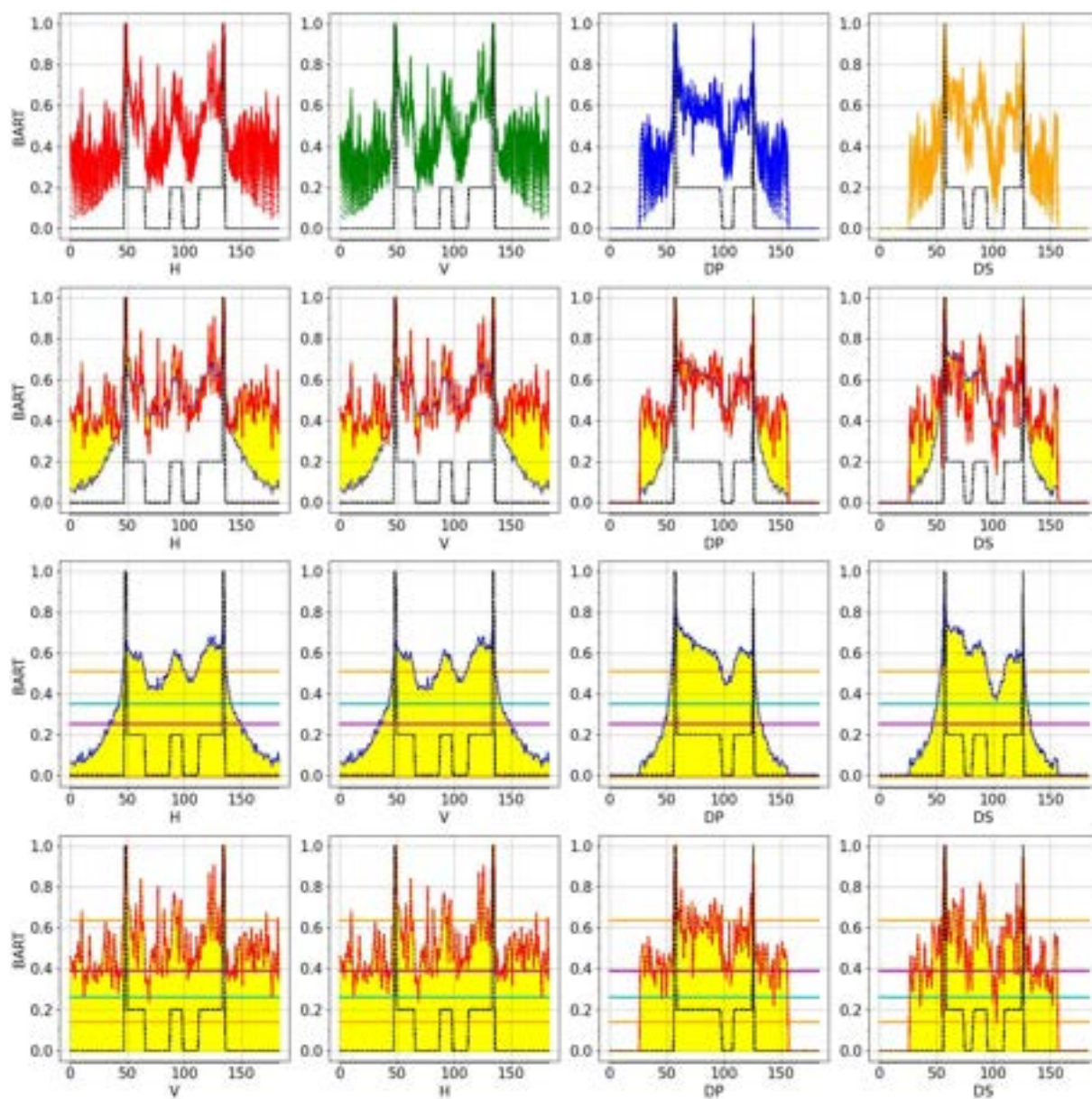


Figura 274 - Cortes BART com erro no Sinograma Phantom

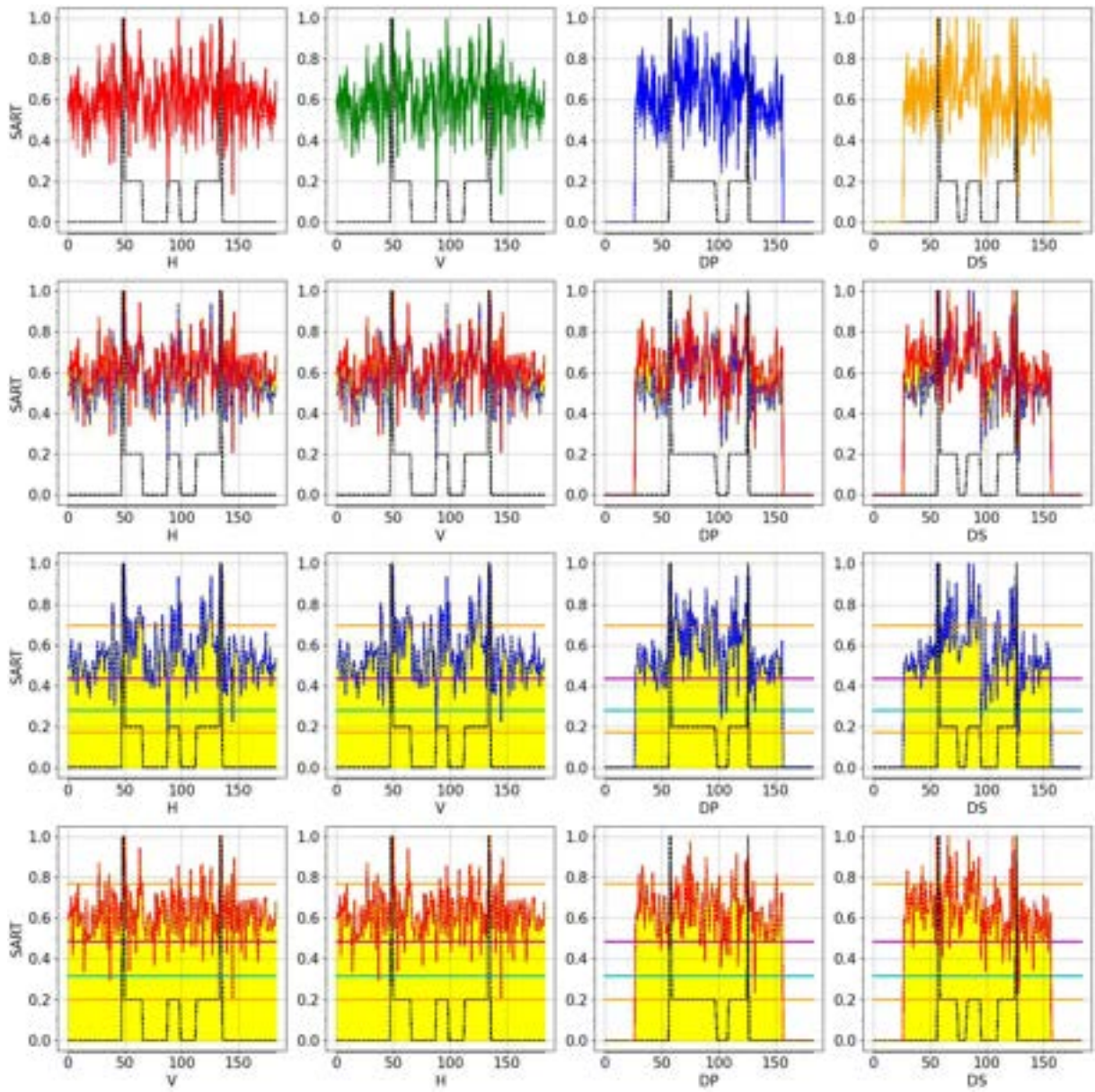


Figura 275 - Cortes SART com erro no Sinograma Phantom

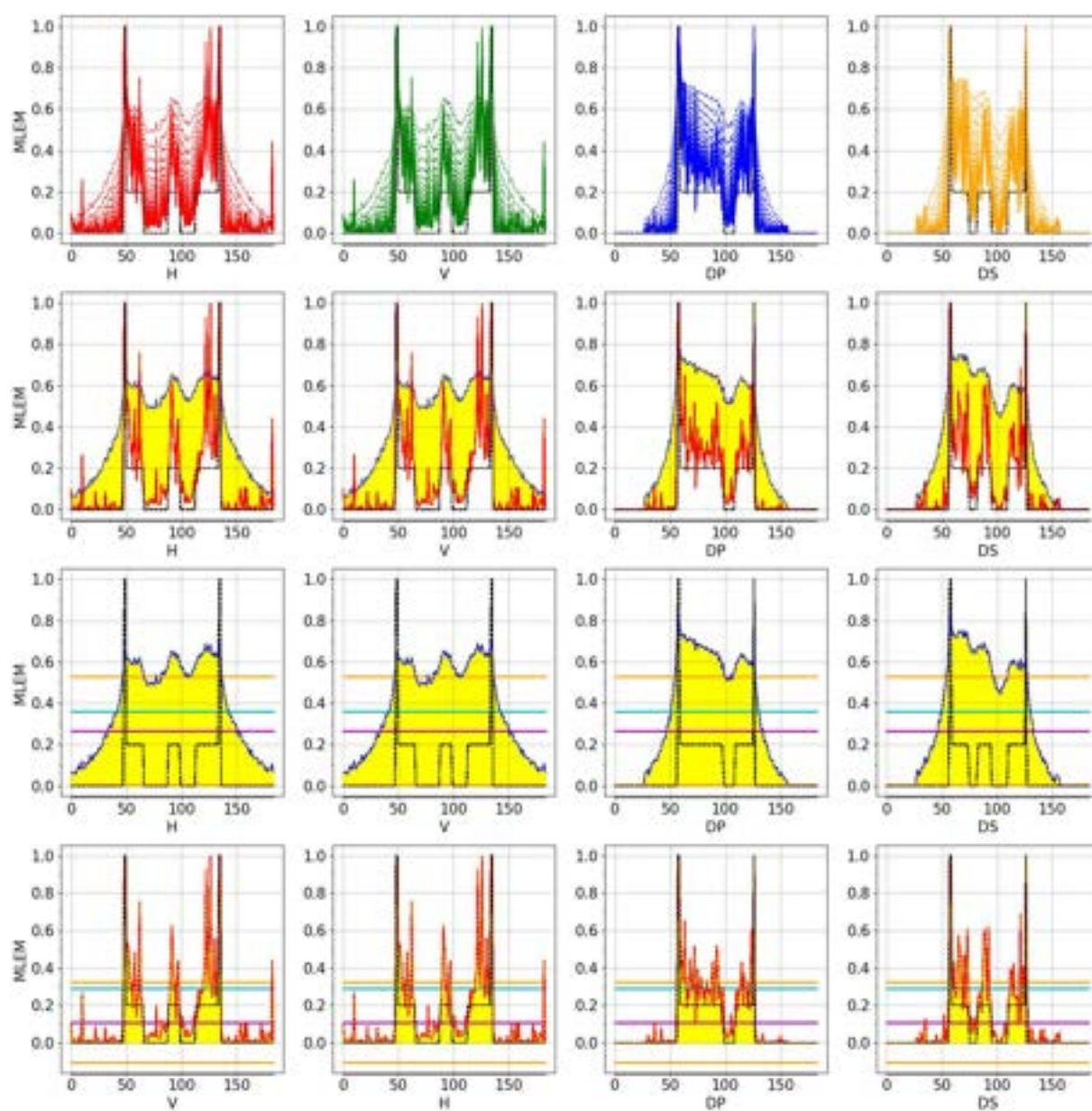


Figura 276 - Cortes MLEM com erro no Sinograma Phantom

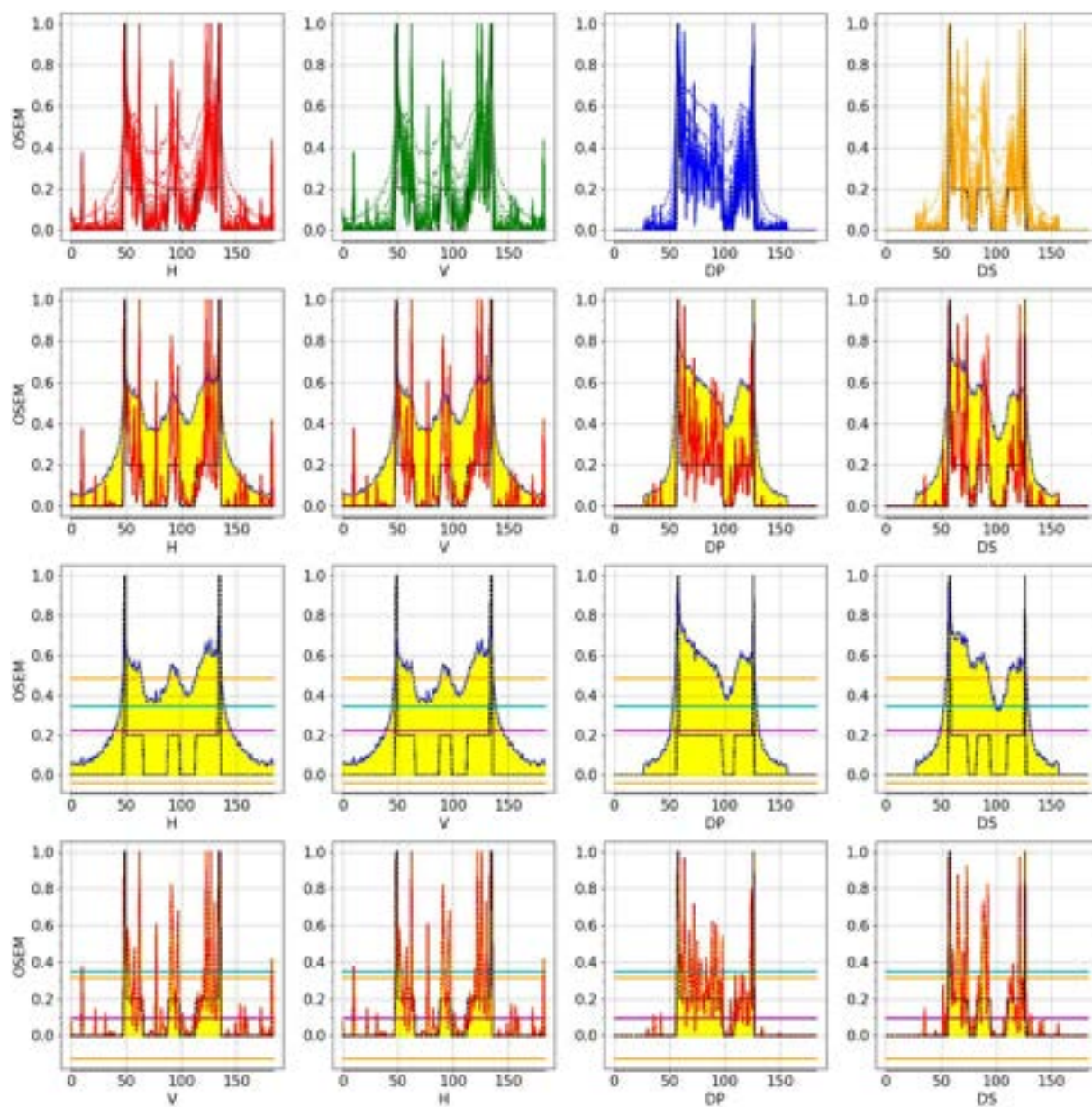


Figura 277 - Cortes OSEM com erro no Sinograma Phantom

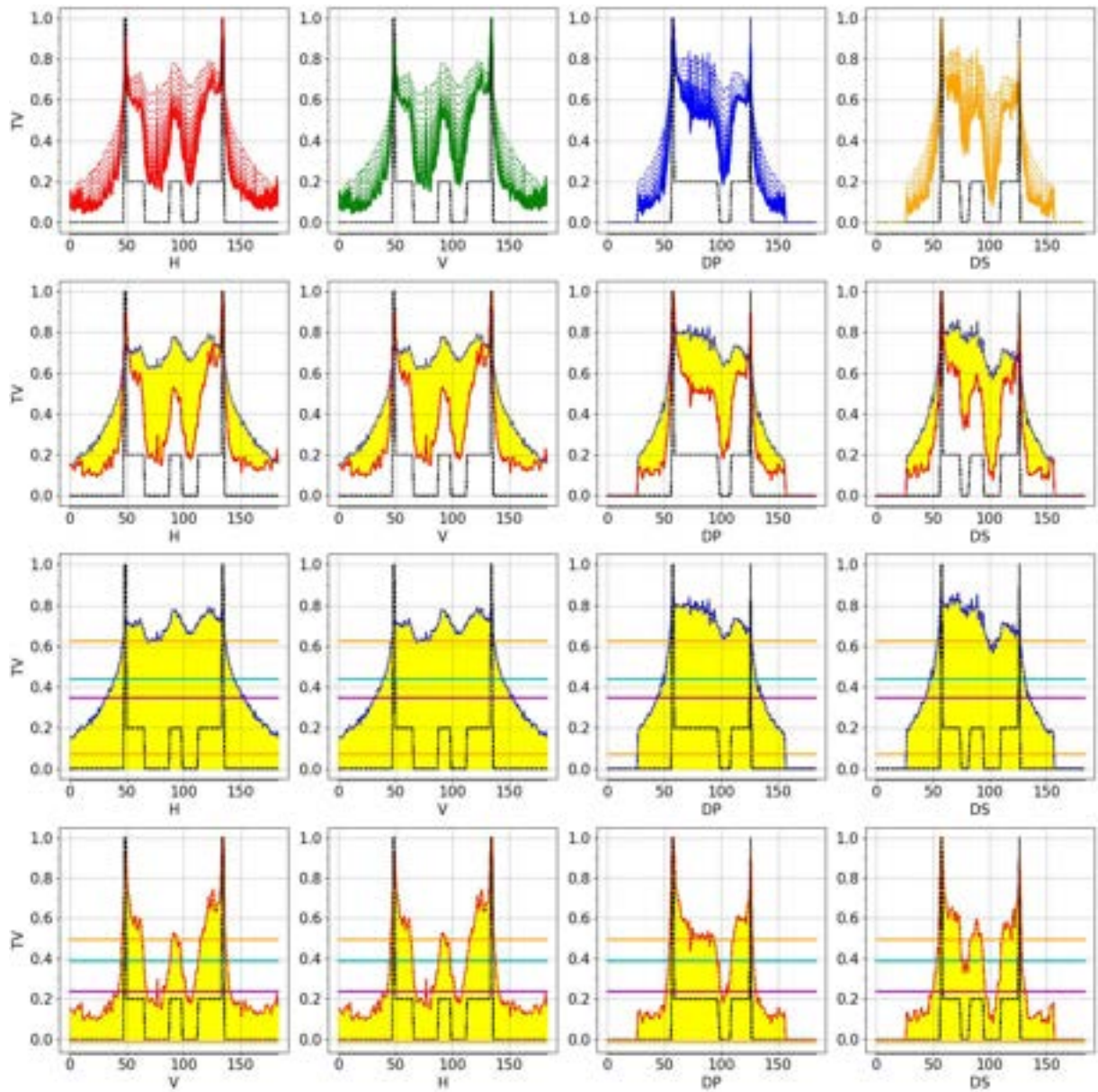


Figura 278 - Cortes TV com erro no Sinograma Phantom

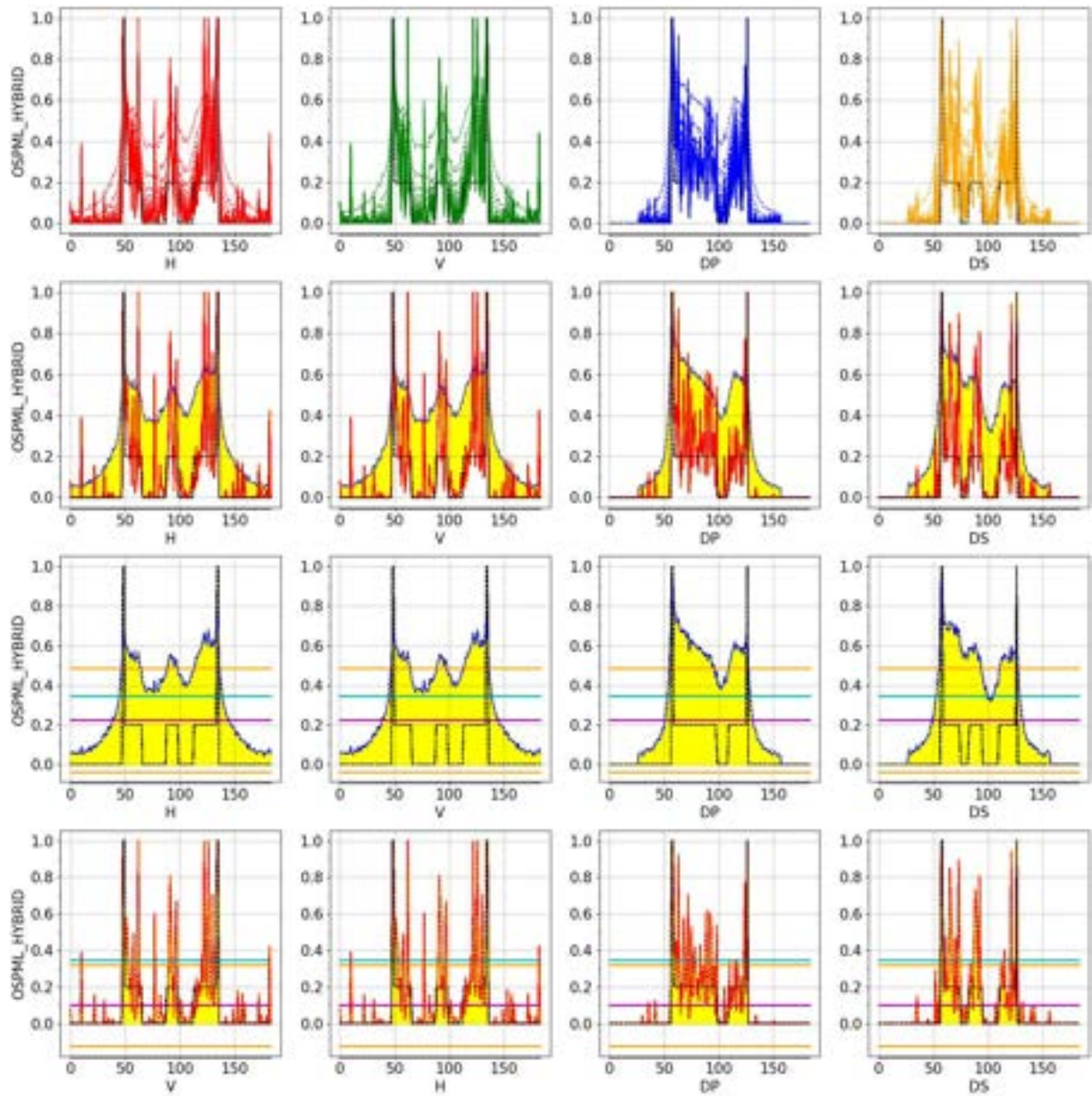


Figura 279 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom

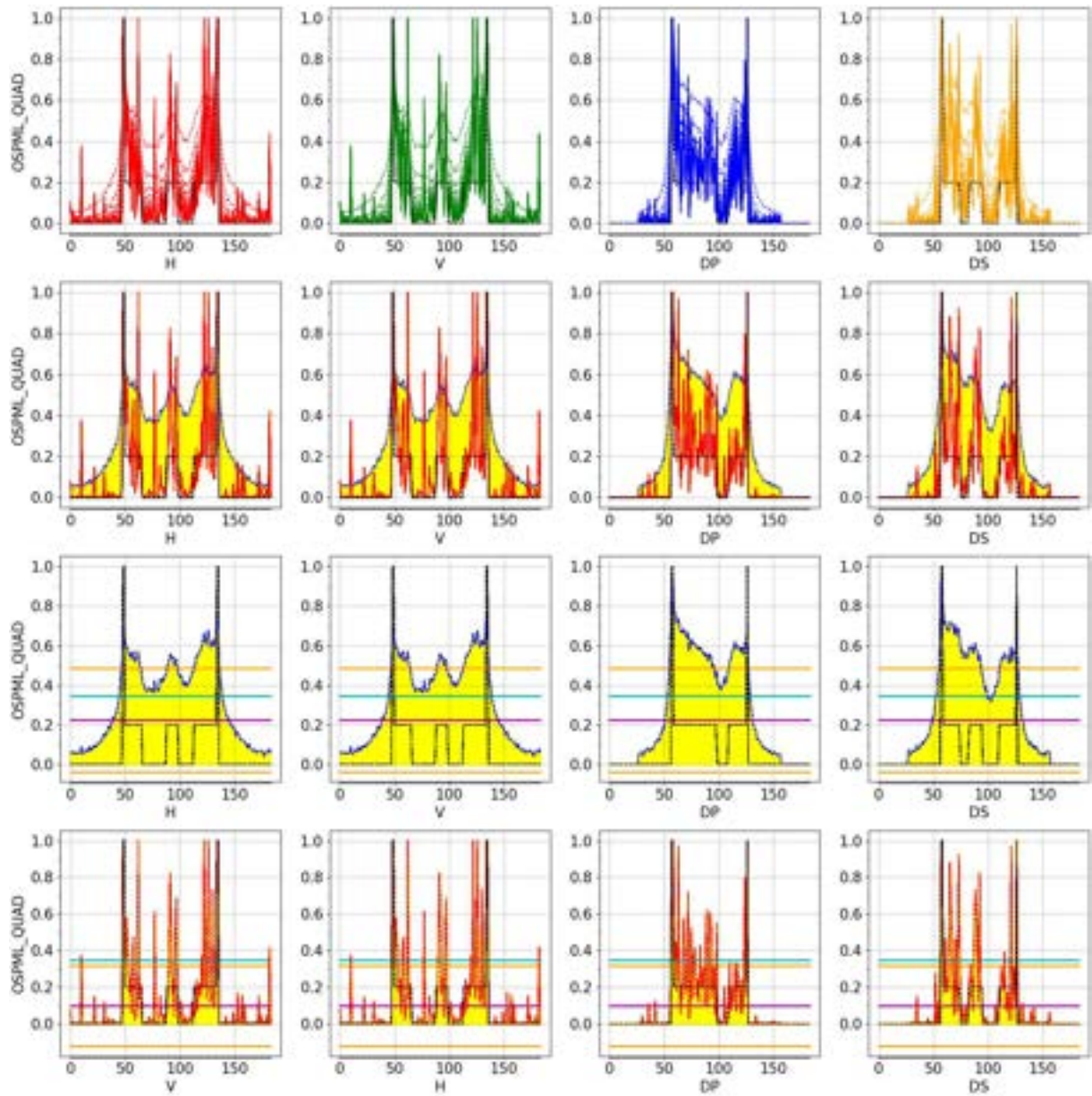


Figura 280 - Cortes OSPML-Quad com erro no Sinograma Phantom

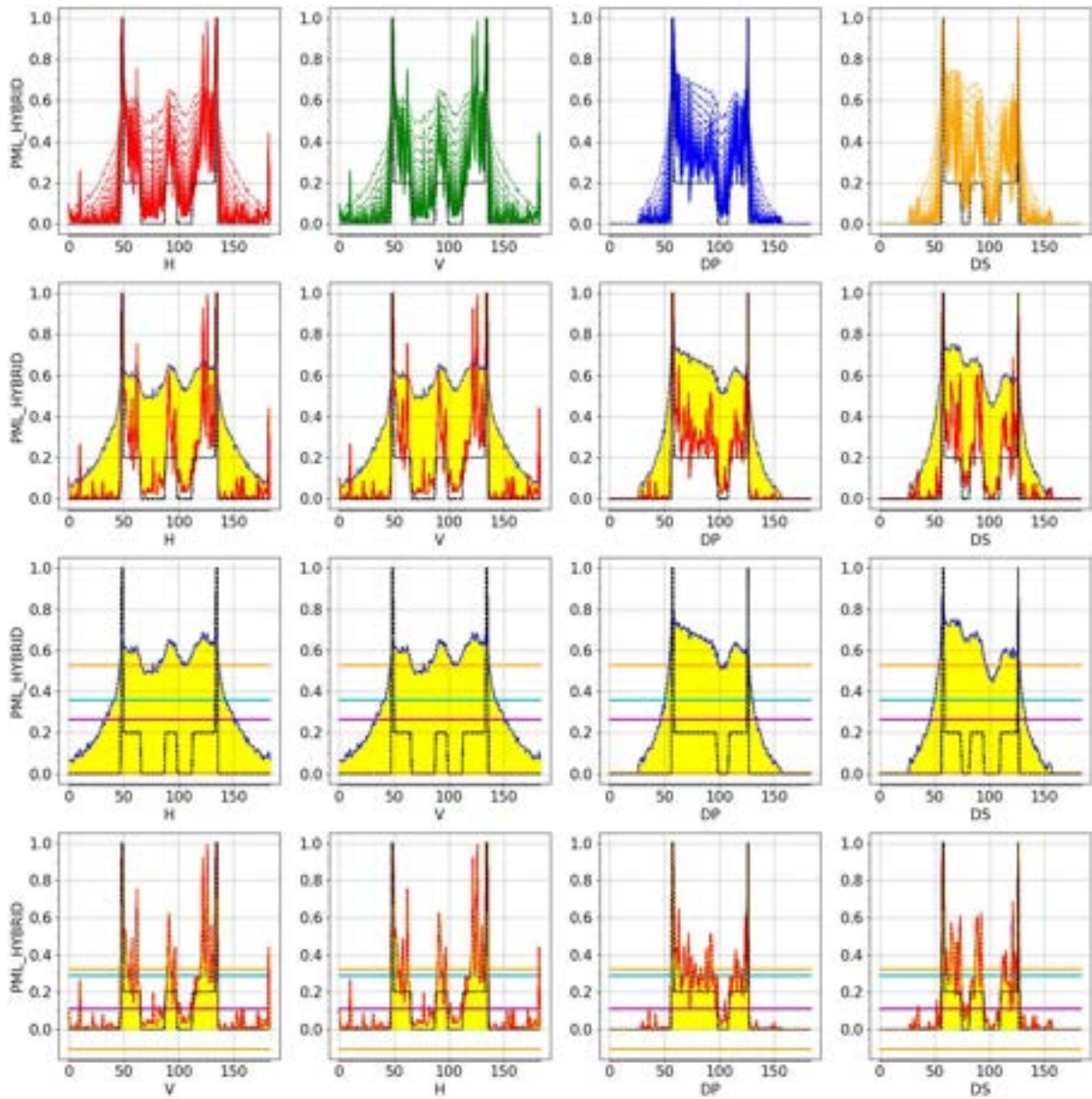


Figura 281 - Cortes PML-Hybrid com erro no Sinograma Phantom

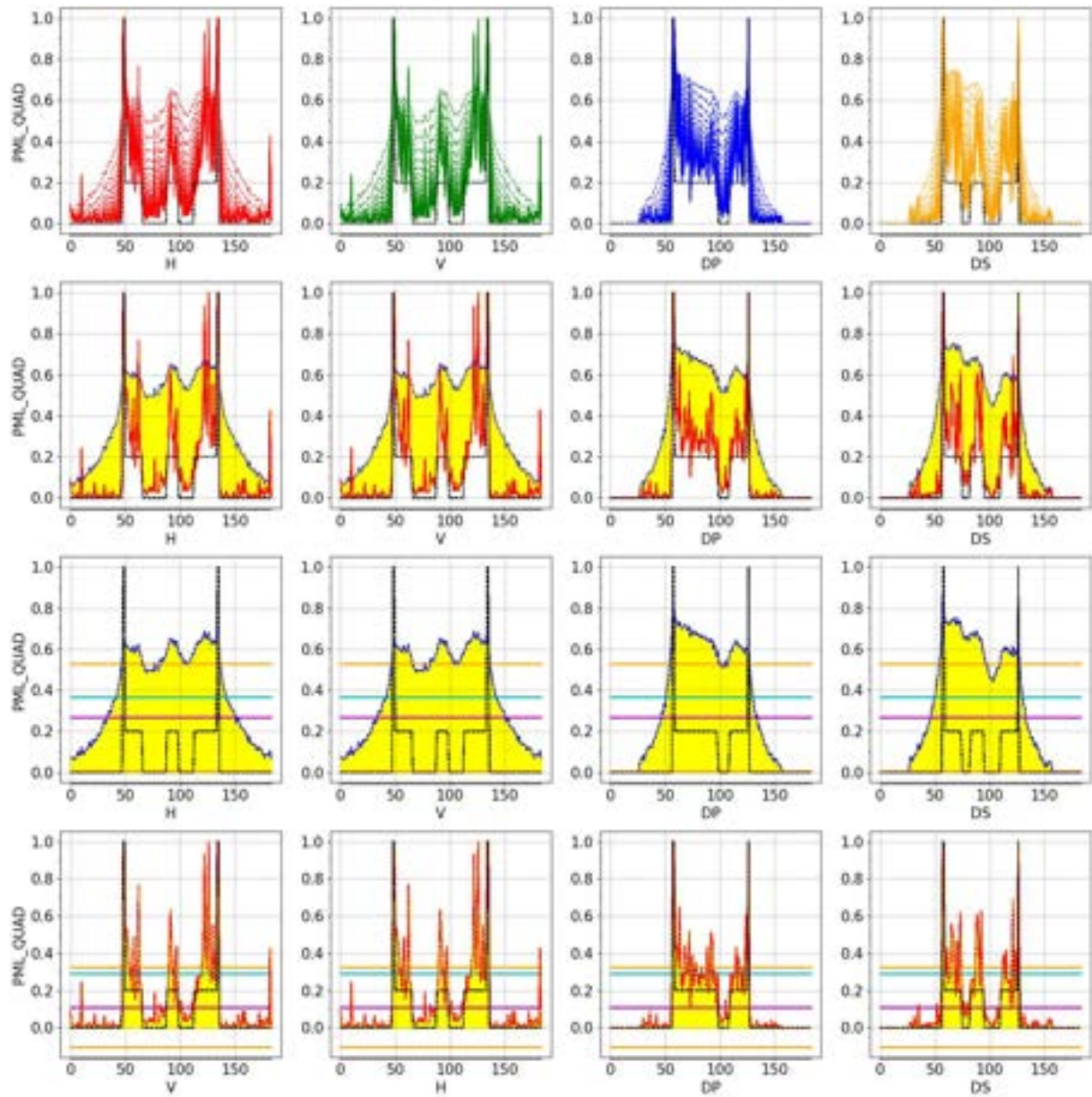


Figura 282 - Cortes PML-Quad com erro no Sinograma Phantom

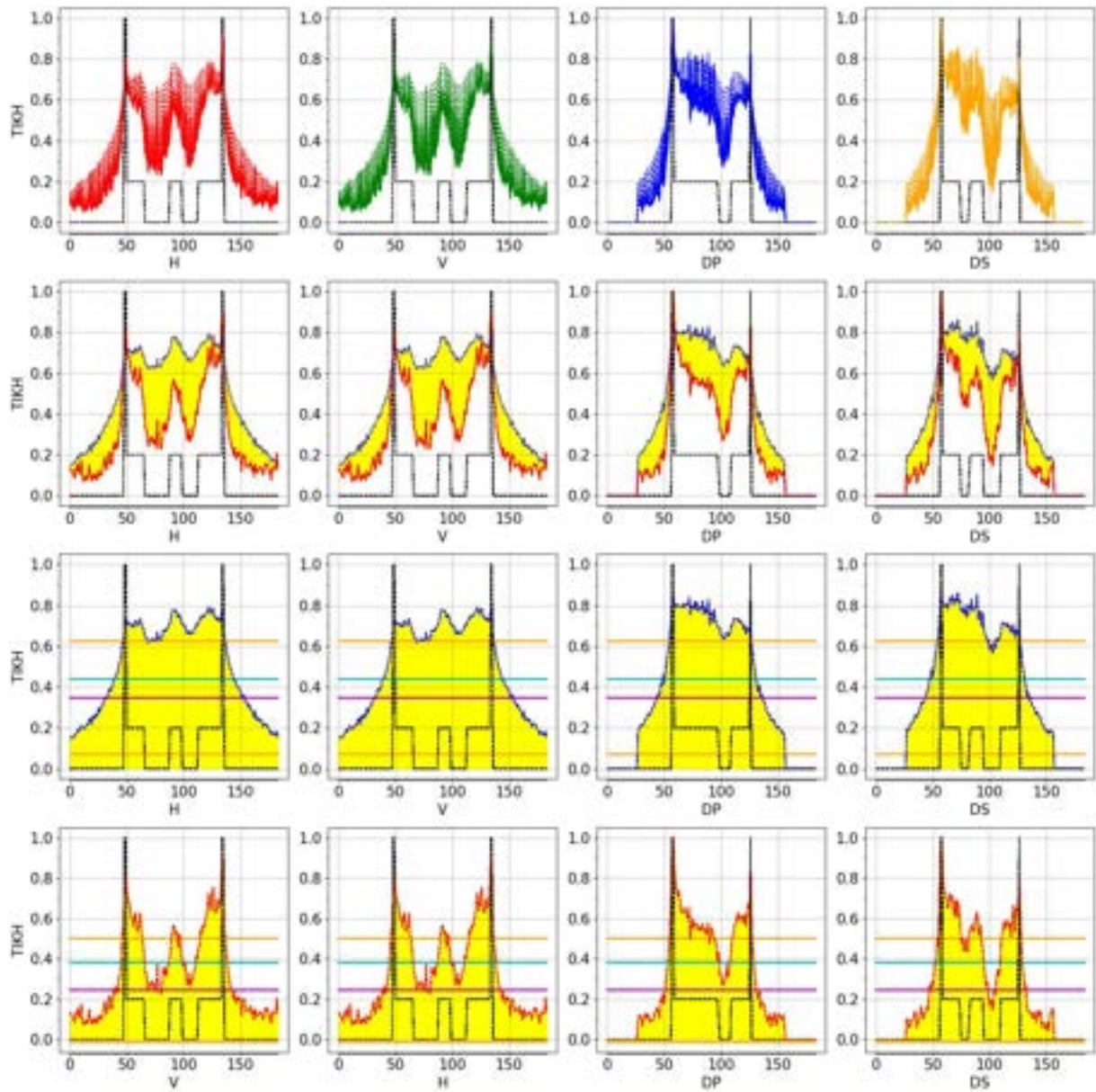


Figura 283 - Cortes TIKH com erro no Sinograma Phantom

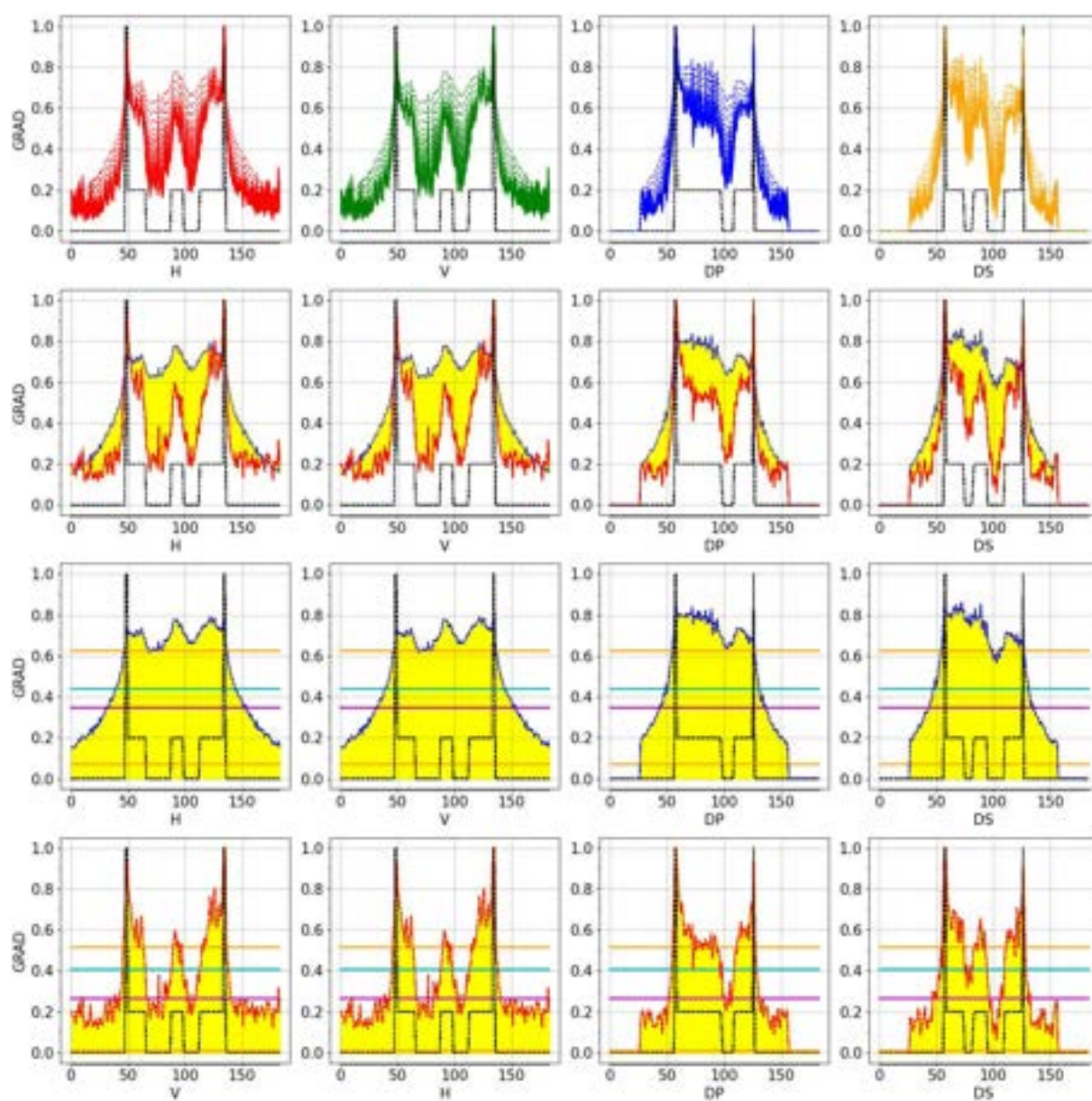


Figura 284 - Cortes GRAD com erro no Sinograma Phantom

D.3 Objeto-Alvo Horus

D.3.1 Objeto-Alvo Original (erro Nível 0)

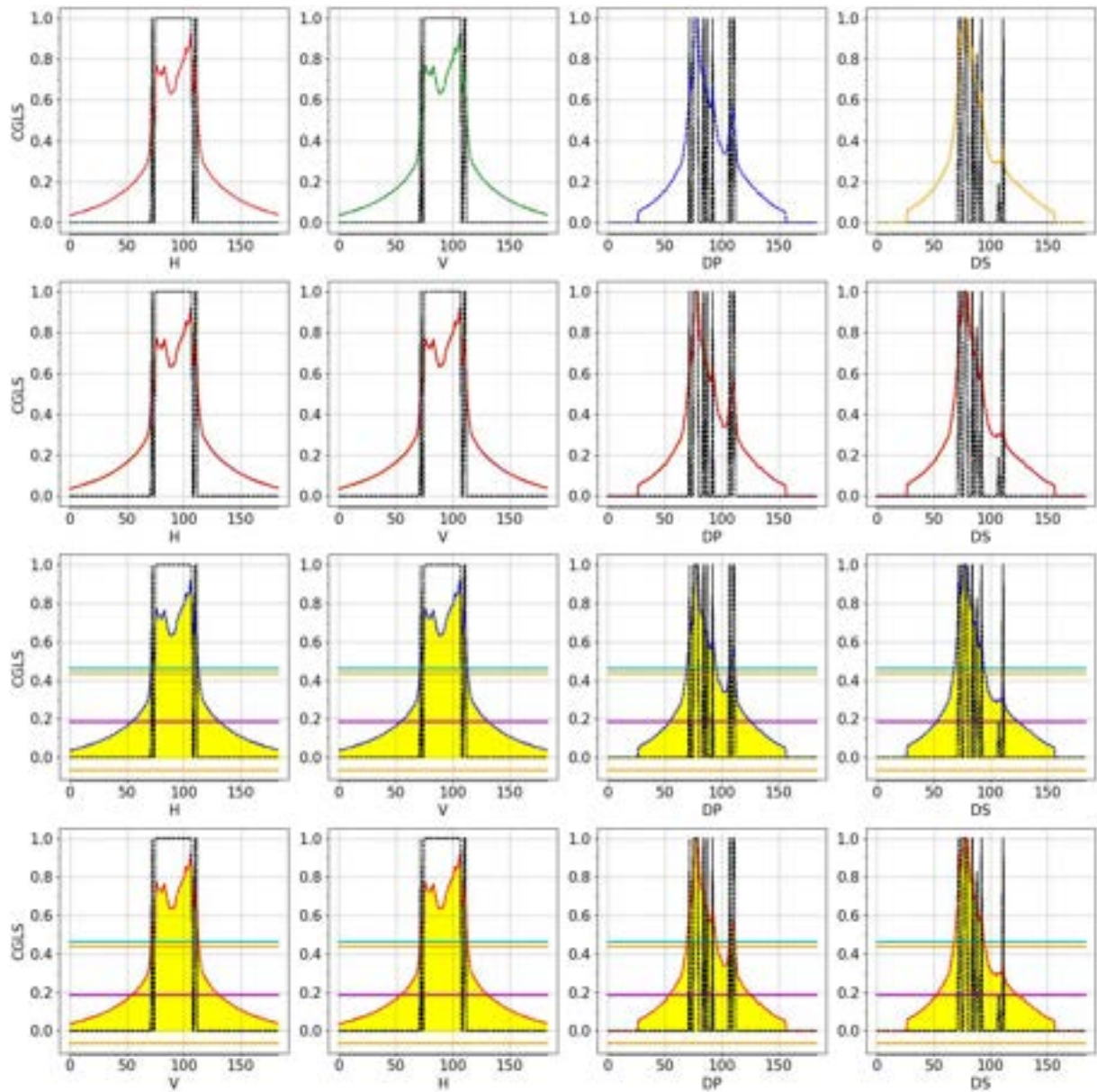


Figura 285 - Cortes CGLS com Original Horus

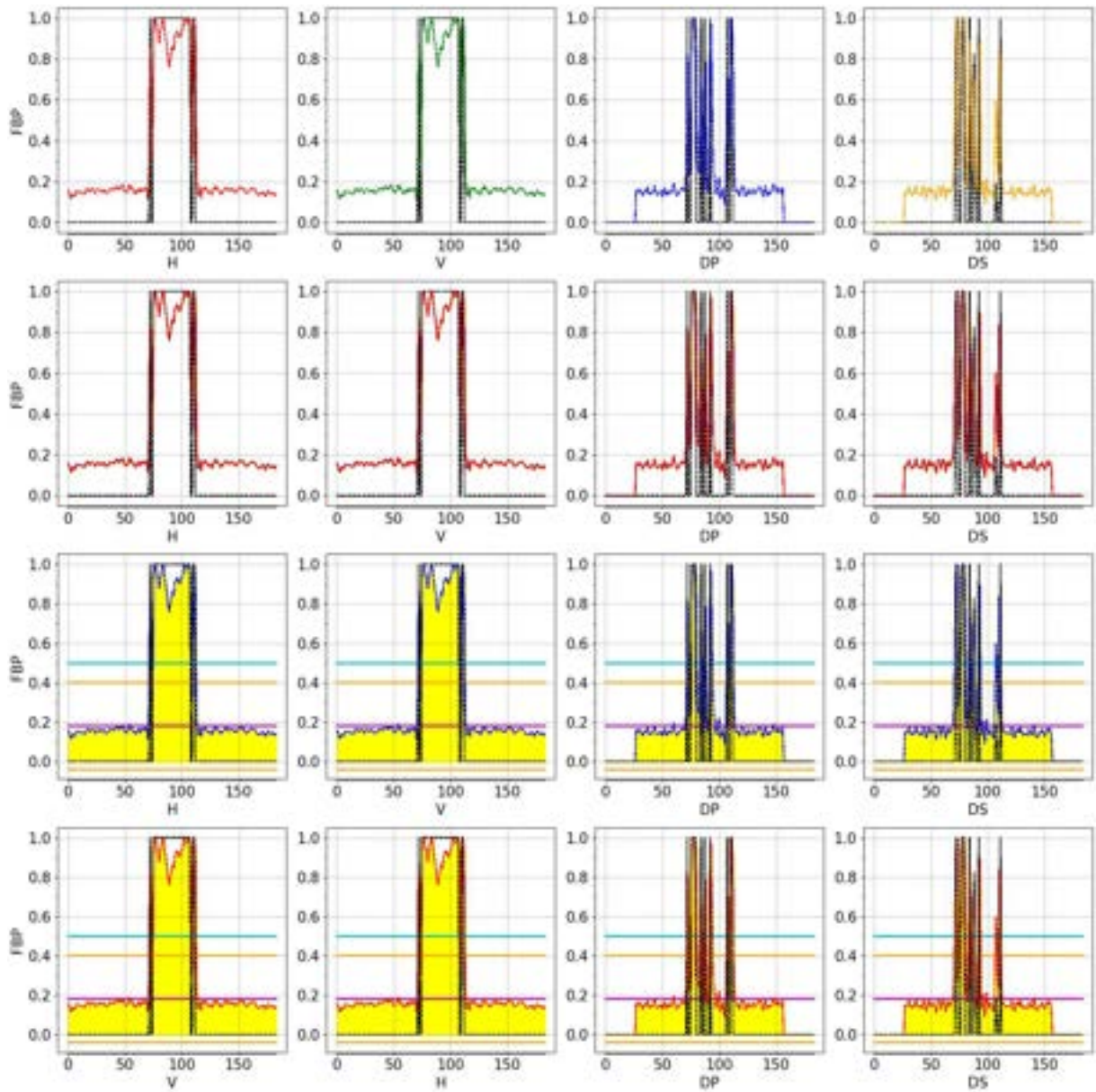


Figura 286 - Cortes FBP com Original Horus

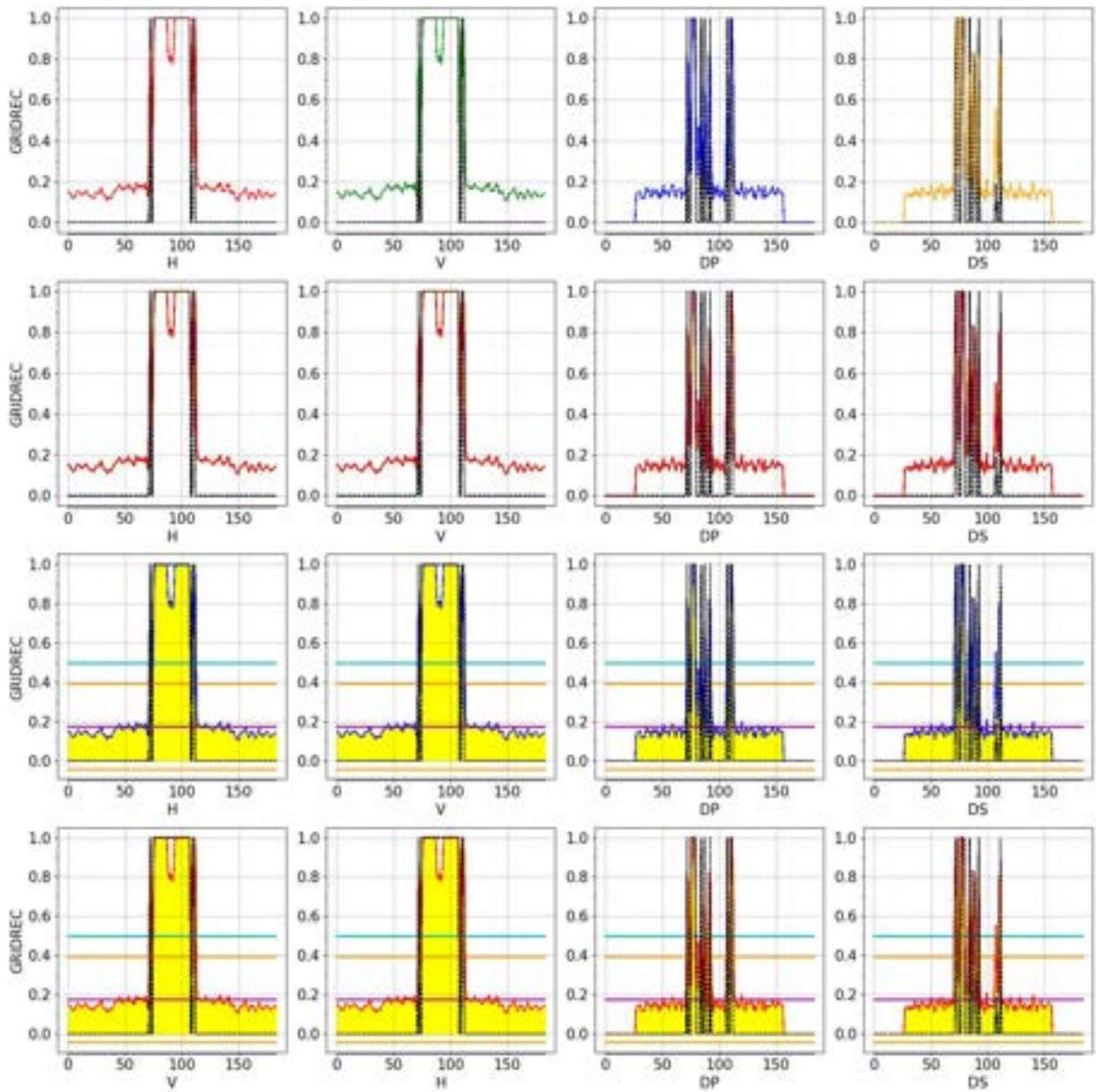


Figura 287 - Cortes GRIDREC com Original Horus

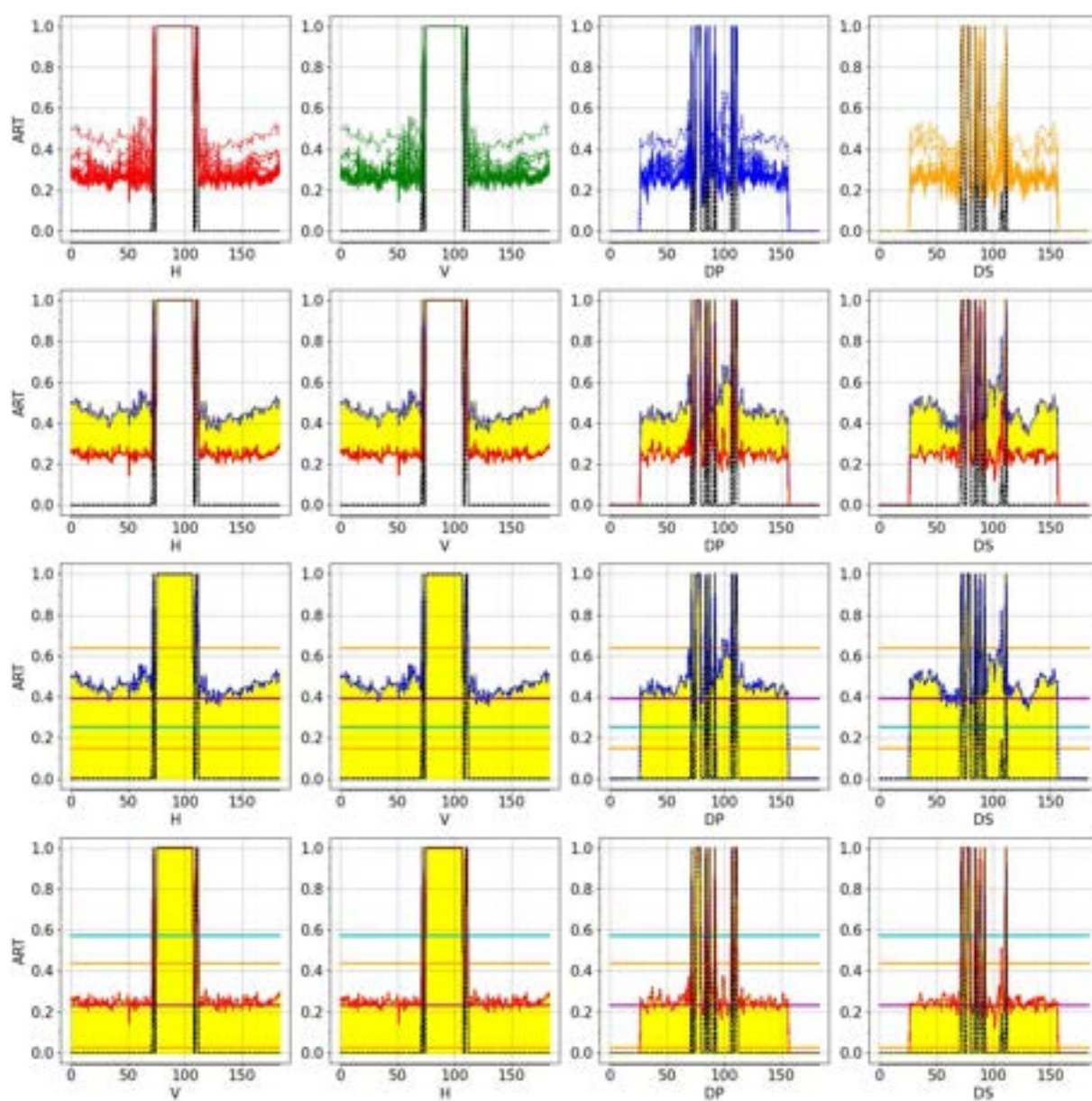


Figura 288 - Cortes ART com Original Horus

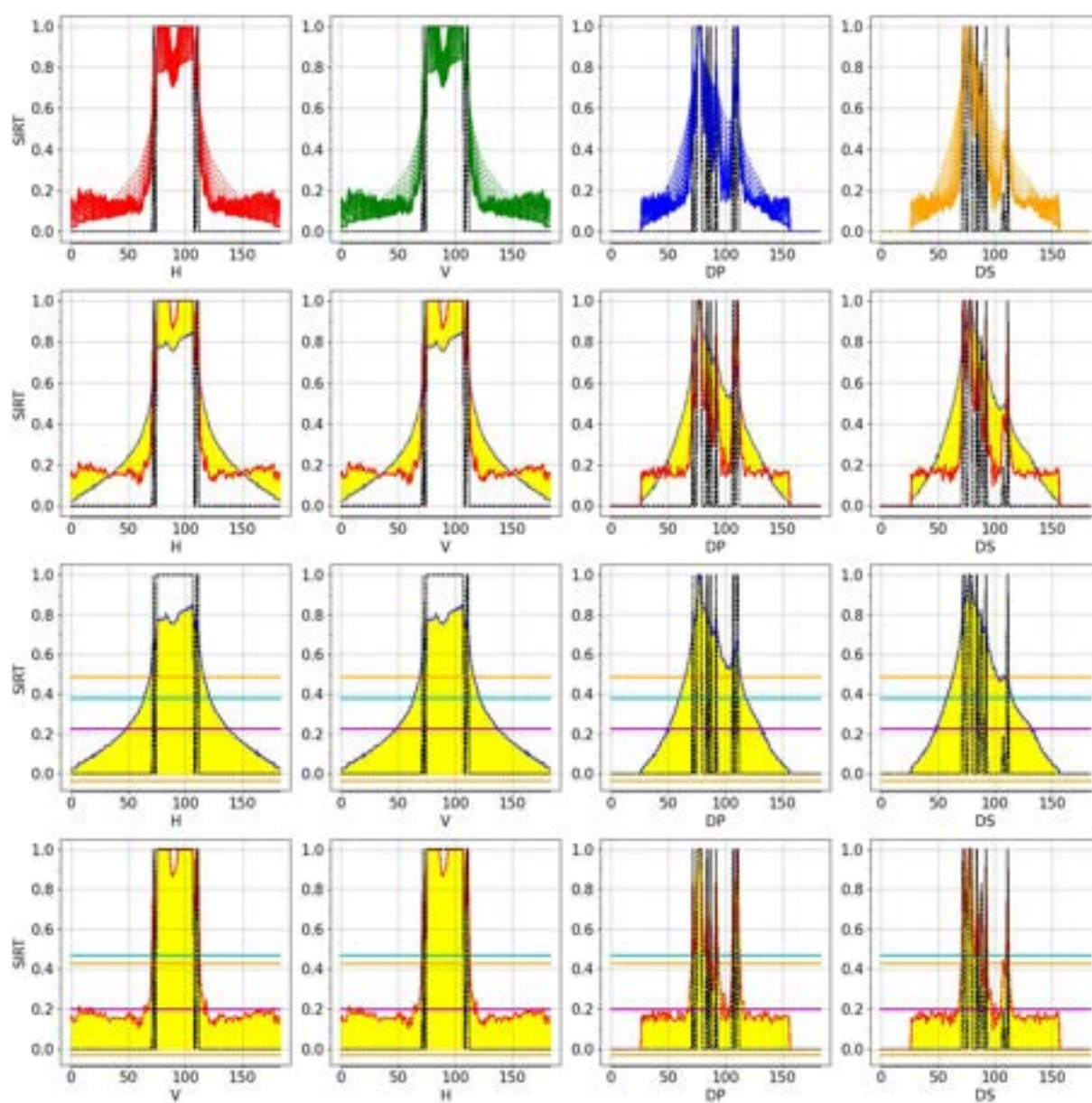


Figura 289 - Cortes SIRT com Original Horus

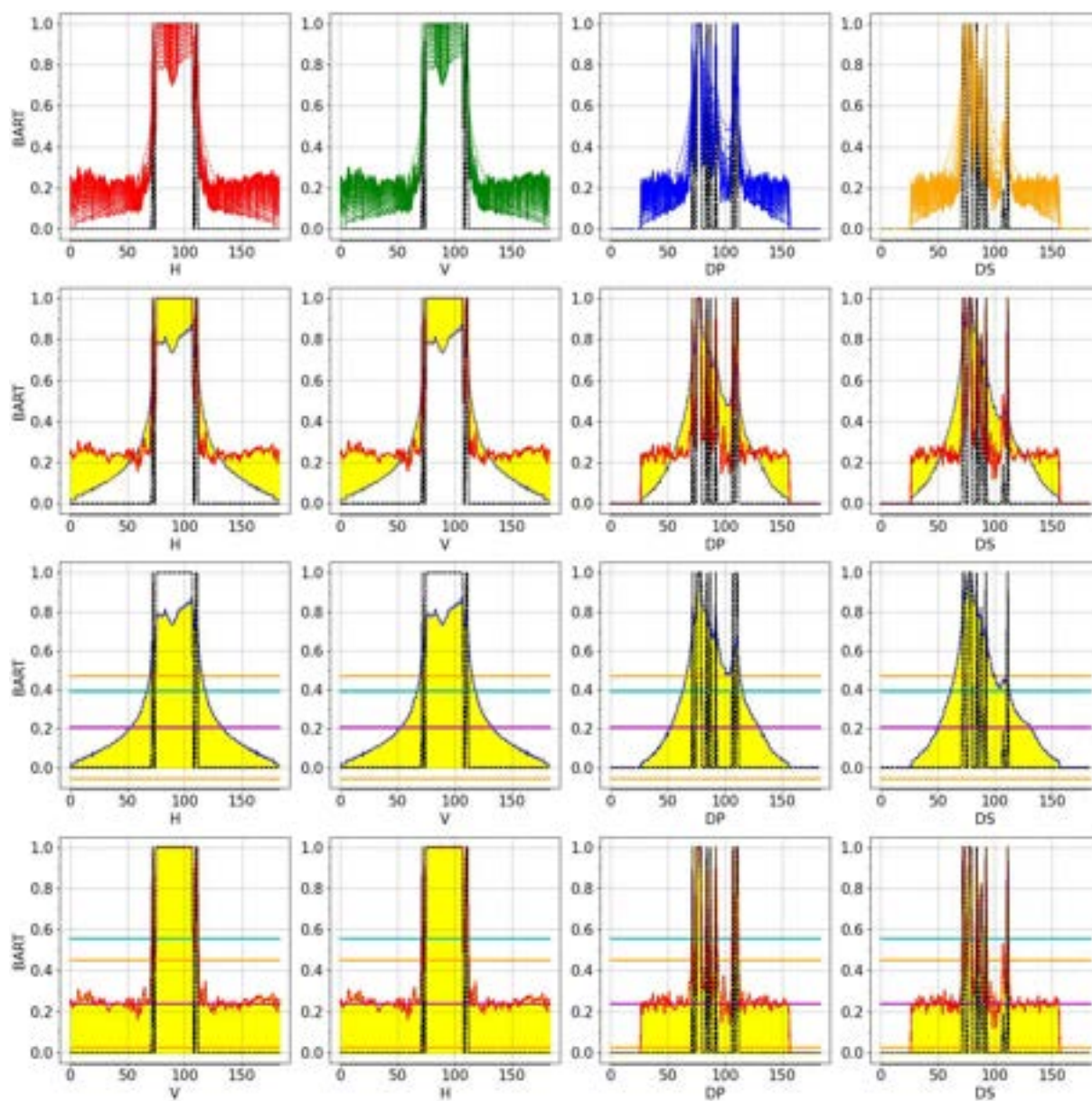


Figura 290 - Cortes BART com Original Horus

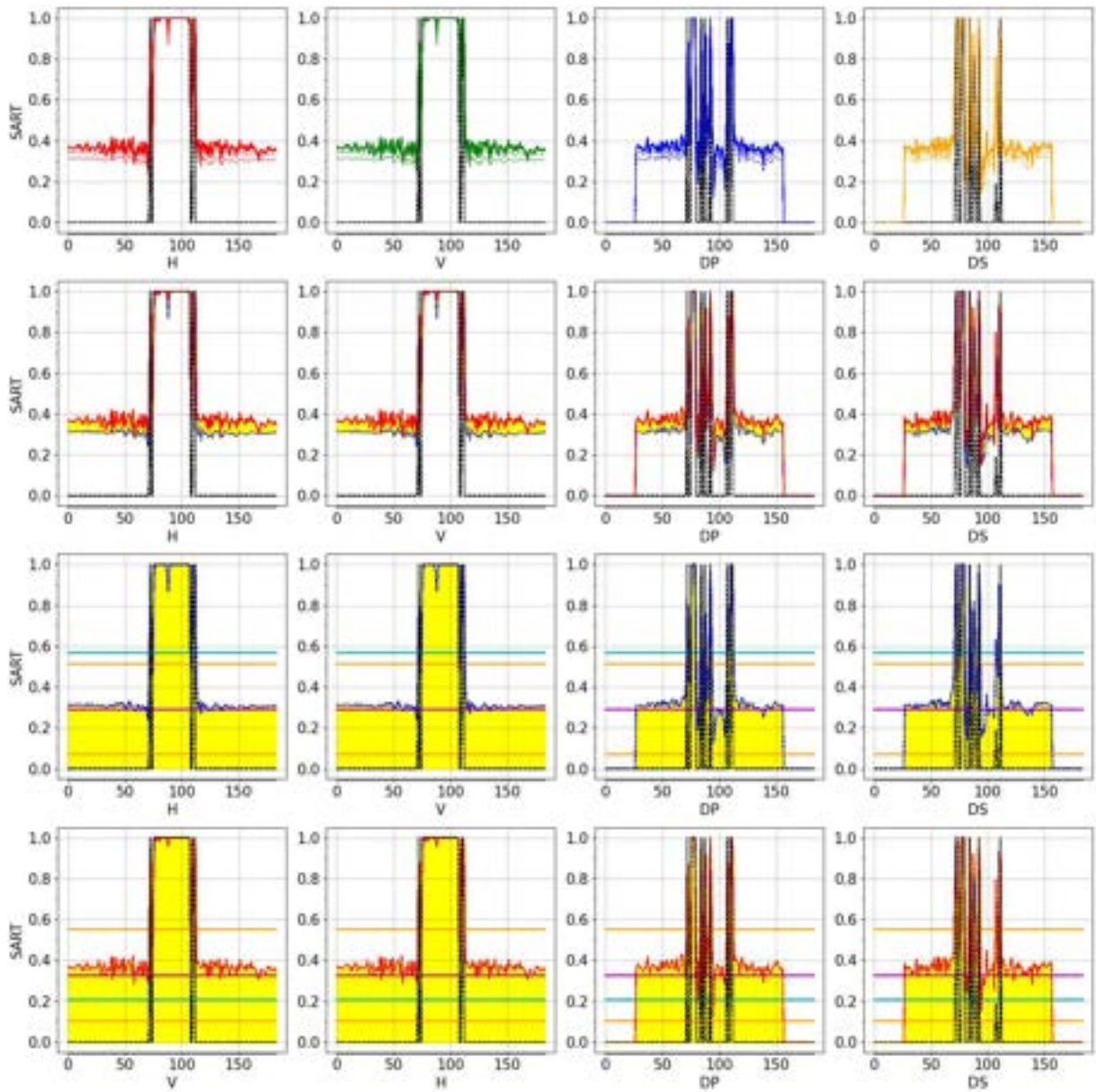


Figura 291 - Cortes SART com Original Horus

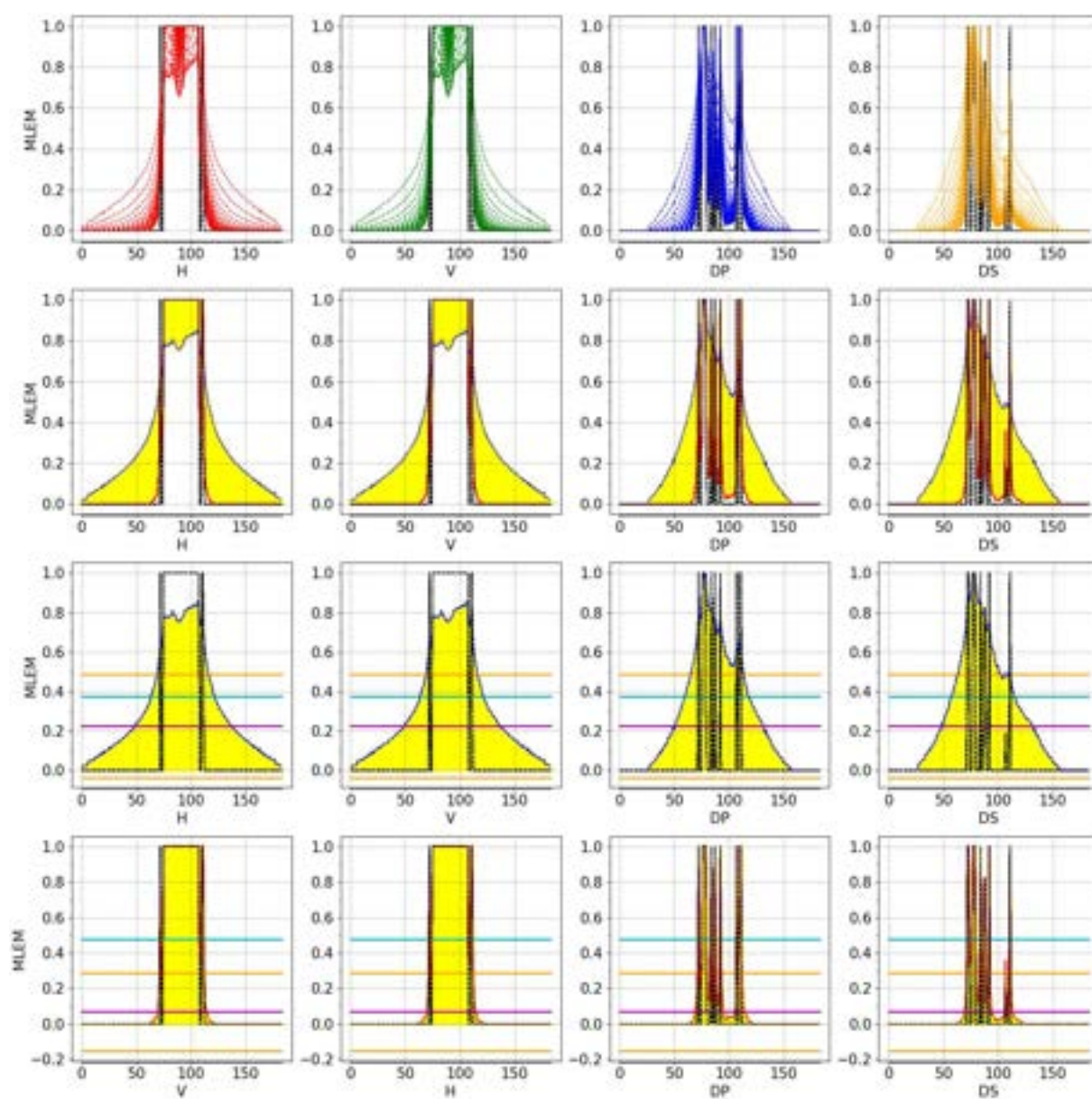


Figura 292 - Cortes MLEM com Original Horus

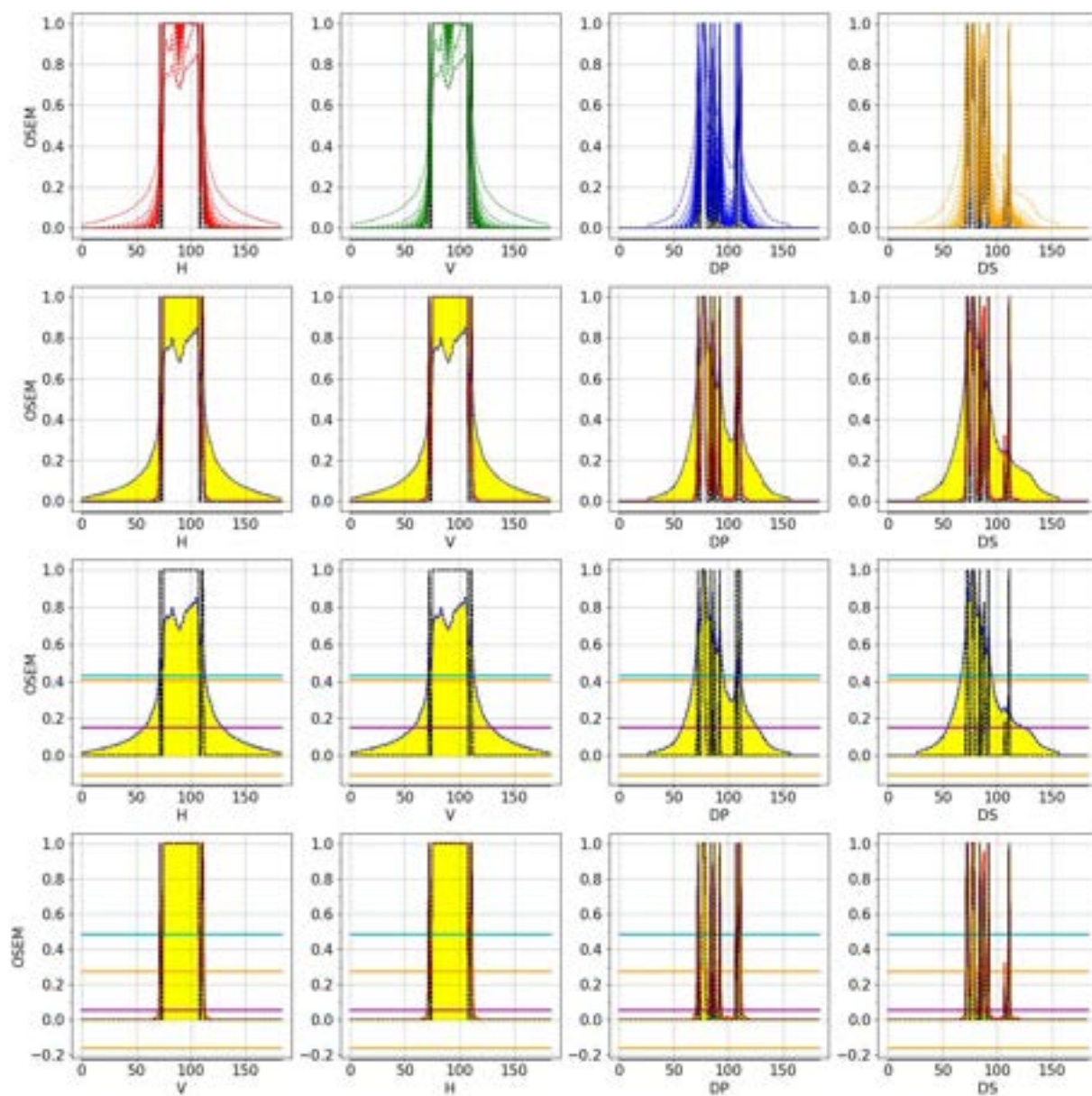


Figura 293 - Cortes OSEM com Original Horus

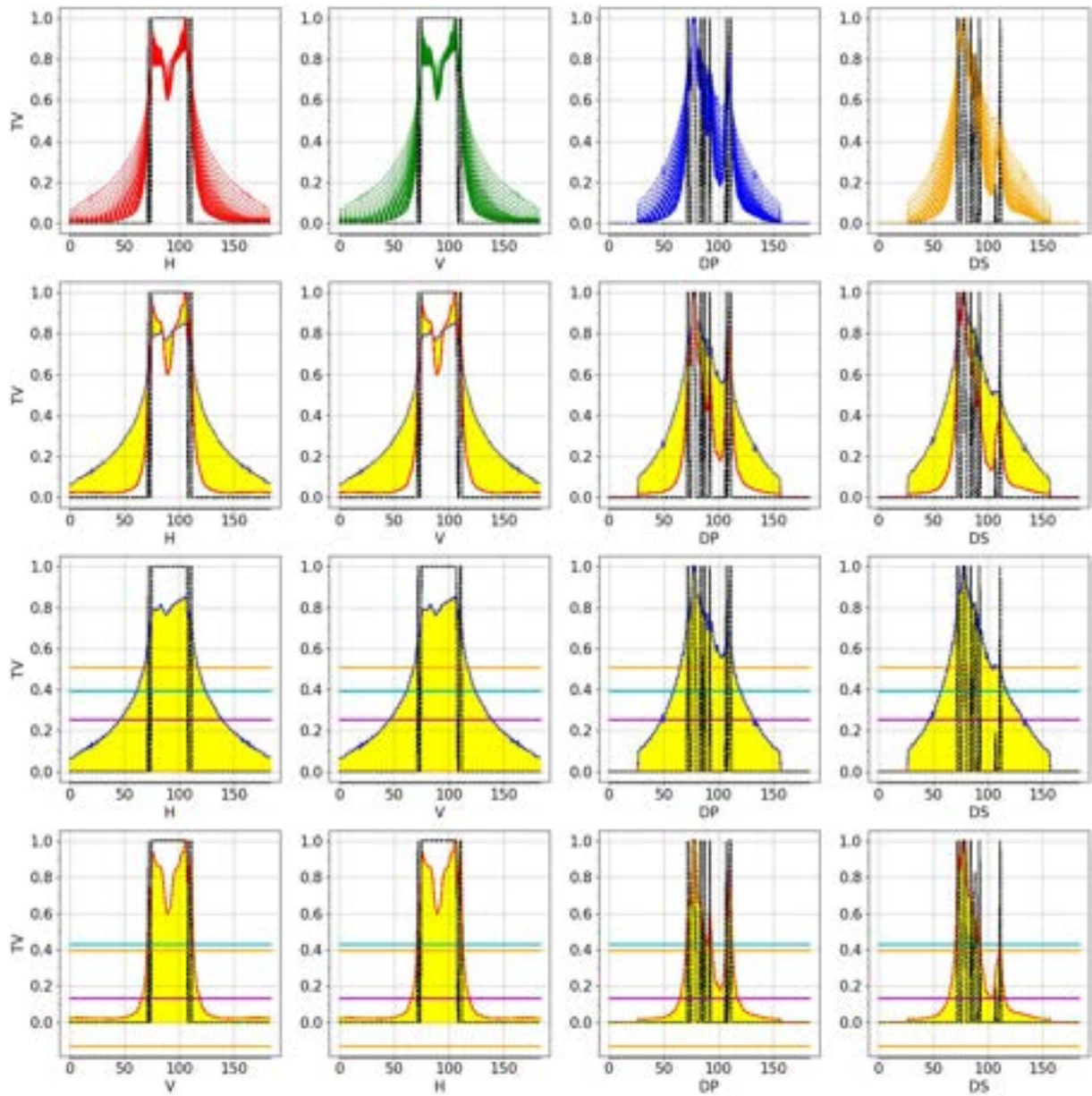


Figura 294 - Cortes TV com Original Horus

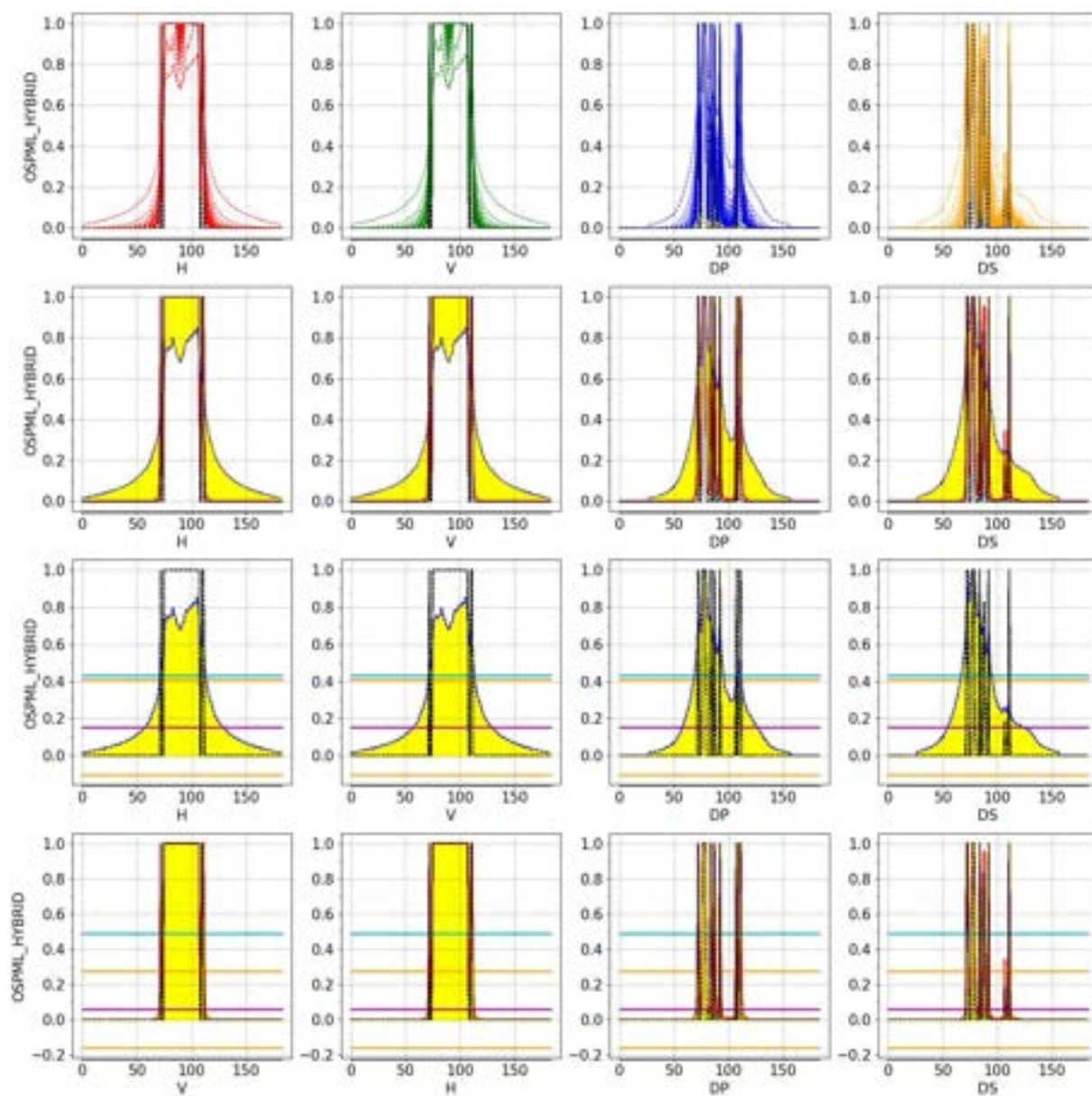


Figura 295 - Cortes OSPML-Hybrid com Original Horus

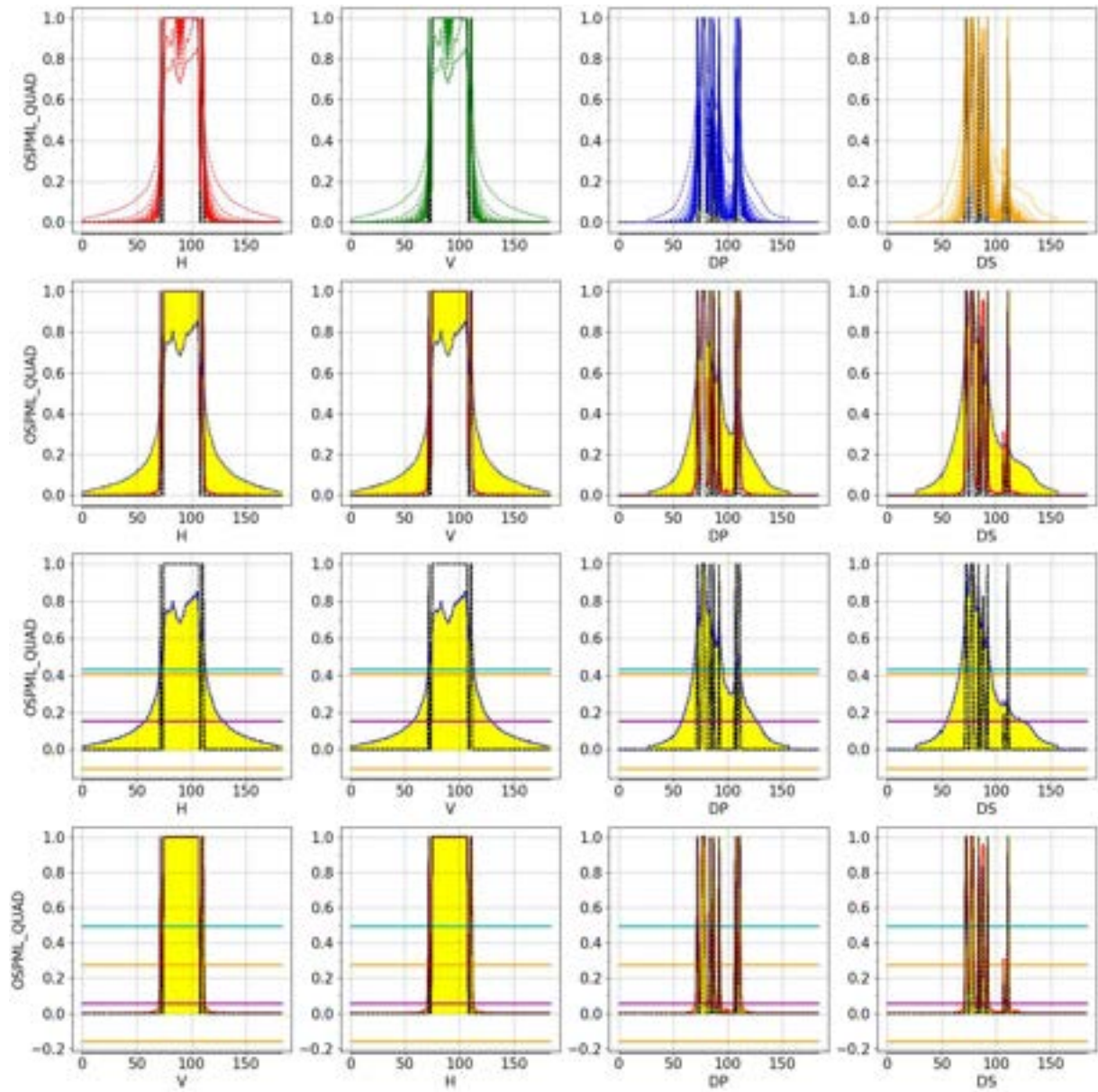


Figura 296 - Cortes OSPML-Quad com Original Horus

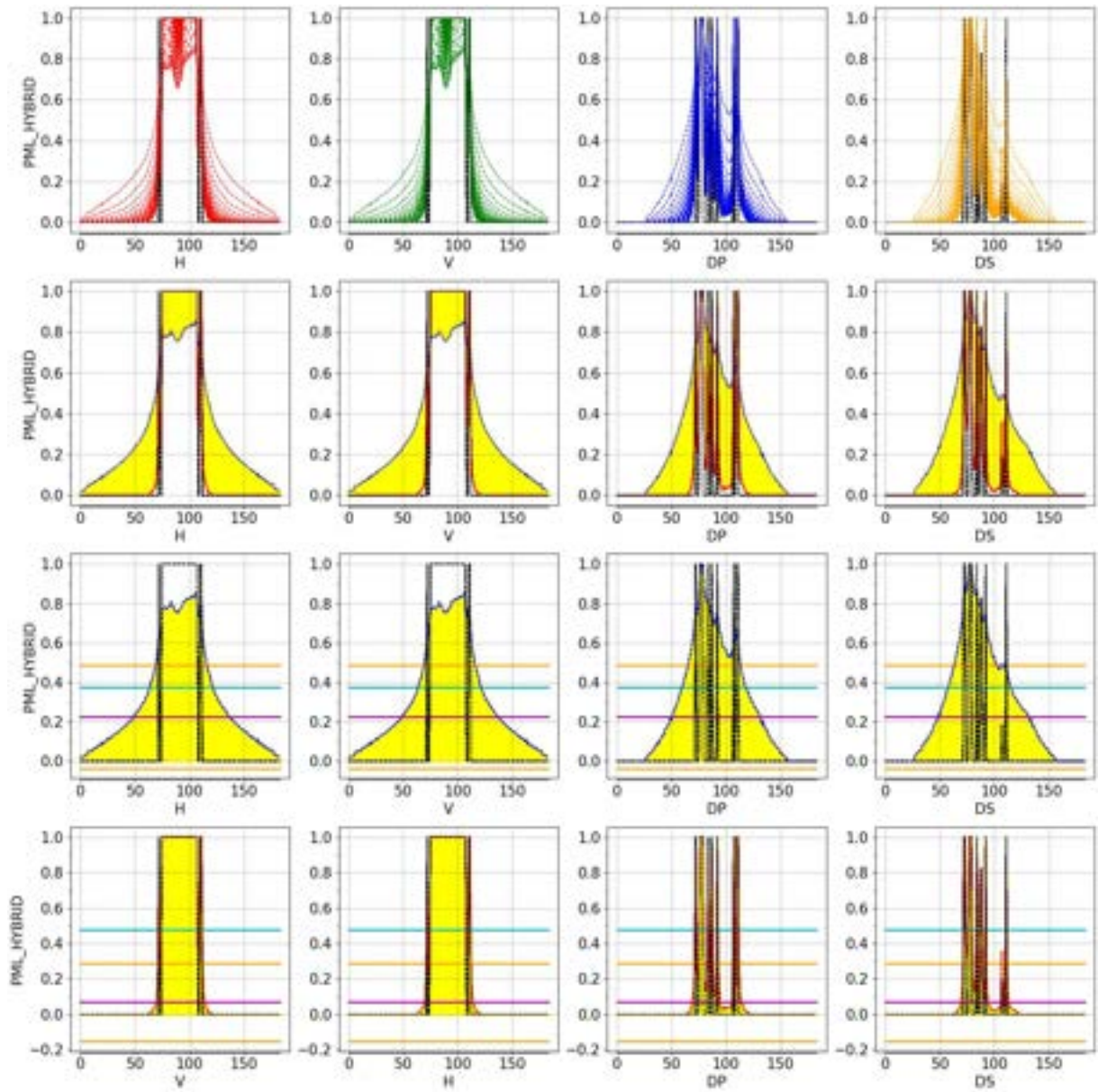


Figura 297 - Cortes PML-Hybrid com Original Horus

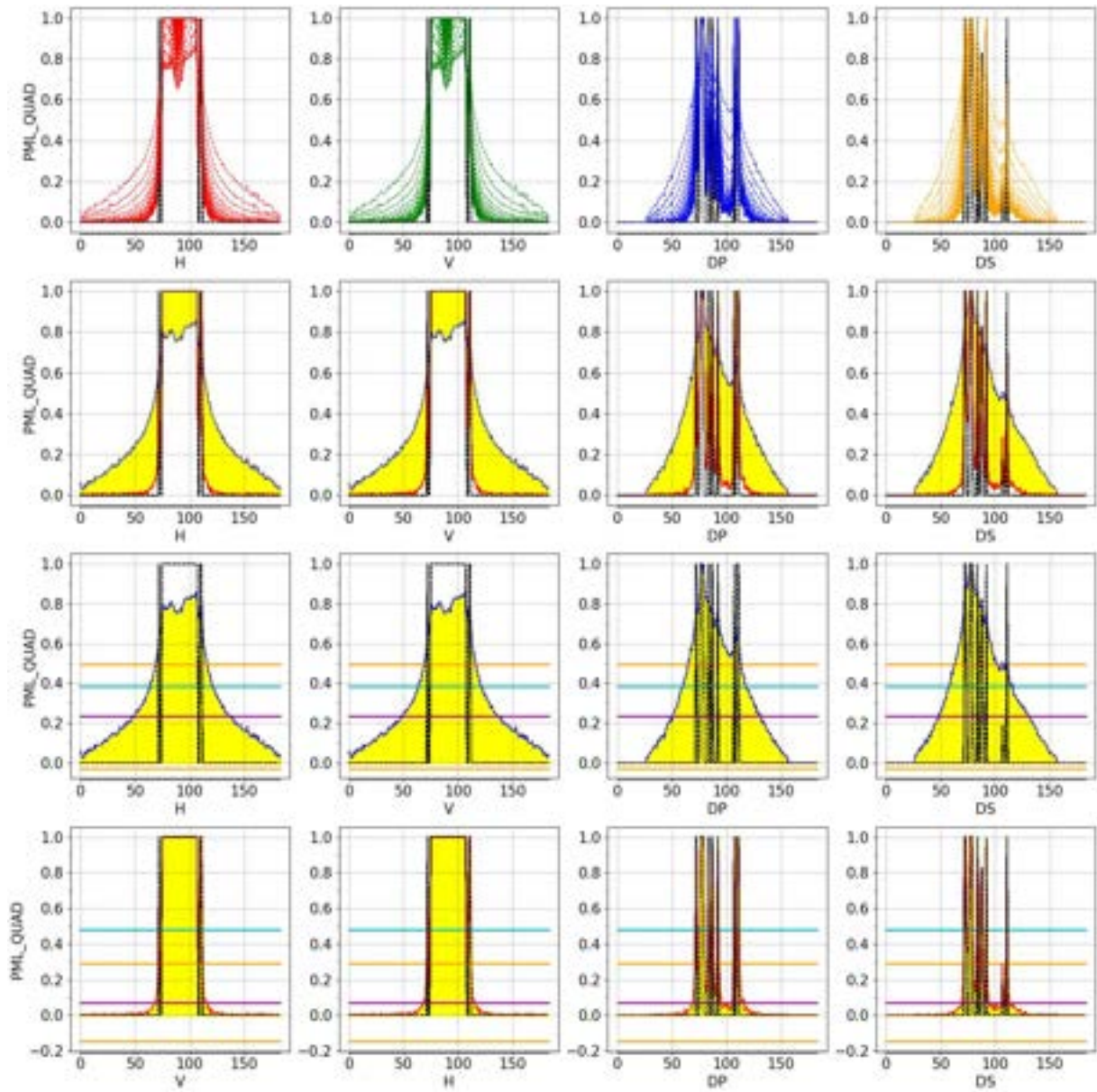


Figura 298 - Cortes PML-Quad com Original Horus

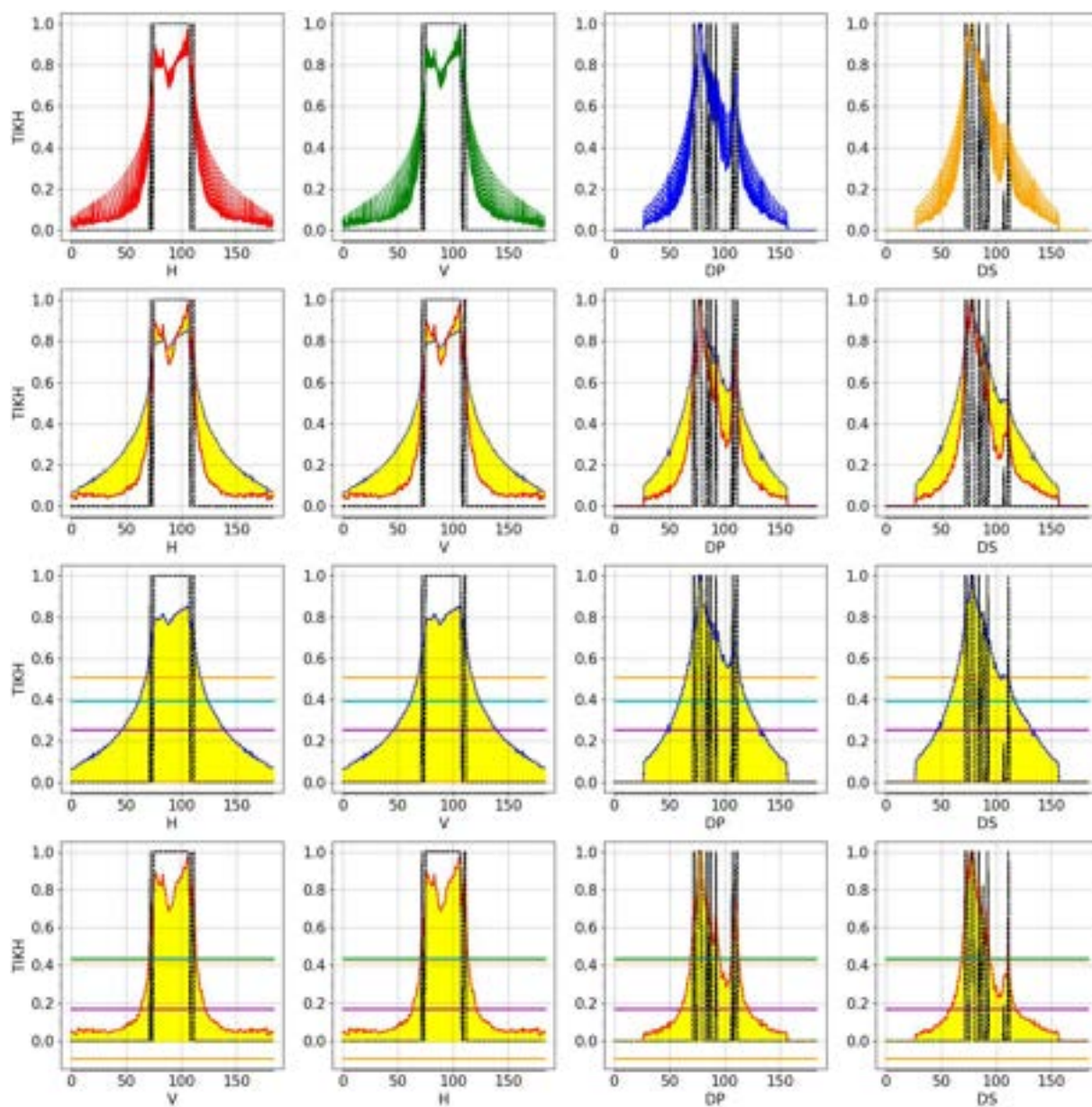


Figura 299 - Cortes TIKH com Original Horus

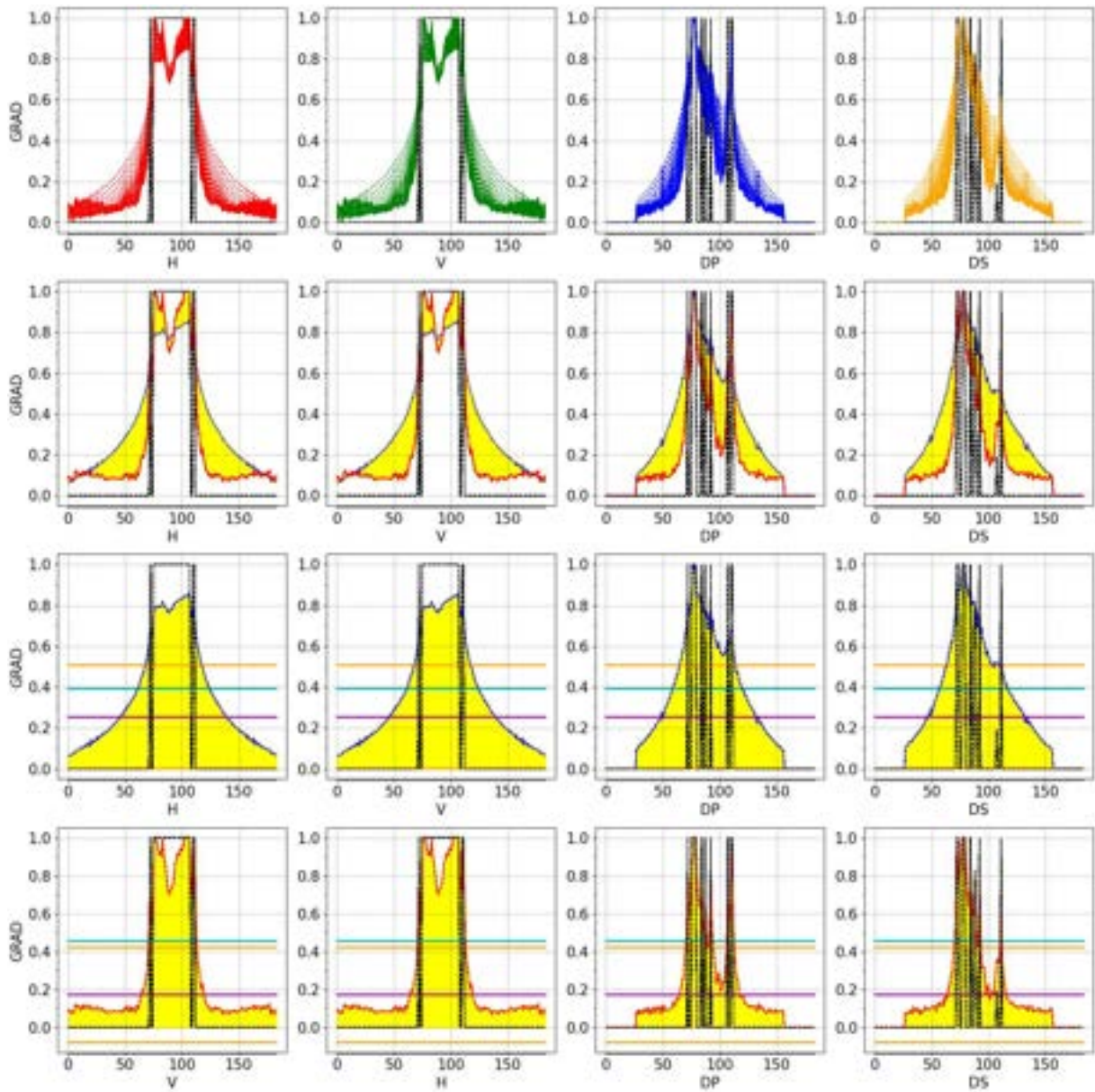


Figura 300 - Cortes GRAD com Original Horus

D.3.2 Erro Nível 5 no Objeto Horus

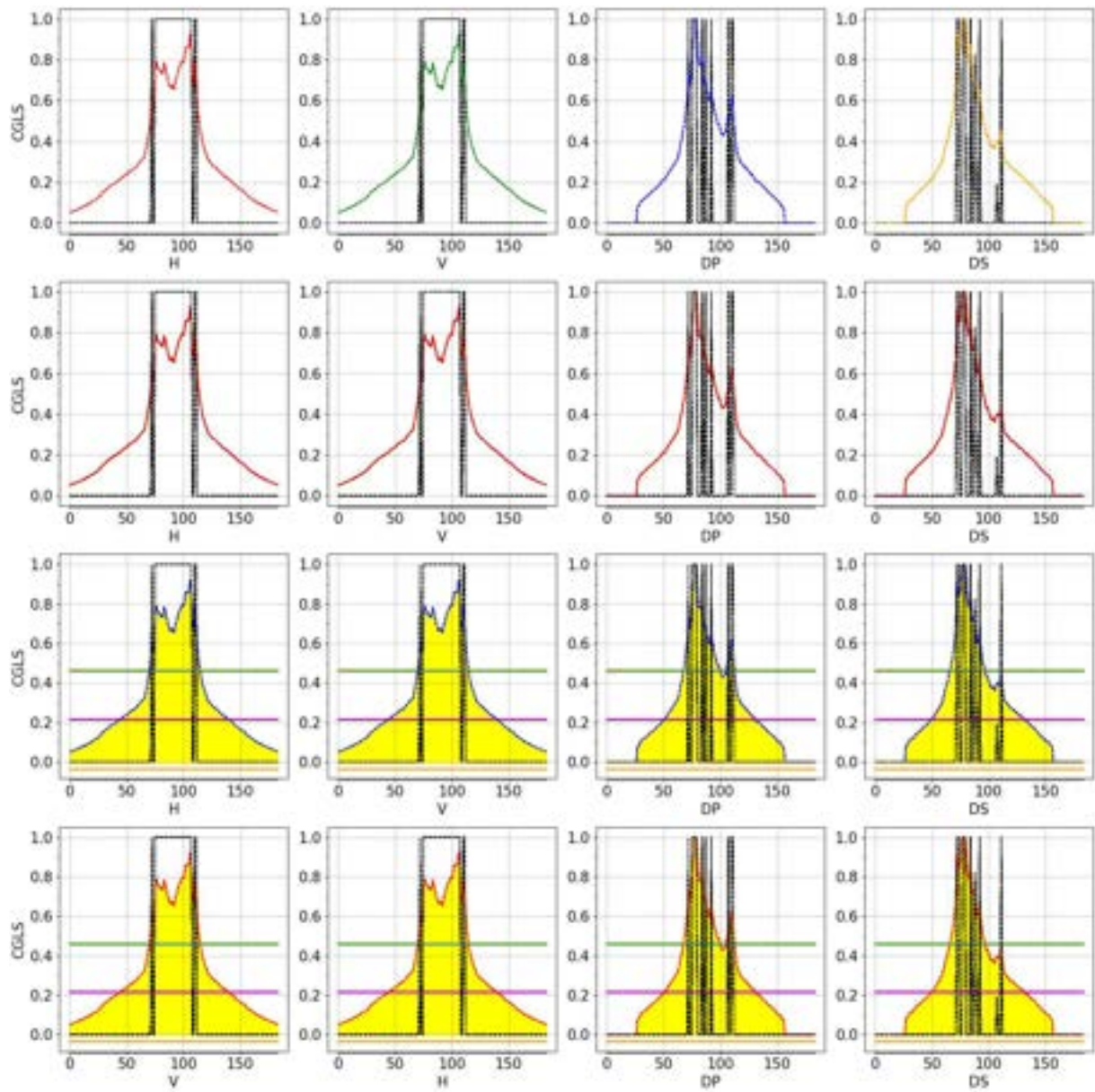


Figura 301 - Cortes CGLS com erro no Objeto Horus

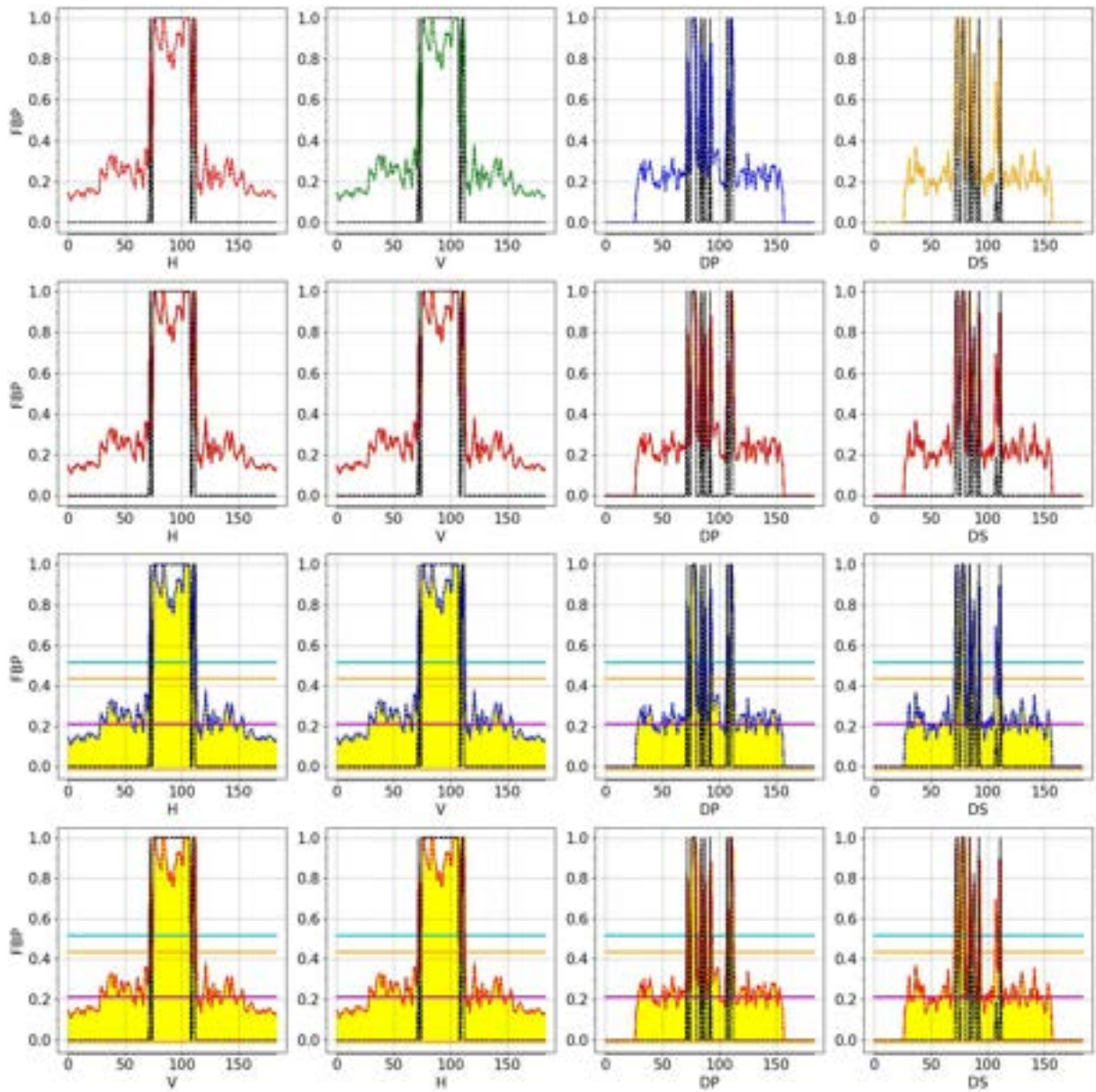


Figura 302 - Cortes FBP com erro no Objeto Horus

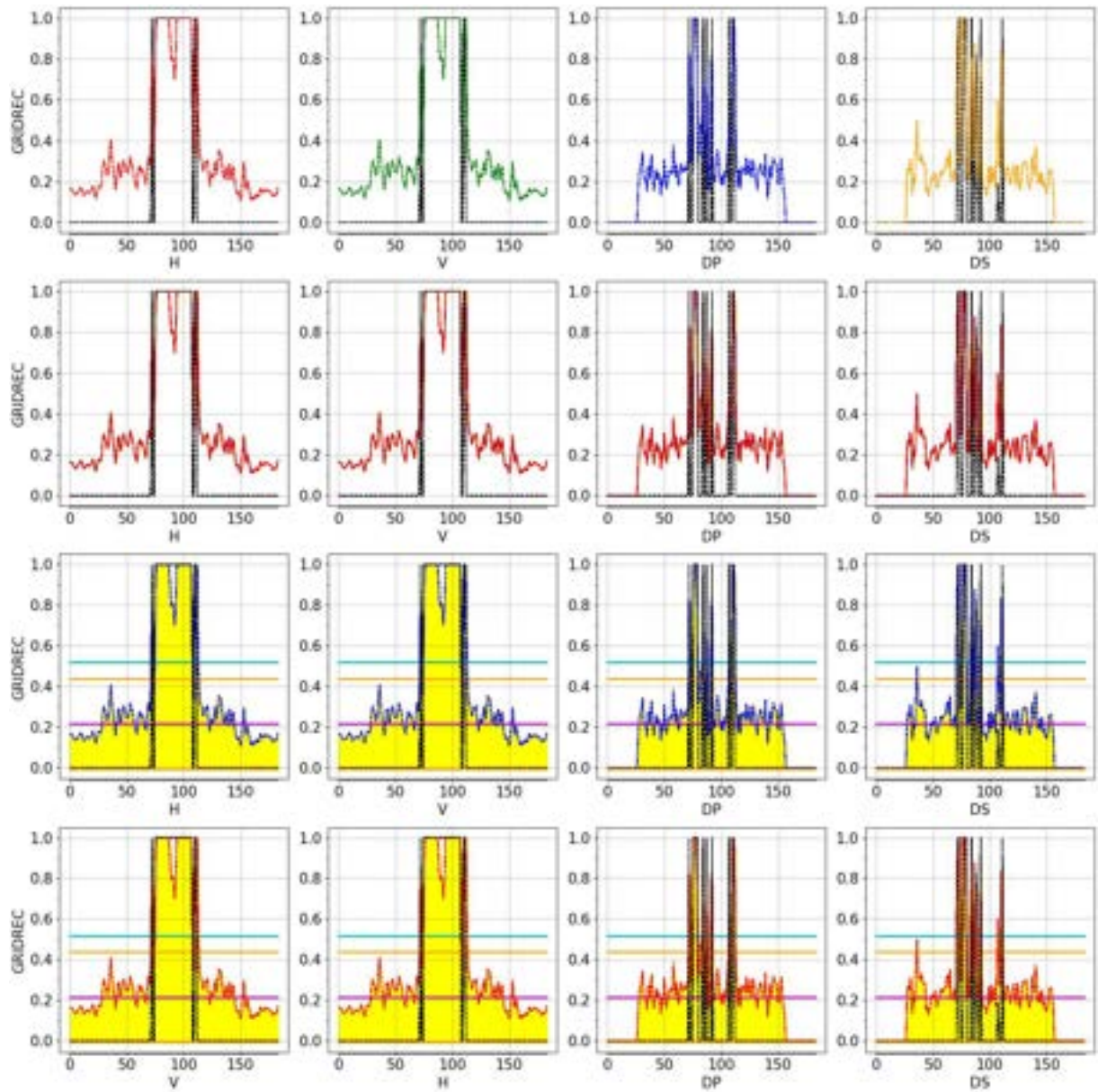


Figura 303 - Cortes GRIDREC com erro no Objeto Horus

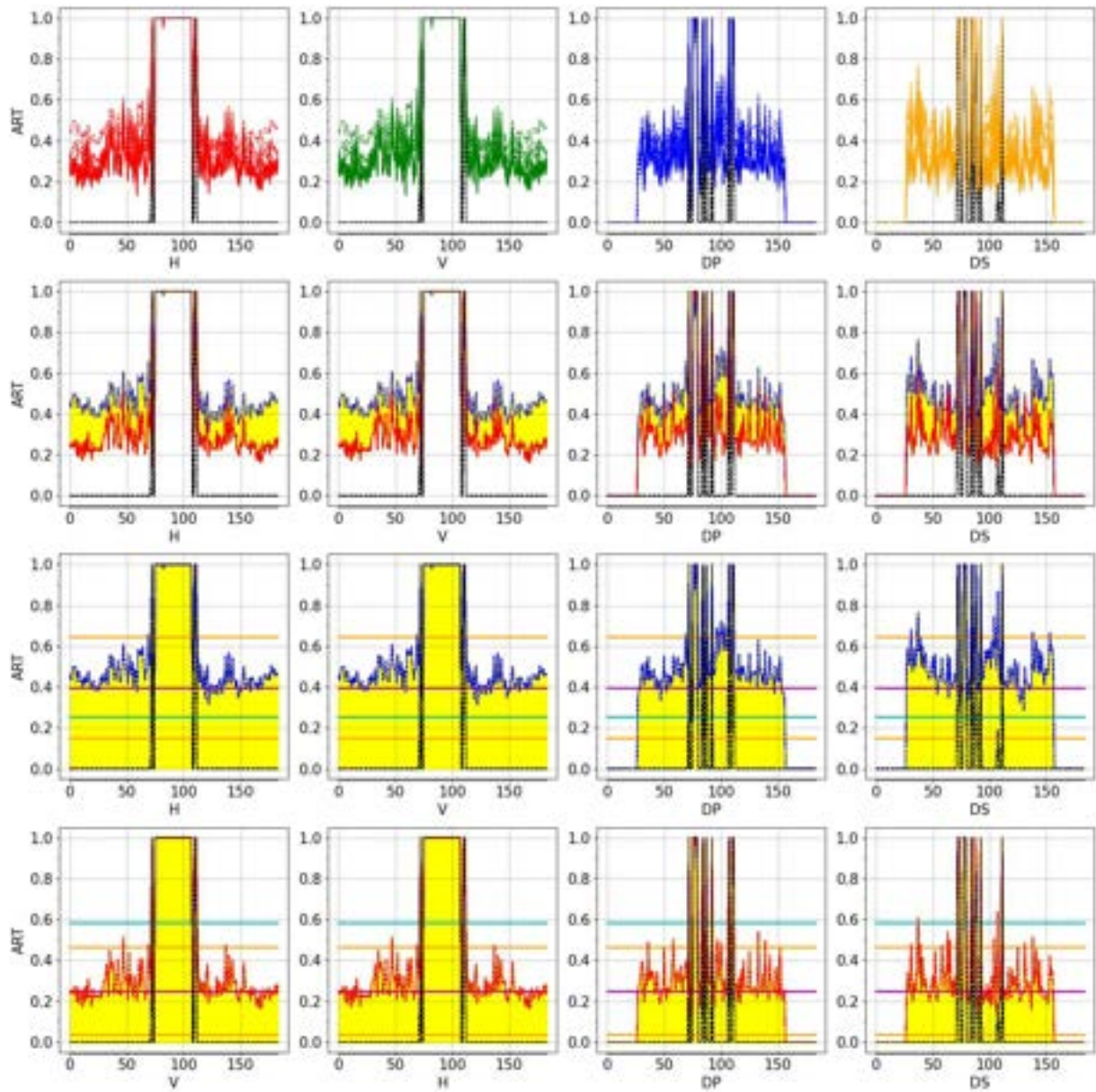


Figura 304 - Cortes ART com erro no Objeto Horus

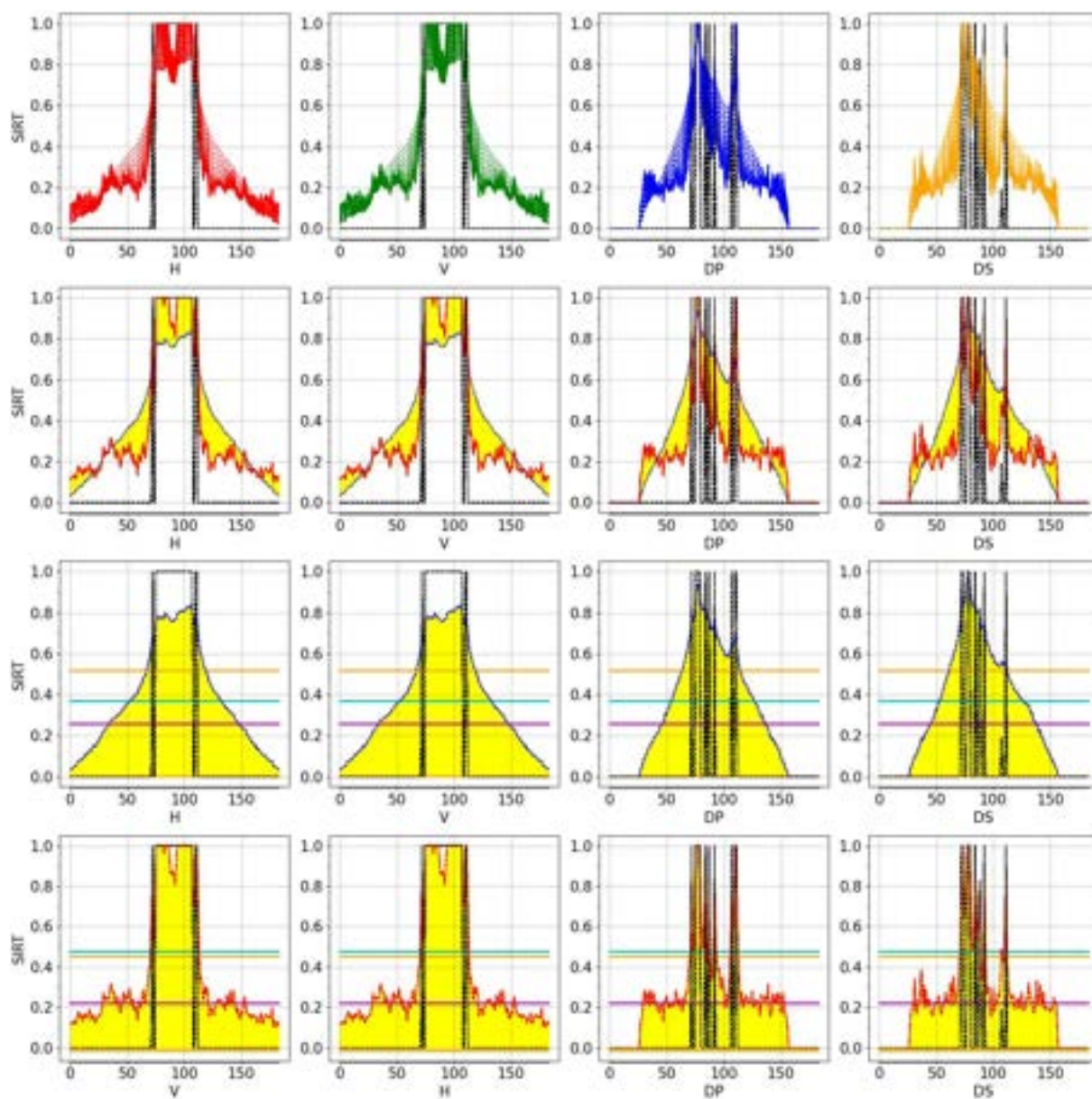


Figura 305 - Cortes SIRT com erro no Objeto Horus

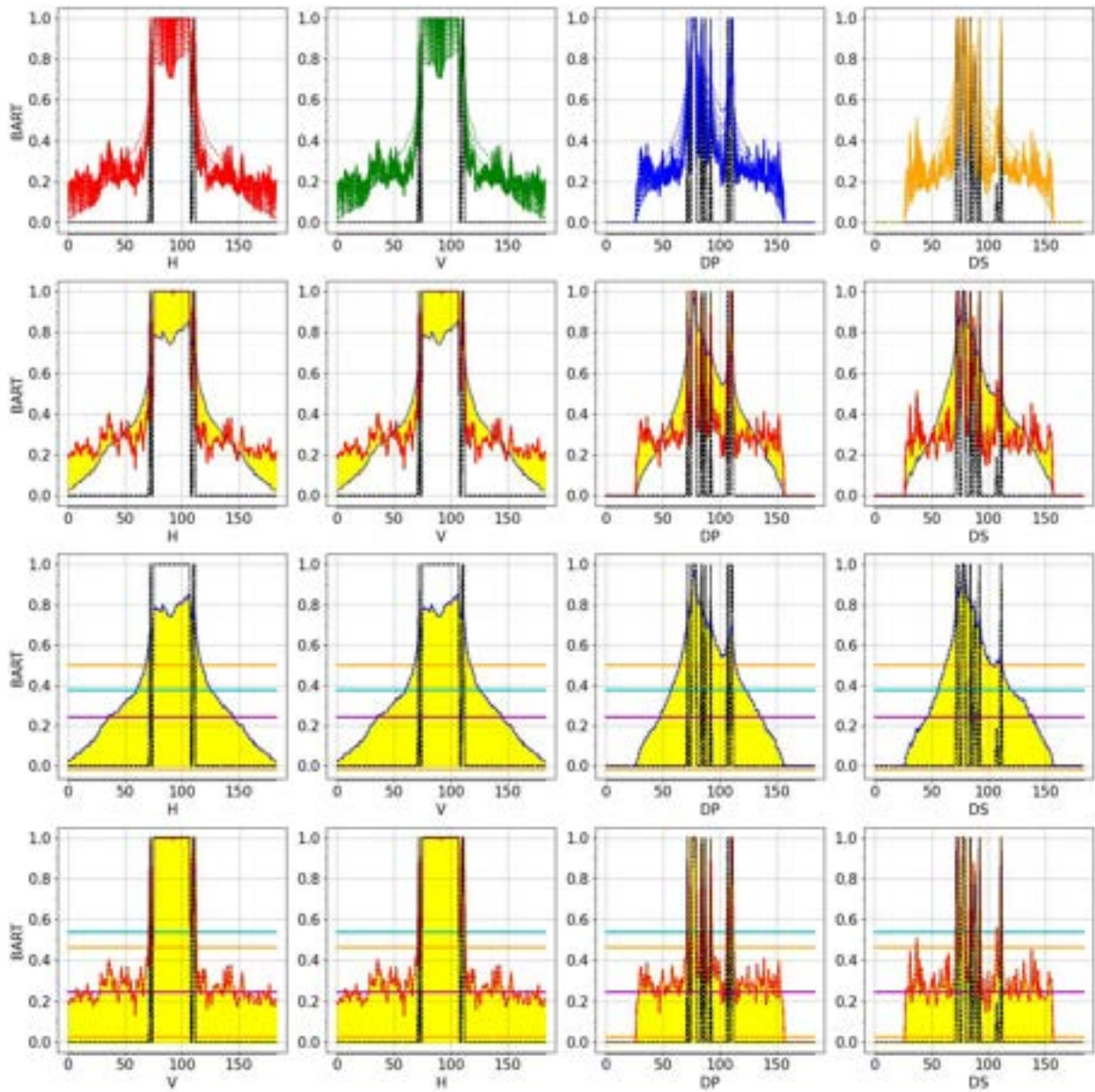


Figura 306 - Cortes BART com erro no Objeto Horus

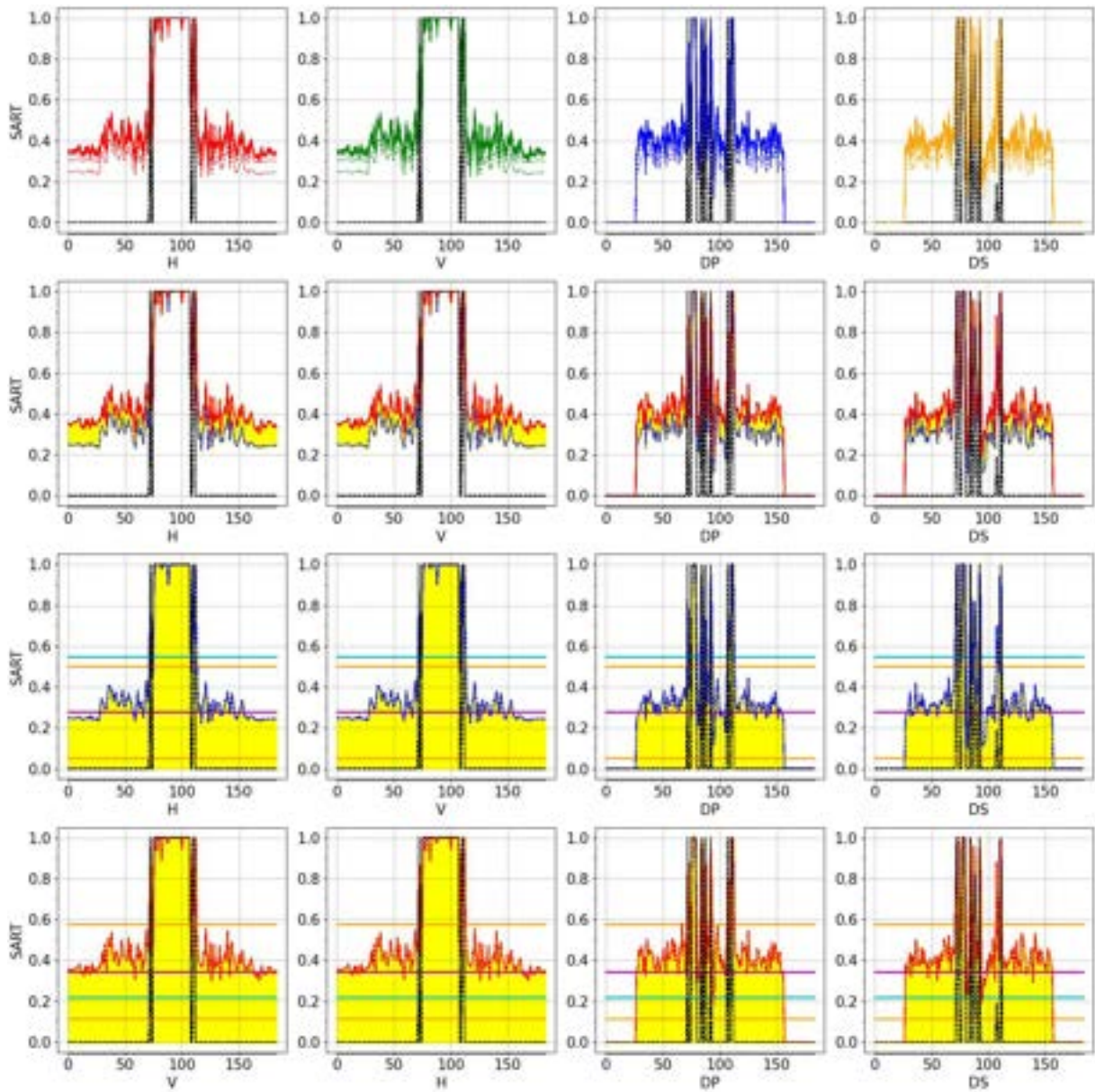


Figura 307 - Cortes SART com erro no Objeto Horus

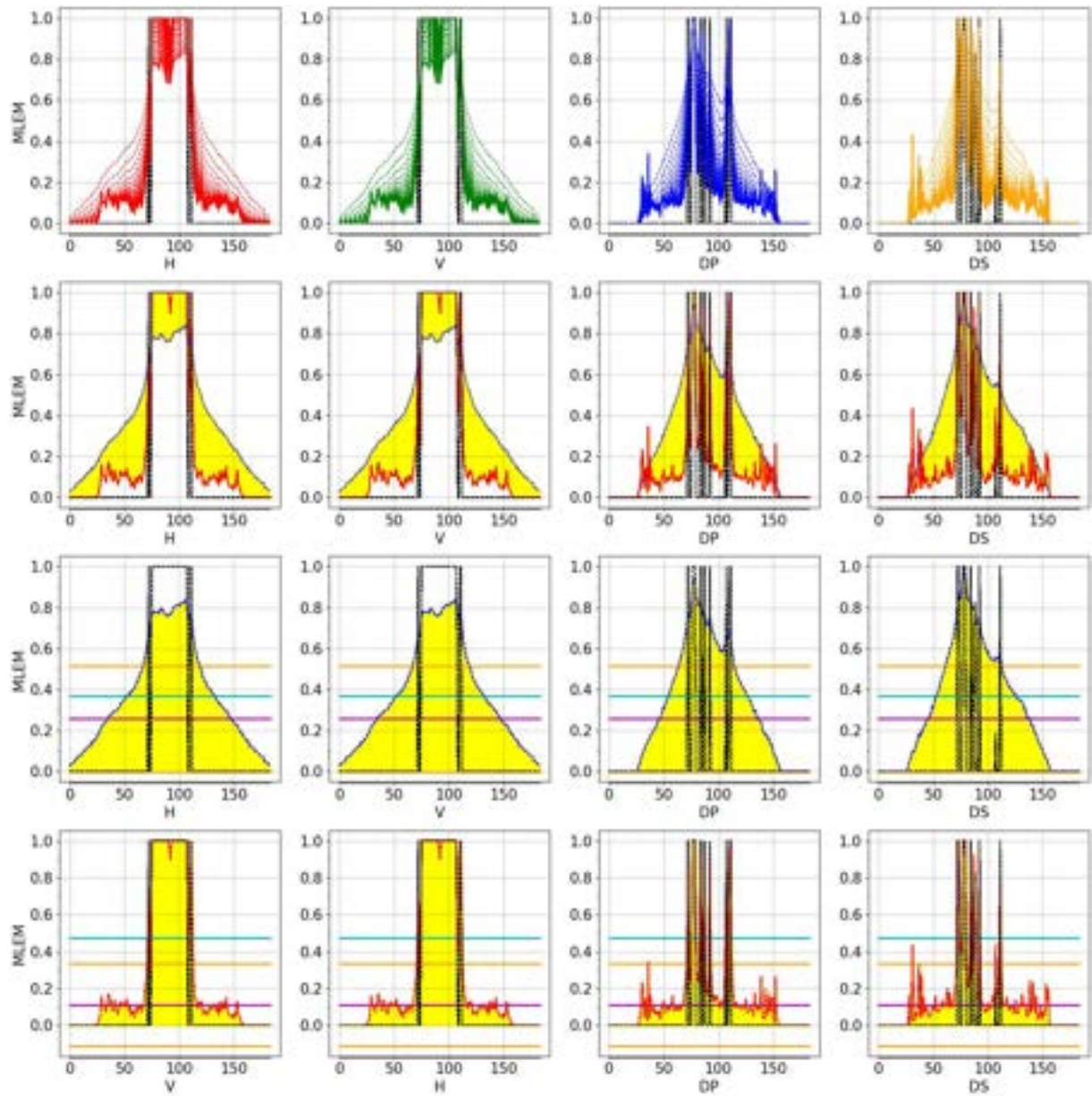


Figura 308 - Cortes MLEM com erro no Objeto Horus

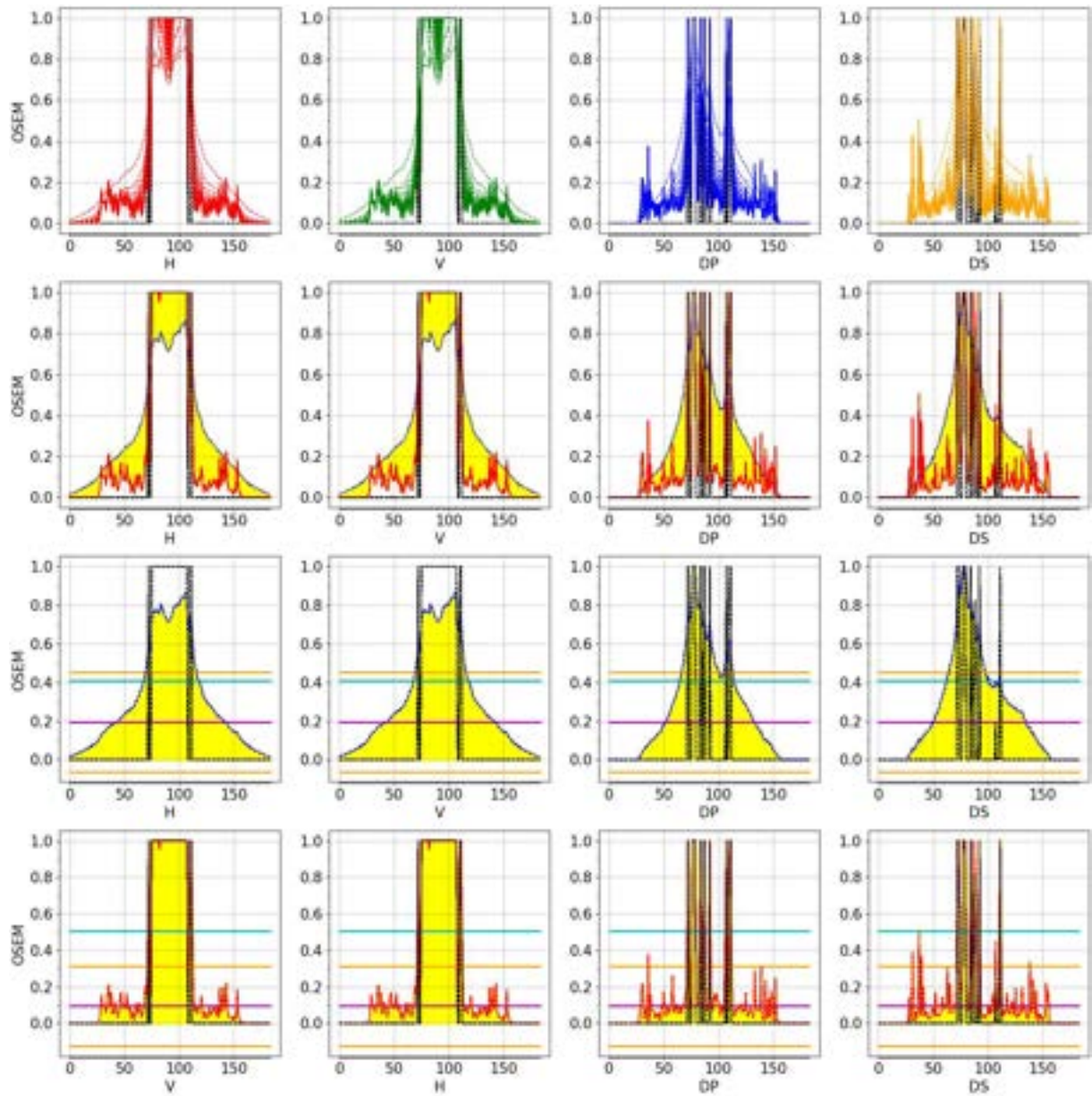


Figura 309 - Cortes OSEM com erro no Objeto Horus

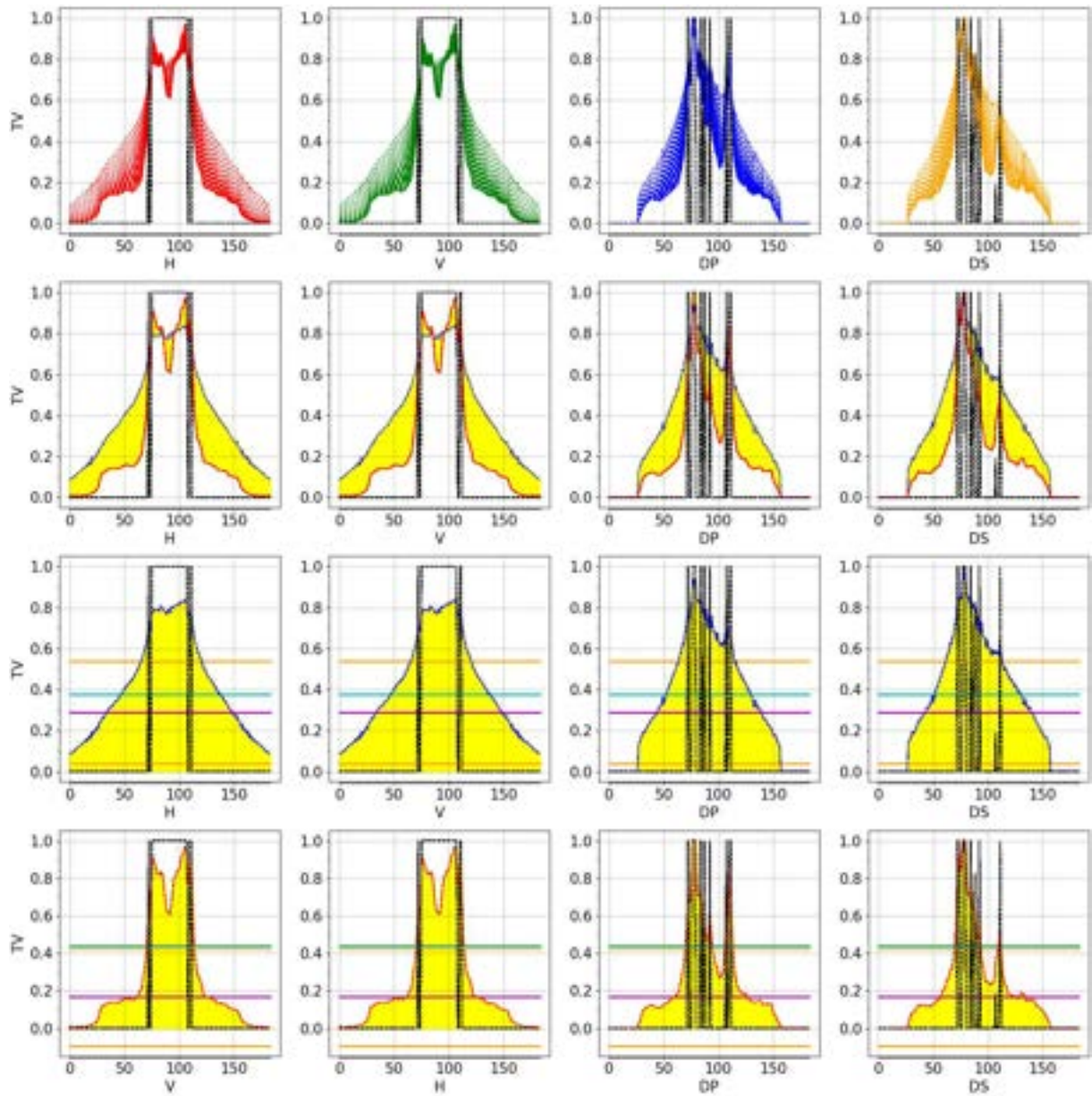


Figura 310 - Cortes TV com erro no Objeto Horus

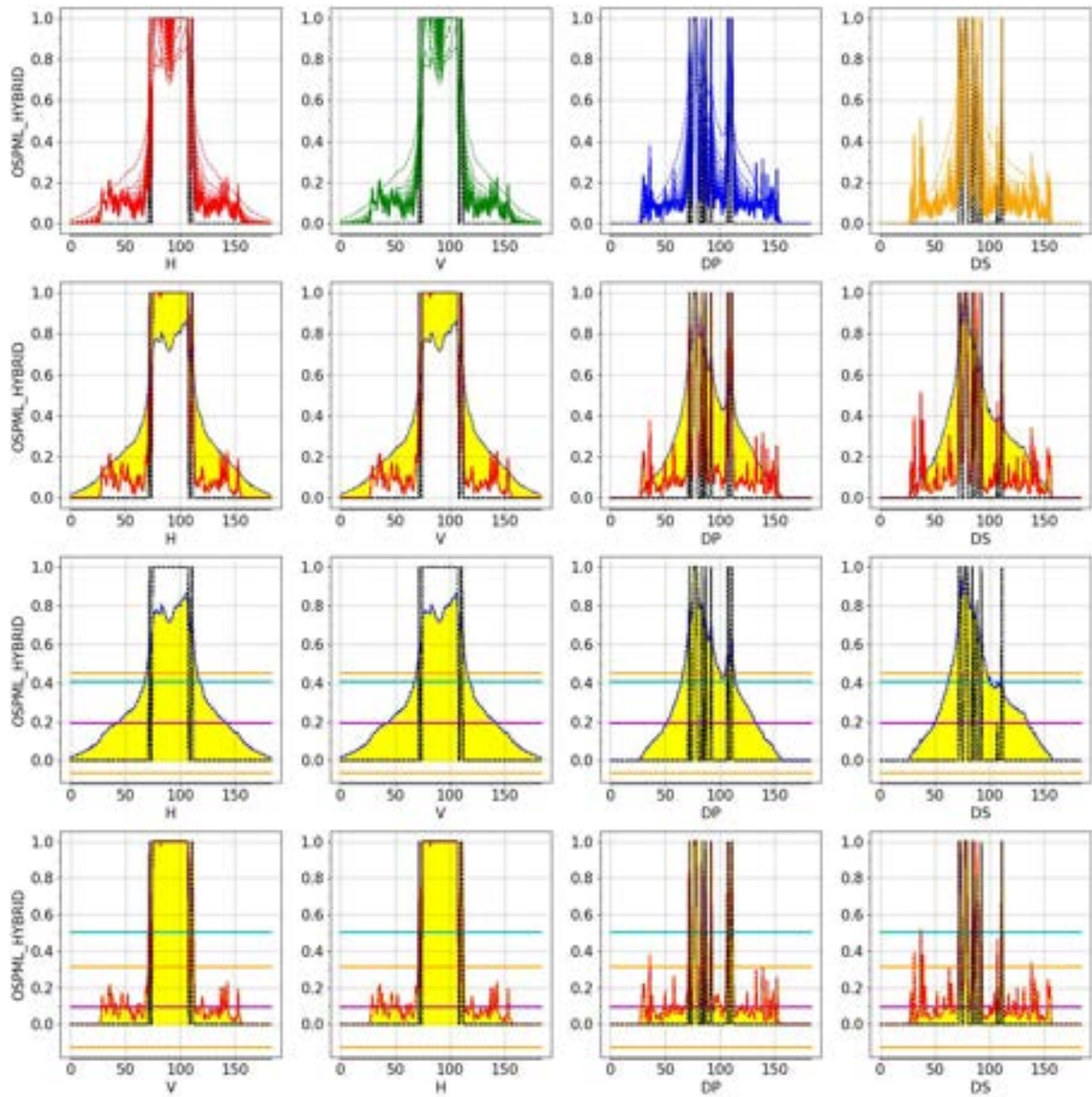


Figura 311 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Objeto Horus

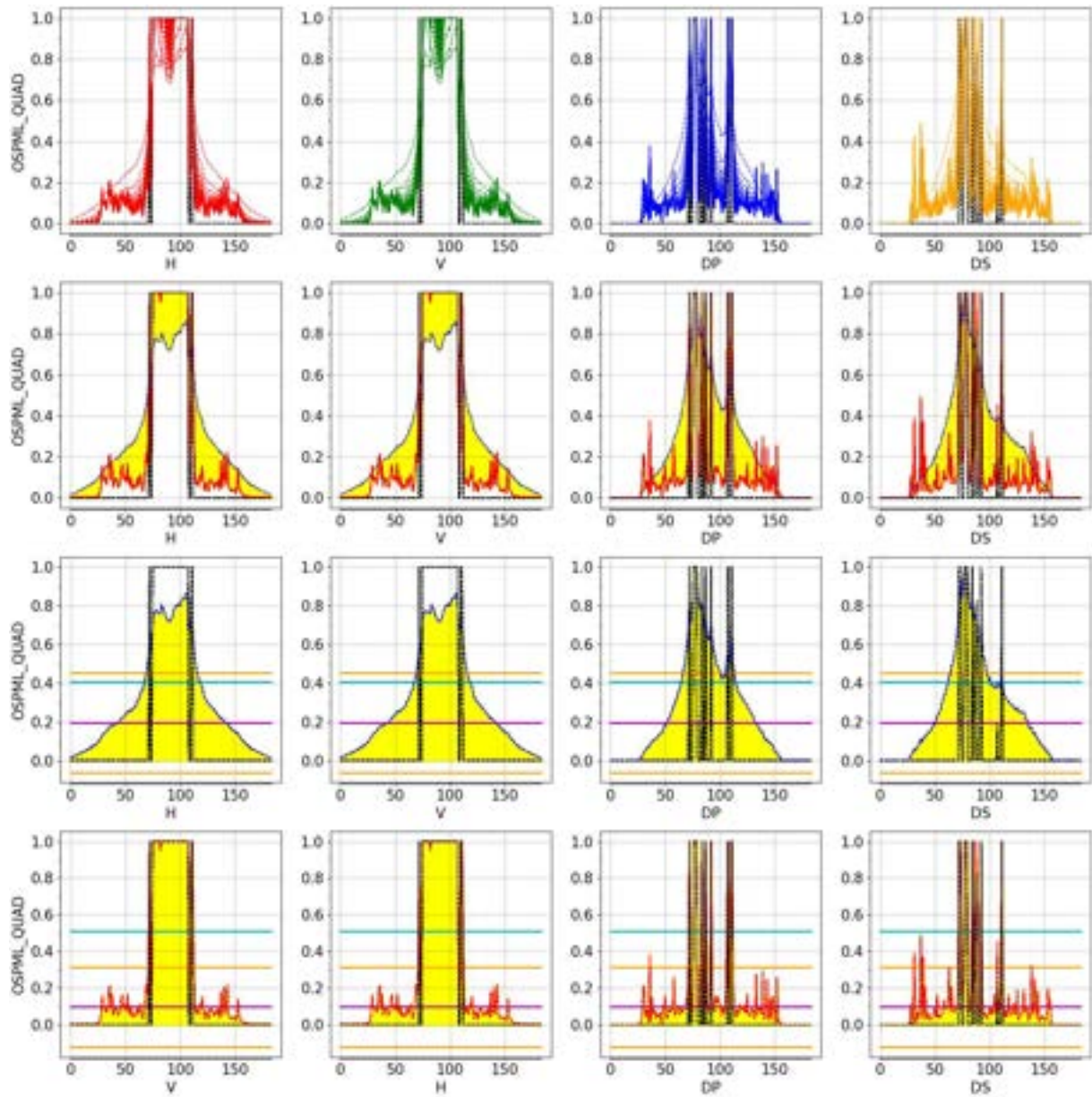


Figura 312 - Cortes OSPML-Quad com erro no Objeto Horus

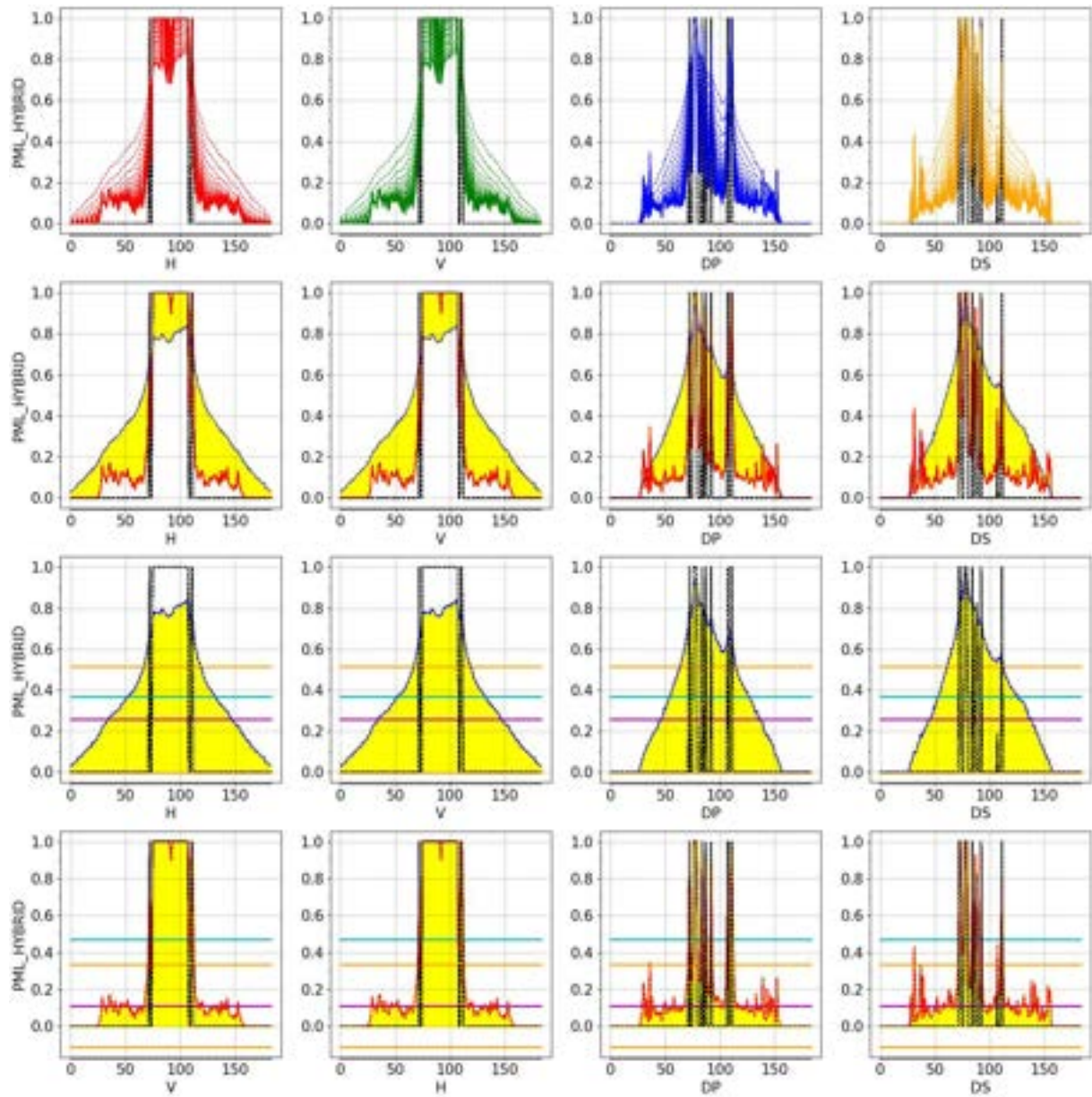


Figura 313 - Cortes PML-Hybrid com erro no Objeto Horus

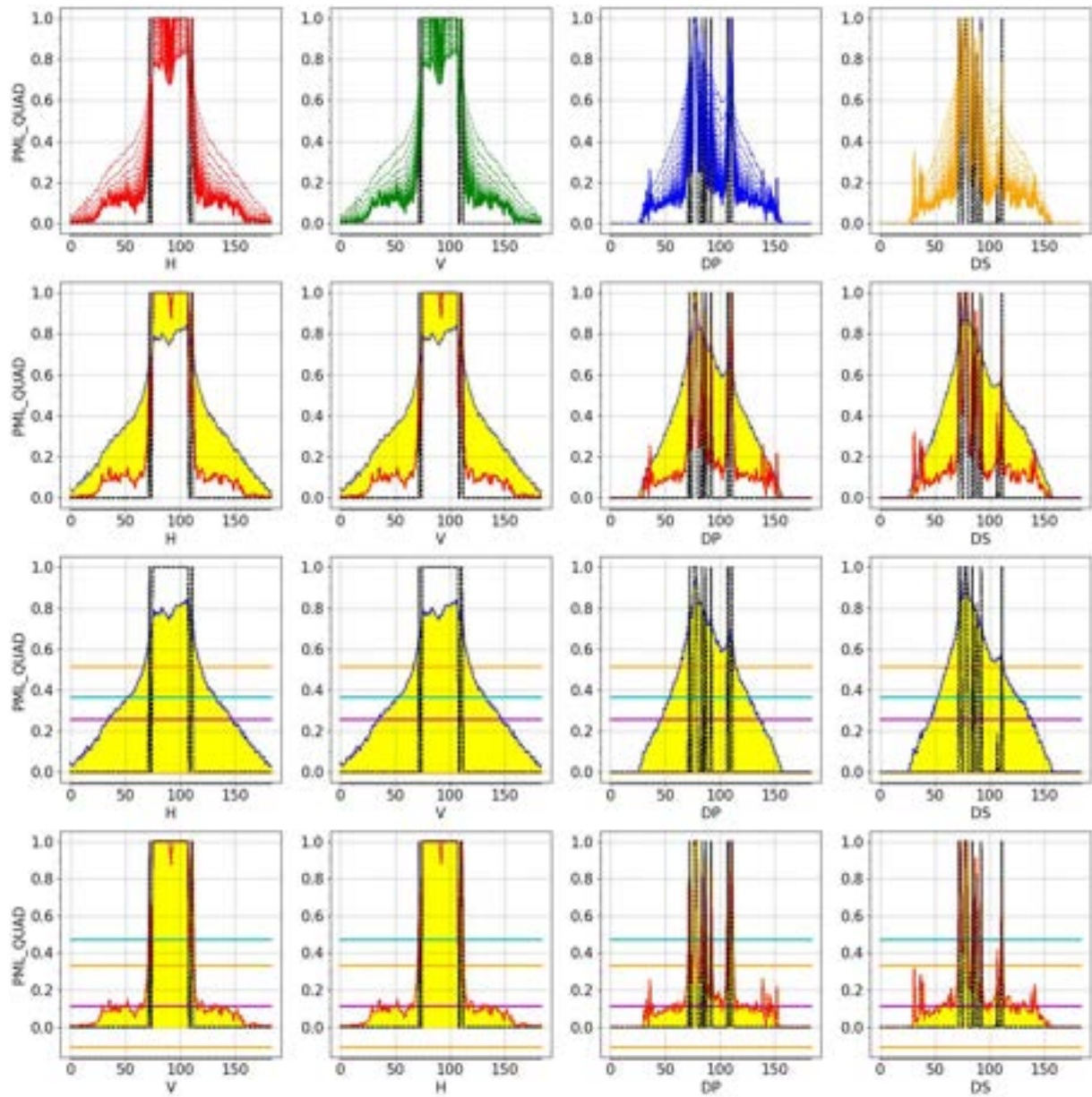


Figura 314 - Cortes PML-Quad com erro no Objeto Horus

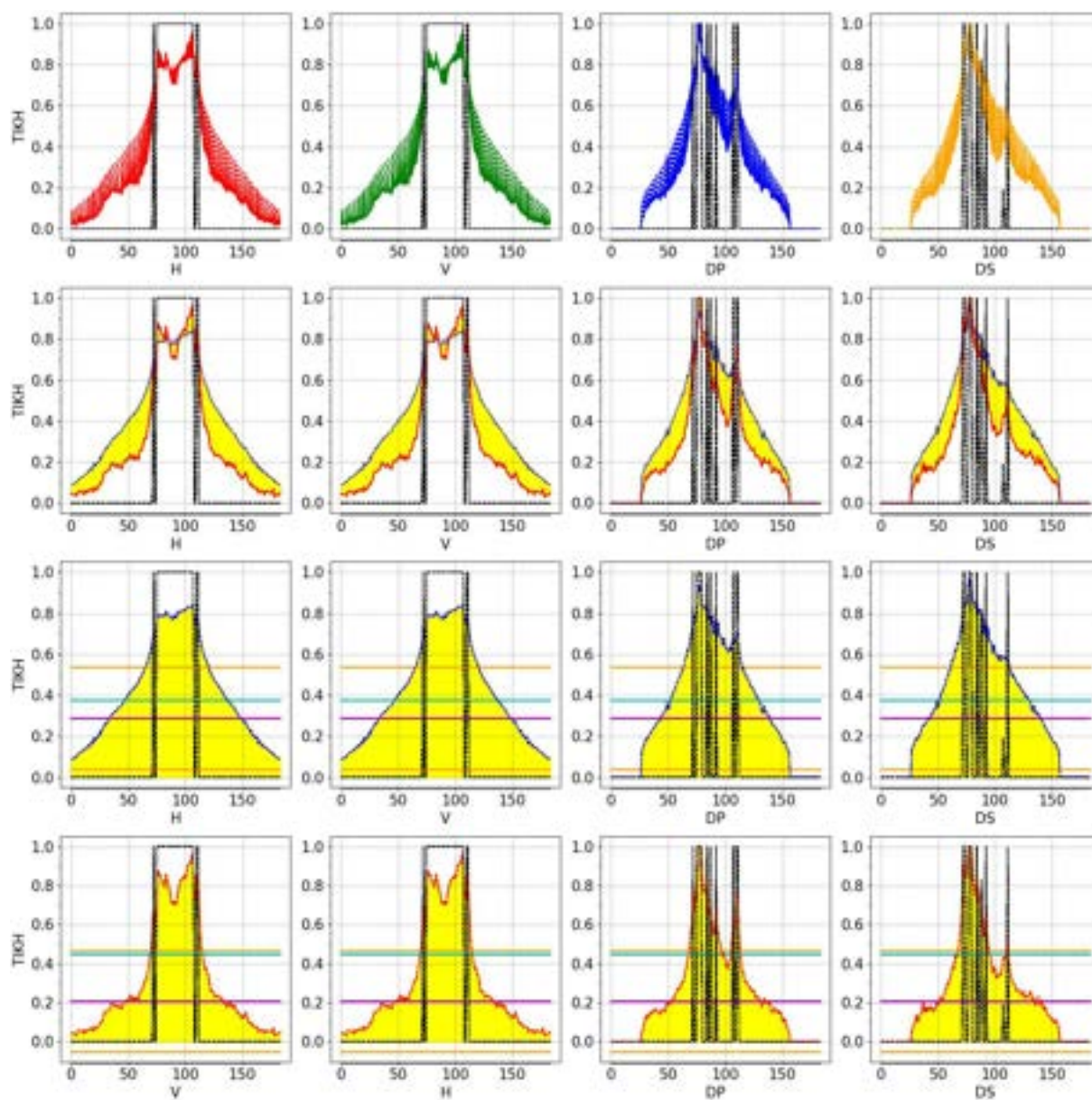


Figura 315 - Cortes TIKH com erro no Objeto Horus

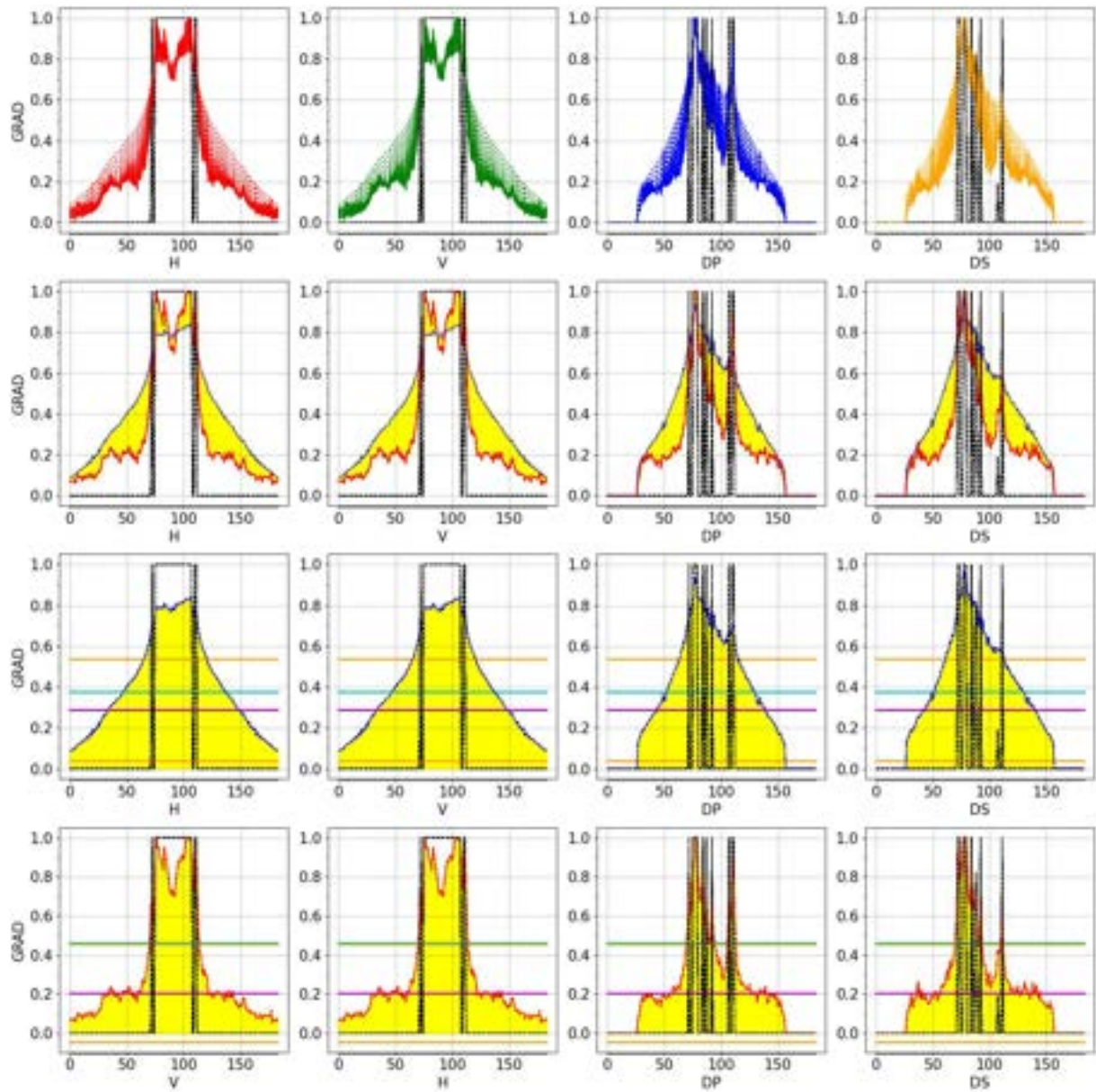


Figura 316 - Cortes GRAD com erro no Objeto Horus

D.3.3 Erro Nível 5 no Sinograma Horus

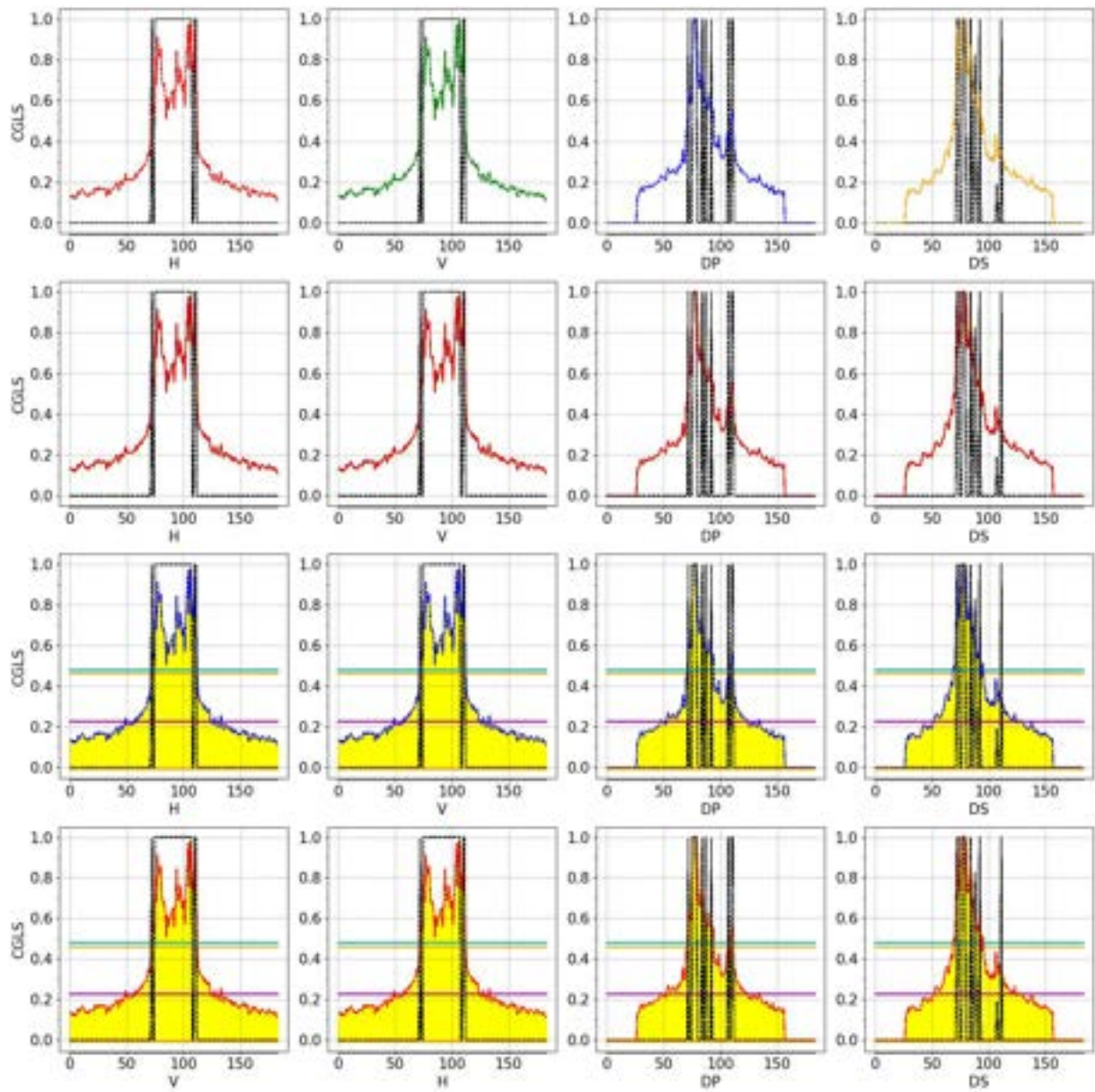


Figura 317 - Cortes CGLS com erro no Sinograma Horus

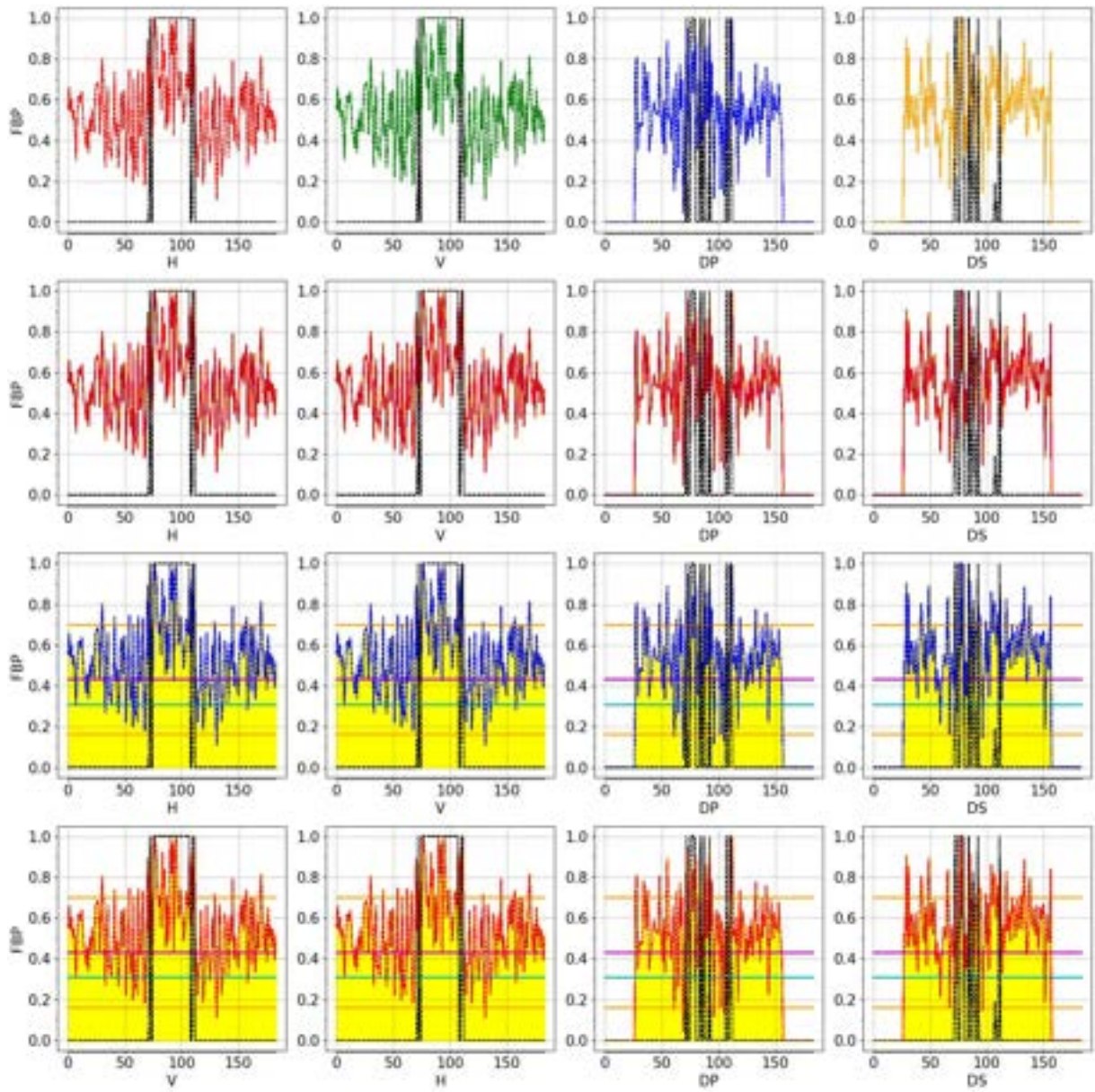


Figura 318 - Cortes FBP com erro no Sinograma Horus

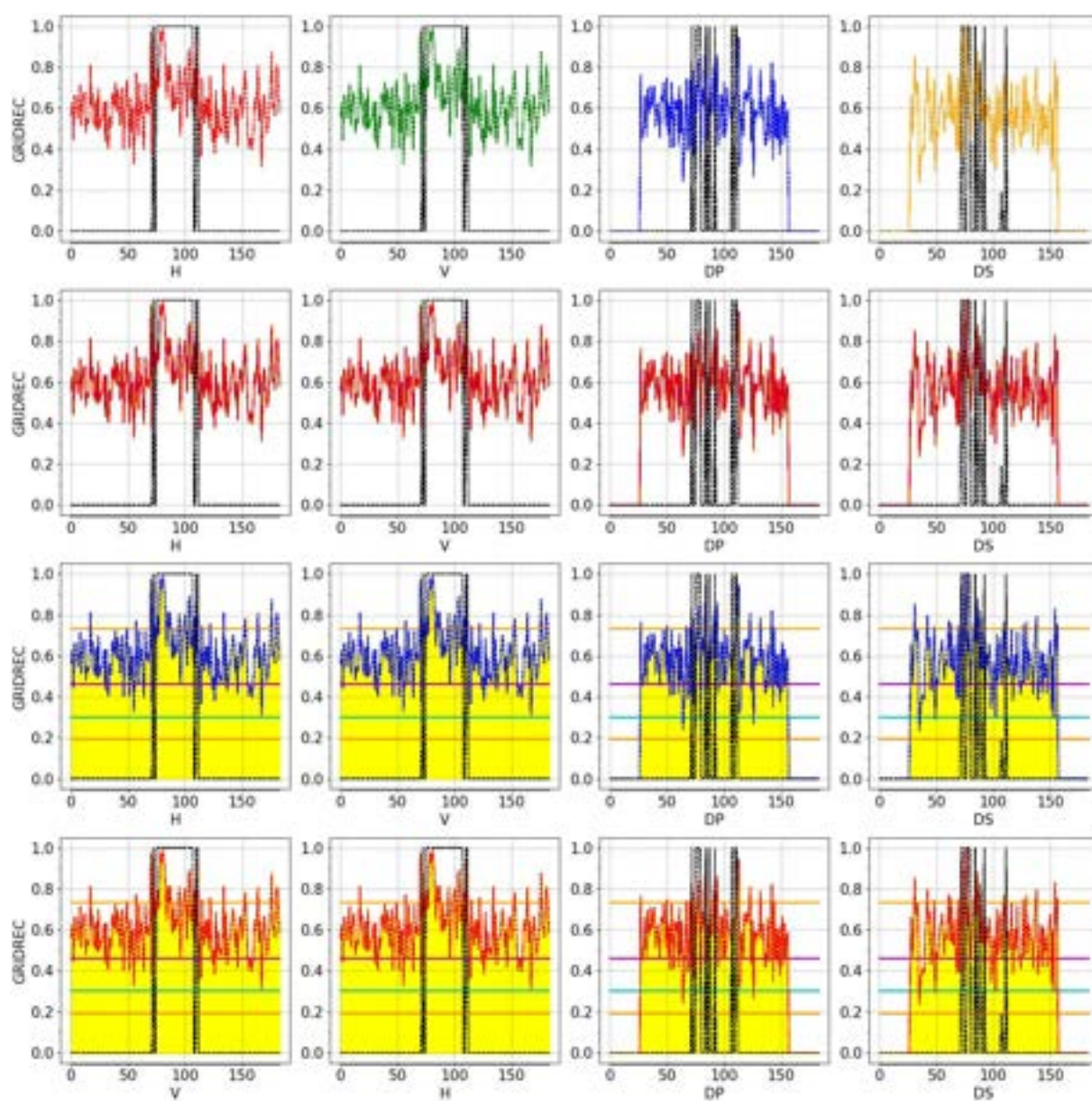


Figura 319 - Cortes GRIDREC com erro no Sinograma Horus

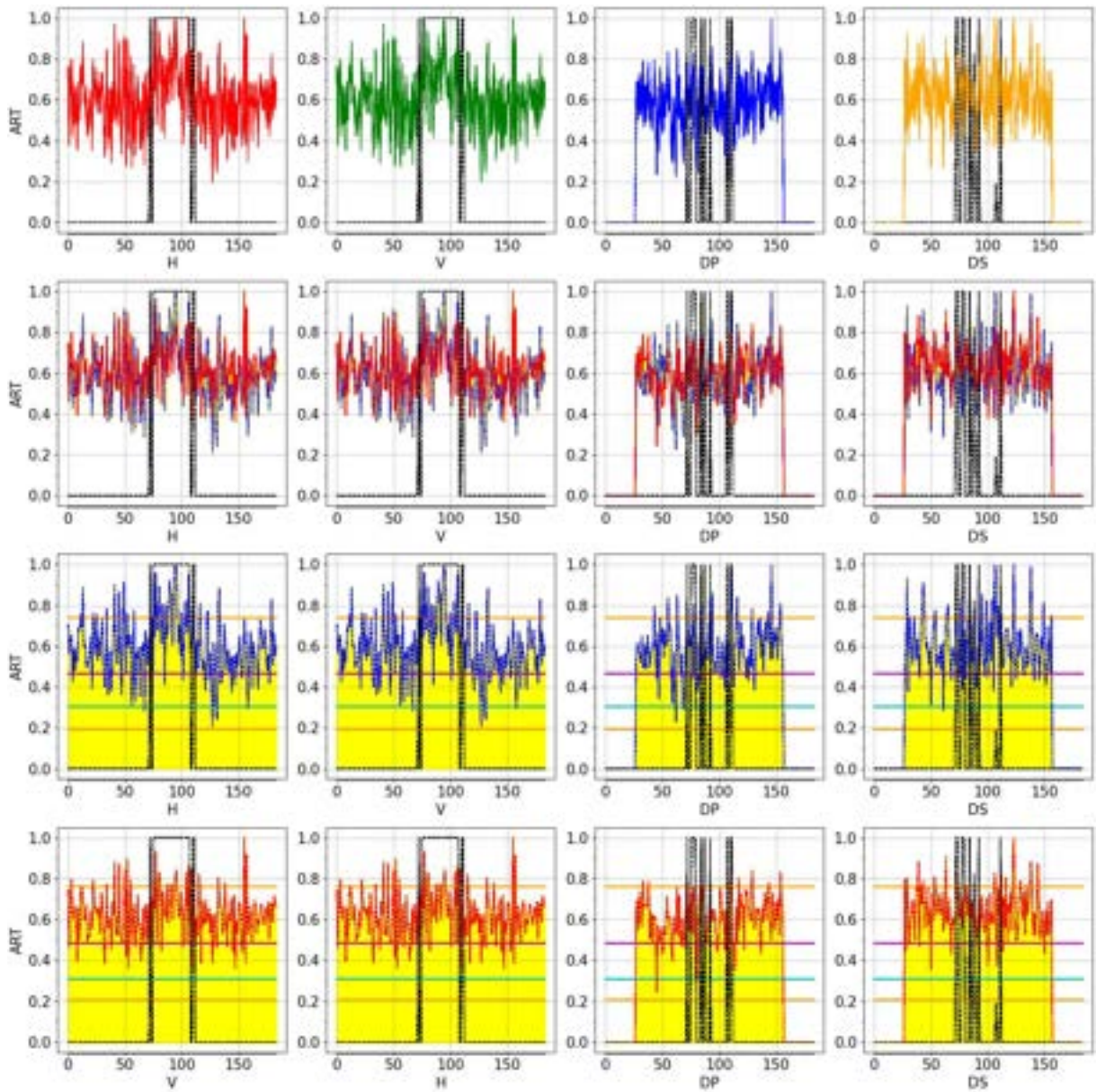


Figura 320 - Cortes ART com erro no Sinograma Horus

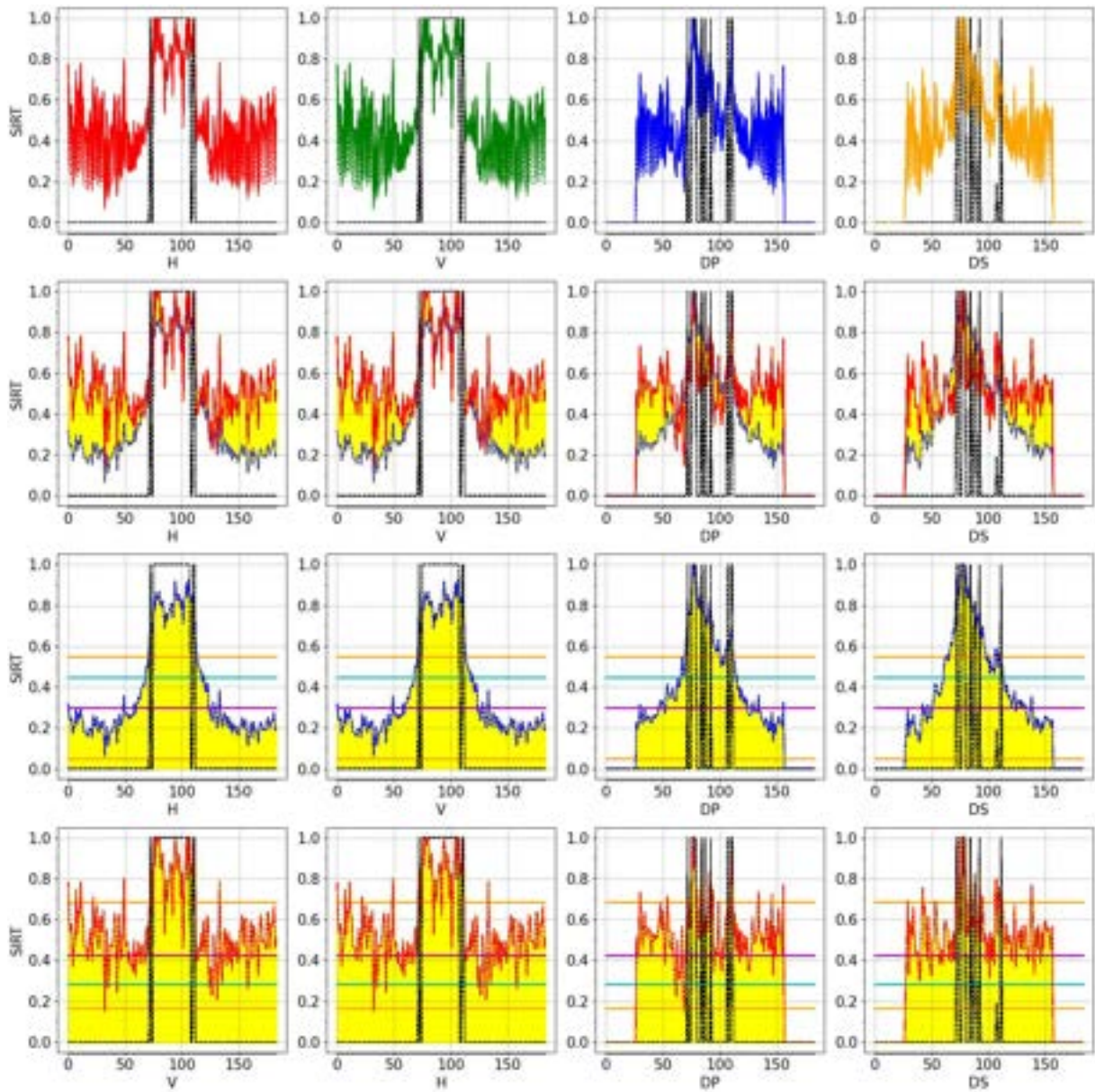


Figura 321 - Cortes SIRT com erro no Sinograma Horus

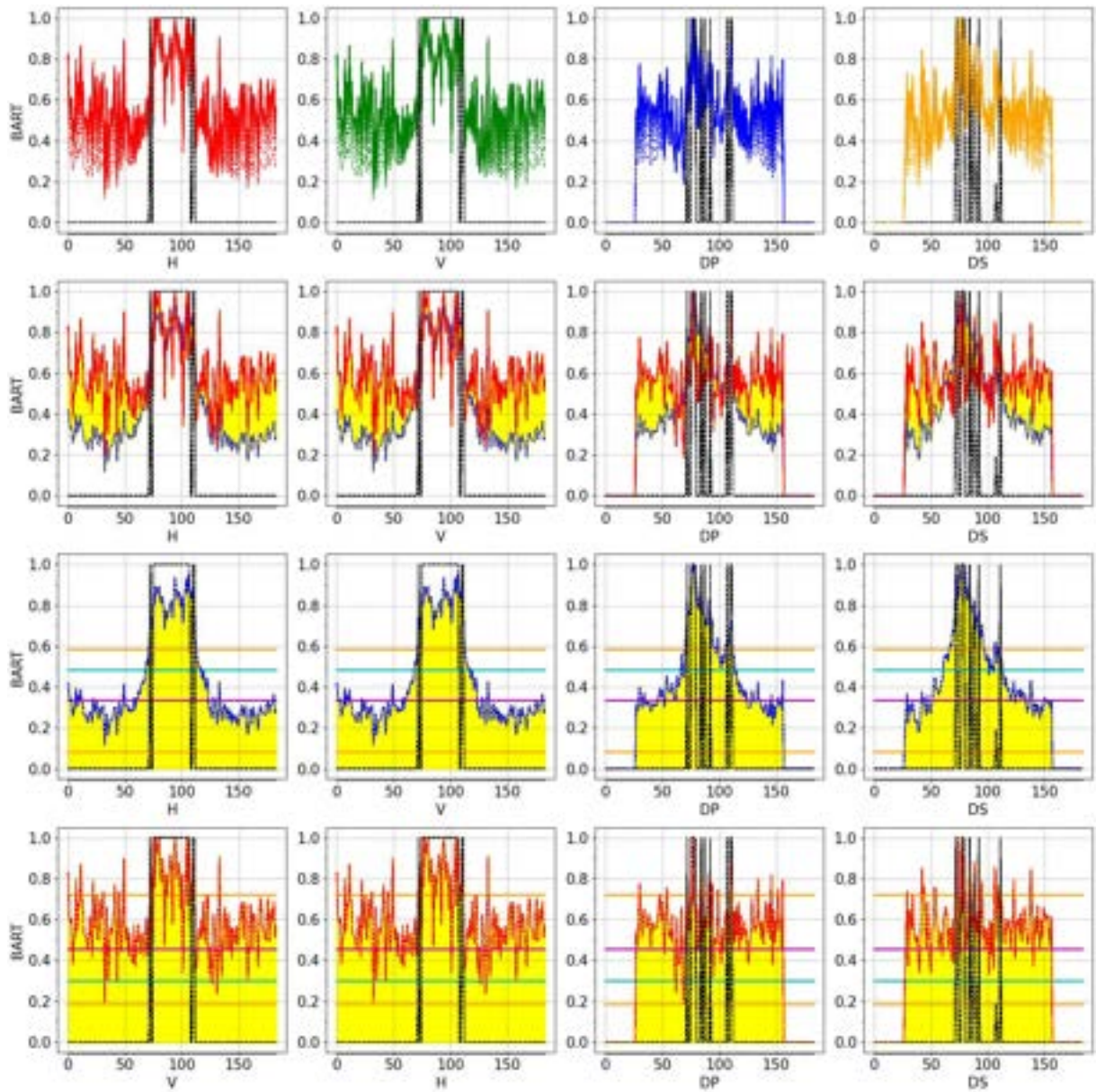


Figura 322 - Cortes BART com erro no Sinograma Horus

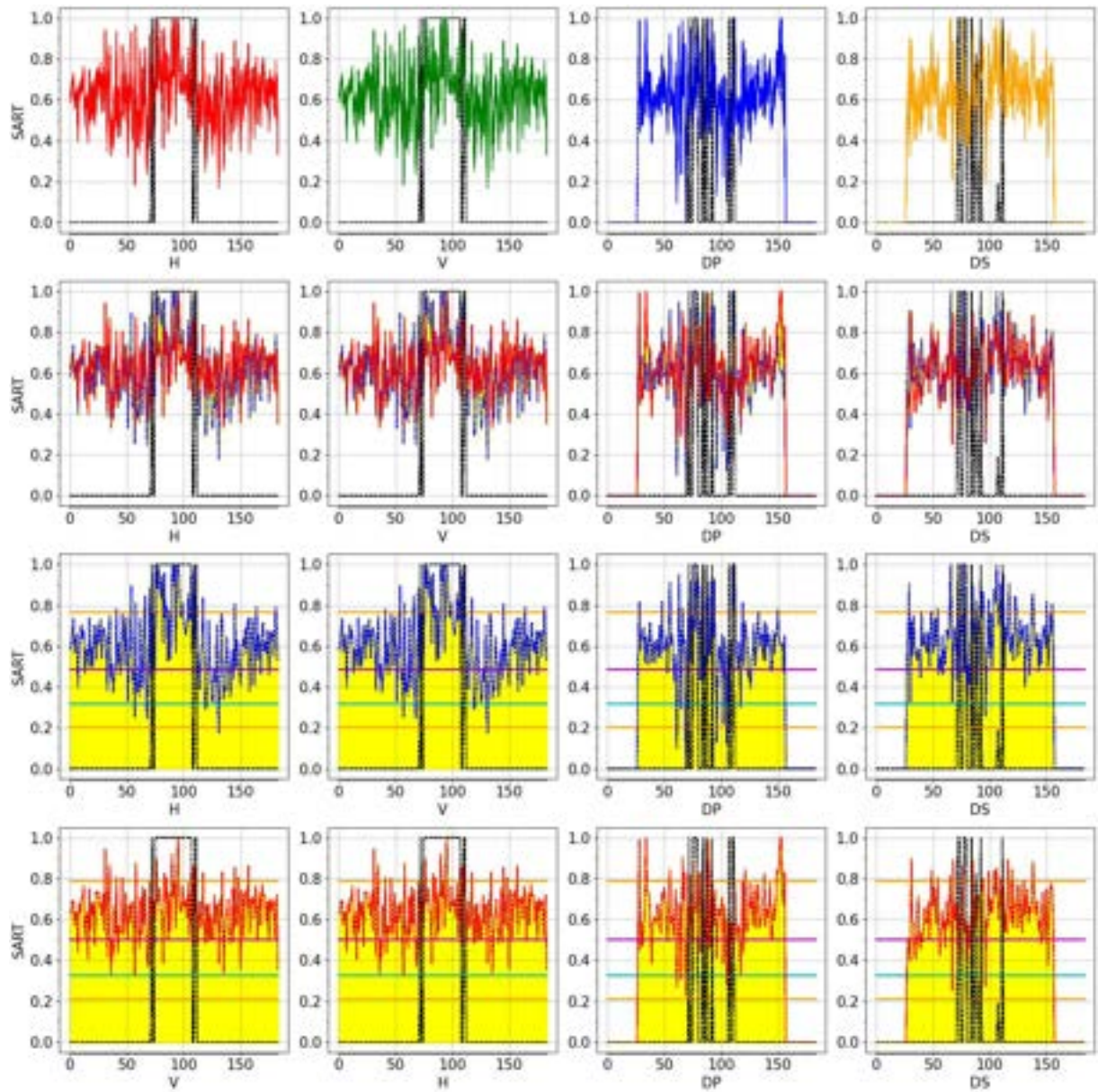


Figura 323 - Cortes SART com erro no Sinograma Horus

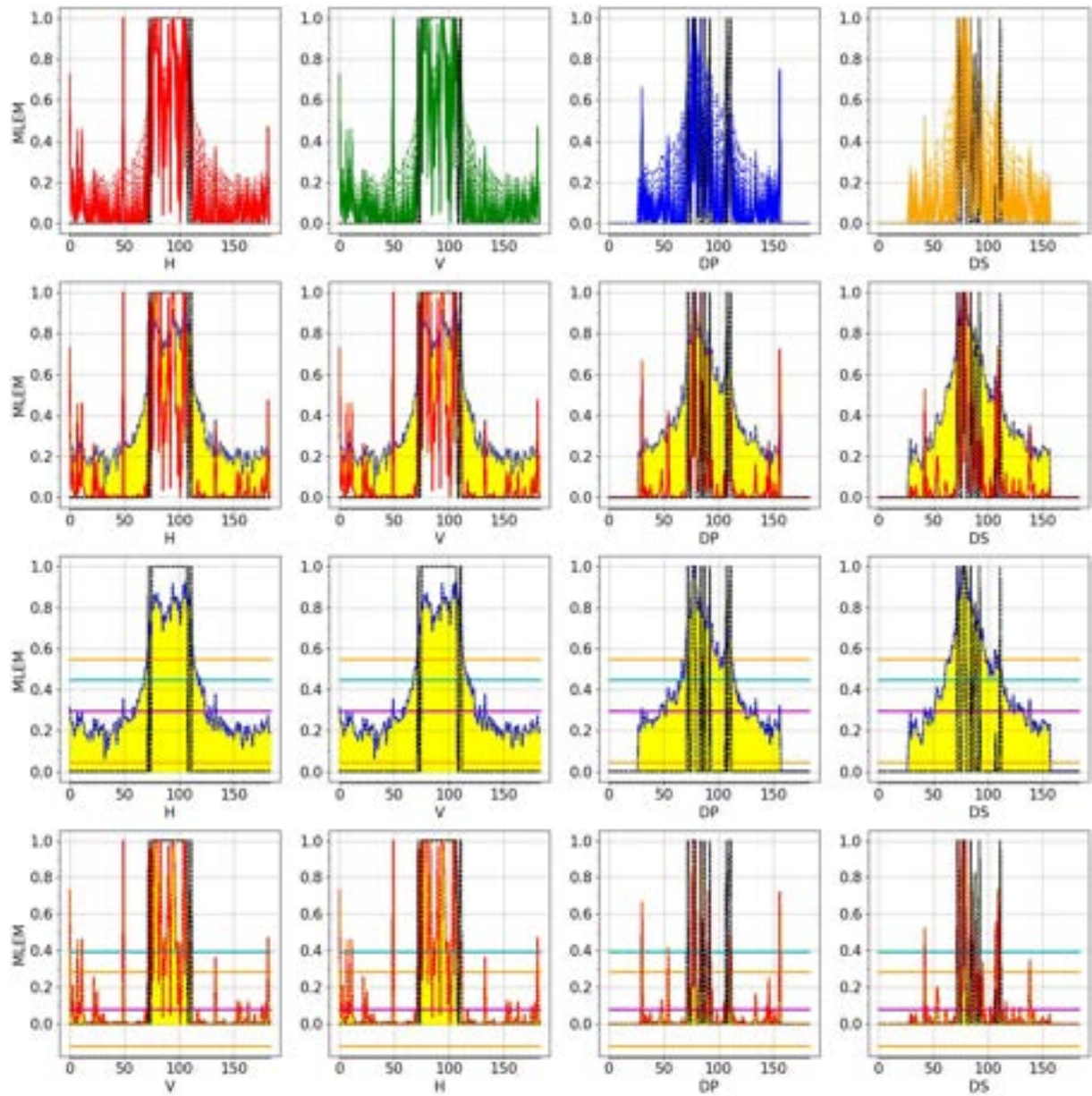


Figura 324 - Cortes MLEM com erro no Sinograma Horus

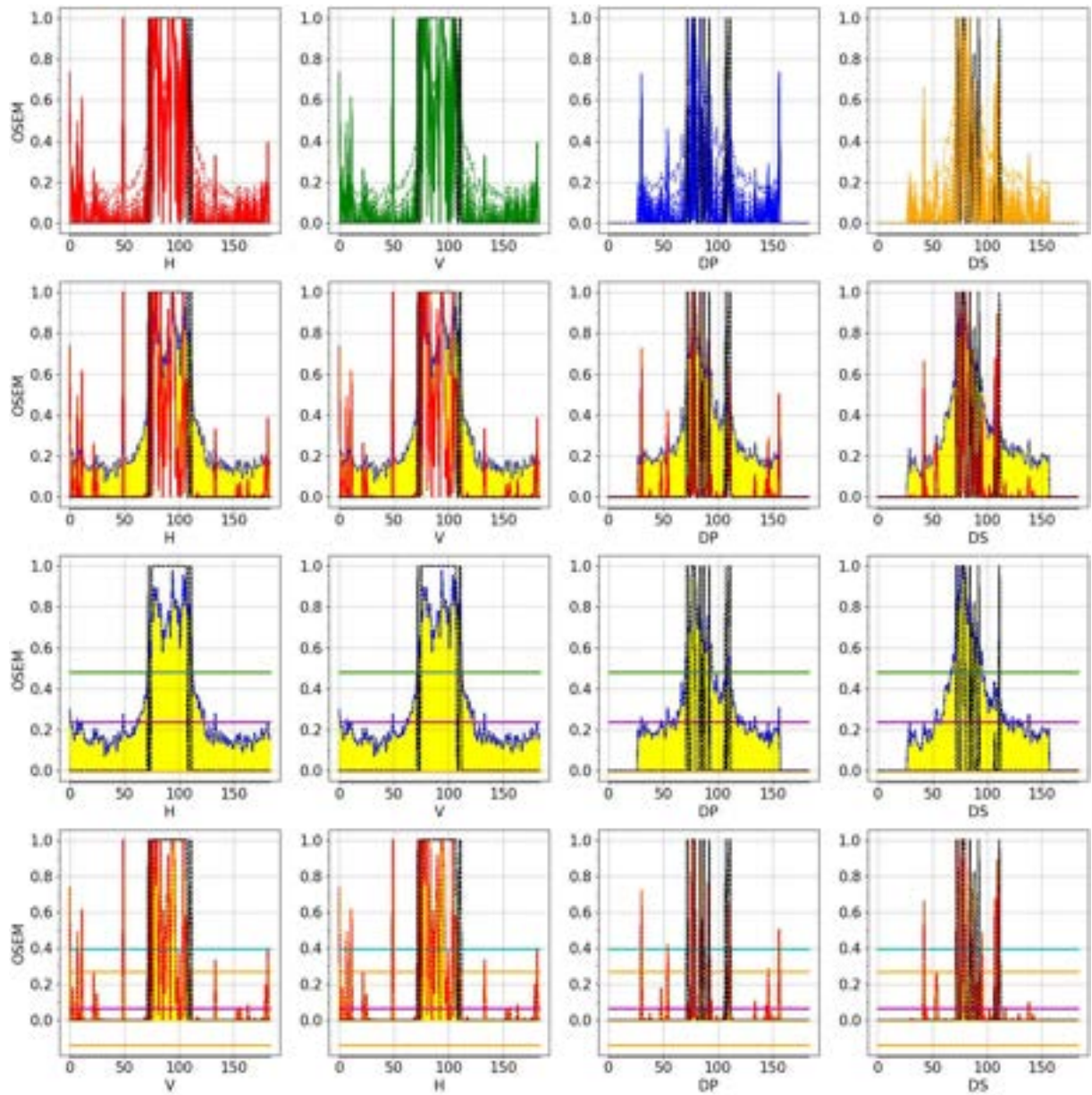


Figura 325 - Cortes OSEM com erro no Sinograma Horus

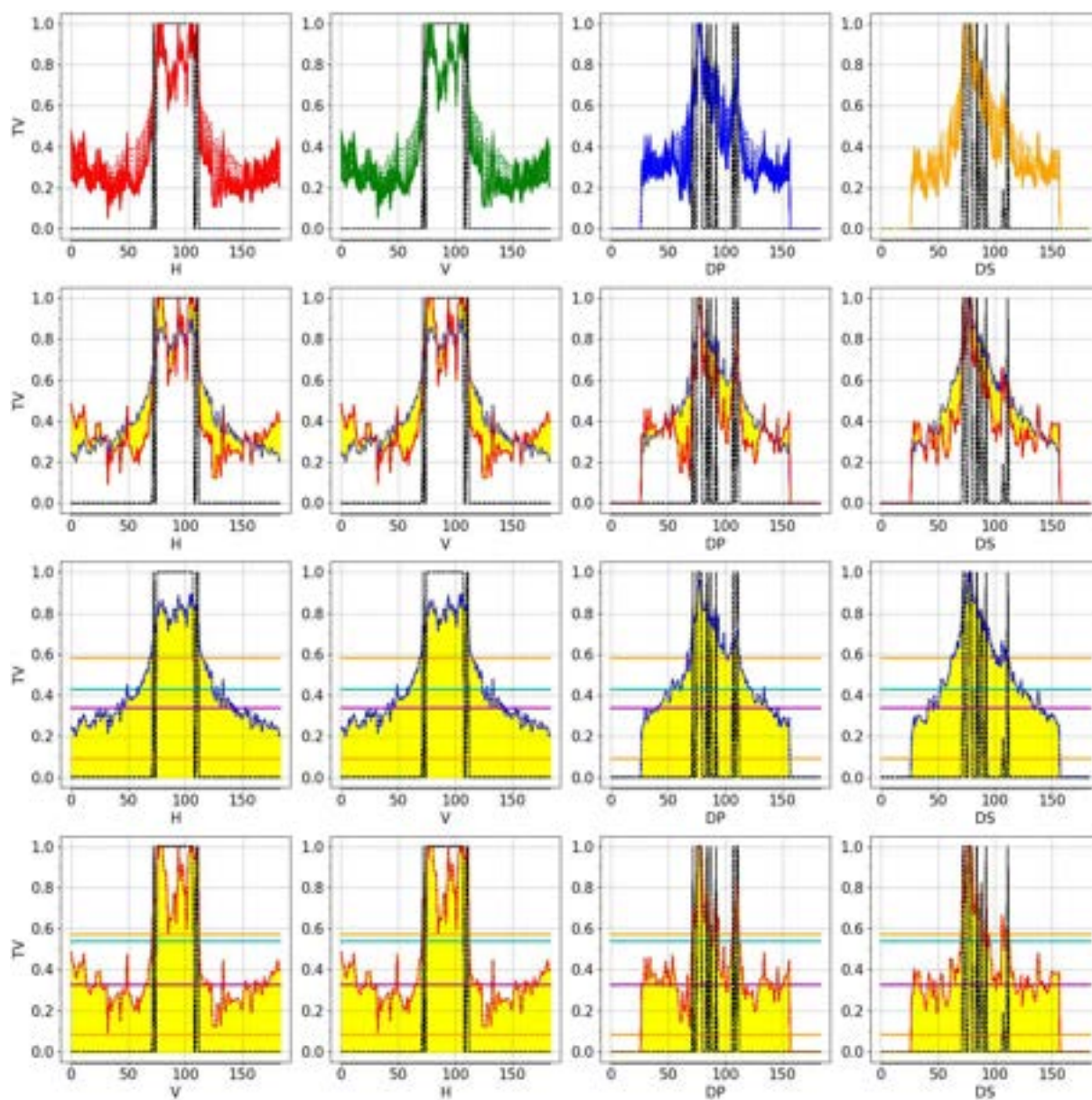


Figura 326 - Cortes TV com erro no Sinograma Horus

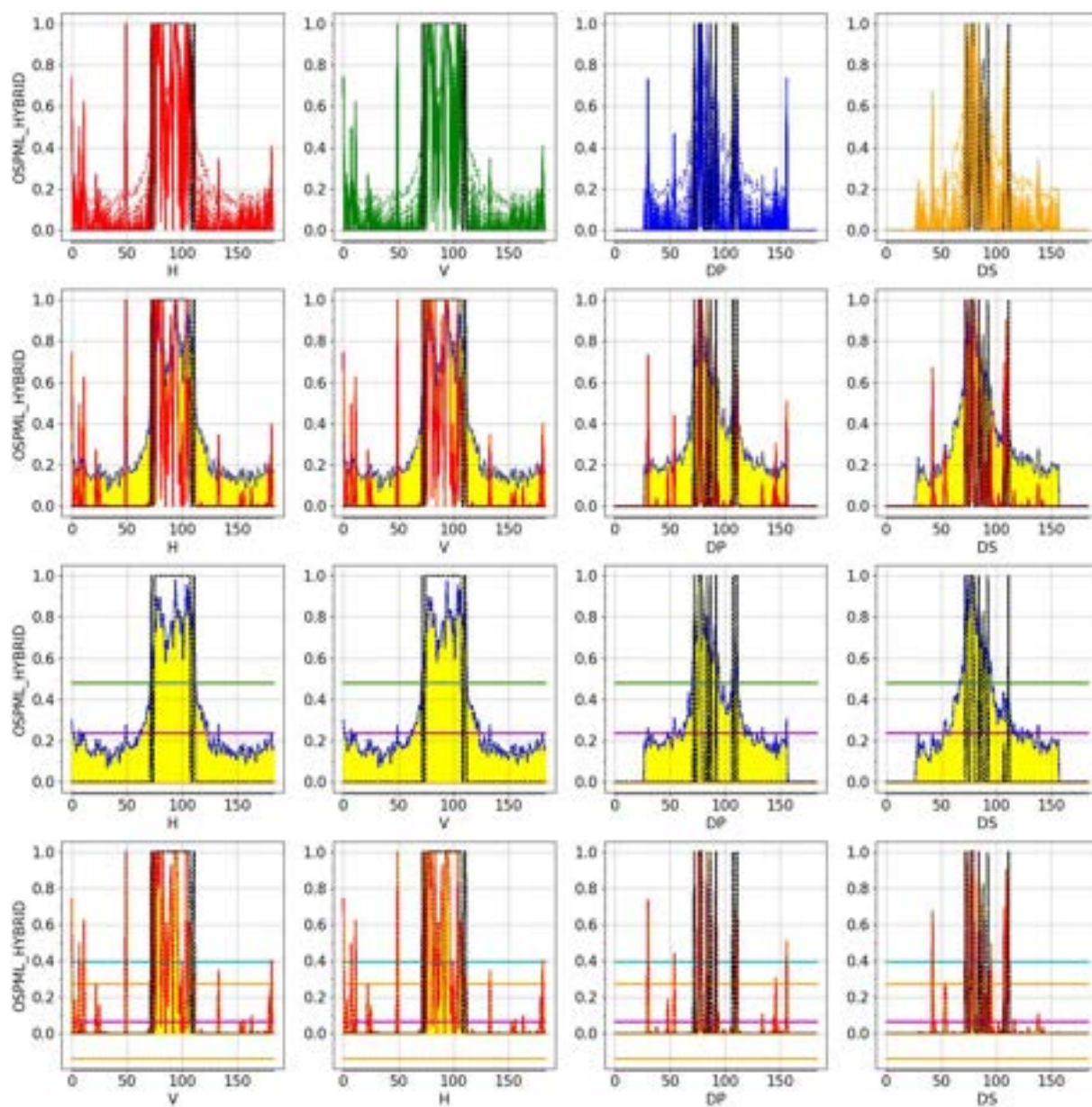


Figura 327 - Cortes OSPML-Hybrid com erro no Sinograma Horus

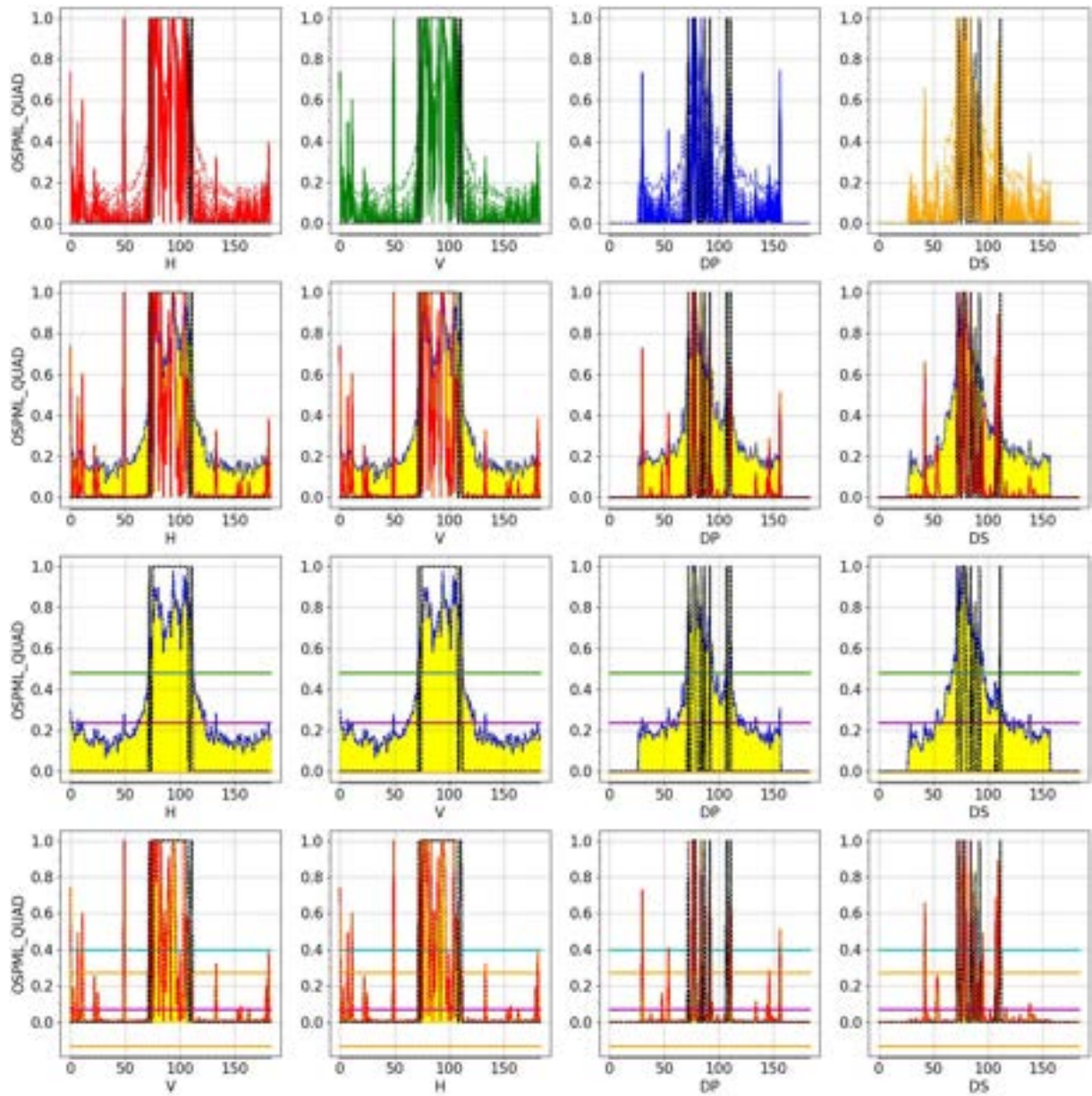


Figura 328 - Cortes OSPML-Quad com erro no Sinograma Horus

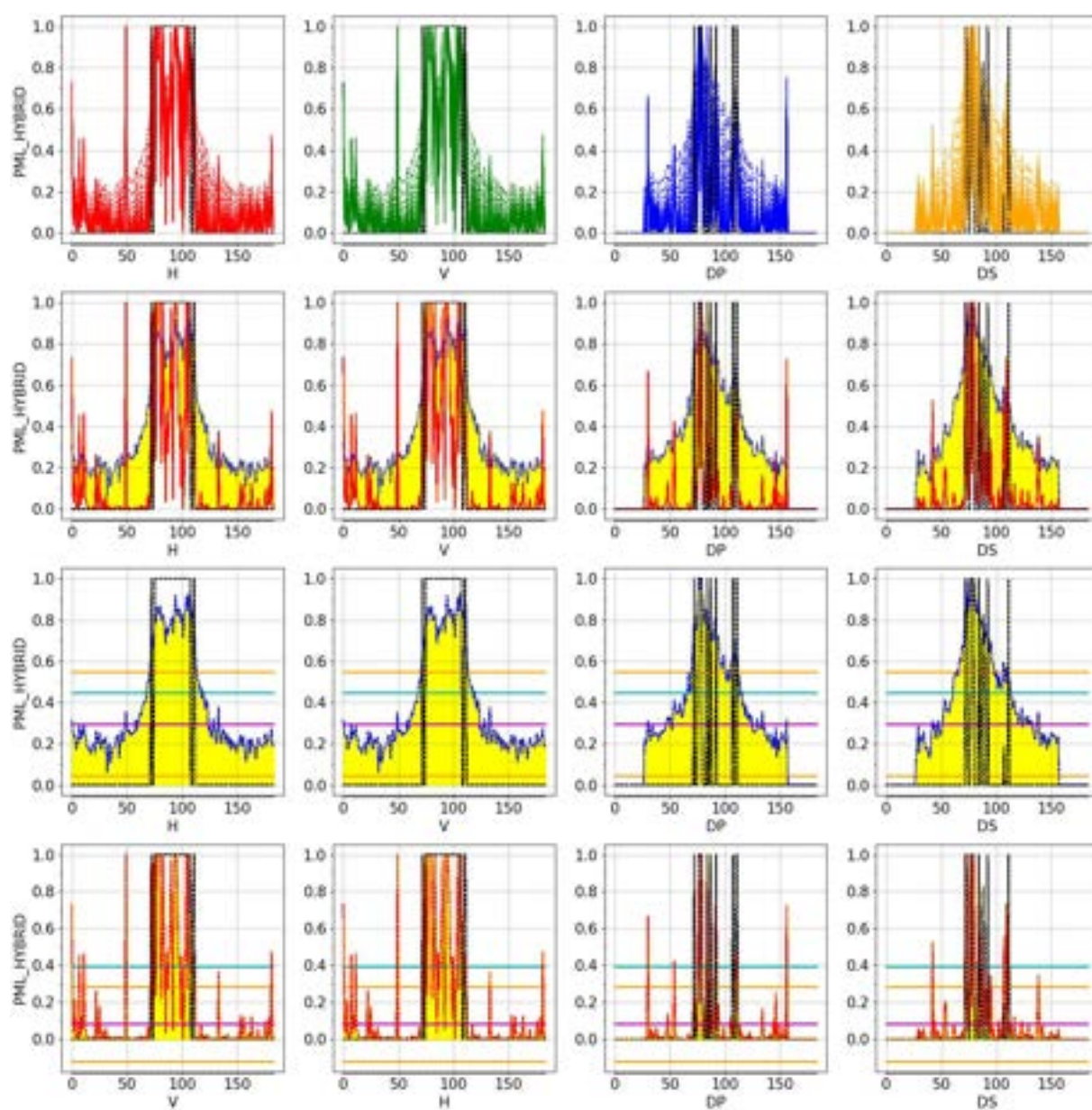


Figura 329 - Cortes PML-Hybrid com erro no Sinograma Horus

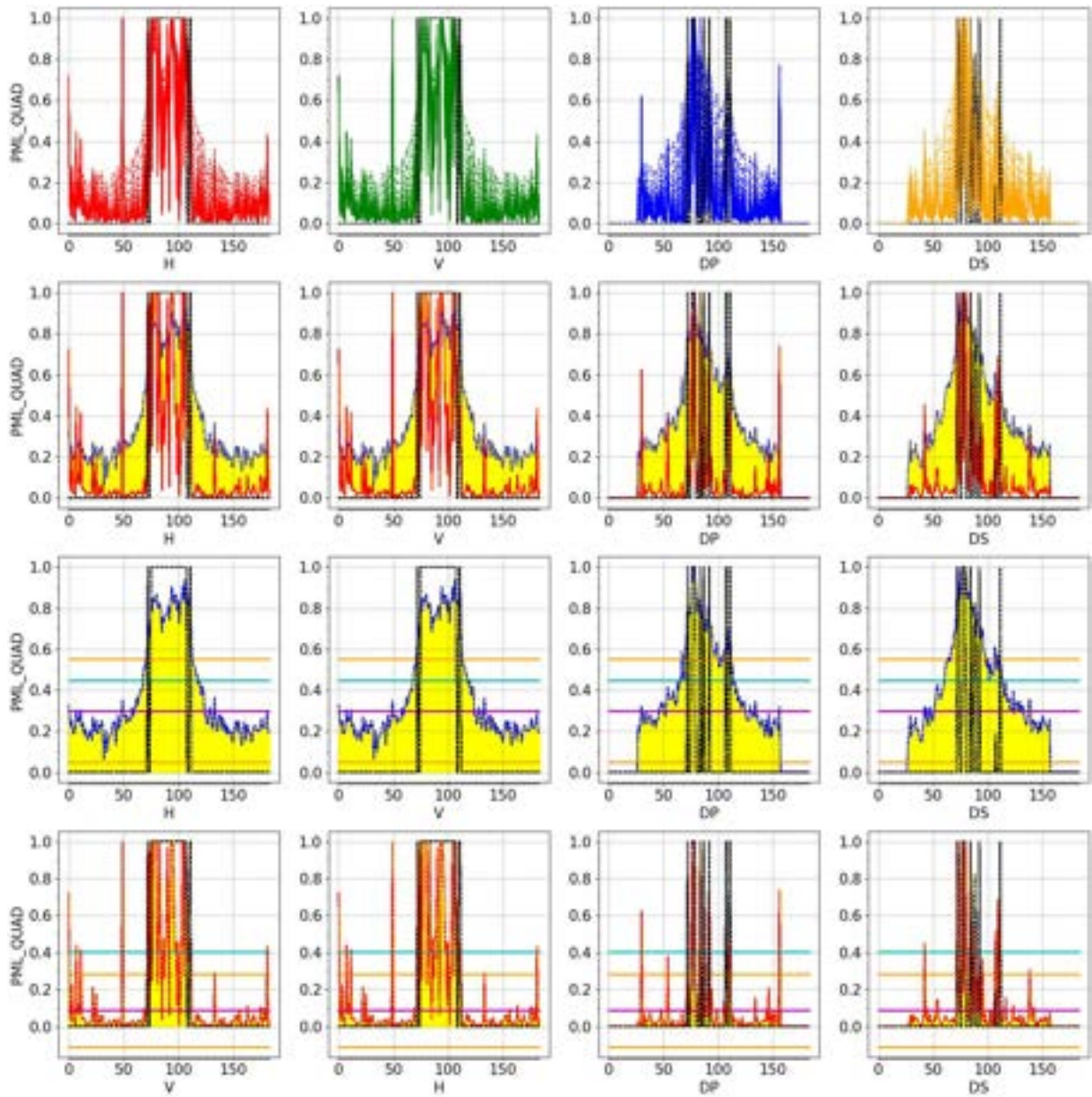


Figura 330 - Cortes PML-Quad com erro no Sinograma Horus

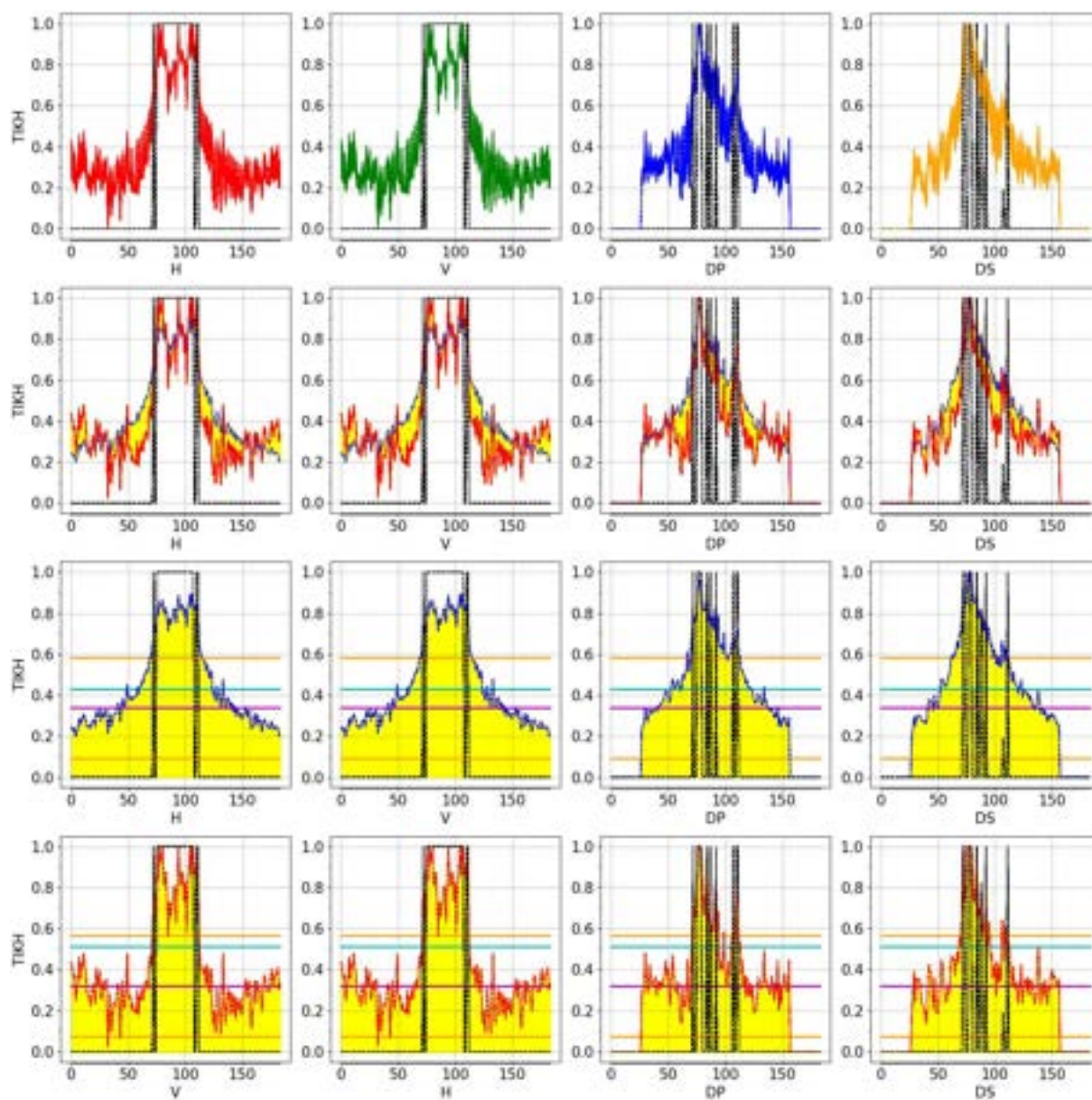


Figura 331 - Cortes TIKH com erro no Sinograma Horus

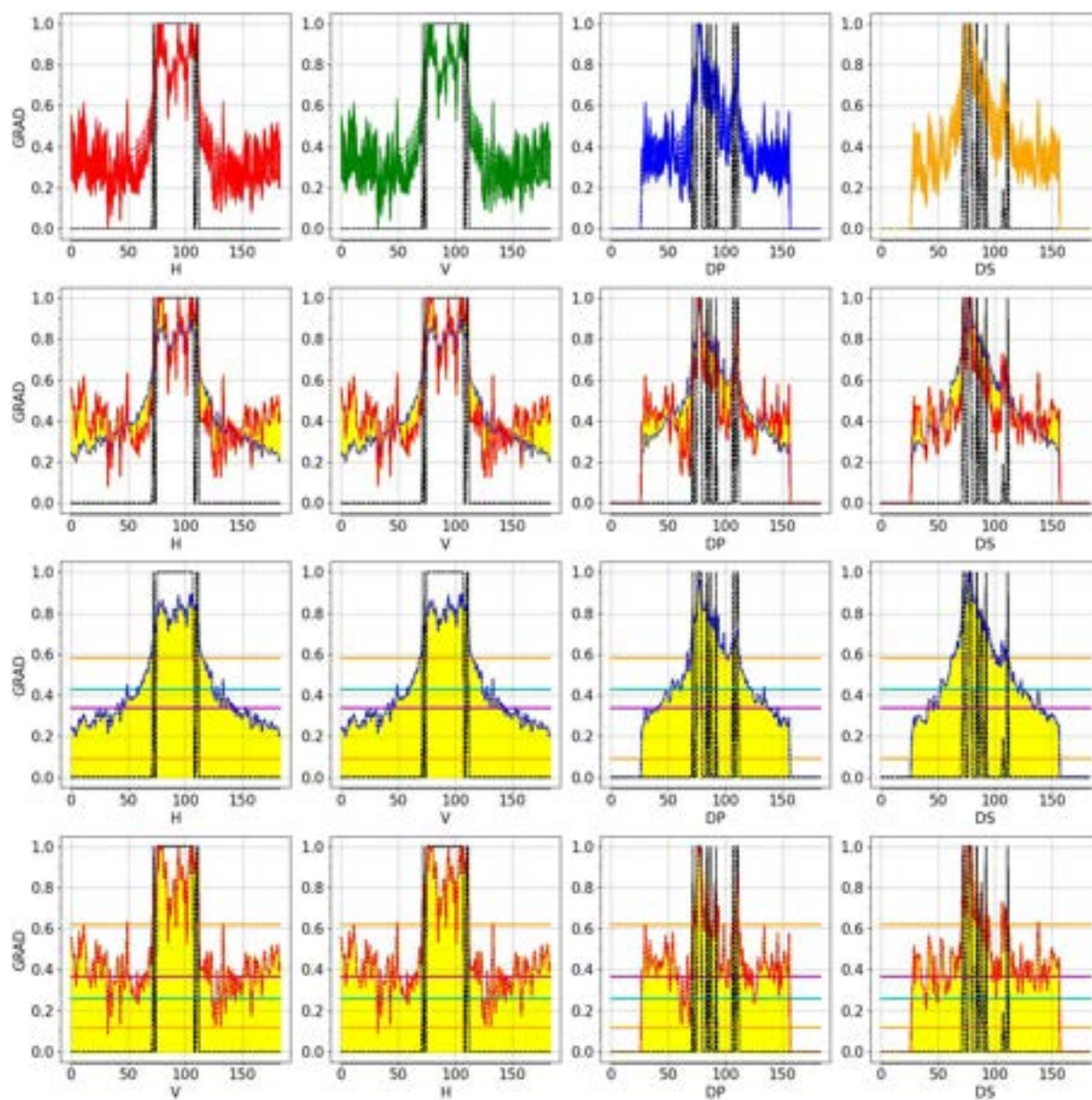


Figura 332 - Cortes GRAD com erro no Sinograma Horus