



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Rodrigo Gualberto Rodrigues Alves

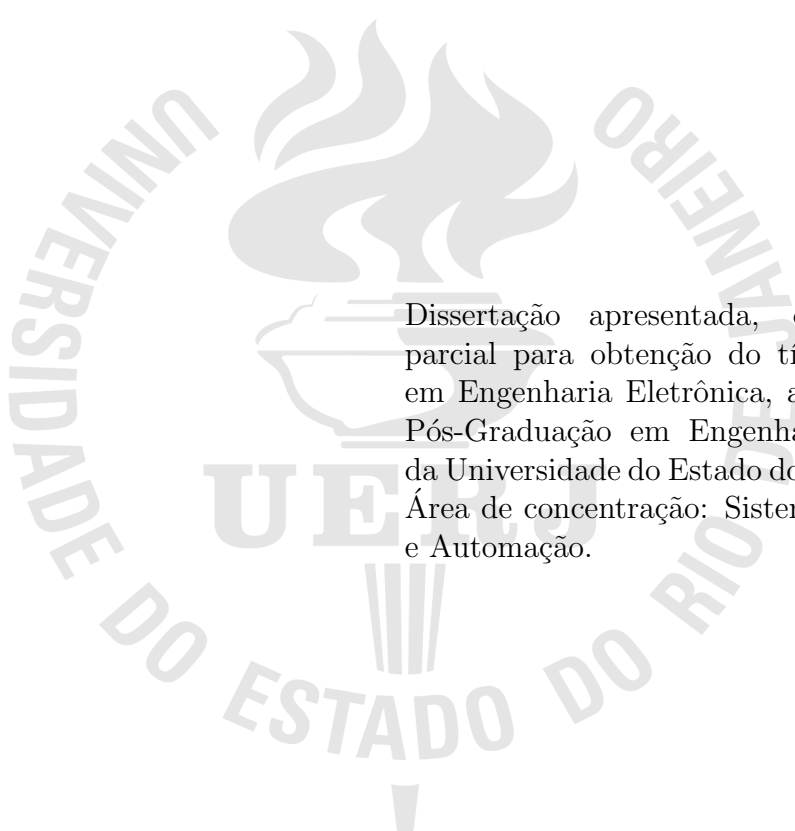
**Sistemas de Controle Extremal em Rede com Dados  
Amostrados**

Rio de Janeiro

2021

Rodrigo Gualberto Rodrigues Alves

**Sistemas de Controle Extremal em Rede com Dados Amostrados**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Eletrônica, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

A474

Alves, Rodrigo Gualberto Rodrigues

Sistemas de Controle Extremal em Rede com Dados Amostrados / Rodrigo Gualberto Rodrigues Alves. – 2021.

70 f.

Orientadores: Tiago Roux de Oliveira. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de controle ajustável - Teses. 3. Amostragem - Teses. 4. Métodos de simulação - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681:511.42

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Rodrigo Gualberto Rodrigues Alves

## Sistemas de Controle Extremal em Rede com Dados Amostrados

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Eletrônica, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 11 de Novembro de 2021

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)  
Faculdade de Engenharia da UERJ

---

Prof. Andrei Giordano Holanda Battistel, D.Sc.  
Faculdade de Engenharia da UERJ

---

Prof. Antonio Candea Leite, D.Sc.  
Norwegian University of Life Sciences

Rio de Janeiro

2021

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Julio e Márcia, por todo esforço em minha trajetória para conseguir chegar até aqui.

## AGRADECIMENTO

Agradeço primeiro a Deus, que proporcionou essa realização.

Segundo, aos meus pais e também meus heróis, Julio e Márcia, pelo amor e dedicação para que eu pudesse estudar e chegar aqui.

Terceiro, à Ludmila, que esteve ao meu lado em momentos de dificuldade, e ainda assim, pôde me fornecer o apoio necessário para alcançar meus objetivos. Serei sempre grato por tudo.

Quarto, ao meu professor e orientador Tiago Roux. Obrigado pela confiança, mesmo quando já estava a ponto de desistir.

Quinto, aos meus amigos de curso, Daniel, Wilton, Vinícius, Aline e Wallace. Passamos por muitas dificuldades nos estudos, mas também por muitos momentos de alegria.

Sexto, à Isabela, que chegou no meio da turbulência, somando forças para continuar esta caminhada sem desistir.

E por fim, a todos que, diretamente ou indiretamente, participaram da minha vida durante este caminho, obrigado.

A persistência é o menor caminho ao êxito.

*Charles Chaplin*

## RESUMO

ALVES, Rodrigo Gualberto Rodrigues. *Sistemas de Controle Extremal em Rede com Dados Amostrados*. 70 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2021.

Esta dissertação propõe uma nova abordagem para o controle extremal em rede com dados amostrados. O controlador necessita lidar com o atraso natural de sistemas em rede, além do intervalo de amostragem, que podem ser modelados por um único atraso variável. Basicamente, a novidade do nosso resultado está na otimização em tempo real do sistema em rede proposto com atrasos variantes no tempo. Os resultados de simulação ilustram a eficiência da estratégia de controle extremal adotada para o problema formulado com dados amostrados.

Palavras-chave: Controle Extremal. Controle baseado em rede. Sistemas com atraso. Teoria da média para atrasos variáveis.



## ABSTRACT

ALVES, Rodrigo Gualberto Rodrigues. *Network-based Extremum Seeking With Sampled Data*. 70 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2021.

This master dissertation proposes a new approach for network-based extremum seeking with sampled data. The controller needs to deal with the natural delay of a networked control system, in addition to the sampling interval, which can be modeled by an unique variable. Basically, the novelty of our result is the real-time optimization of the proposed networked control system with time-varying delay. Simulation results illustrate the efficiency of the proposed extremum seeking control strategy adopted on the formulated sampled-data problem.

Keywords: Extremum seeking. Network-based control. Time-delay systems. Averaging theory for time-varying delays.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - O mais simples mapeamento para esquema de Controle Extremal com perturbações periódicas aplicadas a um mapeamento escalar quadrático $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$ . . . . .	16
Figura 2 - Busca extremal em forma crescente da curva da função objetivo. . . . .	17
Figura 3 - Busca extremal em forma decrescente da curva da função objetivo. . . . .	18
Figura 4 - Busca extremal em parte plana da curva da função objetivo. . . . .	18
Figura 5 - Algoritmo de Controle Extremal para um mapeamento multivariável $y = Q(\theta)$ . . . . .	20
Figura 6 - O método de Newton para Controle Extremal de mapeamentos estáticos com múltiplas entradas. . . . .	22
Figura 7 - O algoritmo de Controle Extremal na presença de dinâmicas com um mapeamento cujo equilíbrio $\theta \rightarrow y$ satisfaça as mesmas condições do caso estático. . . . .	23
Figura 8 - Sistemas de Dados Amostrados: atraso do tipo dente de serra $\tau(t) = t - t_k$ . . . . .	27
Figura 9 - Amostragem variável $T_1 = 0, 18s \rightarrow T_2 = 0, 54s \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$ . . . . .	28
Figura 10- Funcional de Lyapunov descontínua no tempo. . . . .	35
Figura 11- Sistema de controle de realimentação de saída estático em rede . . . . .	42
Figura 12- O diagrama de tempo do Sistema de Controle em Rede (NCS) ( $S'_{k+2}$ é o instante de amostragem com a medição perdida) . . . . .	42
Figura 13- NCSs: atraso de tempo linear por partes $\tau(t)$ . . . . .	44
Figura 14- Esquema de busca extremal baseada em rede com dados amostrados pelo retentor de ordem zero (ZOH). . . . .	49
Figura 15- Função em forma de dente de serra contínua como o atraso no tempo. . . . .	51
Figura 16- Esquema de controle extremal baseado em rede: equivalente contínuo com atrasos variantes no tempo. . . . .	51
Figura 17- Esquema de busca extremal baseado em rede equivalente contínuo com atrasos de saída. . . . .	55
Figura 18- Vetor de controle $\theta(t)$ . . . . .	56
Figura 19- Entrada da planta $\Theta(t)$ . . . . .	57

Figura 20- Saída $y(t)$ .....	57
Figura 21- Gradiente estimado $\hat{G}(t)$ . ....	58
Figura 22- Atraso variante no tempo $h(t)$ . ....	58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 valores de $\eta$ e $h$ .....	30
--	----

## LISTA DE SIGLAS

ES	<i>Extremum Seeking</i>
ABS	<i>Anti lock Braking System</i>
ZOH	<i>Zero-Order-Hold</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i>
LTV	<i>Linear Time-Variant</i>
NCS	<i>Networked Control System</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
MAD	<i>Maximum Allowable Delay</i>
MATI	<i>Maximum Allowable Transmission Interval</i>
MMC	<i>Mínimo Múltimo Comum</i>
ISS	<i>Input-to-State Stability</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\theta(t)$	<i>Entrada do mapeamento</i>
$\theta^*$	<i>Valor desconhecido da entrada do mapeamento</i>
$\hat{\theta}$	<i>Estimativa em tempo real</i>
$f^*$	<i>Função ótima desconhecida</i>
$f''$	<i>Sinal da Hessiana</i>
$f(\theta)$	<i>Saída da planta</i>
$a$	<i>Amplitude do sinal de perturbação senoidal</i>
$k$	<i>Ganho de adaptação</i>
$\omega$	<i>Frequência do sinal de perturbação de demodulação</i>
$\tilde{\theta}(t)$	<i>Erro entre a estimativa em tempo real <math>\hat{\theta}(t)</math> e ponto ótimo <math>\theta^*</math> desconhecido</i>
$\hat{G}(t)$	<i>Estimativa do gradiente</i>
$Q(\cdot)$	<i>Mapeamento desconhecido</i>
$S(t)$	<i>Sinal de perturbação</i>
$M(t)$	<i>Sinal de demodulação</i>
$H$	<i>Hessiana</i>
$\dot{W}$	<i>Ruído branco</i>
$N(t)$	<i>Sinal de excitação multiplicativa</i>
$\Gamma(t)$	<i>Equação diferencial da matriz de Riccati</i>
$D$	<i>Matriz de Schur</i>
$\tau$	<i>Atraso</i>
$T$	<i>Intervalo de amostragem</i>
$h$	<i>Atraso constante artificial</i>
$\varepsilon$	<i>Estado do sistema</i>
$J$	<i>Índice de desempenho</i>
$\delta$	<i>Taxa de decaimento</i>
$\eta_k$	<i>Atraso de transmissão de sinal</i>
$\theta_k$	<i>Sinal de controle em tempo discreto</i>
$\Theta_k$	<i>Sinal de controle em tempo contínuo</i>
$h(t)$	<i>Atraso variável no tempo</i>

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
1	<b>CONTROLE EXTREMAL</b> .....	16
1.1	Ideia Básica do Controle Extremal .....	16
1.2	Controle Extremal para Mapeamentos Estáticos Multivariáveis.....	20
1.3	Algoritmo de Controle Extremal Tipo Newton para Mapeamentos Estáticos	22
1.4	Controle Extremal para Sistemas Dinâmicos .....	23
2	<b>SISTEMAS DE CONTROLE COM DADOS AMOSTRADOS E EM REDE: UMA ABORDAGEM COM ATRASOS</b> .....	25
2.1	Preliminares .....	25
2.2	Discretização de Sistemas LTI com Dados Amostrados .....	26
2.3	Efeitos da Amostragem na Estabilidade.....	27
2.4	Três abordagens principais para o controle de sistemas com dados amostrados	32
2.5	Análise de Estabilidade e Ganho- $L_2$ de Sistemas com Dados Amostrados...	33
2.6	Um Modelo com Atraso no Tempo de um Sistema de Controle em Rede (NCS): Amostragem, Perdas de Pacotes e Atrasos na Comunicação .....	41
3	<b>CONTROLE EXTREMAL EM REDE COM DADOS AMOS- TRADOS</b> .....	49
4	<b>RESULTADO DAS SIMULAÇÕES</b> .....	56
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	59
	<b>APÊNDICE</b> .....	60
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	67

## INTRODUÇÃO

O controle extremal (*extremum seeking* - ES) é um método para otimização em tempo real que visa determinar e manter o extremo de uma dada função desconhecida. Possui aplicação em situações que exista uma não-linearidade no problema de controle, e esta não-linearidade apresenta um mínimo ou máximo. A não-linearidade pode estar na planta ou no objetivo de controle, associada ao sistema através de uma função objetivo em um problema de otimização, como em [1]. Portanto, pode-se usar ES tanto para otimizar um ponto de ajuste para atingir um valor ideal da saída, ou para ajustar os parâmetros de uma lei de realimentação. ES tem se tornado um emergente tópico de pesquisa em controle adaptativo com diversas publicações nos últimos anos, tais como [2], [3], [4], [5], [6], [7]. Tem apresentado diversas aplicações, como em controle de turbinas industriais, bioreatores, planejamento de voo de aviões, sistemas biomédicos e freios tipo ABS.

Apesar deste fato, não existem muitos trabalhos que lidam com o problema de controle extremal em rede na presença de dados amostrados. Os sistemas de controle modernos geralmente empregam tecnologia digital para implementação do controlador, ou seja, sistema de dados amostrados. O controle com dados amostrados pode ser considerado como um problema com atraso de variação rápida e contínuo por partes, [1]. No contexto de sistemas de controle em rede, o intervalo de amostragem pode ser variável.

### Objetivos e Contribuições

O objetivo desta dissertação consiste na pesquisa na área de controle, utilizando a estratégia de controle extremal baseada em rede com dados amostrados com a estabilização da estimativa do gradiente do mapeamento não-linear a ser otimizado pela saída deste mapeamento. A estratégia utilizada permite alcançar a convergência em tempo finito a uma vizinhança do valor ótimo desconhecido. Desta forma, permite-se ampliar a evolução dos estudos neste ramo.

No problema de controle proposto, apresenta-se um controle extremal baseado em rede para um mapeamento estático não-linear, com os intervalos de amostragem periódicos



no tempo, incluindo uma perturbação senoidal ou *dither* para estimar o gradiente da função objetivo.

Considera-se abstratamente duas fontes de atraso da rede, uma para o sensor e outra para o atuador. Em particular, inclui-se um retentor de ordem zero (ZOH), que transforma a entrada de controle de tempo discreto em uma entrada de controle contínua no mapeamento não-linear de interesse.

Prova-se a estabilidade do sistema médio, garantido-se a estabilidade do sistema equivalente atrasado, que representa a rede com dados amostrados. Nas simulações realizadas, em que se considera uma planta multivariável estática e não-linear com intervalos de amostragem periódicos e parâmetros desconhecidos, ilustramos a eficiência da estratégia proposta.

## **Organização**

O texto está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2, ideias básicas sobre o controle extremal, com aplicações em mapeamentos estáticos multivariáveis, dinâmicos são apresentados;
- No Capítulo 3, mostra-se o controle de dados amostrados, ilustrando os efeitos da amostragem na estabilidade, além de se apresentar baseado em método funcional de Lyapunov dependente no tempo. Também é abordada a amostragem variável (não periódica) com suas respectivas condições de estabilidade;
- No Capítulo 4, introduz-se o controle extremal com dados amostrados e com atrasos variantes no tempo;
- No Capítulo 5 são realizadas simulações em um sistema com dados amostrados e amostragem periódica;
- A conclusão desta dissertação é apresentada na última parte do documento.

## 1 CONTROLE EXTREMAL

### 1.1 Ideia Básica do Controle Extremal

Controle extremal (ES) é um método de otimização em tempo real livre de modelos. Apesar deste método de Controle ter sido inventado no ano de 1922, desde o início do século XXI ele vem se expandindo e cada vez mais sendo utilizado, seja com o seu desenvolvimento teórico quanto a sua aplicação na indústria e em outros campos da engenharia.

Algumas versões do Controle Extremal são conhecidas, com diversas abordagens para o estudo de estabilidade [8], [9], [10]. A versão mais conhecida aplica sinais de perturbação para estimar o gradiente do mapeamento desconhecido que está sendo otimizado. Para melhor entendimento e compreensão sobre a ideia de Controle Extremal, inicialmente, consideraremos um mapeamento estático quadrático de uma entrada e uma saída, como indicado na Figura 1.

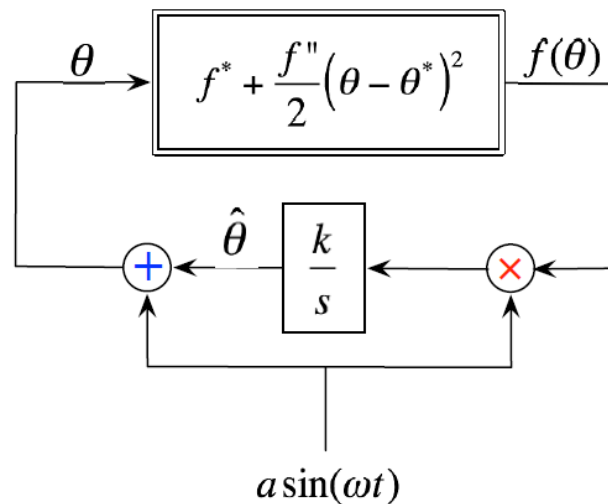


Figura 1 - O mais simples mapeamento para esquema de Controle Extremal com perturbações periódicas aplicadas a um mapeamento escalar quadrático  $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$ .

Três diferentes  $\theta$ s estão presentes na Figura 1:  $\theta^*$  é o otimizador desconhecido do mapeamento,  $\hat{\theta}(t)$  é a estimativa em tempo real de  $\theta^*$  e  $\theta$  é a entrada atual do mapeamento. A entrada atual  $\theta(t)$  se baseia na estimativa  $\hat{\theta}(t)$ , mas é perturbada

pelo sinal  $a \sin(\omega t)$  com o objetivo de estimar o gradiente desconhecido  $f'' \cdot (\theta - \theta^*)$  do mapeamento  $f(\theta)$ .

A senoide é apenas uma escolha simples e eficiente para o sinal de perturbação, muitas outras perturbações, de ondas quadradas a ruídos estocásticos também podem ser utilizadas em seu lugar, mas estas precisam possuir média nula. Já a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  é gerada com o integrador  $k/s$  e com o ganho de adaptação  $k$  controlando a velocidade da estimativa.

A Figura 2 demonstra a busca extremal em forma crescente da curva da função objetivo. O sinal modulado  $\theta$  é a soma do parâmetro estimado atual e o sinal de modulação. Aplicar  $f(\theta)$  produz uma função objetivo perturbada com a mesma fase do sinal de modulação.

Multiplicar a função objetivo perturbada pelo sinal de demodulação produz um sinal positivo. Integrar este sinal aumenta o valor de  $\theta$ , o que o move para mais perto do pico da função objetivo.

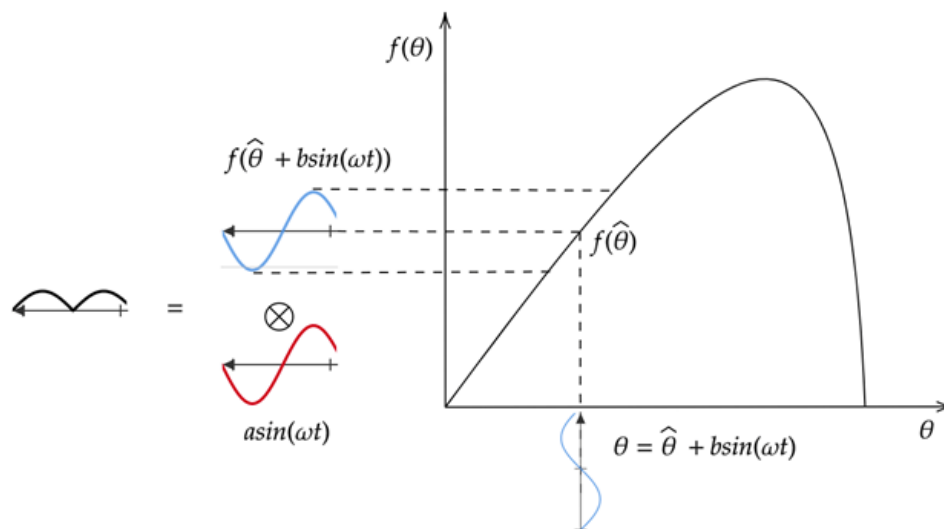


Figura 2 - Busca extremal em forma crescente da curva da função objetivo.

A Figura 3 demonstra a busca extremal em forma decrescente da curva da função objetivo. Nesse caso, a aplicação de  $f(\theta)$  produz uma função objetivo perturbada que está 180 graus fora de fase em relação ao sinal de modulação.

A multiplicação pelo sinal de demodulação produz um sinal negativo. Integrar este sinal diminui o valor de  $\theta$ , que também o move para mais perto do pico da função objetivo.

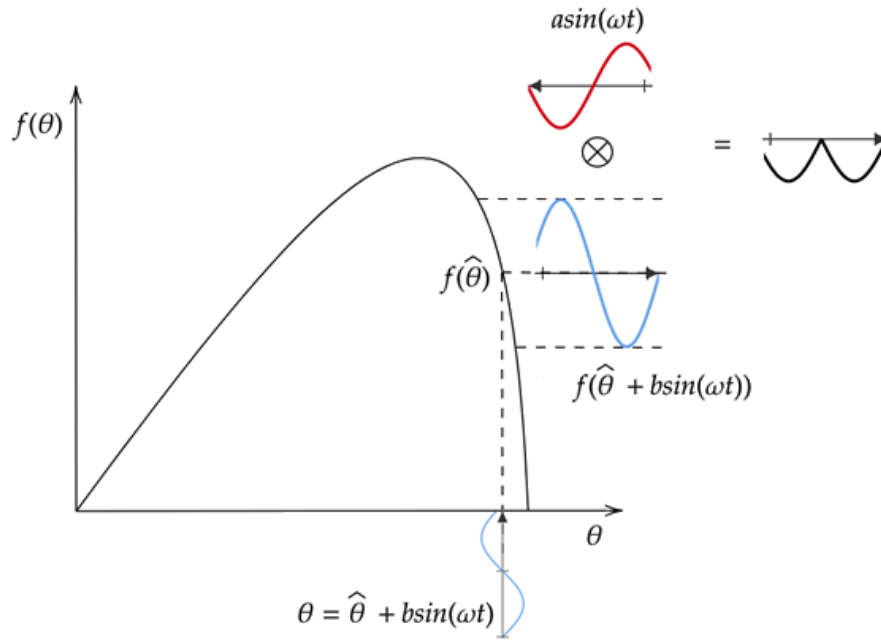


Figura 3 - Busca extremal em forma decrescente da curva da função objetivo.

A Figura 4 demonstra o extremo buscando a parte plana da curva da função objetivo, ou seja, uma parte da curva próxima ao máximo. Nesse caso, a aplicação de  $f(\theta)$  produz uma função objetivo perturbada quase igual a zero. A multiplicação pelo sinal de demodulação e a integração deste sinal não altera significativamente o valor de  $\theta$ , que já está próximo de seu valor ótimo  $\theta^*$ .

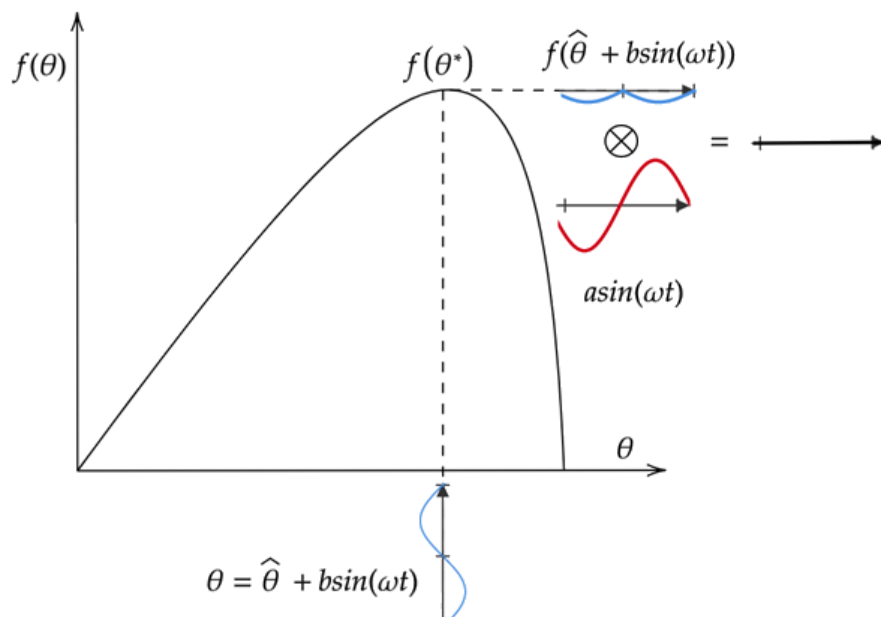


Figura 4 - Busca extremal em parte plana da curva da função objetivo.

O algoritmo de Controle Extremal alcança seu objetivo se o erro entre a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  e o  $\theta^*$  desconhecido, definido como

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (1.1)$$

converge para zero ou para um valor pequeno. A partir da Figura 1, a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  é governada pela equação diferencial  $\dot{\hat{\theta}} = k \sin(\omega t) f(\theta)$ , o que significa que o erro de estimativa (1.1) é governado por

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = k a \sin(\omega t) \left[ f^* + \frac{f''}{2} (\tilde{\theta} + a \sin(\omega t))^2 \right]. \quad (1.2)$$

Na Figura 1,  $f^*$ ,  $f''$  e  $\theta^*$  são todos desconhecidos. O projetista necessita conhecer o sinal de  $f''$ , ou seja, se o mapeamento quadrático possui um máximo ou um mínimo, e escolher o ganho de adaptação  $k$  tal que  $\text{sgn}(k) = -\text{sgn}(f'')$ . Também é necessário escolher uma frequência  $\omega$  relativamente grande comparada aos parâmetros  $a$ ,  $k$ ,  $f''$ .

Expandindo o lado direito da equação (1.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}(t)}{dt} = & k a f^* \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{média} = 0} + k a^3 \frac{f''}{2} \underbrace{\sin^3(\omega t)}_{\text{média} = 0} \\ & + k a \frac{f''}{2} \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{rápido, média} = 0} \underbrace{\tilde{\theta}(t)^2}_{\text{lento}} \\ & + k a^2 f'' \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{\text{rápido, média} = 1/2} \underbrace{\tilde{\theta}(t)}_{\text{lento}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Utilizando o procedimento de teoria da média (*Averaging Theory*) [11], é possível substituir os sinais senoidais acima por seus valores médios, produzindo o "sistema médio",

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}}{dt} = \frac{\overbrace{k f''}^{<0}}{2} a^2 \tilde{\theta}_{av}, \quad (1.4)$$

que é exponencialmente estável.

A teoria da média proporciona a garantia da existência de uma frequência  $\omega$  grande o suficiente tal que se a estimativa inicial  $\theta(0)$  é suficientemente próxima do  $\theta^*$  desconhecido, tem-se

$$|\theta(t) - \theta^*| \leq |\theta(0) - \theta^*| e^{\frac{k_f'' a^2}{2}} + O\left(\frac{1}{\omega} + a\right), \forall t \geq 0. \quad (1.5)$$

A desigualdade (1.5) traz a garantia de que, se  $a$  for pequeno e  $\omega$  grande, a entrada  $\theta(t)$  convergirá exponencialmente para um pequeno resíduo ao redor do  $\theta^*$  desconhecido e, conseqüentemente, a saída  $f(\theta(t))$  convergirá para uma vizinhança da saída ótima  $f^*$ .

## 1.2 Controle Extremal para Mapeamentos Estáticos Multivariáveis

Para mapeamentos estáticos, o Controle Extremal é uma extensão direta do caso de entrada única mostrado na Figura 1 para o caso de entradas múltiplas mostrado na Figura 5, sendo  $\theta$  o vetor de entrada  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ . O algoritmo aplica o sinal vetorial de perturbação aditiva  $S(t)$  dado em (1.6) e o sinal vetorial de demodulação  $M(t)$  dado em (1.7).

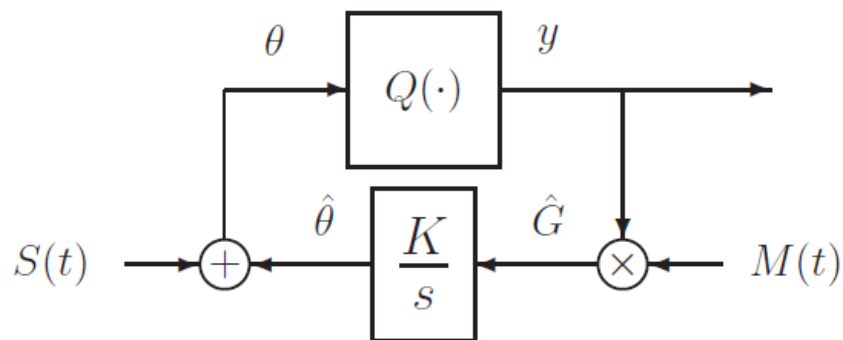


Figura 5 - Algoritmo de Controle Extremal para um mapeamento multivariável  $y = Q(\theta)$ .

O algoritmo faz a medição do sinal escalar  $y(t) = Q(\theta(t))$ , em que  $Q(\cdot)$  é um mapeamento desconhecido do qual a entrada é o vetor  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ . O

gradiente é estimado por  $\hat{G}(t) = M(t)y(t)$  com a ajuda dos sinais

$$S(t) = [a_1 \sin(\omega_1 t) \cdots a_n \sin(\omega_n t)]^T, \quad (1.6)$$

$$M(t) = \left[ \frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \cdots \frac{2}{a_n} \sin(\omega_n t) \right]^T, \quad (1.7)$$

que possuem amplitudes  $a_i$  das perturbações diferentes de zero com  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por outro lado, a matriz de ganhos  $K$  é diagonal,  $Q(\theta) = Q^* + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T H(\theta - \theta^*)$ .

De forma a garantir a convergência, deve-se selecionar  $\omega_i \neq \omega_j$ . Isto é fundamental para diferenciar o caso de múltiplas entradas do caso de entrada única.

De forma adicional, por simplicidade na análise de convergência, deve-se escolher  $\omega_i/\omega_j$  como um número racional e  $\omega_i + \omega_j \neq \omega_k$  para  $i, j$  e  $k$  distintos.

Se o mapeamento desconhecido é quadrático, o sistema médio é dado por

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av} = K H \tilde{\theta}_{av}, \quad H = \text{Hessiana}. \quad (1.8)$$

A matriz Hessiana de uma função é a matriz quadrada com "n" colunas e "n" linhas ( $n \times n$ ) das derivadas parciais de segunda ordem da função. No caso do mapeamento  $Q(\cdot)$  ter um máximo que é localmente quadrático (implicando em  $H^T < 0$ ), e se forem escolhidos elementos da matriz de ganhos  $K$  positivos, o algoritmo de Controle Extremal será localmente convergente. Entretanto, a taxa de convergência depende da Hessiana desconhecida  $H$ . Esta fragilidade do algoritmo de Controle Extremal baseado no método Gradiente é contornada com o algoritmo de Controle Extremal baseado no método de Newton, como será discutido na Seção 1.3 adiante.

A versão estocástica do algoritmo da Figura 5 também existe, na qual  $S(t)$  e  $M(t)$  são substituídos por

$$S(\eta(t)) = [a_1 \sin(\eta_1(t)) \cdots a_n \sin(\eta_n(t))]^T, \quad (1.9)$$

$$M(\eta(t)) = \left[ \frac{2}{a_1(1 - e^{-q_1^2})} \sin(\eta_1(t)) \cdots \frac{2}{a_n(1 - e^{-q_n^2})} \sin(\eta_n(t)) \right]^T, \quad (1.10)$$

onde  $\eta_i = \frac{q_i \sqrt{\epsilon_i}}{\epsilon_i s + 1} [\dot{W}_i]$  e  $[\dot{W}_i]$  são processos de ruído branco independentes.

### 1.3 Algoritmo de Controle Extremal Tipo Newton para Mapeamentos Estáticos

Uma versão do algoritmo de Controle Extremal do tipo Newton, mostrada na Figura 6, garante que a taxa de convergência seja definida pelo projetista.

Isto se dá, diferentemente de ser dependente da Hessiana desconhecida do mapeamento, assim como no método Gradiente.

Na Figura 6, a excitação multiplicativa  $N(t)$  ajuda gerar a Hessiana estimada  $\frac{\partial^2 Q(\theta)}{\partial \theta^2}$  com  $\hat{H}(t) = N(t)y(t)$ .

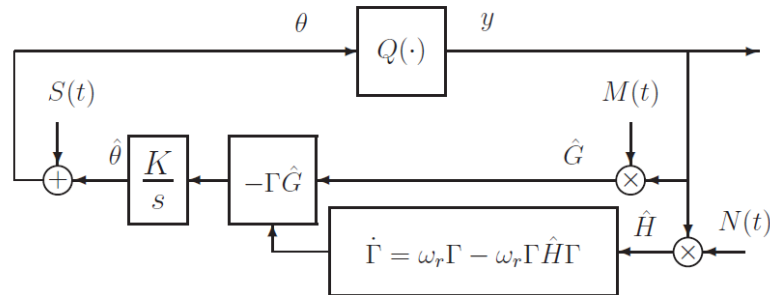


Figura 6 - O método de Newton para Controle Extremal de mapeamentos estáticos com múltiplas entradas.

Os elementos da matriz de demodulação  $N(t)$  para gerar a Hessiana estimada são dados em [12] por

$$N_{ii}(t) = \frac{16}{a_i^2} \left( \sin^2(\omega_i t) - \frac{1}{2} \right), \quad (1.11)$$

$$N_{ij}(t) = \frac{4}{a_i a_j} \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t). \quad (1.12)$$

A equação diferencial da matriz de Riccati  $\Gamma(t)$  gera uma estimativa da matriz inversa da Hessiana, evitando inversões de matrizes na estimativa da Hessiana que podem ser singulares durante o regime transitório.

A equação de Riccati é uma equação diferencial ordinária não linear, de primeira ordem, da forma:



$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + x(x)y^2, \quad (1.13)$$

onde  $a(x)$ ,  $b(x)$  e  $c(x)$  são três funções que dependem de  $x$ .

Para o mapeamento quadrático, o sistema médio nas variáveis de erro  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ ,  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - H^{-1}$  é dado por:

$$\frac{d\tilde{\theta}^{av}}{dt} = -K \tilde{\theta}^{av} - K \underbrace{\tilde{\Gamma}^{av} H \tilde{\theta}^{av}}_{\text{quadrático}}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d\tilde{\Gamma}^{av}}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}^{av} - \omega_r \underbrace{\tilde{\Gamma}^{av} H \tilde{\Gamma}^{av}}_{\text{quadrático}}. \quad (1.15)$$

Os autovalores do sistema linearizado de (1.14) e (1.15) são determinados por  $K$  e  $\omega_r$ , independentes da Hessiana desconhecida  $H$  e a taxa de convergência (local) pode então ser definida arbitrariamente pelo projetista.

#### 1.4 Controle Extremal para Sistemas Dinâmicos

O Controle Extremal se estende de forma relativamente direta de mapeamentos estáticos para sistemas dinâmicos, contanto que as dinâmicas sejam estáveis e os parâmetros do algoritmo sejam escolhidos de forma que a dinâmica do algoritmo seja mais lenta que a da planta. O respectivo algoritmo é indicado na Figura 7.

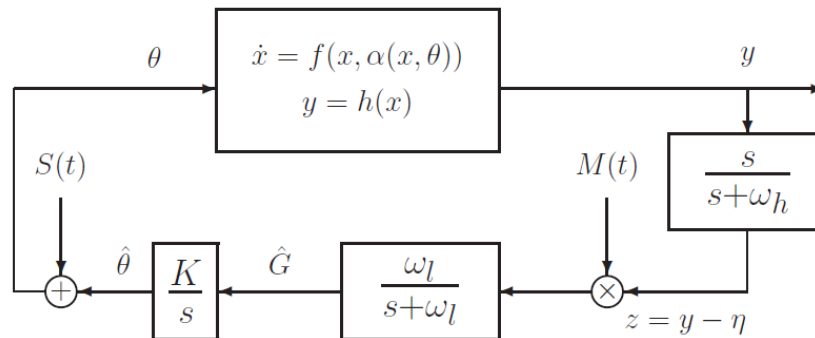


Figura 7 - O algoritmo de Controle Extremal na presença de dinâmicas com um mapeamento cujo equilíbrio  $\theta \rightarrow y$  satisfaça as mesmas condições do caso estático.

As condições técnicas para a convergência com a presença de dinâmicas são que o equilíbrio  $x = l(\theta)$  do sistema  $\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta))$ , em que  $\alpha(x, \theta)$  é a lei de controle de uma malha interna de realimentação, são localmente exponencialmente estáveis em  $\theta$  e que, dado o mapeamento de saída  $y = h(x)$ , exista pelo menos um  $\theta^* \in \mathcal{I}$  tal que  $\frac{\partial}{\partial \theta}(h \circ l)(\theta^*) = 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(h \circ l)(\theta^*) = H < 0$ ,  $H = H^T$ .

A análise de estabilidade na presença de dinâmicas emprega numa ordem específica a teoria da média e de perturbações singulares [11]. As linhas de projeto para a seleção dos parâmetros do algoritmo seguem a análise. Apesar dos detalhes serem muitos para serem listados aqui, eles garantem que a dinâmica da planta esteja numa escala mais rápida de tempo, as perturbações estejam numa escala média de tempo e o algoritmo de Controle Extremal numa escala lenta de tempo.

## 2 SISTEMAS DE CONTROLE COM DADOS AMOSTRADOS E EM REDE: UMA ABORDAGEM COM ATRASOS

### 2.1 Preliminares

Os sistemas de controle modernos geralmente empregam tecnologia digital para implementação do controlador, ou seja, temos sistemas de controle com dados amostrados. Considere o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

onde  $A$  e  $B$  são matrizes constantes. O sinal de controle é considerado para ser gerada uma função de um retentor de ordem zero (ZOH)

$$u(t) = u_d(t_k), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad (2.2)$$

com uma sequência de tempos de espera

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \quad (2.3)$$

onde  $u_d$  é um sinal de controle em tempo discreto. O intervalo de amostragem pode ser constante  $t_{k+1} - t_k \equiv h$  ou variável com dependente de  $kt_{k+1} - t_k = h_k$ . No contexto de Sistemas de Controle em Rede, o intervalo de amostragem pode de fato ser variável.

Assume-se que o intervalo de amostragem é limitado

$$t_{k+1} - t_k \leq h \quad \forall k \in Z_+, \quad (2.4)$$

onde  $h$  é conhecido.

## 2.2 Discretização de Sistemas LTI com Dados Amostrados

Considerando uma lei de controle via realimentação de estado da forma

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (2.5)$$

que, para todos os intervalos de amostragem satisfaçam a premissa (2.1), estabiliza o sistema. O sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad A_1 = BK. \quad (2.6)$$

Sob a hipótese de amostragem periódica com  $t_{k+1} - t_k \equiv h$ , o seguinte é válido:

$$x(t) = e^{A(t-k)}x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A(t-s)} ds A_1 x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \forall k \in Z_+. \quad (2.7)$$

Isso resulta no sistema em tempo discreto

$$x(t_{k+1}) = e^{Ah}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} ds A_1 x(t_k), \quad k \in Z_+. \quad (2.8)$$

que pode ser representado como

$$x(t_{k+1}) = Dx(t_k), \quad D = e^{Ah} + \int_0^h e^{As} ds A_1, \quad k \in Z_+. \quad (2.9)$$

O sistema (2.9) é assintoticamente estável se  $\lambda(D) < 1$ , onde  $D$  é a matriz de Schur. Uma matriz Schur permite escrever uma matriz quadrada complexa arbitrária como unitariamente equivalente a uma matriz triangular superior cujos elementos diagonais são os autovalores da matriz original.

Sob amostragem variável, o sistema LTV em malha fechada (2.6) é reduzido ao sistema de tempo discreto

$$x(t_{k+1}) = D_k x(t_k), \quad D_k = e^{Ah_k} + \int_0^{h_k} e^{As} ds A_1. \quad (2.10)$$

Denota

$$\max_{\theta \in [0, h]} |e^{A\theta}| + \max_{\theta \in [0, h]} \left| \int_0^\theta e^{A\xi} d\xi \right|. \quad (2.11)$$

Então, considerando (2.1), a seguinte desigualdade segue de (2.7)

$$|x(t)| \leq M|x(t_k)|, \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.12)$$

Portanto, a estabilidade do sistema linear de tempo discreto (2.10) é equivalente à estabilidade do sistema de tempo contínuo (2.6).

### 2.3 Efeitos da Amostragem na Estabilidade

O sistema de dados amostrados (2.6) pode ser considerado como um sistema em tempo contínuo com um atraso variável no tempo, linear por partes

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = t - t_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (2.13)$$

Veja a Figura 8 para o gráfico de um atraso em forma de dente de serra correspondente a uma amostragem variável.

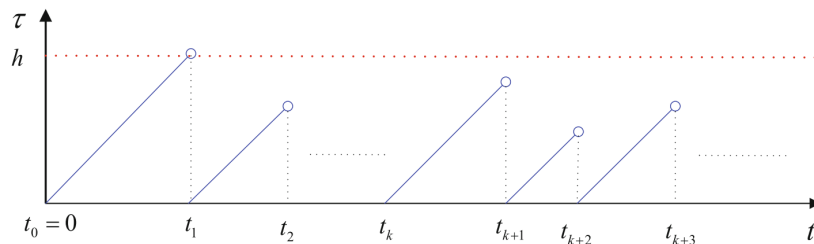


Figura 8 - Sistemas de Dados Amostrados: atraso do tipo dente de serra  $\tau(t) = t - t_k$ .

Quanto ao atraso geral variável com  $\tau(t) \leq h$ , se o sistema LTI sem atraso (o sistema em tempo contínuo) é assintoticamente estável, então para um  $h$  pequeno o suficiente, o sistema de dados amostrados preserva a estabilidade.

Considera-se o seguinte sistema muito estudado:

$$\dot{x}(t) = -x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

O sistema em tempo contínuo correspondente  $\dot{x}(t) = -x(t)$  é exponencialmente estável. É bem conhecido que a equação  $\dot{x}(t) = -x(t-\tau(t))$  com um atraso constante  $\tau$  é assintoticamente estável para  $\tau < \pi/2$  e instável para  $\tau > \pi/2$ , enquanto que para o rápido atraso variável é estável para  $\tau(t) < 1,5$  e existe um atraso desestabilizador com um limite superior maior que 1,5. Aqui,  $D$  no sistema de tempo discreto correspondente (2.9) é dado por  $D = 1 - h$ . Portanto, o sistema permanece assintoticamente estável para todas as amostragens constantes menores que 2 e torna-se instável para amostragens maiores que 2.

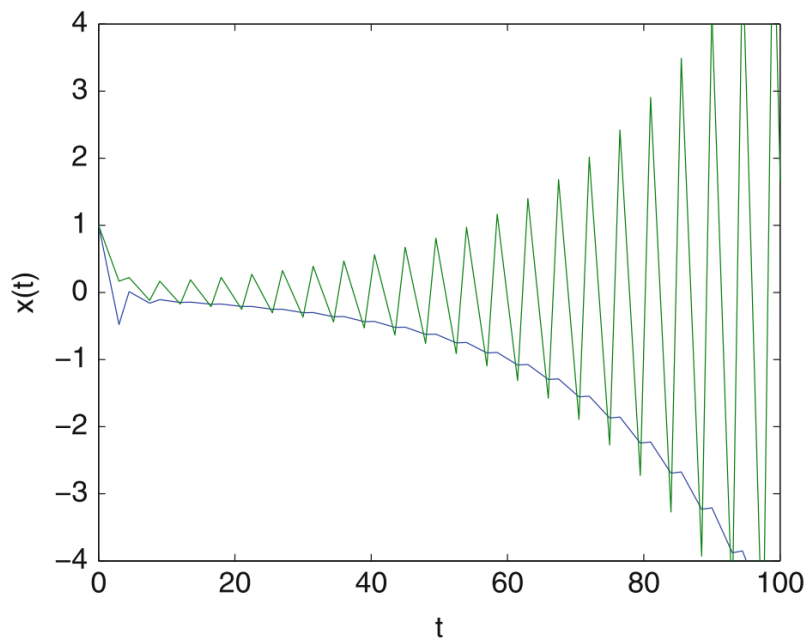


Figura 9 - Amostragem variável  $T_1 = 0,18s \rightarrow T_2 = 0,54s \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$

Considere agora a amostragem variável com  $t_{k+1} - t_k = h_k$ , onde o sistema de tempo discreto correspondente é dado por (2.10) com  $D_k = 1 - h_k$ . Para qualquer  $\epsilon > 0$  pequeno e  $h_k \leq 2 - \epsilon$ , temos  $|D_k| = |1 - h_k| \leq 1 - \epsilon$ . Portanto, o sistema em tempo discreto (e, assim, de tempo contínuo com dados amostrados) é assintoticamente estável para  $h_k \leq 2 - \epsilon, \forall \epsilon > 0$ .

No exemplo acima, o intervalo máximo para a amostragem que preserva a estabilidade assintótica é o mesmo sob intervalos de amostragem constantes ou variáveis. Normalmente, um limite superior máximo na amostragem de variável incerta que preserva a estabilidade é menor do que para a amostragem constante.

Considere o sistema [13], com dois tipos distintos de amostragem, constante versus

variável:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} u(t), \quad t \leq 0, \\ u(t) &= -\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad \forall k \in Z_+.\end{aligned}$$

Observe que o sistema em malha fechada acima, onde  $x(t_k)$  é alterado por  $x(t-h)$ , (o sistema com um atraso constante) é assintoticamente estável para o atraso constante  $h < 0,19$  e torna-se instável para  $h > 0,19$ .

No caso de uma amostragem constante, o sistema de tempo discreto equivalente é assintoticamente estável para o intervalo de amostragens constantes  $t_{k+1} - t_k = T$  para  $T \in [0, 0,5937]$ . Portanto, para intervalos de amostragens constantes  $T_1 = 0,18s$  ou  $T_2 = 0,54s$  o sistema é assintoticamente estável.

No entanto, se fizermos a amostragem usando uma sequência de intervalos de amostragem  $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$ , o sistema se torna instável (veja a Figura 9 com o gráfico do estado).

De fato, neste caso, o sistema de tempo discreto equivalente ao longo de dois instantes de amostragens pode ser representado como

$$x_{k+2} = -D_{k+1}D_k x_k, \quad k = 0, 2, 4, \dots \quad (2.15)$$

ou

$$x_{p+1} = \tilde{D}x_p, \quad \tilde{D} = D_1D_0 = \begin{bmatrix} 0,8069 & -3,2721 \\ 0,6133 & -2,1125 \end{bmatrix}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

onde  $D_k$  é definido por (2.10). Aqui,  $\tilde{D}$  não é uma matriz de Schur. Portanto, neste exemplo, um limite para intervalos de amostragem de variável incerta que preservam a estabilidade deve ser menor que 0,54 (comparado com um limite maior 0,5937 para a amostragem constante). Em [13], usando a abordagem Razumikhin e incorporações convexas, o seguinte limite superior na amostragem variável foi alcançado:  $h = 0,4683$ .

## Usando Controle com Dados Amostrados para Estabilização

Para casos em que se usa um atraso constante artificial  $h$ , que é útil para a estabilização estática de saída, pode-se aplicar um controlador com dados amostrados com medições de dados amostrados atrasadas. Observe que no tempo contínuo, tal controlador atrasado não é fácil de se implementar, uma vez que todas as medições em  $[t - h, t]$  devem ser armazenadas em um buffer. Diferentemente disto, um controlador com dados amostrados precisa armazenar apenas um número finito das últimas medidas.

Para o controle com dados amostrados de sistemas lineares, o projeto baseado em observador é complicado e pode levar a resultados muito conservadores. Por outro lado, uma simples realimentação estática de saída usando as medições anteriores pode ser mais fácil de projetar e implementar. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ u(t) &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t_k - \eta), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

O sistema em malha fechada com  $x(t_k - \eta)$  alterado por  $x(t - \eta)$  é estável para  $0, 1003 < \eta < 1, 72$  e instável se  $\eta \in [0; 0, 1]$  [14]. Este é um exemplo de sistema que pode ser estabilizado usando um atraso constante artificial. Portanto, escolhendo  $\eta$  entre  $[0, 1003; 1, 72]$  e uma amostragem rápida o suficiente, pode-se assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada. Na verdade, foi descoberto em [15] que o sistema de malha fechada é assintoticamente estável sob qualquer amostragem variável ou constante  $t_{k+1} - t_k \leq h$  para os valores de  $\eta$  e  $h$  na Tabela 1.

Tabela 1 valores de  $\eta$  e  $h$

$\eta$	0,5	0,65	0,8
$h$	0,57	0,74	0,85

Este resultado foi alcançado aplicando-se um funcional de Lyapunov discretizado.



Considere agora o controlador com dados amostrados não atrasado

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

que nos leva ao sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0,1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Pode se verificar que o sistema é assintoticamente estável sob a amostragem constante  $t_{k+1} - t_k = h$  para  $h \in [0,21; 2,02]$ .

Em [16], usando o teorema de Lyapunov de tempo discreto, foi mostrado que o controlador com dados amostrados sem atraso (2.17), estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada para os seguintes intervalos de amostragem variáveis:

$$0,21 \leq t_{k+1} - t_k \leq 0,43; \quad 0,4 \leq t_{k+1} - t_k \leq 1,25; \quad 1,2 \leq t_{k+1} - t_k \leq 1,57. \quad (2.18)$$

Considere o seguinte integrador duplo incerto:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g(t) & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \\ y(t_k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

onde  $|g(t)| \leq 0,1$ . Este sistema não é estabilizável pela lei de controle  $u(t) = Ky(t)$  contínua sem atraso ou a realimentação estática  $u(t) = Ky(t_k), t_k \leq t < t_{k+1}$  com dados amostrados. Considere o caso de amostragem constante com  $t_{k+1} - t_k = h$ . Foi introduzido em [15] que o controlador de dados amostrados

$$u(t) = -0,35y(t_k) + 0,1y(t_k - 3), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

que usa as medições  $y(t_k)$  atual e  $y(t_{k-3})$  atrasada, estabilizando assintoticamente o sistema em malha fechada para os seguintes valores de  $h : h \in [10^{-5} \ 0,499]$ .

## 2.4 Três abordagens principais para o controle de sistemas com dados amostrados

Três abordagens principais foram usadas para o controle de dados amostrados e, posteriormente, para *NCS* (*Networked Control System*): o tempo discreto, o tempo de atraso e a abordagem de sistema impulsivo/híbrido. Na abordagem de tempo discreto, o sistema é discretizado [17].

No caso de sistemas do tipo LTI, a discretização é obtida usando (2.7), que nos leva ao sistema de tempo discreto (2.10). A vantagem dessa discretização está na simplicidade das condições de estabilidade.

Além disso, para sistemas LTI, essas condições são necessárias e suficientes para a estabilidade sob a taxa de amostragem constante e conhecida. No entanto, torna-se complicado para sistemas com matrizes incertas e/ou período de amostragem incerto.

A principal desvantagem é que a discretização perde o conhecimento sobre o comportamento inter-amostragem. Dificilmente, pode ser usado para análise de desempenho, assim como para controle e rastreamento de sistemas não lineares gerais.

A segunda abordagem é a abordagem de atraso de entrada, onde o sistema de dados amostrados (2.6) é modelado como um sistema de tempo contínuo (2.13) com a entrada de controle atrasada [18] e [19].

O controle robusto de sistemas com dados amostrados foi iniciado em [20] via funcionais de Lyapunov-Krasovskii [21] para sistemas com atrasos de variação rápida (com  $\dot{\tau} = 1$  quase sempre).

A abordagem de atraso se tornou popular em NCSs, sendo aplicada a sistemas incertos sob amostragem incerta e atraso de rede induzido, veja [22] e [23].

A terceira abordagem é a abordagem de sistema impulsivo [24] e [25]. Aumentando-se o estado do sistema  $\xi(t) = [x^T(t) \ u^T(t)]$  e considerando

$$\dot{u}(t) = 0, \quad t \neq t_k, \quad u(t_k) = Kx(t_k) \quad (2.20)$$

tem-se o seguinte modelo impulsivo:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t), \quad t \neq t_k, \\ \dot{\xi}(t) &= \begin{bmatrix} x(t_k^-) \\ Kx(t_k^-) \end{bmatrix}, \quad t = t_k.\end{aligned}$$

A abordagem impulsiva foi estendida ao caso de amostragem variável com um limite superior conhecido, onde uma função de Lyapunov descontínua foi introduzida [26]. O último método melhorou os resultados existentes, baseado na abordagem do atraso de entrada via funcionais de Lyapunov independentes no tempo, e deu uma nova visão para funcionais de Lyapunov dependentes no tempo sugeridos em [27]. Este último método será apresentado brevemente na próxima seção.

## 2.5 Análise de Estabilidade e Ganho- $L_2$ de Sistemas com Dados Amostrados

Até 2009, os funcionais convencionais de Lyapunov-Krasovkii independentes no tempo para sistemas com atrasos de variação rápida foram aplicados a sistemas com dados amostrados [20].

Esses funcionais não aproveitavam a evolução da forma dente de serra dos atrasos induzidos por amostragem e retenção. A última desvantagem foi removida em [27], onde funcionais de Lyapunov dependentes no tempo para sistemas com dados amostrados foram introduzidos.

Em alguns exemplos numéricos bem estudados, os resultados de [27] se aproximam dos valores analíticos do mínimo ganho- $L_2$  e do intervalo de amostragem máximo, preservando-se a estabilidade.

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ z(t) &= C_0x(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a perturbação,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a

entrada de controle e  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída controlada das matrizes,  $A; B_1; B_2; C_0$  e  $D$  são constantes e de dimensões apropriadas.

O sinal de controle é gerado por uma função ZOH (2.2) com uma sequência de tempos de espera (2.3), onde  $u_d$  é um sinal de controle em tempo discreto.

Define-se o seguinte índice de desempenho para um determinado escalar  $\gamma > 0$ :

$$J = \int_0^\infty [z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)] ds. \quad (2.22)$$

Considere agora uma lei de controle via realimentação de estado na forma

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k \in Z_+, \quad (2.23)$$

tal que para todas as amostragens que satisfaçam a premissa (2.1) estabiliza-se internamente o sistema (2.21) e leva a  $J < 0$  para  $x(0) = 0$  e para todo  $w \in L_2[0, \infty]$  diferente de zero.

Seguindo [19], podemos representar a lei de controle digital como um controle atrasado como se segue:

$$u(t) = u_d(t_k) = u_d(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = t - t_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (2.24)$$

O objetivo é analisar a estabilidade exponencial e o ganho- $L_2$  do sistema em malha fechada (2.21) e (2.23):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)) + B_1w(t), \\ z(t) &= C_0x(t) + C_1x(t - \tau(t)), \\ T \in [t_k, t_{k+1}], \quad \tau(t) &= t - t_k, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde  $\dot{\tau}(t) = 1$  para  $t \neq t_k$  e

$$A_1 = B_2K, \quad C_1 = DK. \quad (2.26)$$

Na hipótese (2.1),  $\tau(t) \in [0, h]$ .

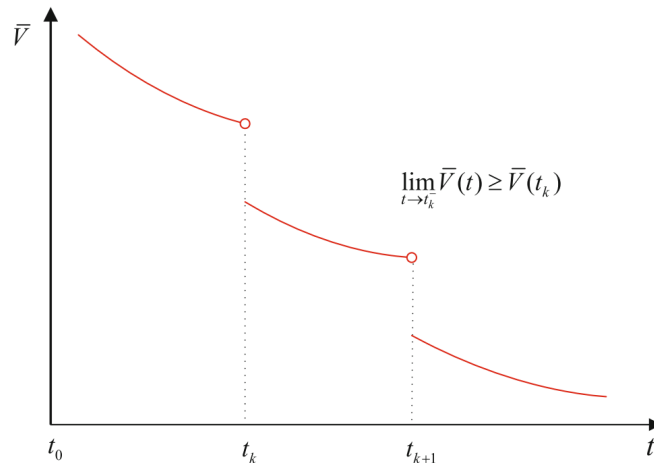


Figura 10 - Funcional de Lyapunov descontínuo no tempo.

### Método Funcional de Lyapunov Dependente no Tempo

Em [20], o funcional de Lyapunov com  $h$ -dependente foi considerado correspondendo à análise de (2.25) no caso de atraso com variação rápida (isto é, no caso de não haver restrições na derivada do atraso).

Em [26], uma função de Lyapunov que depende de  $t_k$  foi introduzida para o sistema de dimensão finita correspondente com saltos. Seguindo [27], emprega-se abaixo um funcional de Lyapunov dependente do tempo  $V(t, x_1, \dot{x}_t) = \bar{V}(t)$  para análise do sistema com retardo de tempo (2.25).

A função  $\bar{V}(t)$  pode ser descontínua no tempo, mas não é permitido que ela cresça nos saltos, como mostrado na Figura 10.

Considere agora números positivos  $\alpha, \beta$  e um funcional  $V : \mathbb{R}_+ \times W[-h, 0] \times L_2(-h, 0) \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$\alpha|\phi(0)|^2 \leq V(t, \phi, \dot{\phi}) \leq \beta\|\phi\|_w^2. \quad (2.27)$$

Considere também a função  $\bar{V}(t) = V(t, x_t, \dot{x}_t)$ , que é contínua para  $x(t)$  satisfazendo (2.25), localmente e contínua em  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \in Z_+$ , isto é, contínua em todo intervalo  $[t_k, t_k + \Delta t] \subset [t_k, t_{k+1}]$  satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow t_k} \bar{V}(t) \geq \bar{V}(t_k). \quad (2.28)$$

Dado  $\delta > 0$ , se junto com  $w = 0$  em (2.25)

$$\frac{d}{dt}\bar{V}(t) + 2\delta\bar{V}(t) \leq 0 \quad \text{para todo } t, \quad (2.29)$$

então (2.25) com  $w = 0$  é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento de  $\delta$ .

Para  $\gamma > 0$ , se

$$\frac{d}{dt}\bar{V}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0, \quad \text{para todo } t, \quad \forall w(t) \neq 0, \quad (2.30)$$

então a função custo (2.22) atinge  $J < 0$  para todo  $w \in L_2[0, \infty]$  diferentes de zero e para a condição inicial zero.

A partir de (2.27) e (2.29), tem-se para  $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\alpha|x(t)|^2 \leq \bar{V}(t) \leq e^{-2\delta(t-t_k)}\bar{V}(t_k). \quad (2.31)$$

Levando em consideração (2.28), obtém-se

$$e^{-2\delta(t-t_k)}\bar{V}(t_k) \leq e^{-2\delta(t-t_k)}\bar{V}(t_k), \leq e^{-2\delta(t-t_{k-1})}\bar{V}(t_{k-1}) \leq \dots \leq e^{-2\delta t}\bar{V}(0) \leq \beta e^{-2\delta t}\|x_0\|_W^2,$$

que resulta em  $\alpha|x(t)|^2 \leq \beta e^{-2\delta t_0}\|x_0\|_W^2$ .

Dado  $N \gg 1$ , integramos (2.30) de 0 a  $t_N$ . Levando em consideração (2.28), tem-se

$$\bar{V}(t_N) - \bar{V}(t_{N-1}) + \bar{V}(t_{N-1}) - \bar{V}(t_{N-2}) \dots + \bar{V}(t_1) - \bar{V}(0) + \int_0^{t_N} [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)] dt < 0.$$

Visto que  $\bar{V}(t_N) \geq 0$ ,  $\bar{V}(t_{k-1}) - \bar{V}(t_{k-1}) \geq 0$  para  $k = 2, \dots, N$  e  $\bar{V}(0) = 0$ , encontra-se

$$\int_0^{t_N} [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)] dt < 0. \quad (2.32)$$

Assim, para  $N \rightarrow \infty$ , chega-se a  $J < 0$ .

### Condições de Estabilidade Simples: Amostragem Variável

Abaixo, encontra-se o funcional simples para estabilidade exponencial com uma taxa de decaimento  $\delta > 0$ :

$$V_s(t, x(t), \dot{x}(t)) = \bar{V}(t) = x^T(t)Px(t) + V_U(t, \dot{x}_t), \quad (2.33)$$

onde

$$V_U(t, \dot{x}_t) = (h - \tau(t)) \int_{t-\tau t}^t e^{2\delta(s-t)} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s) ds, \quad \tau(t) = t - t_k, \quad (2.34)$$

e  $P > 0$  e  $U > 0$ . Em [20] e [23], funcionais de Lyapunov independentes do tempo são geralmente empregados. O termo descontínuo  $V_U$  não aumenta ao longo dos saltos, pois  $V_U \geq 0$  e  $V_U$  desaparece após os saltos, porque  $x(t)|_{t=t_k} = x(t - \tau(t))|_{t=t_k}$ . Assim, a condição  $\lim_{t \rightarrow t_k} \bar{V}(t) \geq \bar{V}(t_k)$  se mantém.

Sendo  $\frac{d}{dt}x(t - \tau(t)) = (1 - \dot{\tau}(t)) = 0$ , encontra-se

$$\frac{d}{dt}V_U(t, \dot{x}_t) + 2\delta V_U(t, \dot{x}_t) = \int_{t-\tau(t)}^t e^{2\delta(s-t)} \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s) ds + (h - \tau(t))\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t) \quad (2.35)$$

e assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{V}(t) + 2\delta\bar{V}(t) &\leq 2\dot{x}^T(t)Px(t) + 2\delta x^T(t)Px(t) \\ &- e^{-2\delta h} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s) ds + (h - \tau(t))\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Denotando-se

$$v_1 = \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds, \quad (2.37)$$

entende-se por  $v_1|_{\tau(t)=0}$  o seguinte:  $\lim_{\tau(t) \rightarrow 0} v_1 = \dot{x}(t)$ .

Aplica-se a desigualdade de Jensen

$$\int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)U\dot{x}(s) ds \geq \tau(t)v_1^T U v_1, \quad (2.38)$$

e o método descritor, onde o lado direito da expressão

$$0 = 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T][(A + A_1)x(t) - \tau(t)A_1v_1 - \dot{x}(t)], \quad (2.39)$$

com algumas matrizes  $n \times n$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , são adicionados no lado direito de (2.36). Ajustando  $\eta_1(t) = \text{col} \{x(t), \dot{x}(t), v_1\}$ , obtém-se

$$\frac{d}{dt}\bar{V}(t) + 2\delta\bar{V}(t) \leq \eta_1^T(t)\psi_s\eta_1(t) \leq 0, \quad (2.40)$$

se a seguinte desigualdade de matriz for viável:

$$\psi_s = \begin{bmatrix} P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2 + 2\delta P & P - P_2^T + (A + A_1)^T P_3 & -\tau(t)P_2^T A_1 \\ * & -P_3 - P_3^T + (h - \tau(t))U & -\tau(t)P_3^T A_1 \\ * & * & -\tau(t)Ue^{-2\delta h} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.41)$$

A última desigualdade da matriz para  $\tau(t) \rightarrow h$  leva às seguintes LMIs:

$$\psi_{s0} = \begin{bmatrix} P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2 + 2\delta P & P - P_2^T + (A + A_1)^T P_3 \\ * & -P_3 - P_3^T + hU \end{bmatrix} < 0. \quad (2.42)$$

e

$$\psi_{s1} = \begin{bmatrix} P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2 + 2\delta P & P - P_2^T + (A + A_1)^T P_3 & -h(t)P_2^T A_1 \\ * & -P_3 - P_3^T & h(t)P_3^T A_1 \\ * & * & h(t)Ue^{-2\delta h} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.43)$$

Denotando-se  $\eta_0 = \text{col} \{x(t), \dot{x}(t)\}$ , então (2.42) e (2.43) implicam (2.41), porque

$$\frac{h - \tau(t)}{h}\eta_0^T\psi_{s0}\eta_0 + \frac{\tau(t)}{h}\eta_1^T\psi_{s1}\eta_1 < 0 \quad \forall \eta_1 \neq 0. \quad (2.44)$$

Dado  $\delta > 0$ , existem matrizes  $n \times n$  com  $P > 0$ ,  $U > 0$ ,  $P_2$  e  $P_3$  de forma



que as LMIs (2.42) e (2.43) sejam factíveis. Então o sistema (2.25) com  $w = 0$  é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento  $\delta$  para todos os instantes de amostragens variáveis que satisfaçam a condição (2.4).

Se as LMIs (2.42) e (2.43) são factíveis para  $\delta = 0$ , então (2.25) é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento pequena o suficiente.

O novo termo  $V_U(t, \dot{x}(t))$  (com  $\delta = 0$ ) substitui o termo integral independente no tempo padrão

$$V_R(\dot{x}_t) = \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds d\theta, R > 0. \quad (2.45)$$

O termo (2.45) foi modificado em [26], da seguinte forma:

$$\tilde{V}_R(t, \dot{x}_t) = \int_{t_k}^t (h - t + s) \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds, R > 0. \quad (2.46)$$

Diferenciando  $V_R(\dot{x}_t)$  e  $\tilde{V}_R(t, \dot{x}_t)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_R(t, \dot{x}_t) &= - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds + h \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) \\ &= - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds + h \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t-\tau(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (2.47)$$

e

$$\frac{d}{dt} \tilde{V}_R(t, \dot{x}_t) = - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds + h \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t). \quad (2.49)$$

Comparando agora os lados direitos de (2.35), (2.48) e (2.49), é possível ver que todos eles possuem o mesmo (para  $U = R$ ) termo integral negativo de  $t - \tau(t)$ , o que permite derivar LMIs, e diferentes termos positivos. Em (2.48) há um termo integral a mais (não necessário).

A principal vantagem de (2.34) é que o termo positivo é multiplicado por  $[h - \tau(t)]$  e, portanto, aparece apenas em um vértice (onde  $\tau(t) \rightarrow 0$ ) das LMIs resultantes. Isso é diferente da análise dependente do atraso via  $V_R$  e  $\tilde{V}_R$ , onde o mesmo termo

é multiplicado por  $h$  e aparece em ambos os vértices das LMIs resultantes.

Assim, as condições simples para a estabilidade de (2.25) com  $w = 0$  e o  $\tau(t) \in [0, h]$  de variação rápida via método descritor possui a forma:

$$\begin{bmatrix} P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2 & P - P_2^T + (A + A_1)^T P_3 & -h(t)P_2^T A_1 \\ * & -P_3 - P_3^T + hR & h(t)P_3^T A_1 \\ * & * & -hR \end{bmatrix} < 0, \quad (2.50)$$

que tem o mesmo número de variáveis de decisão como em (2.42) e (2.43), que produz as últimas LMIs. Como exemplo, considere um sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = -x(t_k), \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.51)$$

Lembramos que o sistema  $\dot{x}(t) = -x(t - \tau(t))$  com atraso constante  $\tau$  é assintoticamente estável para  $\tau(t) < \pi/2$  e instável para  $\tau(t) > \pi/2$ , enquanto para o atraso de variação rápida é estável para  $\tau(t) < 1,5$  e existe um atraso desestabilizador com um limite superior maior que 1,5.

O último significa que todos os métodos existentes, que são baseados em funcionais de Lyapunov independentes no tempo, correspondem a sistemas de análise de estabilidade com atrasos de variação rápida, e não podem garantir a estabilidade para amostragens que possam ser maiores que 1,5.

A estabilidade assintótica para todos os atrasos de variação rápida é garantida no intervalo  $[0; 0, 133]$ . Conforme mostrado em (2.14), o sistema permanece assintoticamente estável para todas amostragens constantes menores que 2 e torna-se instável para amostragens maiores que 2.

Condições apresentadas em [26] e [28] garantem a estabilidade assintótica para todas as amostragens variáveis de 1,28 até 1,57, respectivamente. Aplicando (2.1) com  $\delta = 0$ , é possível verificar que para todas as amostragens variáveis até 1,99, o sistema permanece exponencialmente estável.

As condições de (2.1) não podem ser aplicadas a (2.25) com  $A_1$  de politopo incerto, pois na desigualdade da matriz (2.41)  $A_1$  é multiplicado por  $\tau(t)$ . Além disso, termos

adicionais no funcional de Lyapunov podem melhorar ainda mais o resultados.

## 2.6 Um Modelo com Atraso no Tempo de um Sistema de Controle em Rede (NCS): Amostragem, Perdas de Pacotes e Atrasos na Comunicação

NCSs são sistemas com sensores, atuadores e nós controladores distribuídos espacialmente que trocam dados em uma rede de comunicação [29], [30].

Há vantagens e desvantagens dos NCSs em comparação aos sistemas de controle de realimentação tradicionais, onde os componentes são normalmente conectados por meio de cabos ponto a ponto.

Usar tais estruturas de controle oferece várias vantagens práticas: custos reduzidos, facilidade de instalação e manutenção e maior flexibilidade. No entanto, do ponto de vista da teoria de controle, isso leva a novos desafios.

Fechar a malha em uma rede introduz perturbações indesejáveis, como atraso, intervalos de amostragem variáveis, quantização, perdas de pacotes, restrições de comunicação e de programação, que podem afetar o desempenho do sistema e até mesmo sua estabilidade.

As mesmas três abordagens que foram usadas para o controle de dados amostrados foram posteriormente estendidas para NCSs: uma abordagem de tempo discreto [31], uma representação em sistema impulsivo/híbrido [32], [33] e uma abordagem de atraso de tempo [22], [34] e [23].

Neste tópico, será desenvolvida a abordagem de atraso de tempo para NCSs, levando em consideração as seguintes imperfeições dos NCSs: intervalos de amostragem variáveis, perdas de pacotes e atrasos induzidos pela rede. Considerando o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{12}u(t),\end{aligned}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  é a perturbação,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada

de controle e  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  é o sinal a ser controlado ou estimado,  $A, B_1, B_2, C_1$  e  $D_{12}$  são matrizes de sistema com dimensões apropriadas. Considere também o controle estático via realimentação de saída do NCS mostrado na Figura 11 e o diagrama de tempo na Figura 12.

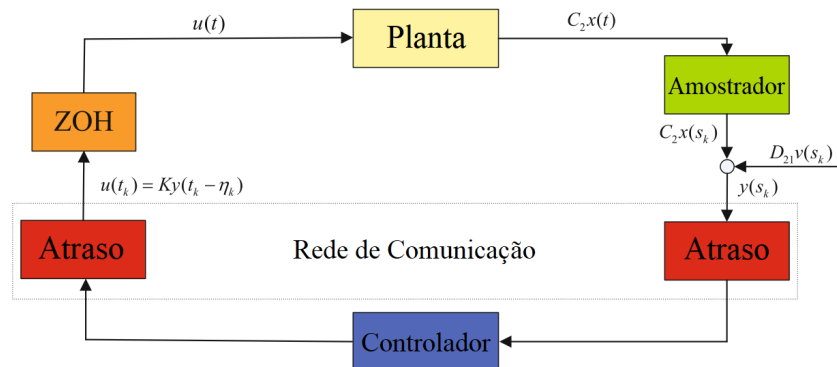


Figura 11 - Sistema de controle de realimentação de saída estático em rede

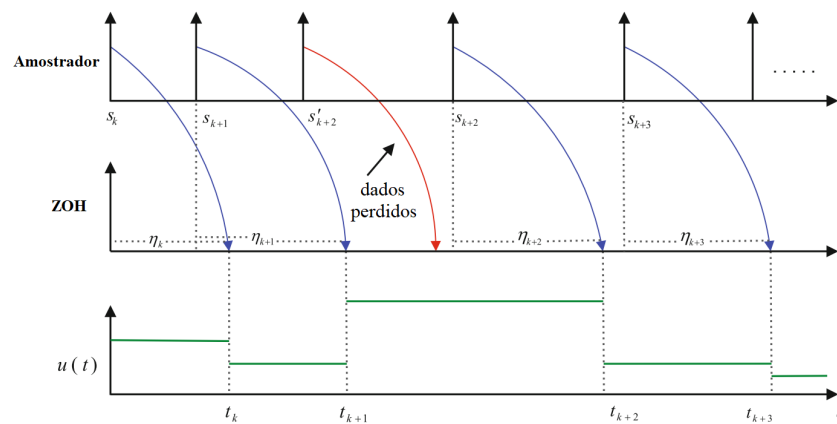


Figura 12 - O diagrama de tempo do Sistema de Controle em Rede (NCS) ( $s'_{k+2}$  é o instante de amostragem com a medição perdida)

O amostrador é orientado pelo tempo, enquanto o controlador e o ZOH são orientados por eventos (no sentido que o controlador e o ZOH atualizam suas saídas assim que recebem uma nova amostra). Assume-se que a saída de medição  $y(s_k) \in \mathbb{R}^p$  esteja disponível em instantes de amostragem discretos, tal que

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty \quad (2.52)$$

e pode ser corrompido por um sinal de ruído de medição  $v(s_k)$  :

$$y(s_k) = C_2 x(s_k) + D_{21} v(s_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.53)$$

As perdas de pacotes de rede acontecem ocasionalmente em um NCS quando há falhas de nó ou colisões de mensagens. Embora a maioria dos protocolos de rede sejam equipados com mecanismos de repetição de transmissão, eles só podem retransmitir por um período limitado.

Após esse tempo expirar, os pacotes são descartados. Além disso, para dados de controle realimentado em tempo real, como medições de sensor e sinais de controle calculados, pode ser vantajoso descartar a mensagem antiga não transmitida e transmitir um novo pacote se ele se tornar disponível. Desta forma, o controlador sempre recebe novos dados para o cálculo de controle.

Leva-se em consideração as perdas de pacotes de dados, permitindo que a amostragem não seja uniforme. A formulação  $y(s_k)$  corresponde às medições que não se perdem.

Por exemplo, denote por  $t_k$  o tempo do instante de atualização do ZOH e suponha que o sinal de atualização no instante  $t_k$  experimentou um atraso de transmissão de sinal  $\eta_k$ . O diagrama de tempo do NCS considerado com atraso e perda de pacotes é mostrado na Figura 12, onde

$$s_k = t_k - \eta_k \quad (2.54)$$

denota o tempo de amostragem dos dados que não foram perdidos.

Como em [34] e [32], permite-se que os atrasos  $\eta_k$  cresçam mais que os intervalos de amostragem  $s_{k+1} - s_k$ , desde que a sequência de tempos de atualização de entrada  $t_k$  permaneça estritamente crescente. Isso significa que se uma amostra antiga chegar ao destino após a mais recente, ela deve ser descartada.

O controlador estático via realimentação de saída tem a forma  $u(t)k) = Ky(t_k - \eta_k)$ , onde  $K$  é o ganho do controlador. Assim, considerando o comportamento do ZOH, têm-se

$$u(t)k) = Ky(t_k - \eta_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.55)$$

com  $t_{k+1}$  sendo o próximo instante de atualização do ZOH após  $t_k$ .

Estendendo a abordagem de atraso de tempo do controle de dados amostrados para NCS, define-se

$$\tau(t) = t - t_k + \eta_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (2.56)$$

assumindo-se que

$$t_{k+1} - t_k + \eta_k \leq \tau_M, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.57)$$

onde  $\tau_M$  denota o intervalo de tempo máximo entre o tempo  $s_k = t_k - \eta_k$ , no qual o estado é amostrado e o tempo  $t_{k+1}$  em que a próxima atualização chega ao ZOH. Suponha que o atraso induzido pela rede seja de limite inferior  $\eta_k \geq \eta_m$ , onde  $\eta_m \geq 0$  é um limite conhecido. Neste caso, há um atraso linear por partes limitado

$$\eta_m \leq \tau(t) = t - t_k + \eta_k \leq t_{k+1} - t_k + \eta_k = s_{k+1} + h_{k+1} - s_k \leq \tau_M \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.58)$$

com  $\dot{\tau}(t) = 1$  para  $t \neq t_k$ . Veja a Figura 13 para um exemplo de  $\tau(t)$ , onde MAD é um limite superior conhecido do atraso  $\eta_k$  induzido pela rede.

Seja MATI o intervalo de transmissão máximo permitido, o que supõe que as mensagens sucessivas do sensor sejam separadas por no máximo MATI 'unidade de tempo' [34]. Suponha que  $\delta \in \mathbb{Z}_+$  é um limite para o número máximo de perdas sucessivas. Então,

$$\tau_M = (1 + \delta)MATI + MAD. \quad (2.59)$$

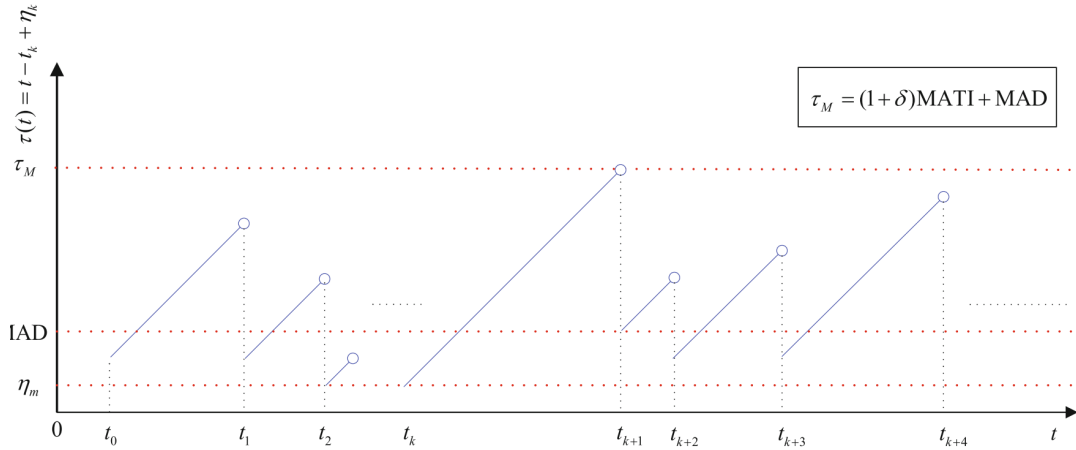


Figura 13 - NCSs: atraso de tempo linear por partes  $\tau(t)$ .

Obtém-se o seguinte modelo de atraso de tempo do sistema em malha fechada (2.52) e (2.55):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)) + A_2v(t - \tau(t)) + B_1w(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_1x(t - \tau(t)) + D_2v(t - \tau(t)),\end{aligned}\quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned}A_1 &= B_2KC_2, & A_2 &= B_2KD_{21}, \\ D_1 &= D_{12}KC_2, & D_2 &= D_{12}KD_{21}.\end{aligned}$$

Denote  $\bar{v}(t) = v(t - \tau(t))$  ( $t \geq t_0$ ). Então (2.60) há duas perturbações:  $\bar{v} \in L_2[t_0, \infty]$  e  $w \in L_2[t_0, \infty]$ , com

$$\|\bar{v}\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^{\infty} v^T(t - \tau(t))v(t - \tau(t)) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (t_{k+1} - t_k) v^T(t_k - \eta_k)v(t_k - \eta_k). \quad (2.61)$$

Para um determinado escalar  $\gamma > 0$ , define-se o seguinte índice de desempenho [34] e [35]:

$$\begin{aligned}J &= \|\bar{z}\|_{L_2}^2 - \gamma^2(\|\bar{v}\|_{L_2}^2 + \|w\|_{L_2}^2) \\ &= \int_{t_0}^{\infty} [z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)] ds - \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} (t_{k+1} - t_k) v^T(t_k - \eta_k)v(t_k - \eta_k).\end{aligned}\quad (2.62)$$

O objetivo é encontrar um controlador tal como (2.55) que estabilize exponencialmente o sistema e que leve a um ganho- $L_2$  de (2.60) menor que  $\delta$ . O último significa que  $J < 0$  para a função inicial zero e para todos os diferentes de zero  $w \in L_2, v \in l_2$ , bem como para todos os intervalos de amostragem permitidos, perdas de pacotes de dados e atrasos induzidos pela rede, satisfazendo (2.57).

Nota-se que o último termo do índice de desempenho  $J$  leva em consideração as taxas de

atualização da medição e, portanto, está relacionado à energia do ruído de medição [35]. Para o controle de dados amostrados em intervalos de amostragem uniformes  $\eta_k \equiv 0$ , um índice de desempenho convencional tem a seguinte forma [25]

$$J_{samp} = \int_{t_0}^{\infty} [z^T(s)z(s) - \gamma^2 w^T(s)w(s)] ds - \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} v^T(t_k)v(t_k). \quad (2.63)$$

O índice  $J_{samp}$  tem um pouco de sentido físico para os NCSs, pois não leva em consideração as taxas de atualização.

O sistema em malha fechada, considerando (2.60), pode ser visto como um sistema com um intervalo de atraso de variação rápida  $\tau(t) \in [\eta_m, \tau_M]$ . Considerando um funcional de Lyapunov padrão simples para sistemas com atrasos que variam no tempo  $[\eta_m, \tau_M]$ :

$$\begin{aligned} V(t, x_t, \dot{x}_t) &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-\eta_m}^t x^T(s)S_0x(s)ds + \int_{t-\tau_M}^{t-\eta_m} x^T(s)S_1x(s)ds + \\ &\quad \eta_m \int_{-\eta_m}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_0\dot{x}(s)dsd\theta + (\tau_M - \eta_m) \int_{-\tau_M}^{-\eta_m} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta, \\ &\quad P > 0, \quad S_j > 0, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Temos a seguinte condição

$$\frac{d}{dt}V(t, x_t, \dot{x}_t) + |z(t)|^2 - \gamma^2[|w(t)|^2 + |v(t - (\tau(t)))|^2] \leq -\varepsilon[|x(t)|^2 + |w(t)|^2 + |v(t - \tau(t))|^2] \quad (2.65)$$

com  $\varepsilon > 0$  garantindo a estabilidade assintótica interna e o ganho- $L_2$  de (2.60) menor que  $\gamma$ . O último segue da integração de (2.65) em  $t$  de 0 a  $\infty$ .

Até agora, foi considerado um modelo de atraso de tempo de um NCS sem desordem de pacotes. Considere agora uma situação mais geral, em que a amostra mais antiga pode chegar ao destino mais tarde do que a mais recente e em que o pacote de dados mais antigo não é descartado.

Este é o caso da desordem de pacotes. Neste caso mais geral, o modelo de atraso em malha fechada (2.60) sujeito a (2.56) permanece válido, onde  $k$  corresponde ao tempo de



atualização  $t_k$  (e não ao instante de amostragem  $s_k$ ), e onde os tempos de atualização são ordenados

$$t_0 \leq t_1 \dots \leq t_k \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty. \quad (2.66)$$

Pode acontecer que  $t_k - \eta_k \leq t_{k-1}$  para algum  $k$ .

Como exemplo, pode ser considerado o seguinte modelo linearizado do pêndulo invertido em um carrinho:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{M} \\ 0 \\ \frac{-a}{Ml} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^T + 0,1u, \quad (2.67)$$

com  $M = 3,9249kg$ ,  $m = 0,2047kg$ ,  $l = 0,2302m$ ,  $g = 9,81N/kg$ ,  $a = 25,3N/V$ .

No modelo,  $x$  e  $\theta$  representam a coordenada da posição do carrinho e o ângulo do pêndulo na vertical, respectivamente. O pêndulo livre de perturbação pode ser estabilizado por uma realimentação de estado  $u(t) = Kx(t)$  com o ganho

$$K = \begin{bmatrix} 5,825 & 5,883 & 24,941 & 5,140 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

o que leva aos autovalores do sistema em malha fechada  $-100, -2 \pm 2j, -2$ .

Na prática, as variáveis  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  e  $x$ ,  $\dot{x}$  são medidas em instantes de amostragem discretos  $t_k$  e o controle de dados amostrados (2.23) é aplicado. Deve-se encontrar o limite máximo na amostragem variável que preserva a estabilidade sob o controlador de dados amostrados de realimentação de estado com o ganho acima. Considerando a relação  $t_{k+1} - t_k \leq 0,003s$  e a condição inicial  $[x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}] = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ . Deve-se encontrar o custo garantido resultante  $J = \int_0^\infty Z^T(t)z(t)dt$ . Supondo que o controle de dados amostrados  $u(t) = Kx(t_k)$  está sujeito à saturação  $|u| \leq 5$ .

Deixamos a amostragem variável satisfazer a desigualdade  $t_{k+1} - t_k \leq 0.003s$ . Encontrar  $K$  que estabilize o sistema e leve ao maior domínio de atração, passa a ser o objetivo de controle. A lei de controle resultante pode ser considerada como aquela com o atraso de variação rápida  $\tau(t) \in [0, \tau_M]$ :

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = t - t_k + \eta_k \leq t_{k+1} - t_k + \eta_k \leq \tau_M. \quad (2.69)$$

Assumindo, como anteriormente,  $|u| \leq 5$  e escolhendo  $\tau_M = 0,003$ , deve-se encontrar  $K$  que estabilize o sistema e leve ao maior domínio de atração possível.

### 3 CONTROLE EXTREMAL EM REDE COM DADOS AMOSTRADOS

A Figura 14 apresenta um sistema de controle extremal baseado em rede para um mapeamento multivariável estático não-linear, considerando o efeito de atraso provocado pelas redes de comunicação, conforme [36]:

$$Q(\Theta(t)) = Q^* + \frac{1}{2}(\Theta(t) - \theta^*)^T H(\Theta(t) - \theta^*), \quad (3.1)$$

onde  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz Hessiana,  $H > 0$  (positivo definida). A Hessiana é uma matriz quadrada com "n" colunas e "n" linhas (n X n) das derivadas parciais de segunda ordem da função. Por isto, esta matriz descreve a curvatura local da função "f". O parâmetro  $\theta_k \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle amostrado,  $\Theta(t) \in \mathbb{R}^m$  o sinal de controle após a conversão digital analógico realizada pelo ZOH,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída,  $y(s_k) \in \mathbb{R}^p$  a saída amostrada pelo sensor,  $S(t)$  e  $M(t)$  são vetores de perturbação senoidal ou *dither* e  $\hat{G}(t)$  é chamado de estimativa do vetor gradiente.

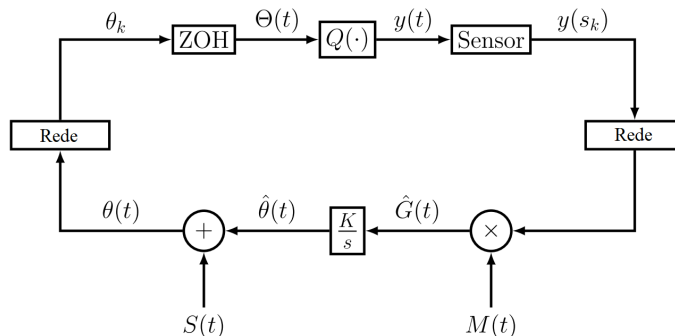


Figura 14 - Esquema de busca extremal baseada em rede com dados amostrados pelo retentor de ordem zero (ZOH).

O parâmetro  $\theta(t) \in \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle na saída do controlador

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t). \quad (3.2)$$

O termo  $s_k$  denota a sequência de crescimento monotonicamente ilimitada dos instantes de amostragem, ou seja,

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < \dots, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad \lim_{k \rightarrow t_\infty} s_k = \infty, \quad (3.3)$$

com os intervalos de amostragem variáveis no tempo

$$h_k = s_{k+1} - s_k > 0. \quad (3.4)$$

Existem duas fontes de atrasos da rede: sensor para o controlador ( $\eta_k^{sc}$ ) e controlador para o atuador ( $\eta_k^{ca}$ ).

Supõe-se que o sensor atue de forma orientada pelo tempo (ou seja, a amostragem ocorre nos tempos  $s_k, k \in \mathbb{Z}^+$ ) e que tanto o controlador quanto o atuador agem de forma orientada por eventos (ou seja, eles respondem instantaneamente aos dados recém-chegados), assim como em [1].

Sob essas premissas, esses dois atrasos podem ser capturados por um único atraso  $\eta_k = (\eta_k^{sc}) + (\eta_k^{ca})$ . Assumindo que  $\eta_k \in [\eta_m, \eta_M]$ , onde  $\eta_m$  e  $\eta_M$  denotam os limites de atraso inferior e superior dos atrasos induzidos pela rede  $\eta_k$ , respectivamente.

Denote por  $t_k = s_k + \eta_k$  o tempo instantâneo de atualização do retentor de ordem zero (ZOH), finalmente a função ZOH transforma a entrada de controle de tempo discreto  $\theta_k$  em uma entrada de controle contínua no mapeamento (3.1):

$$\Theta(t) = \theta_k = \theta(s_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.5)$$

Por outro lado, os sistemas de controle modernos geralmente empregam tecnologia digital para implementação do controlador, ou seja, controle com dados amostrados. Nos sistemas de dados amostrados  $\eta_k = 0$ , conseqüentemente,  $t_k = s_k$ , e a entrada  $\Theta(t)$  em (3.5) pode ser representada como uma lei de controle atrasada

$$\Theta(t) = \theta(t_k) = \theta(t - (t - t_k)) = \theta(t - h(t)), \quad (3.6)$$

$$h(t) = t - t_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.7)$$

onde  $\theta(t - h(t)) = [\theta_1(t - h(t)), \dots, \theta_n(t - h(t))]^T$ , em [37].

Além disso, o atraso variável no tempo  $h(t)$ , em [37], é linear por partes, limitado por  $h_M \in \mathbb{R}^+$ , ou seja,  $h(t) \in [0, h_M]$ , e tem derivada temporal  $\dot{h}(t) = 1, \forall t \neq t_k$  (ver Figura 15).

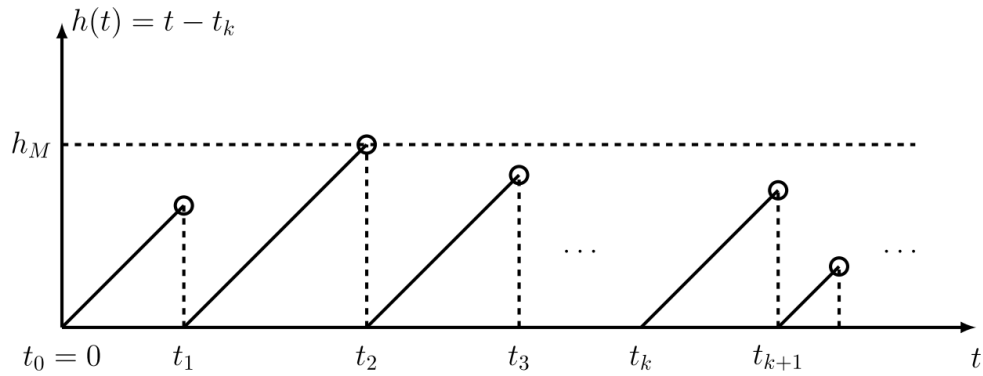


Figura 15 - Função em forma de dente de serra contínua como o atraso no tempo.

Nesse contexto, o sistema de malha fechada pode ser tratado como um sistema de dimensão infinita em tempo contínuo sujeito a um atraso variante no tempo  $h(t)$  no ramo de atuação, vide Figura 16.

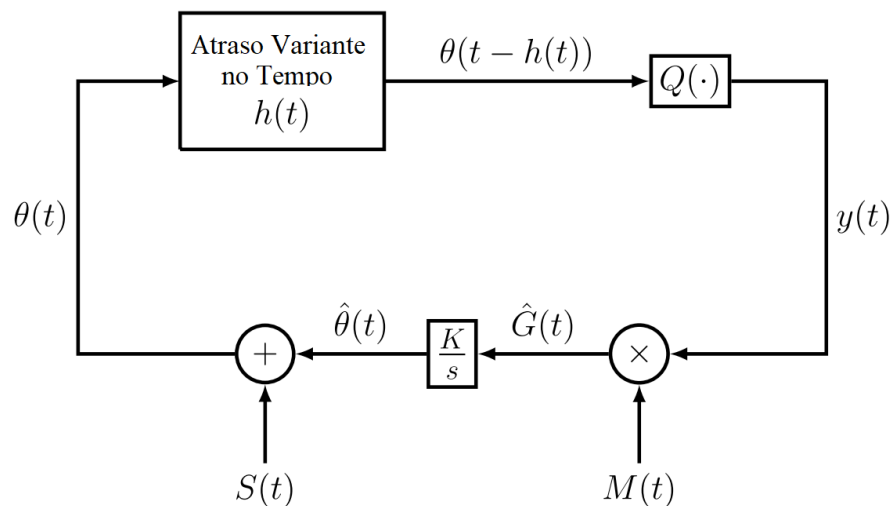


Figura 16 - Esquema de controle extremal baseado em rede: equivalente contínuo com atrasos variantes no tempo.

Então, a partir da Figura 16, a saída do mapeamento não-linear (3.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y(\theta(t - h(t))) \\
 &= Q^* + \frac{1}{2}(\theta(t - h(t)) - \theta^*)^T H(\theta(t - h(t)) - \theta^*).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Definindo o erro de estimativa

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (3.9)$$

e a estimativa de gradiente

$$\hat{G}(t) = M(t)y(t), \quad (3.10)$$

com vetores de perturbação senoidal

$$S(t) = \left[ a_1 \sin \left( \omega_1 \frac{t}{\varepsilon} \right), \dots, a_n \sin \left( \omega_n \frac{t}{\varepsilon} \right) \right]^T \quad (3.11)$$

$$M(t) = \left[ \frac{2}{a_1} \sin \left( \omega_1 \frac{(t-h(t))}{\varepsilon} \right), \dots, \frac{2}{a_n} \sin \left( \omega_n \frac{(t-h(t))}{\varepsilon} \right) \right]^T \quad (3.12)$$

com amplitudes diferentes de zero  $a_i$  e parâmetro pequeno  $\varepsilon > 0$ . Além disso, as frequências de sondagem  $\omega_i$ 's podem ser selecionadas como

$$\omega_i = \omega'_i \omega, \quad i \in [1, \dots, n], \quad (3.13)$$

onde  $\omega$  é uma constante positiva e  $\omega'_i$  é um número racional.

De (3.2) e (3.9), tem-se que

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + S(t) + \theta^*, \quad (3.14)$$

e, portanto, substituindo (3.14) em (3.8),  $y(t)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} y(t) &= Q^* + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}(t-h(t)) + S(t-h(t)))^T \\ &\quad \times H(\tilde{\theta}(t-h(t)) + S(t-h(t))) \\ &= Q^* + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T(t-h(t)) + H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ &\quad + S^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}S^T(t-h(t))HS(t-h(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

então, o gradiente estimado é

$$\begin{aligned}\hat{G}(t) = & M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ & + M(t)S^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)) \\ & + \frac{1}{2}M(t)S^T(t-h(t)) + HS(t-h(t)).\end{aligned}\quad (3.16)$$

definindo

$$\hat{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := M(t)S^T(t-h(t))H, \quad (3.17)$$

$$\hat{J}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := M(t)Q^* + \frac{1}{2}M(t)S^T(t-h(t))HS(t-h(t)), \quad (3.18)$$

$$\vartheta(t) := \frac{1}{2}M(t)\tilde{\theta}^T(t-h(t))H\tilde{\theta}(t-h(t)), \quad (3.19)$$

a equação (3.16) torna-se

$$\hat{G} = \hat{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\tilde{\theta}(t-h(t)) + \hat{J}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \vartheta(t). \quad (3.20)$$

A partir da derivada temporal de (3.9), a dinâmica que governa o  $\hat{\theta}(t)$ , bem como  $\tilde{\theta}(t)$ , é dada por

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) = K\hat{G}(t), \quad (3.21)$$

sendo  $K < 0$  uma matriz diagonal negativa definida. O termo  $\vartheta(t)$  em (3.20) é quadrático em  $\tilde{\theta}(t-h(t))$  e pode ser desprezado em uma análise local. Assim, substituindo (3.20) em (3.21) e ignorando  $\vartheta(t)$ , chega-se a

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\tilde{\theta}(t-h(t)) + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (3.22)$$

onde

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := K\hat{H}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right); \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) := K\hat{J}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \quad (3.23)$$

Além disso, as matrizes variantes no tempo  $A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  e  $B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$  são ambas periódicas em  $T$  com

$$T = 2\pi \times MMC\left(\frac{1}{\omega_i}\right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.24)$$

Escalonando o tempo  $t = T\bar{t}$  e denotando  $\bar{\theta} = \tilde{\theta}(T\bar{t}) = \tilde{\theta}(t)$ , o sistema (3.22) é apresentado como

$$\frac{d}{d\bar{t}}\bar{\theta}(\bar{t}) = TA\left(\frac{T\bar{t}}{\varepsilon}\right)\bar{\theta}(t - h(t)) + TB\left(\frac{T\bar{t}}{\varepsilon}\right)w(t). \quad (3.25)$$

Usando (3.17) e (3.18), é possível concluir que as entradas  $\hat{h}_{ij}(\tau)$  de  $\hat{H}(\tau)$  e  $\hat{j}_i(\tau)$  de  $\hat{J}(\tau)$  são dados por

$$\hat{h}_{ij}(\tau) = \frac{2}{a_i} \sin \omega_i \tau \left[ \sum_{k=1}^n a_k \sin(\omega_k \tau) h_{kj} \right], \quad (3.26)$$

$$\hat{j}_i(\tau) = \frac{2}{a_i} \sin \omega_i \tau \left[ Q^* + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_k \sin(\omega_k \tau) h_{kj} \right) a_j \sin(\omega_j \tau) \right], \quad (3.27)$$

consequentemente,  $\hat{h}_{ij}(\tau)$  e  $\hat{j}_i(\tau)$  são periódicos em  $T$ , tais que  $\hat{H}_{av} = H$  e  $\hat{J}_{av} = 0$ , e todas as entradas  $\hat{h}_{ij}(\tau)$  e  $\hat{j}_i(\tau)$  são limitadas uniformemente  $\tau \geq 0$  com valores de um intervalo finito  $\hat{h}_{ij}(\tau) \in [\hat{h}_{ij}^m, \hat{h}_{ij}^M]$  e  $\hat{j}_i(\tau) \in [\hat{j}_i^m, \hat{j}_i^M]$  para  $\tau \geq \tau_1 \geq 1$ .

Assim,  $TA(\tau)$  e  $TB(\tau)$  em (3.25) satisfazem a condição quase periódica com

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t TA\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = TA_{av} + T\Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = TKH, \quad (3.28)$$

$$A_{av} = KH, \quad \sigma > \left\| \Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right\| = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t TB\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = TB_{av} + T\Delta B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (3.30)$$

$$B_{av} = 0, \quad \Delta B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (3.31)$$

Invocando o [ [38], Theorem 5.2 ou Apêndice A, Teoremas A e B], a versão média de (3.25) é dada por



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{\theta}_{av}(\bar{t}) &= \left[ TA_{av} + T\Delta A \left( \frac{T\bar{t}}{\varepsilon} \right) \right] \bar{\theta}_{av}(\bar{t}) \\
&\quad + \left[ TB_{av} + T\Delta B \left( \frac{T\bar{t}}{\varepsilon} \right) \right] w(\bar{t}), \\
&= TA_{av}\bar{\theta}_{av}(\bar{t}),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

para  $|h(t)| \leq h_M$  e  $h_M$  suficientemente pequeno. Portanto, com  $A_{av}$  Hurwitz, a estabilidade do sistema médio (3.32) garante a estabilidade do sistema atrasado (3.22) e em rede com dados amostrados original. Além disso, existe um elipsóide exponencialmente atrativo com  $\sup_{t \geq 0} |\omega(t)| \leq \Delta = 1$

$$\mathcal{X} = \left( \theta \in \mathbb{R}^n : |\theta|^2 \leq \frac{b_0 + \dots + b_{2^n}}{2\alpha c_1} \Delta^2 \right). \tag{3.33}$$

Convenientemente, é apresentado no Apêndice A um resumo dos principais resultados de teoria da média de sistemas com atrasos variantes no tempo de [38]. Uma vez que a planta é um mapeamento estático não-linear sujeito ao mesmo atraso nos canais de entrada, o atraso de entrada pode tratar como um simples atraso de saída [39], conforme apresentado na Figura 17.

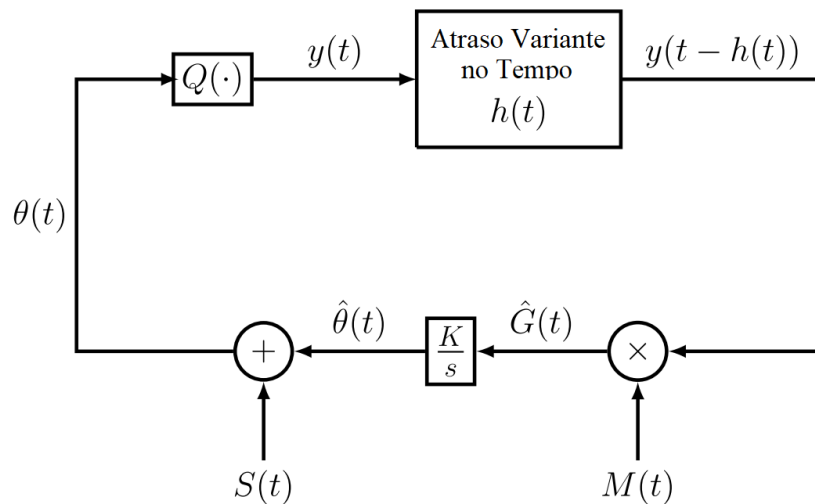


Figura 17 - Esquema de busca extremal baseado em rede equivalente contínua com atrasos de saída.

## 4 RESULTADO DAS SIMULAÇÕES

Para destacar as ideias principais da estratégia de controle extremal baseada em rede proposta, o mapeamento não-linear multivariável (3.1) tem entrada  $\Theta(t) \in \mathbb{R}^2$ , saída  $y(t) \in \mathbb{R}$ , e parâmetros desconhecidos

$$H = \begin{bmatrix} 100 & 30 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$Q^* = 100 \text{ e } \theta^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

O controle extremal baseado em rede na Figura 14 pode ser visto, por exemplo, como um sistema de dados amostrados com amostragem periódica  $h_M = 0,4[\text{seg}]$  e tratado como um sistema em tempo contínuo com um atraso variável no tempo aplicado à entrada da planta, conforme apresentado na Figura 16.

O atraso variável no tempo é  $h(t) = t - t_k, \quad \forall t \in [t_k, t_k + h_M]$ , e os vetores de *dither* têm parâmetros  $a_1 = a_2 = 0,1$ ,  $\omega_1 = 0,7[\text{rad/s}]$ ,  $\omega_2 = 0,5[\text{rad/seg}]$  e  $\varepsilon = 0,1$ . A matriz de ganho de controle  $K = 10^{-2} \begin{bmatrix} -7,5 & 0 \\ 0 & -7,5 \end{bmatrix}$  e a condição inicial é  $\hat{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 2,5 & 5 \end{bmatrix}^T$ .

A Figura 18 mostra a convergência do sinal de controle  $\theta(t)$  para uma vizinhança do valor do otimizador  $\theta^*$  em aproximadamente 60 segundos.

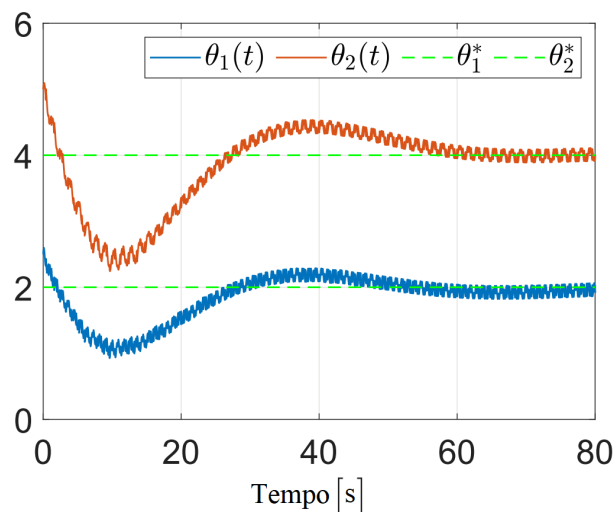


Figura 18 - Vetor de controle  $\theta(t)$ .

A Figura 19 mostra a convergência da entrada da planta  $\Theta(t)$  para uma vizinhança do valor do otimizador  $\Theta^*$  em cerca de 60 segundos.

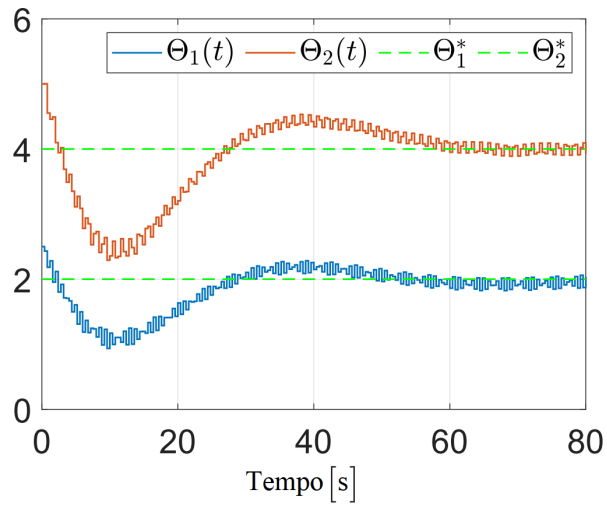


Figura 19 - Entrada da planta  $\Theta(t)$ .

Conseqüentemente, a saída  $y(t)$  atinge a vizinhança do mínimo desejado  $Q^*$ , conforme Figura 20.

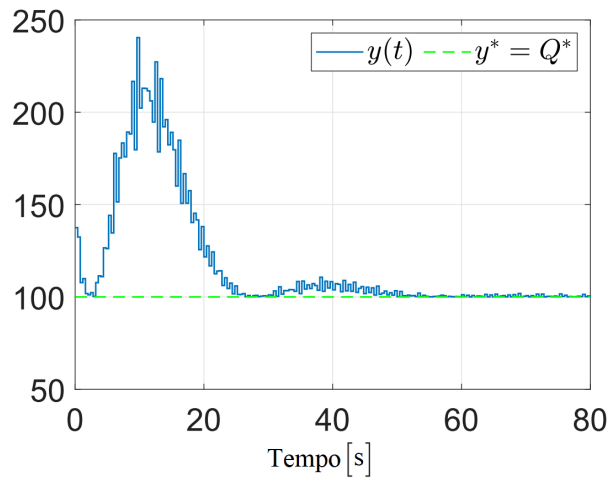


Figura 20 - Saída  $y(t)$ .

A estimativa do gradiente  $\hat{G}(t)$  se aproxima da origem, vide Figura 21.

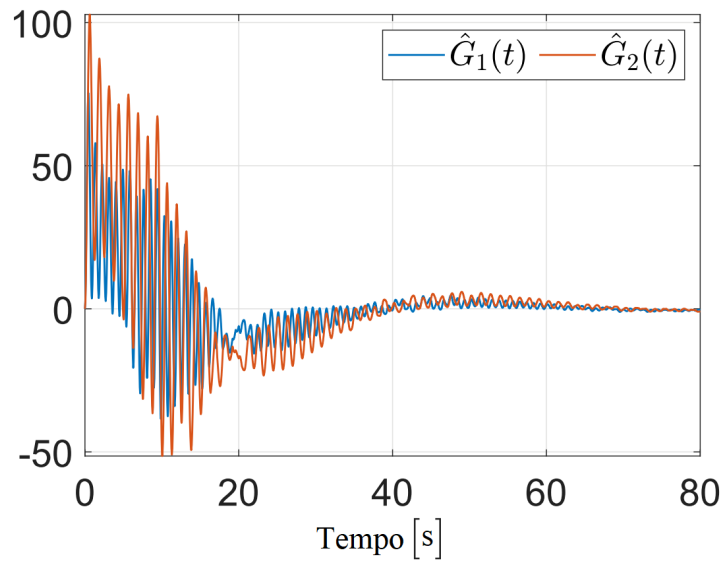


Figura 21 - Gradiente estimado  $\hat{G}(t)$ .

A Figura 22 ilustra o atraso variante no tempo  $h(t)$  equivalente.

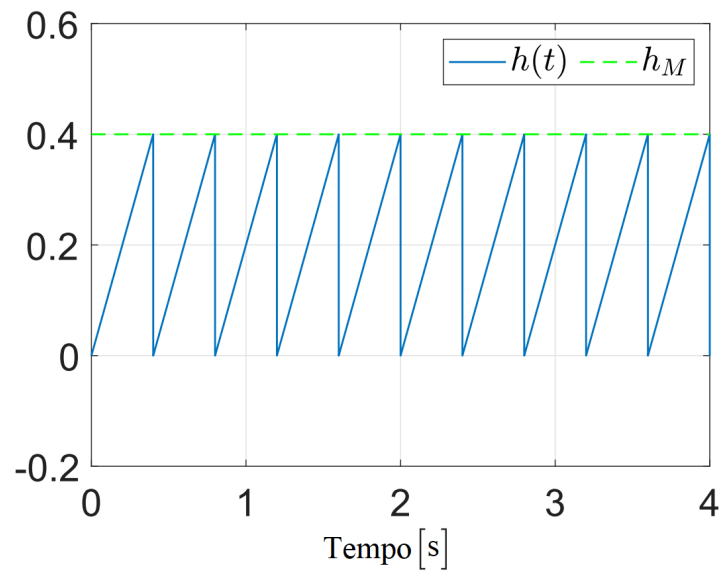


Figura 22 - Atraso variante no tempo  $h(t)$ .

## CONCLUSÃO

Um controlador extremal em rede com dados amostrados foi originalmente proposto para uma planta multivariável estática e não-linear com intervalos de amostragem variáveis. Apesar dos desafios encontrados na elaboração de um controle em rede, foi possível elaborar satisfatoriamente uma estratégia de controle apropriada, garantindo a eficácia do controlador na busca extremal do extremo da função desconhecida.

A estratégia utilizada permite alcançar a convergência em tempo finito da estimativa em tempo real a uma vizinhança do valor ótimo desconhecido. Consequentemente, a abordagem resultante garante convergência da saída do sistema controlado para uma pequena vizinhança do extremo (máximo ou mínimo). Utilizando a estratégia de controle extremal baseada em rede com dados amostrados, é possível verificar que a estimativa do gradiente se aproxima da origem, garantindo sua permanência na vizinhança em zero.

Foi possível mostrar a estabilidade do sistema atrasado em rede com dados amostrado, através da teoria da estabilidade do sistema médio.

Conclui-se que é possível realizar controle extremal em um sistema em rede com dados amostrados, conforme estudo e simulação apresentada, permitindo-se ampliar os estudos neste ramo, como forma de aprimorar as técnicas de controle extremal.

Esta dissertação deu origem a um artigo, [40], publicado no XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, em 2021.

# APÊNDICE

## Teoria da Média para Sistemas com Atrasos Variantes no Tempo

Considere o sistema de variação rápida com um atraso variante no tempo  $h(t)$ :

$$\dot{x}(t) = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t) + A_d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x(t - h(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A, A_d : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  são contínuos por partes e  $\varepsilon > 0$  é um parâmetro pequeno.

O atraso  $h(t)$  deve ser limitado

$$0 \leq h(t) \leq h_M, \quad (4.3)$$

e de variação rápida (sem qualquer restrição na derivada de atraso). A condição inicial do sistema (4.2) é dada por  $x(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h_M, 0]$  com  $\phi \in C[-h_M, 0]$ .

As seguintes hipóteses são consideradas para o sistema:

**(H1)** Existe  $\tau_1 \geq 1$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds &= A_{av} + \Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \\ \|\Delta A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\| &\leq \sigma, \quad \forall \frac{t}{\varepsilon} \geq \tau_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

com uma matriz constante Hurwitz  $A_{av}$  e uma constante pequena o suficiente  $\sigma > 0$ .

**(H2)** Todas as entradas  $a_{kv}(\tau)$  de  $A(\tau)$  são uniformemente limitadas para  $\tau \geq 0$  com os valores de alguns intervalos finitos  $a_{kv}(\tau) \in [a_{kv}^m, a_{kv}^M]$  para  $\tau \geq \tau_1 \geq 1$ .

Sob (H2),  $A(\tau)$  pode ser apresentado como uma combinação convexa das matrizes constantes  $A_i$  com as entradas  $a_{kv}^m$  ou  $a_{kv}^M$ :

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \sum_{i=1}^N f_i(\tau) A_i, \quad \forall \tau \geq \tau_1 \geq 1, \\ f_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^N f_i = 1, \quad 1 \leq N \leq 2^{n^2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Observe que  $f_i \not\equiv 0$ . Para constantes  $a_{kv}$ , tem-se  $a_{kv}^m = a_{kv}^M$ .

**(H3)** Existe  $\tau_1 \geq 1$  tal que (4.4) é válida e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t A_d \left( \frac{s}{\varepsilon} \right) ds &= A_{dav} + \Delta A_d \left( \frac{t}{\varepsilon} \right), \\ \|\Delta A_d \left( \frac{t}{\varepsilon} \right)\| &\leq \sigma_d, \quad \forall \frac{t}{\varepsilon} \geq \tau_1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde  $\sigma_d > 0$  é uma constante suficientemente pequena. Além disso, a matriz  $A_{av} + A_{dav}$  é Hurwitz.

**(H4)** Considere que (H2) seja mantida e que todas as entradas  $a_{dkv}(\tau)$  de  $A_d(\tau)$  sejam uniformemente limitadas para  $\tau \geq 0$  com os valores de alguns intervalos finitos  $a_{dkv}(\tau) \in [a_{dkv}^m, a_{dkv}^M]$  para  $\tau \geq \tau_1 \geq 1$ .

De (H4), (4.6) é verificada e  $A_d(\tau)$  pode ser apresentada como uma combinação convexa das matrizes constantes  $A_{dj}$  com as entradas  $a_{dkv}^m$  ou  $a_{dkv}^M$ :

$$\begin{aligned} A_d(\tau) &= \sum_{j=1}^{N_d} f_{dj}(\tau) A_{dj}, \quad \forall \tau \geq \tau_1 \geq 1, \\ f_{dj} &\geq 0, \quad \sum_{j=1}^{N_d} f_{dj} = 1, \quad 1 \leq N_d \leq 2^{n^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para uma constante  $a_{dkv}$ , tem-se  $a_{dkv}^m = a_{dkv}^M$ .

A partir de (4.5) e (4.7), o sistema

$$\dot{z}(t) = \left[ A_{av} + \Delta A \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right] x(t) - \int_0^1 A \left( \frac{t}{\varepsilon} - \theta \right) - \int_{t-\varepsilon\theta}^t \dot{x}(s) ds d\theta, \quad (4.8)$$

pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & \left[ A_{av} + A_{dav} + \Delta A \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) + \Delta A_d \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) \right] x(t) - \int_0^1 A \left( \frac{t}{\varepsilon} - \theta \right) \int_{t-\varepsilon\theta}^t \dot{x}(s) ds d\theta \\ & - \int_0^1 A_d \left( \frac{t}{\varepsilon} - \theta \right) \int_{t-\varepsilon\theta-h(t-\varepsilon\theta)}^t \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

**Teorema A** Suponha que (H3) e (H4) sejam satisfeitas. Dadas as matrizes  $A_{av}$ ,  $A_{dav}$ ,  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $A_{dj}$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ) e constantes  $\sigma > 0$ ,  $\sigma_d > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon^* > 0$  e  $h_M > 0$ , existem matrizes  $P > 0$ ,  $R > 0$ ,  $H_i > 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $Q_j > 0$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ),  $S_1 > 0$ ,  $R_1 > 0$ ,  $U$  e escalares  $\lambda > 0$ ,  $\lambda_d > 0$  que satisfazem as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} R_1 & U \\ * & R_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega & \Theta_{ij} \\ * & \Theta_2 \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_d. \quad (4.11)$$



A matriz  $\Omega$  é simétrica composta por

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= P(A_{av} + A_{dav}) + (A_{av} + A_{dav})^T P + 2\alpha P + \lambda\sigma^2 I_n + \lambda_d\sigma_d^2 I_n + S_1 - \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} R_1, \\
\Omega_{12} &= - (A_{av} + A_{dav})^T P - 2\alpha P, \\
\Omega_{13} &= -\Omega_{23} = -P[A_1, \dots, A_N], \\
\Omega_{14} &= \Omega_{18} = -\Omega_{24} = -\Omega_{28} = P, \\
\Omega_{15} &= \Omega_{56} = \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} (R_1 - U), \\
\Omega_{16} &= \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} U, \\
\Omega_{17} &= -\Omega_{27} = -P[A_{d1}, \dots, A_{dN_d}], \\
\Omega_{22} &= -\frac{4}{\varepsilon^*} e^{-2\alpha\varepsilon^*} R + 2\alpha P \\
\Omega_{33} &= -2e^{-2\alpha\varepsilon^*} \text{diag} \left[ \frac{1}{f_1^*} H_1, \dots, \frac{1}{f_1^*} H_N \right], \\
\Omega_{44} &= -\lambda I_n, \\
\Omega_{55} &= \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} (2R_1 - U - U^T), \\
\Omega_{66} &= -e^{2\alpha h_M} S_1 - \frac{1}{h_M} e^{2\alpha h_M} R_1, \\
\Omega_{77} &= -2e^{2\alpha(\varepsilon^* + h_M)} \text{diag} \left[ \frac{1}{f_1^*} Q_1, \dots, \frac{1}{f_1^*} Q_{N_d} \right], \\
\Omega_{88} &= -\lambda_d I_n,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

e outros blocos são matrizes zero com  $f_i^*(i = 1, \dots, N)$  e  $f_{dj}^*(j = 1, \dots, N_d)$  definido por:

$$\varepsilon^* \int_0^1 \theta f_i(\tau - \theta) d\theta \leq f_i^*, \quad \forall \tau \geq \tau_1, \tag{4.13}$$

$$\int_0^1 (\varepsilon^* \theta + h_M) f_{dj}, \quad \forall \tau \geq \tau_1 + \frac{h_M}{\varepsilon}, \tag{4.14}$$

$$\Theta_{ij} = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon^*} A_i^T \Lambda_1 & \sqrt{h_M} A_i^T \Lambda_2 \\ 0_{(N+2)n,n} & 0_{(N+2)n,n} \\ \sqrt{\varepsilon^*} A_i^T \Lambda_1 & \sqrt{h_M} A_i^T \Lambda_2 \\ 0_{(N_d+2)n,n} & 0_{(N_d+2)n,n} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\Theta_2 = -diag(\Lambda_1, \Lambda_2),$$

$$\Lambda_1 = R + (H_1 + \dots + H_N) + (Q_1 + \dots + Q_{N_d}),$$

$$\Lambda_2 = R + 2(Q_1 + \dots + Q_{N_d}),$$

Então, o sistema (4.2) é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento  $\alpha$  para todos  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$  e  $h(t) \in [0, h_M]$ , o que significa que existe  $M_0 > 0$  de modo que para todo  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ ,  $h(t) \in [0, h_M]$  as soluções de (4.2) inicializadas por  $\varphi \in C[-h_M, 0]$  satisfazem

$$|x(t)|^2 \leq M_0 e^{-2\alpha t} \|\phi\|_C^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.16)$$

Além disso, se as LMIs (4.10) e (4.11) forem satisfeitas com  $\alpha = 0$ , então o sistema (4.2) é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento pequena o suficiente  $\alpha = \alpha_0 > 0$  para todo  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$  e  $h(t) \in [0, h_M]$ .

Podemos estender ainda mais esses resultados para uma análise ISS do sistema perturbado

$$\dot{x}(t) = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + A_d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) x(t - h(t)) + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) w(t), \quad t \geq 0. \quad (4.17)$$

**(H5)** Todas as entradas  $b_{kv}(\tau)$  de  $B(\tau)$  são uniformemente limitadas para  $\tau \geq 0$  com os valores de alguns intervalos finitos  $b_{kv}(\tau) \in [b_{kv}^m, b_{kv}^M]$  para  $\tau \geq \tau_1 \geq 1$ .

Aqui,  $B(\tau)$  é tratado como uma matriz de politopo variável no tempo. Sob (H5),  $B(\tau)$  pode ser apresentado como uma combinação convexa das matrizes constantes  $B_l$  com as entradas  $b_{dkv}^m$  ou  $b_{dkv}^M$ .

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= \sum_{l=1}^{\bar{N}} \bar{f}_l(\tau) B_l, \quad \forall \tau \geq \tau_1 \geq 1, \\
\bar{f}_l &\geq 0, \quad \sum_{l=1}^{\bar{N}} \bar{f}_l = 1, \quad 1 \leq \bar{N} \leq 2^{n \times n_w}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

**Teorema B** Suponha que (H5) e (H4) sejam verificadas. Dadas as matrizes  $A_{av}, A_{dav}, A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $A_{dj}$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ),  $B_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ), e constantes  $\sigma > 0, \sigma_d > 0, \alpha > 0, \varepsilon^* > 0$  e  $h_M > 0$ , existem matrizes ( $n \times n$ ),  $P > 0, R > 0, H_i > 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $Q_j > 0$  ( $j = 1, \dots, N_d$ ),  $S_1 > 0, R_1 > 0, U$  e escalares  $\lambda > 0, \lambda_d > 0$  e  $b_l > 0$  ( $l = 0, \dots, \bar{N}$ ) que satisfazem (4.10) e as seguintes LMIs:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \Omega & \hat{\phi}_{12} \\ * & \bar{\phi}_{22} \end{array} \right] & \bar{\Theta}_{ijl} \\ & \Theta_2 \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_d, \\
l = 1, \dots, \bar{N},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

com

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{12} &= \begin{bmatrix} P & -P & O_{n, (N+N_d+4)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_{\bar{N}} & O_{n, n_w} \end{bmatrix}, \\
\bar{\Theta}_{ijl} &= \begin{bmatrix} \Theta_{ij} \\ \left[ \begin{array}{cc} O_{\bar{N}n_w, n} & O_{\bar{N}n_w, n} \\ \sqrt{\varepsilon^*} B_l^T \Lambda_1 & \sqrt{\varepsilon^*} B_l^T \Lambda_2 \end{array} \right] \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde  $\Phi_{22}$  é dado por

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi} &= \begin{bmatrix} \Phi & \bar{\Phi}_{12} \\ * & \theta_{22} \end{bmatrix}, \\
\bar{\Phi}_{12} &= \begin{bmatrix} P & -P & O_{n,(N+1)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_1 & \dots & O_{n,n_w} \end{bmatrix}, \\
\bar{\Phi}_{22} &= -diag[b_1 I_{n_w}, \dots, b_{\bar{N}} I_{n_w}, b_0 I_{n_w}],
\end{aligned} \tag{4.21}$$

e  $\Phi$  é a matriz simétrica composta de (4.12), e  $\theta_{ij}, \theta_2$ .  $\Lambda_1 e \Lambda_2$  são dados por (4.15). Então, o sistema (4.17) é ISS para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$  e  $h(t) \in [0, h_M]$ , significando que existe  $M_0 > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ ,  $h(t) \in [0, h_M]$  e  $w(t)$  essencialmente e localmente limitado, as soluções do sistema (4.17), inicializado por  $\varphi \in C[h_M, 0]$ , satisfazem

$$|x(t)|^2 \leq M_0 e^{-2\alpha t} |x(0)|^2 + \left[ M_0 e^{-2\alpha t} + \frac{b_0 + \dots + b_{\bar{N}}}{2\alpha c_1} \right] \tag{4.22}$$

com  $|x(0)|^2$  alterado por  $\phi_c^2$ . Além disso, dado  $\Delta > 0$ , o elipsóide  $\Upsilon$  dado por

$$\Upsilon = \left[ x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 \leq \frac{b_0 + \dots + b_{\bar{N}}}{2\alpha c_1} \Delta^2 \right] \tag{4.23}$$

é exponencialmente atraente (o que significa que  $x(t)$  se aproxima de  $\Upsilon$  para  $t \rightarrow \infty$  com uma taxa de decaimento  $\alpha$  para todo  $\phi \in C[h, 0]$  e  $w(t)$  essencialmente limitado com  $\sup_{t \geq 0} |w(t)| \leq \Delta$ .

Além disso, se as LMIs (4.10) e (4.19) são factíveis com  $\alpha = 0$ , então o sistema (4.17) é ISS para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$  e (4.11) com  $|x(0)|^2$  alterado por  $\|\phi\|_c^2$  e mantido com uma taxa de decaimento suficientemente pequena  $\alpha = \alpha_0 > 0$ , para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$  e  $h(t) \in [0, h_M]$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] FRIDMAN, E. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Switzerland: Birkhauser, 2014.
- [2] FRIHAUF, P.; KRSTIĆ, M.; BASAR, T. Finite-horizon lq control for unknown discrete-time linear systems via extremum seeking. *European Journal of Control*, v. 19, n. 5, p. 399–407, 2013.
- [3] KHONG, S. Z. et al. Unified frameworks for sampled-data extremum seeking control: Global optimisation and multi-unit systems. *Automatica*, v. 49, n. 9, p. 2720–2733, 2013.
- [4] DOCHAIN, D.; PERRIER, M.; GUAY, M. Extremum seeking control and its application to process and reaction systems: A survey. *Mathematics and Computers in Simulation, 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, v. 82, n. 3, p. 369–380, 2011.
- [5] GRUSHKOVSKAYA, V.; ZUYEV, A.; EBENBAUER, C. On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*, v. 94, p. 151–160, 2018.
- [6] REN, B. et al. Laser pulse shaping via extremum seeking. *Control Engineering Practice*, v. 20, n. 7, p. 674–683, 2012.
- [7] WANG, H.; YEUNG, S.; KRSTIĆ, M. Experimental application of extremum seeking on an axial-flow compressor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 8, n. 2, p. 300–309, 1999.
- [8] KRSTIĆ, M.; WANG, H. H. Stability of extremum seeking feedback for general dynamic systems. *Automatica*, v. 36, p. 595–601, 2000.
- [9] TAN, Y.; NESIĆ, D.; MAREELS, I. On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, v. 42, p. 889–903, 2006.
- [10] LIU, S.; KRSTIĆ, M. *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. [S.l.]: Springer, 2012.
- [11] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems 3rd ed.* Englewood Cliffs, NJ, USA:: Prentice Hall, 2002.

- [12] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NESIĆ, D. Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, v. 48, n. 8, p. 1759–1767, 2012.
- [13] FITER, C. et al. A state dependent sampling for linear state feedback. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 48, n. 8, p. 1860–1867, 2012.
- [14] GU, K.; KHARITONOV, V.; CHEN, J. *Stability of time-delay systems*. Boston: Birkhauser, 2003.
- [15] LIU, K.; FRIDMAN, E. Wirtinger’s inequality and lyapunov-based sampled-data stabilization. *Automatica*, v. 48, 2012.
- [16] SEURET, A. A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*, v. 48, 2012.
- [17] ÅSTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-controlled systems*. Englewood Cliffs, NJ, USA:: Prentice Hall, 1997.
- [18] FRIDMAN, E. Using models with aftereffect in the problem of design of optimal digital control. *Autom Remote Control*, v. 53(10), 1992.
- [19] MIKHEEV, Y.; SOBOLEV, V.; FRIDMAN, E. Asymptotic analysis of digital control systems. *Autom Remote Control*, v. 49, 1988.
- [20] FRIDMAN, E.; SEURET, A.; RICHARD, J. P. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. *Automatica*, v. 40(8), 2004.
- [21] FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Delay dependent stability and h1 control: constant and time-varying delays. *Int J Control*, v. 76(1), 2003.
- [22] GAO, H.; CHEN, T.; LAM, J. A new delay system approach to network-based control. *Automatica*, v. 44(1), 2008.
- [23] YUE, D.; HAN, Q. L.; LAM, J. Networked-based robust h1 control of systems with uncertainty. *Automatica*, v. 41(5), 2005.
- [24] BASAR, T.; BERNARD, P. *H1 optimal control and related minimax design problems. A dynamic game approach. Systems and control*. Boston: Birkhauser, 1995.
- [25] KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. *Linear optimal control systems*. London: Wiley, 1972.

- [26] NAGHSHTABRIZI, P.; HESPANHA, J.; TEEL, A. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Syst Control Lett*, v. 57(5), 2008.
- [27] FRIDMAN, E. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, v. 46, 2010.
- [28] MIRKIN, L. Some remarks on the use of time-varying delay to model sample-and-hold circuits. *IEEE*, v. 52(6), 2007.
- [29] ANTSAKLIS, P.; BAILLIEUL, J. Special issue on technology of networked control systems. *IEEE*, v. 95(1), 2007.
- [30] ZHANG, W.; BRANICKY, M.; PHILLIPS, S. Stability of networked control systems. *IEEE*, v. 21, 2001.
- [31] DONKERS, M.; WOUW, W. H. N. V.; HETEL, L. Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach. *IEEE Trans Automat Control*, v. 56(9), 2011.
- [32] NAGHSHTABRIZI, P.; HESPANHA, J.; TEEL, A. Stability of delay impulsive systems with application to networked control systems. *Proceedings of the 26th American control conference, New York, 2007*.
- [33] NESIC, D.; TEEL, A. Input-output stability properties of networked control systems. *IEEE Trans Automat Control*, v. 49(10), 2004.
- [34] LIU, K.; FRIDMAN, E. Networked-based stabilization via discontinuous lyapunov functionals. *Int J Robust Nonlinear Control*, v. 22(4), 2012.
- [35] SUPLIN, V.; FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Sampled-data h1 control and filtering: nonuniform uncertain sampling. *Automatica*, v. 43, 2007.
- [36] ARIYUR, K. B.; KRSTIĆ, M. *Real time optimization by extremum seeking control*. [S.l.]: Wiley, 2003.
- [37] LIU, K.; FRIDMAN, E.; XIA, Y. *Networked Control Under Communication Constraints: A Time-Delay Approach*. Singapore: Springer, 2020.
- [38] FRIDMAN, E.; ZHANG, J. Averaging of linear systems with almost periodic coefficients: A time-delay approach. *Automatica*, v. 122(1), 2020.

- [39] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 4, p. 1911–1926, 2017.
- [40] ALVES, R. G. R.; OLIVEIRA, T. R.; RODRIGUES, V. H. P. Controle extremal em rede com dados amostrados. *XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, p. 1358–1365, 2021.