



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Paulo Cesar Souza da Silva

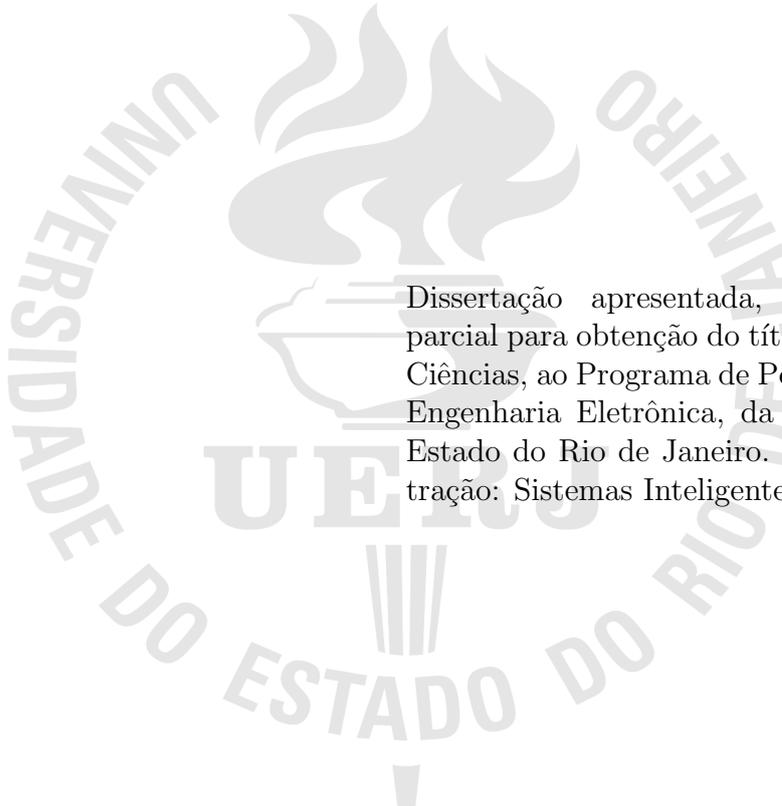
**Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos**

Rio de Janeiro

2020

Paulo Cesar Souza da Silva

## Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586

Silva, Paulo Cesar Souza da  
Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos / Paulo Cesar Souza da Silva. – 2020.  
86 f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira;  
Dissertação(Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de controle inteligente - Teses. 3. Algoritmos - Teses. 4. Processo estocástico - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681.513.6

Bibliotecária: Júlia Vieira - CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Paulo Cesar Souza da Silva

## **Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 18 de Dezembro de 2020

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira (Orientador)  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dra. Milena Faria Pinto  
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Rio de Janeiro

2020

## AGRADECIMENTO

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e saúde.

Aos meus pais, Augusto Cesar e Cleonice, por todo o amor e suporte, à minha irmã pelos conselhos e broncas, além de todo o carinho do mundo.

Aos demais familiares e amigos de infância do AC, SP, graduação e mestrado que durante todo o tempo foram muito próximos, sempre torcendo e incentivando. Guardo muitos momentos com muito carinho.

Ao mestre e orientador, Professor Tiago Roux, por toda a confiança, atenção e orientação. Obrigado pela companhia e momentos de extrema alegria, descontração e risadas junto com os amigos orientandos em sua sala.

Agradeço também a todos os professores, funcionários e instituições de ensino que passei.

As invenções são, sobretudo, o resultado de um trabalho teimoso.

*Santos Dumont*

## RESUMO

**SILVA**, Paulo Cesar Souza da. *Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos*. 86 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2020.

O controle extremal pode ser definido como um método adaptativo de otimização em tempo real, que visa determinar o ponto extremo de um mapeamento estático não-linear desconhecido. Este trabalho apresenta o Controle Extremal Estocástico baseado nos algoritmos do Gradiente e Newton na presença de atrasos. Da literatura sabe-se que o controle extremal não é robusto à presença de atrasos e quando estes são inseridos em um sistema de malha fechada e simplesmente ignorados, os mesmos restringem severamente a taxa de convergência do sistema como um todo ou levam o sistema à instabilidade. No caso do algoritmo do Gradiente, um novo preditor baseado na estimativa da Hessiana desconhecida será apresentado e incorporado à malha fechada. Para o Algoritmo de Newton, outro novo preditor com uma estimativa da inversa da Hessiana baseada em perturbações senoidais estocásticas (sinais de *dither*) é incorporado à malha fechada, de modo que a taxa de convergência do controlador em tempo real possa ser especificada pelo projetista. A estabilidade exponencial e convergência à uma pequena vizinhança do ponto de extremo são obtidas. Este resultado é rigorosamente alcançado utilizando a transformação *backstepping* e teoria da média em sistemas de dimensões infinitas. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência das estratégias de controle extremal estocástico propostas em preditor para compensação de atrasos.

Palavras-chave: Atrasos; Preditor; Controle Extremal Estocástico; Algoritmo Gradiente; Algoritmo de Newton; Transformação *Backstepping*; Teoria da Média em Dimensões Infinitas.

## ABSTRACT

**SILVA**, Paulo Cesar Souza da. *Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos*. 86 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2020.

Extremum seeking can be defined as a real-time optimization method, which goal is to determine the extremum point of an unknown nonlinear static map. This work presents the extremum seeking control based on Gradient and Newton algorithms under time delays. From the literature, it is known that the extremum seeking is not robust under delays and when the delays are inserted in the closed-loop system and the delays are ignored, they severely restrict the convergence rate or lead the system to instability. In Gradient algorithm, a new predictor based on unknown Hessian estimate will be presented and incorporated in the closed-loop system. In the Newton algorithm, a new predictor with stochastic sinusoidal perturbations and an average-based estimate of the Hessian's inverse is incorporated in the closed-loop system such that the convergence rate of the controller in real-time can be made user-assignable. Exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point can be obtained. This result is rigorously guaranteed by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. Numerical examples are shown to present the effectiveness of the proposed predictor-based stochastic extremum seeking for time-delay compensation.

Keywords: Delays; Predictor; Stochastic Extremum Seeking Control; Gradient Algorithm; Newton Algorithm; Backstepping Transformation; Averaging in Infinite Dimensions.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Linha do tempo representando o breve histórico do ESC.....	13
Figura 2	O esquema demonstra a mais simples perturbação para uma entrada única do mapeamento quadrático $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$ , sendo que $f^*$ , $f''$ e $\theta^*$ são todos desconhecidos. Necessita-se apenas conhecer o sinal de $f''$ , se o mapa possui um máximo ou mínimo e escolher o ganho de adaptação $k$ , de tal maneira que $sgn(k) = -sgn(f'')$ . A frequência $\omega$ tem que ser relativamente grande em relação a $a$ , $k$ e $f''$ .....	21
Figura 3	Função a ser maximizada (Hessiana negativa).....	22
Figura 4	Algoritmo do controle extremal para mapeamentos multivariáveis $y = Q(\theta)$ , cujo $\theta$ é o vetor de entrada $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ . O algoritmo emprega a perturbação aditiva do sinal $S(t)$ e a demodulação multiplicativa do sinal $M(t)$ . .....	24
Figura 5	ESC baseado no algoritmo de Newton. ....	25
Figura 6	O algoritmo do controle extremal na presença de sistemas dinâmicos com um mapa de equilíbrio $\theta \rightarrow y$ que satisfaz as mesmas condições como no caso estático. Se as dinâmicas são estáveis e o desenvolvedor emprega parâmetros no algoritmo do controle extremal de modo que as dinâmicas do algoritmo sejam mais lentas que as dinâmicas da planta, a convergência é garantida (localmente pelo menos). .....	27
Figura 7	Algoritmo (escalar) Gradiente estocástico. ....	32
Figura 8	Esquema de predição para a compensação dos atrasos na saída por busca extremal estocástica empregando o algoritmo Gradiente. A realimentação por preditor com uma estimativa da Hessiana baseada em perturbações estocásticas e <i>averaging</i> obedece a equação (3.25) e os sinais de <i>dither</i> são dados por: $S(\eta(t)) = a \sin(\eta(t))$ , $M(\eta(t)) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t))$ e sinal de demodulação $N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t))$ .....	38

Figura 9 Esquema de predição para compensação dos atrasos na saída para busca extremal através do algoritmo do Newton. A realimentação por preditor com uma estimativa da inversa da Hessiana baseada em perturbações senoidais obedece as equações (4.16), (4.17) e (4.28), os sinais de *dither* são dados por:  $S(\eta(t)) = a\sin(\eta(t))$  e  $M(\eta(t)) = \frac{2}{a}\sin(\eta(t))$  e o sinal de demodulação  $N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2}\cos(2\eta(t))$ ..... 55

## LISTA DE SIGLAS

ESC	Extremum Seeking Control
ABS	Antilock Braking System
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
PID	Proportional Integral Derivative
VPL	Valor Presente Líquido

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\theta(t)$	Entrada do mapeamento quadrático não-linear
$\theta^*$	Otimizador desconhecido da entrada do mapeamento
$\hat{\theta}(t)$	Entrada ótima estimada
$f^*$	Ponto de otimização do mapeamento
$H$	Sinal da Hessiana desconhecida
$a$	Amplitude de perturbação do ESC
$k$	Ganho de adaptação que controla a velocidade
$Q(\cdot)$	Mapeamento desconhecido
$y(t)$	Saída do mapeamento
$S(t)$	Sinal de perturbação aditivo
$M(t)$	Sinal de perturbação multiplicativo
$N(t)$	Sinal de perturbação multiplicativo
$\omega$	Frequência do sinal de perturbação de demodulação
$\hat{G}(t)$	Estimativa do Gradiente
$\tilde{\theta}(t)$	Erro de estimativa
$D$	Atraso constante
$U(t)$	Sinal de controle
$U_{av}(t)$	Sinal de controle médio
$c$	Constante do filtro passa-baixas
$\tilde{\vartheta}_{av}(t)$	Versão média do sistema em malha fechada
$V(t)$	Funcional de Lyapunov-Krasovskii
$\Psi$	Norma Completa do estado
$b$	Coefficiente do funcional de Lyapunov-Krasovskii
$\hat{H}$	Estimativa da Hessiana desconhecida
$\eta(t)$	Perturbação estocástica

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
1	<b>CONCEITOS BÁSICOS DO CONTROLE EXTREMAL</b> .....	20
1.1	Apresentação do controle extremal .....	21
1.2	ESC para mapas estáticos multivariáveis .....	24
1.3	ESC baseado em Newton para mapeamentos estáticos.....	25
1.4	ESC para sistemas dinâmicos .....	26
1.5	Exemplo Numérico de ESC baseado no algoritmo Gradiente Determinístico	28
1.6	Exemplo Numérico de ESC baseado no algoritmo de Newton Determinístico	29
2	<b>INTRODUÇÃO AO ESC ESTOCÁSTICO</b> .....	31
2.1	Por que o controle extremal estocástico? .....	31
2.2	Esquema básico do controle extremal estocástico.....	32
2.3	Avaliação heurística de um algoritmo do ESC estocástico .....	34
3	<b>ALGORITMO GRADIENTE ESTOCÁSTICO NA PRESENÇA DE ATRASOS</b> .....	37
3.1	Controle extremal estocástico do tipo Gradiente com atrasos .....	38
3.2	Sinais do sistema .....	39
3.3	Realimentação por preditor com estimativa da Hessiana .....	41
3.4	Análise de estabilidade .....	43
3.4.1	Sistema Médio EDO-EDP .....	43
3.4.2	Sistema em Malha Fechada .....	44
3.4.3	Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada .....	47
3.4.4	Transformação <i>Backstepping</i> , sua <i>Inversa</i> e o <i>Sistema Alvo</i> .....	48
3.4.5	Funcional de Lyapunov .....	49
3.4.6	Estabilidade exponencial do Sistema Médio .....	51
3.4.7	Invocando o Teorema da Média .....	52
3.4.8	Convergência Assintótica para um Resíduo .....	53

4	<b>ALGORITMO DE NEWTON ESTOCÁSTICO NA PRESENÇA DE ATRASOS</b> .....	54
4.1	Controle extremal estocástico do tipo Newton com atrasos.....	55
4.2	Sinais do sistema .....	56
4.3	Realimentação via preditor através da estimativa inversa da Hessiana .....	58
4.4	Análise de estabilidade .....	60
4.4.1	Sistema Médio EDO-EDP .....	61
4.4.2	Sistema em Malha Fechada .....	61
4.4.3	Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada .....	63
4.4.4	Transformação <i>Backstepping</i> , sua <i>Inversa</i> e o <i>Sistema Alvo</i> .....	65
4.4.5	Funcional de Lyapunov .....	66
4.4.6	Estabilidade exponencial do Sistema Médio .....	68
4.4.7	Invocando o Teorema da Média .....	68
4.4.8	Convergência Assintótica para um Resíduo .....	69
5	<b>RESULTADOS DE SIMULAÇÃO</b> .....	71
5.1	Simulações numéricas .....	71
5.1.1	Resultados obtidos para o algoritmo Gradiente.....	71
5.1.2	Resultados obtidos para o algoritmo de Newton.....	74
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	78
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	80

## INTRODUÇÃO

A partir dos trabalhos [1, 2], o primeiro registro ou texto produzido na literatura sobre controle por busca extremal (ESC – *Extremum Seeking Control*) ou simplesmente controle extremal, foi apresentado por Leblanc em 1922 e estabelecido como um sistema de controle utilizado para determinar em tempo real o extremo de uma função desconhecida [3]. O controle extremal pode ser definido ainda como um método adaptativo que possui a capacidade de otimizar uma função não-linear de uma planta [2, 4], não tendo a obrigatoriedade do conhecimento explícito de um modelo para ela, desde que se tenha o conhecimento de que a função não-linear possui um extremo [3]. É um método cada vez mais popular e que vem ganhando cada vez mais interesse no meio acadêmico e na indústria [5]. Apesar disso, foi demonstrado na literatura que o controle extremal não é eficaz na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade [6].

### Breve Histórico

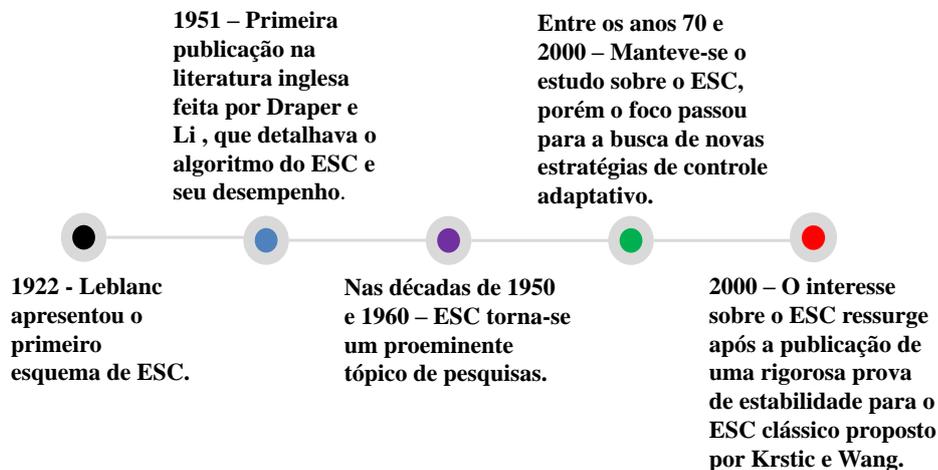


Figura 1 Linha do tempo representando o breve histórico do ESC.

Leblanc apresentou o primeiro esquema sobre o controle extremal em 1922 [1] e nele propôs um sistema de controle que buscava manter uma maior transferência de potência a

partir de uma linha de transmissão a um bonde elétrico através do controle extremal. Vale ressaltar que na época da Segunda Guerra mundial houve na Rússia inúmeras pesquisas na mesma área [4].

Possivelmente a primeira publicação na literatura inglesa foi feita por Draper e Li [7], que detalhava um algoritmo de controle por busca extremal apresentando sua finalidade e respostas, além de propor resultados com um motor de combustão interna. Após essa publicação, apareceram inúmeras outras aplicações do controle extremal em motores de combustão interna.

Nas décadas de 1950 e 1960, o controle extremal bem como outras formas de controle adaptativo se tornaram um proeminente tópico de pesquisas e a grande maioria desses trabalhos eram voltados para a descrição de algoritmos e exploração de desempenho em aplicações particulares [4, 8].

Já entre os anos 70 e 2000, o estudo e interesse sobre o controle extremal mantiveram-se, porém a atenção passou para a busca de novas estratégias de controle adaptativo, que resolvessem os problemas mais complexos com relação à estabilidade e ao desempenho do sistema de controle [3, 8]. Até a década de 90, a maioria dos algoritmos utilizava a excitação periódica para explorar o regime permanente. Entretanto, o interesse no controle extremal somente reapareceu após a publicação de uma rigorosa prova de estabilidade para o sistema de controle extremal clássico proposta por Krstic e Wang em 2000 [3, 9].

Em [3], observou-se que na última década houve um aumento expressivo de publicações sobre o ESC, aproximadamente dez vezes superior ao número de publicações da década anterior. Os algoritmos mais utilizados para a otimização sem restrição utilizam a informação do Gradiente da função, porém em diversos problemas de controle extremal essas informações não podem ser captadas em tempo real ou a sua obtenção pode ser muito trabalhosa. Além disso, o emprego de derivadores ou sensores de Gradiente tende a amplificar os ruídos e acarretar instabilidade em frequências elevadas [10]. Dessa maneira, o controle extremal apresenta-se como uma excelente solução para o problema de otimização em tempo real.

No controle extremal baseado em perturbação senoidal (*dither*), usa-se um filtro passa-alta na saída da planta e uma perturbação senoidal para estimar o gradiente da função objetivo [8]. Método conhecido pela adaptação satisfatória, contudo pode-se garantir somente a estabilidade local [11].

## Motivações e Aplicações

O controle extremal está cada vez mais em voga no meio acadêmico e indústria com inúmeras aplicações propostas [12]. Dessa maneira, houve uma crescente necessidade de otimização de plantas para minimizar os custos operacionais e adequar as especificações do produto [13]. Então, a solução tomada por inúmeros desenvolvedores tem sido projetar melhores controladores que garantam um ótimo desempenho da planta. Não é por acaso que o controle extremal tem sido considerado uma das áreas mais promissoras de controle adaptativo [14].

Conforme mencionado anteriormente, o ESC possui a capacidade de conduzir um sistema para uma região em torno de um ponto ótimo de uma função de interesse como por exemplo: o lucro, a eficiência, entre outros. Por ser um método de controle adaptativo que não possui a necessidade do conhecimento explícito da planta, que é uma característica bem importante, já que diversas vezes o modelo não está disponível ou as pesquisas relacionadas acarretam em custos elevados ou sofrem com incertezas paramétricas. Portanto, torna-se imprescindível a pesquisa do funcionamento desse método de controle, bem como as possíveis maneiras de desenvolvê-lo ou melhorá-lo.

Foram encontradas diversas aplicações e inovações, dentre as quais pode-se citar: os sistemas do freio ABS (*Antilock braking system*), cujo coeficiente de força de fricção alcança um valor máximo para um valor desconhecido não-nulo de coeficiente de deslizamento da roda. Esta função varia de acordo com a superfície onde o carro se encontra, fazendo com que o sistema se adapte ao tipo de solo que esteja fazendo contato. Dessa maneira, o ESC seria utilizado para sintonizar um controlador capaz de alcançar esse valor máximo independente do tipo de pista [4, 8, 15].

Em [16] foi apresentada também a possibilidade de utilização do controle extremal para a otimização da produção de petróleo em poços que operam por elevação artificial através da injeção de gás *lift*. Visa-se encontrar o sistema em malha fechada e conservá-lo em torno do ponto ótimo da curva de produção, aumentando assim o Valor Presente Líquido (VPL) do sistema e os lucros de operação. Os métodos aplicados atualmente mostram-se, de um modo geral, lentos e não automatizados, essa proposta foi desenvolvida com o objetivo de ser uma alternativa, e por se tratar de um controle adaptativo que não necessita do conhecimento explícito da planta. Desse modo, o ESC se mostra como uma boa opção por permitir incertezas na modelagem do problema.

Veículos autônomos são muito comuns na indústria atualmente, sendo esta uma área bastante pesquisada, realizando-se adaptações que se ajustam a diversos tipos de empresas [8]. O controle de veículos autônomos é relativamente complexo. Tipicamente os agentes autônomos permitem compartilhar informações, dentre elas, pelo menos, tem-se medidas da posição. Todavia, a partir do trabalho [17], utilizando-se o controle extremal, foi encarado o problema de total autonomia, dessa forma, não se conhecendo a posição nem a velocidade do veículo, que pôde rastrear uma fonte de valor escalar. Fonte esta que pode ser uma concentração de um agente químico ou um sinal eletromagnético. A concentração ou intensidade de sinal eletromagnético é desconhecida, contudo, presume-se que seja muito maior na fonte e decai a partir desta.

Vale destacar também que uma de suas aplicações mais notáveis para a engenharia e indústria é a otimização dos coeficientes do controlador PID [4]. É utilizado também para dar o *setpoint* ótimo, também sintonizando rapidamente os ganhos do controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) [8]. Além disso, pode-se ainda explorar em outros setores, tais como: robôs móveis, motores de combustão interna, controle de processos, aceleradores de partículas, *source seeking application* e diversos outros [3, 4, 8]. Recentemente houve um expressivo e elevado número de novos trabalhos apresentados por colegas explorando o controle extremal que podem ser encontrados em [18–27].

Desse modo, optou-se pela realização de um estudo relevante na área de controle extremal, que apresentasse de alguma forma uma novidade para a literatura já existente. Sendo assim, foi proposto o estudo do controle extremal estocástico sem atrasos, na presença de atrasos e com atrasos mais o emprego do preditor para a compensação dos atrasos. Para validação desta dissertação, provas de estabilidade foram apresentadas, assim como simulações numéricas.

## Objetivos

O objetivo desta dissertação consiste em realizar uma nova pesquisa na literatura que aborde o controle extremal estocástico na presença de atrasos. Sabe-se que o ESC conduz o sistema para a vizinhança do valor ótimo desejado e uma vez que os atrasos são inseridos, o sistema em malha fechada é levado à instabilidade. Dessa maneira, o principal desafio consiste em lidar com os atrasos, modificando a malha do controle extremal estocástico escalar, de modo que os algoritmos do Gradiente e de Newton sejam ainda

eficazes na presença de atrasos na saída (ou entrada) do mapeamento quadrático não-linear. Assim sendo, a solução proposta para este desafio consiste em atrasar os sinais de perturbação, bem como adicionar um preditor na entrada do integrador para compensar os efeitos dos atrasos. Esta dissertação visa principalmente a demonstração da análise de estabilidade aplicada aos algoritmos no meio estocástico e a apresentação das simulações numéricas.

### **Trabalhos publicados decorrentes da dissertação**

Trabalhos publicados durante o mestrado [28, 29], que serviram de base para o desenvolvimento desta dissertação:

- Silva, P. C. S.; Oliveira, T. R. Controle Extremal Estocástico na Presença de Atrasos. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v.1, p. 3202-3208, 2019.
- Silva, P. C. S.; Oliveira, T. R. Controle Extremal Estocástico Baseado no Algoritmo do Gradiente na Presença de Atrasos. *Congresso Brasileiro de Automatica*, v. 2, n. 1, 2020.

### **Metodologia**

Para o desenvolvimento do trabalho, foi estudado o controle extremal estocástico baseado nos algoritmos Gradiente e de Newton aplicando atrasos na saída do mapeamento quadrático não-linear a ser otimizado, realizou-se a compensação dos atrasos empregando um preditor realimentado e a análise da estabilidade foi alcançada via transformação *backstepping* e pela teoria da média *averaging* em dimensões infinitas [30]. Dessa maneira, efetuaram-se os seguintes passos:

- Avaliação da inserção dos atrasos como a desenvolvida em [6], bem como a análise do controle extremal estocástico apresentado em [12] e revisão dos preditores e implementação nos algoritmos do tipo Gradiente e Newton estocásticos.
- Desenvolvimento de equações de malha fechada para o controle extremal com os atrasos inseridos.
- Atraso representado por um sistema de equações diferenciais parciais de transporte.

- Encontrar o sistema médio do sistema em malha fechada.
- Utilizar a transformação *backstepping* de maneira que o sistema original seja levado a outro sistema de equações alvo com propriedades desejadas.
- Introdução de um funcional de Lyapunov-Krasovskii.
- Encontrar uma estimativa exponencial na norma de  $L_2$  para o sistema médio.
- Invocar o teorema da média em dimensões infinitas para garantir a convergência assintótica para a vizinhança do ponto extremo ótimo desejado.
- Simulação do controle extemal estocástico baseado nos algoritmos Gradiente e de Newton sem atrasos e sem compensação via preditor, com atrasos e sem compensação via preditor e, finalmente, com atrasos e compensação via preditor.

### **Organização**

O texto está organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 1, os conceitos básicos do controle extremal são apresentados.
- No capítulo 2, introduz-se o ESC estocástico sem atrasos.
- No Capítulo 3, mostra-se o controle extremal do tipo Gradiente com atrasos e a demonstração da prova de estabilidade do algoritmo na presença de atrasos.
- No Capítulo 4, o controle extremal estocástico do tipo Newton com atrasos é apresentado, além da prova de estabilidade do algoritmo também na presença de atrasos.
- No Capítulo 5, são apresentadas simulações numéricas para os algoritmos do Gradiente e Newton sem atrasos, com atrasos sem compensação via preditor e com atrasos com compensação via preditor.
- A conclusão e sugestões para trabalhos futuros desta pesquisa são apresentados na última parte do documento.

## Fundamentos e Definições

### Notações e normas

A norma-2 de um vetor de estado  $X(t)$  de dimensão finita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é denotada por barras simples  $|X(t)|$ . Em contraste, as normas de funções (de  $x$ ) são denotadas por barras duplas. Por padrão,  $\|\cdot\|$  denota a norma espacial  $L_2[0, D]$ , i.e.,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2[0, D]}$ . Como a variável de estado  $u(x, t)$  da equação diferencial parcial (EDP) é uma função de dois argumentos, deve-se dar ênfase que levando em conta a norma de uma das variáveis faz-se a norma uma função da outra variável. Por exemplo, a norma  $L_2[0, D]$  de  $u(x, t)$  em  $x \in [0, D]$  é  $\|u(t)\| = \left( \int_0^D u(x, t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ .

As derivadas parciais de  $u(x, t)$  são denotadas por  $u_t(x, t)$  e  $u_x(x, t)$  ou, ocasionalmente, por  $\partial_t u_{av}(x, t)$  e  $\partial_x u_{av}(x, t)$  para se referir ao operador do sinal médio  $u_{av}(x, t)$ . Admitindo-se um sistema não-linear genérico  $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$ , onde  $x \in R^n$ ,  $f(t, x, \epsilon)$  é periódico em  $t$  com período  $T$ , isto é,  $f(t + T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$ . Então, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por  $\dot{x} = f_{av}(x_{av})$ , com  $f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$ , onde  $x_{av}(t)$  denota a versão média do estado  $x(t)$  [31]. Conforme definido em [31], uma função vetorial  $f(t, \epsilon) \in R^n$  é dita de ordem  $O(\epsilon)$  dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$  se existem constantes positivas  $k$  e  $\epsilon^*$  tais que  $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon \forall \epsilon \in [0, \epsilon^*]$  e  $\forall t \in [t_1, t_2]$ . Por vezes, estimativas para as constantes  $k$  e  $\epsilon^*$  serão fornecidas, podendo-se quantificar a correspondente aproximação  $O(\epsilon)$ . Caso contrário,  $O(\epsilon)$  será satisfeito sendo uma ordem da relação de magnitude válida para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

### Desigualdades úteis

Algumas desigualdades empregadas neste trabalho são apresentadas em [5], tais como:

(a) Desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{\gamma}{2}a^2 + \frac{1}{2\gamma}b^2, \quad \forall \gamma > 0, \quad (0.1)$$

(b) Desigualdade de Cauchy-Scharwz:

$$\int_0^1 u(x)\omega(x)dx \leq \left( \int_0^1 u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 \omega(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.2)$$

## 1 CONCEITOS BÁSICOS DO CONTROLE EXTREMAL

O controle extremal é uma ferramenta de otimização em tempo real e um método do controle adaptativo, que se diferencia do controle clássico em dois aspectos [32]. No primeiro, o controle extremal não se encaixa dentro do paradigma clássico ou modelo de referência ou esquemas relacionados, que lidam com o problema de estabilização de uma conhecida trajetória de referência ou ponto de ajuste. Enquanto que no segundo, o controle extremal não se baseia no conhecimento do modelo.

É aplicável em situações onde a não-linearidade existe no problema de controle, esta não-linearidade possui um máximo ou um mínimo e pode estar presente na planta, como por exemplo uma não-linearidade física, possivelmente manifestando-se através de um mapa de equilíbrio ou pode estar também no objetivo de controle, adicionado ao sistema através de um custo funcional de um problema de otimização. Portanto, pode-se usar o controle extremal tanto para ajustar o *setpoint* a alcançar um ótimo valor de saída quanto para configurar os parâmetros de uma lei de realimentação.

Com diversas aplicações do controle extremal envolvendo sistemas mecânicos e veículos, que são naturalmente modelados por sistemas não-lineares contínuos no tempo, existe a necessidade de algoritmos de controle extremal contínuos no tempo e de estabilidade teórica. Infelizmente, o teorema da média para sistemas estocásticos no tempo contínuo são muito restritivos para serem aplicados aos algoritmos do controle extremal.

### 1.1 Apresentação do controle extremal

Existem inúmeras versões de controle extremal com várias abordagens para o estudo da estabilidade [12]. A versão mais comum emprega a perturbação de sinais com o propósito de estimar o Gradiente de uma mapa desconhecido que está sendo otimizado. Para o melhor entendimento do conceito básico do controle extremal, é melhor considerar, primeiro, o caso do mapa estático de entrada única e forma quadrática. No caso da Figura 2, considera-se o mapeamento quadrático não-linear de acordo com a equação 1.1:

$$f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2. \quad (1.1)$$

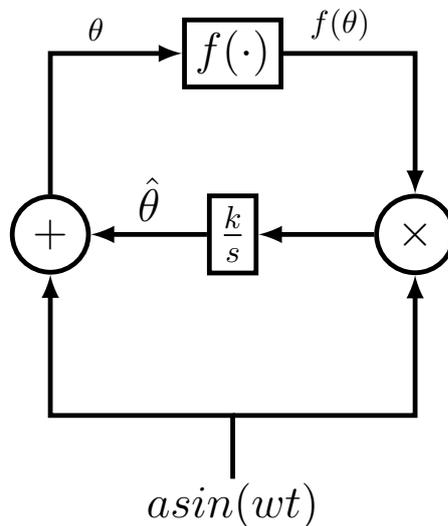


Figura 2 O esquema demonstra a mais simples perturbação para uma entrada única do mapeamento quadrático  $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$ , sendo que  $f^*$ ,  $f''$  e  $\theta^*$  são todos desconhecidos. Necessita-se apenas conhecer o sinal de  $f''$ , se o mapa possui um máximo ou mínimo e escolher o ganho de adaptação  $k$ , de tal maneira que  $\text{sgn}(k) = -\text{sgn}(f'')$ . A frequência  $\omega$  tem que ser relativamente grande em relação a  $a$ ,  $k$  e  $f''$ .

Note que a partir da Figura 2 aparecem três tipos de  $\theta$ :

- $\theta^*(t)$  é o otimizador desconhecido do mapa.
- $\hat{\theta}(t)$  é a estimativa em tempo real.
- $\theta(t)$  é a entrada atual do mapa.

A entrada atual  $\theta(t)$  é baseada na estimativa  $\hat{\theta}(t)$ , mas é perturbada pelo sinal  $asin(\omega t)$  com o objetivo de estimar o gradiente desconhecido  $f'' \cdot (\theta - \theta^*)$  do mapa  $f(\theta)$ . A entrada senoidal é apenas uma escolha para perturbação de sinal, lembrando que muitas outras podem ser escolhidas, desde ondas quadradas a ruído estocástico, conquanto possuam média igual a zero. A estimativa  $\hat{\theta}(t)$  é gerada pelo integrador com função de transferência  $\frac{k}{s}$  e o ganho de adaptação  $k$  controlando a velocidade de estimação.

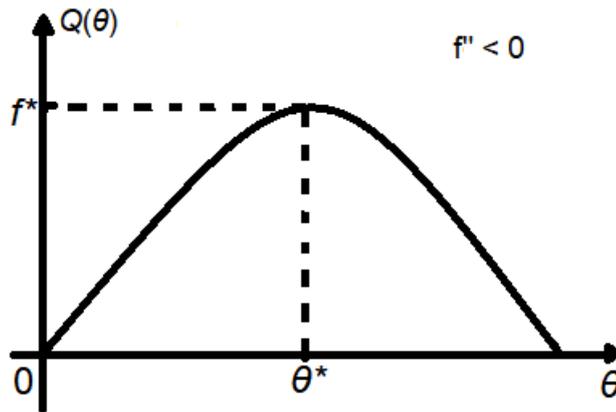


Figura 3 Função a ser maximizada (Hessiana negativa).

Da Figura 2, verifica-se que:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + asin(\omega t). \quad (1.2)$$

Vale ressaltar, que o algoritmo do controle extremal é bem sucedido se o erro entre a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  e o desconhecido  $\theta^*$  converge em direção a zero

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*. \quad (1.3)$$

Com o auxílio da equação (1.3), reescreve-se (1.2) como:

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + \theta^* + asin(\omega t). \quad (1.4)$$

Baseada na Figura 2, a estimativa é governada pela equação diferencial  $\dot{\hat{\theta}} = k asin(\omega t) f(\theta)$ , que significa que o erro de estimativa é governado por:

$$\dot{\hat{\theta}} = k \sin(\omega t) \left[ f^* + \frac{f''}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2 \right]. \quad (1.5)$$

A partir de (1.3), observa-se que  $\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\tilde{\theta}}(t)$ . Então, substituindo-se, (1.4) em (1.5)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= k \sin(\omega t) \left[ f^* + \frac{f''}{2} (\tilde{\theta}(t) + a \sin(\omega t))^2 \right] \\ &= k \sin(\omega t) \left[ f^* + \frac{f''}{2} (\tilde{\theta}^2(t) + 2\tilde{\theta}(t)a \sin(\omega t) + a^2 \sin^2(\omega t)) \right] \\ &= k a f^* \sin(\omega t) + k \sin(\omega t) \frac{f''}{2} \tilde{\theta}^2(t) + k a^2 f'' \sin^2(\omega t) \tilde{\theta}(t) + k a^3 \frac{f''}{2} \sin^3(\omega t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Utilizando  $\sin^2(\omega t) = (1 - \cos(2\omega t))/2$  e  $\sin^3(\omega t) = (3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t))/4$ , então

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= k a f^* \sin(\omega t) + k \sin(\omega t) \frac{f''}{2} \tilde{\theta}^2(t) + k a^2 \frac{f''}{2} \tilde{\theta}(t) \\ &\quad - k a^2 \frac{f''}{2} \tilde{\theta}(t) \cos(2\omega t) + \frac{3}{8} k a^3 f'' \sin(\omega t) - \frac{1}{8} k a^3 f'' \sin(3\omega t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Aplicando o Teorema da Média, o método aproxima a solução de um dado sistema pela solução de um sistema médio [31]. No sistema estudado acima, isso é realizado calculando a média temporal dos termos senoidais, encontrando:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}}{dt} = \frac{k f'' a^2}{2} \tilde{\theta}_{av}, \quad (1.8)$$

lembrando que o termo  $k f'' < 0$ .

A equação (1.8) é exponencialmente estável e o Teorema da Média [31] garante a existência de um  $\omega$  suficientemente grande tal que, se a condição inicial  $\hat{\theta}(0)$  é suficientemente próxima do  $\theta^*$ , chega-se a expressão:

$$|\theta(t) - \theta^*| \leq |\theta(0) - \theta^*| e^{\frac{k f'' a^2 t}{2}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) + a. \quad (1.9)$$

A inequação (1.9) garante que, se o parâmetro  $a$  é escolhido pequeno e  $\omega$  grande, a entrada  $\theta(t)$  converge exponencialmente para uma vizinhança próxima de  $\theta^*$  desconhecido e, conseqüentemente, a saída  $f(\theta)$  converge para a vizinhança da saída ótima  $f^*$ .

## 1.2 ESC para mapas estáticos multivariáveis

Para mapas estáticos, o controle extremal se estende de uma maneira simples e direta do caso de entrada única mostrado na Figura 2 para o caso multivariável (múltiplas entradas) mostrado na Figura 4.

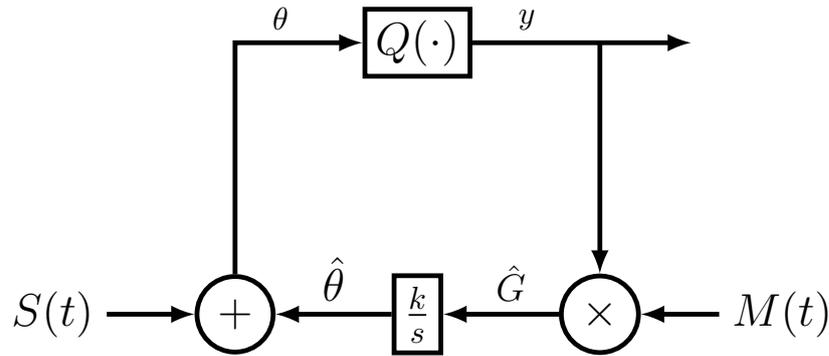


Figura 4 Algoritmo do controle extremal para mapeamentos multivariáveis  $y = Q(\theta)$ , cujo  $\theta$  é o vetor de entrada  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ . O algoritmo emprega a perturbação aditiva do sinal  $S(t)$  e a demodulação multiplicativa do sinal  $M(t)$ .

O algoritmo mede o sinal escalar  $y(t) = Q(\theta(t))$ , no qual  $Q(\cdot)$  é um mapa desconhecido, cuja entrada é o vetor  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  e o Gradiente é estimado com a ajuda dos sinais [33].

$$S(t) = \left[ a_1 \sin(\omega_1 t) \dots a_n \sin(\omega_n t) \right]^T \quad (1.10)$$

$$M(t) = \left[ \frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \dots \frac{2}{a_n} \sin(\omega_n t) \right]^T. \quad (1.11)$$

Com amplitudes de perturbação  $a_1$  diferentes de zero e matriz de ganho  $k$ , sendo esta uma matriz diagonal. Para garantir a convergência, deve-se escolher  $\omega_i \neq \omega_j$ , que é uma condição chave para distinguir múltiplas entradas de entrada única. Além disso, para simplificar a análise de convergência, o projetista deveria utilizar  $\frac{\omega_i}{\omega_j}$  como racional e  $\omega_i + \omega_j = \omega_k$  para  $\omega_i$ ,  $\omega_j$  e  $\omega_k$  distintos [12].

Se o mapa desconhecido é quadrático da seguinte forma:

$$Q(\theta) = Q^* + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T H(\theta - \theta^*) \quad (1.12)$$

então o sistema médio é:

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av} = kH\tilde{\theta}_{av}. \quad (1.13)$$

Se, por exemplo, o mapa  $Q(\cdot)$  tem um máximo que é localmente quadrático implicando em  $H = H^T < 0$  e se há a escolha dos elementos da matriz diagonal de ganho  $k$  como positivo, é garantido que o controle extremal seja localmente convergente. Contudo, a taxa de convergência depende da Hessiana desconhecida  $H$ . Essa fragilidade encontrada no algoritmo do controle extremal baseado no método Gradiente é removida com a utilização do algoritmo do controle extremal baseado em Newton.

### 1.3 ESC baseado em Newton para mapeamentos estáticos

A versão do algoritmo do controle extremal baseado no algoritmo de Newton [33], demonstrada na Figura 5, garante que a taxa de convergência seja atribuída ao projetista e não dependente da Hessiana desconhecida do mapa.

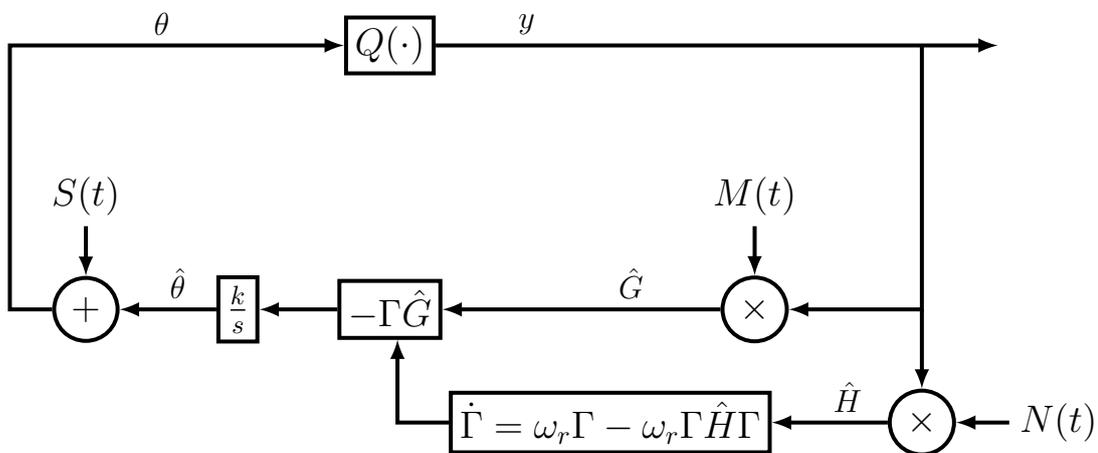


Figura 5 ESC baseado no algoritmo de Newton.

Os elementos da matriz de modulação  $N(t)$  para a geração da estimativa da Hessiana são dados por:

$$N_{ii} = \frac{16}{a_i^2} \left( \sin^2(\omega_i t) - \frac{1}{2} \right), \quad (1.14)$$

$$N_{ij} = \frac{4}{a_i a_j} \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t). \quad (1.15)$$

No algoritmo baseado em Newton para um mapeamento estático, a excitação multiplicativa  $N(t)$  ajuda a gerar a estimativa da Hessiana  $\frac{d^2Q(\theta)}{d\theta^2}$  enquanto

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t). \quad (1.16)$$

$\Gamma$  gera uma estimativa da inversa da matriz Hessiana, evitando assim as inversões matriciais das estimativas da Hessiana, que podem ser singulares durante o transitório.

Para um mapeamento quadrático, o sistema médio nas variáveis de erro  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ ,  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - H^{-1}$  são:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}}{dt} = -k\tilde{\theta}_{av} - k\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\theta}_{av} \quad (1.17)$$

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}}{dt} = -\omega_r\tilde{\Gamma}_{av} - \omega_r\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\Gamma}_{av} \quad (1.18)$$

- Os termos  $\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\theta}_{av}$  e  $\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\Gamma}_{av}$  das equações (1.17) e (1.18) são quadráticos.

Uma vez que os autovalores são determinados por  $k$  e  $\omega_r$  e são portanto independentes de  $H$  desconhecida, a taxa de convergência local é atribuída ao projetista.  $k$  é a matriz diagonal e  $\omega_r$  um parâmetro de projeto.

#### 1.4 ESC para sistemas dinâmicos

O Controle extremal se estende de maneira direta de caso do mapeamento estático para o caso dinâmico [11], assume-se que essas dinâmicas são estáveis e os parâmetros do controlador são atribuídos de maneira que a dinâmica do algoritmo seja mais lenta do que a da planta. O algoritmo é ilustrado na Figura 6.

Os dois filtros são úteis na redução do efeito adverso por conta dos sinais de perturbação no desempenho assintótico, porém não são necessários na análise de estabilidade.

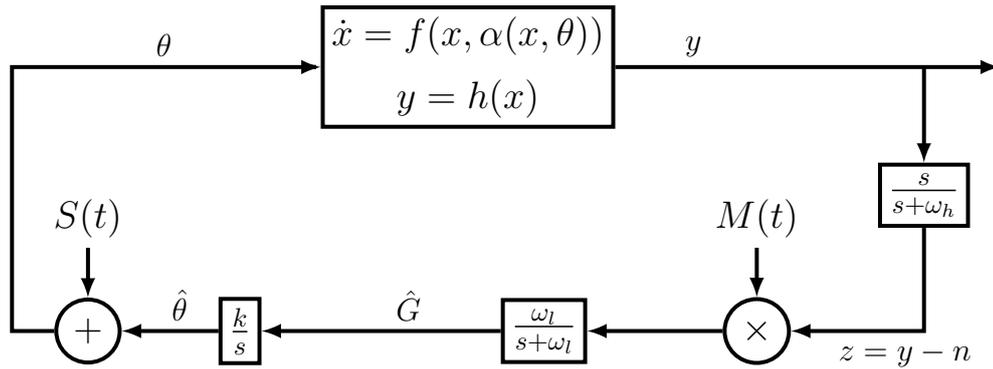


Figura 6 O algoritmo do controle extremal na presença de sistemas dinâmicos com um mapa de equilíbrio  $\theta \rightarrow y$  que satisfaz as mesmas condições como no caso estático. Se as dinâmicas são estáveis e o desenvolvedor emprega parâmetros no algoritmo do controle extremal de modo que as dinâmicas do algoritmo sejam mais lentas que as dinâmicas da planta, a convergência é garantida (localmente pelo menos).

As condições técnicas para a convergência na presença de dinâmica são que o equilíbrio  $x = l(\theta)$  do sistema  $\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta))$ , no qual  $\alpha(x, \theta)$  é a lei de controle de uma malha de realimentação interna, seja local e exponencialmente estável e uniforme em  $\theta$  e que, dada a saída do mapa  $y = h(x)$ , exista pelo menos um  $\theta^* \in R^n$  de tal modo que  $\frac{\partial}{\partial \theta}(hol)(\theta^*) = 0$  e  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(hol)(\theta^*) = H < 0$ ,  $H = H^T$ .

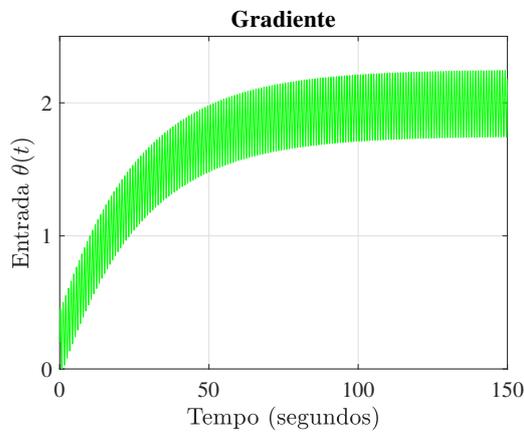
A análise da estabilidade na presença de dinâmica emprega tanto o Teorema da Média quanto perturbações singulares, em uma ordem específica. As orientações do projeto para a seleção dos parâmetros do algoritmo seguem a mesma análise. Embora as instruções sejam muito longas para serem apresentadas aqui, elas garantem que a dinâmica da planta esteja em uma escala de tempo rápida, as perturbações em uma escala de tempo média e o algoritmo de ESC esteja em uma escala de tempo lenta [12].

### 1.5 Exemplo Numérico de ESC baseado no algoritmo Gradiente Determinístico

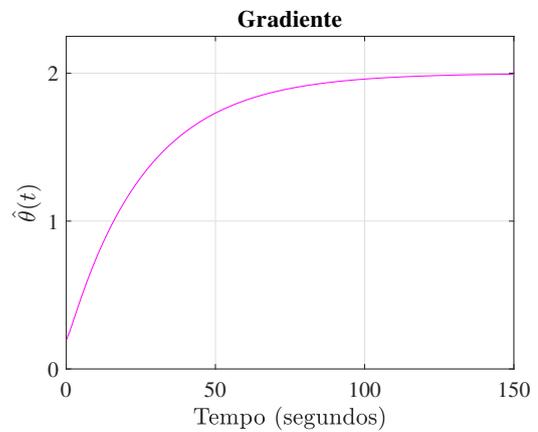
Para demonstrar o algoritmo Gradiente, considera-se o seguinte mapeamento quadrático estático não-linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{H}{2}(\theta - 2)^2, \quad (1.19)$$

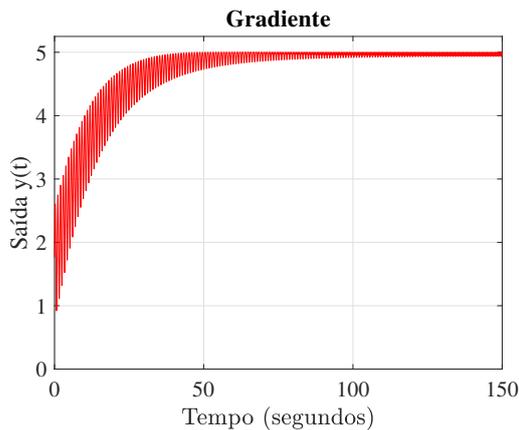
onde o ponto de extremo é  $(\theta^*, y^*)$  e a Hessiana do mapeamento é  $H = -2$ . Na simulação, os parâmetros foram utilizados da seguinte maneira:  $Q^* = 5$ ,  $\theta^* = 2$ ,  $a = 0.25$ ,  $\omega = 7$ ,  $k = 0.6$  e condição inicial  $\theta(0) = 0.2$ .



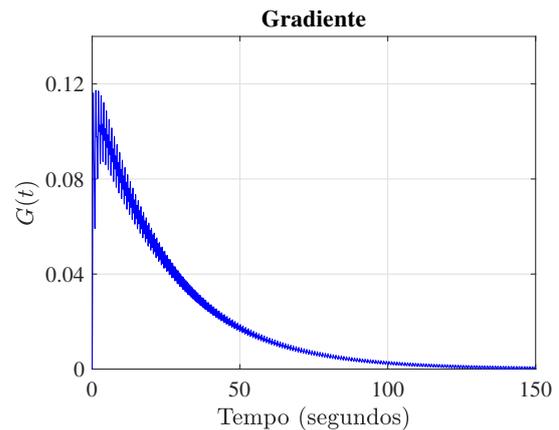
(a) Entrada  $\theta(t)$  do algoritmo Gradiente.



(b) Estimativa  $\hat{\theta}(t)$ .



(c) Saída do algoritmo.



(d) Gradiente  $G(t)$  do mapeamento quadrático não-linear.

Na Figura 7(a), observa-se a entrada  $\theta(t)$  convergindo para a vizinhança ótima desejada, bem como a preservação do sistema em malha fechada. Além disso, através da Figura 7(b), observa-se a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  convergindo para o valor que otimiza o mapa e pela Figura 7(c), verifica-se também que mais uma vez a estabilidade foi preservada ao

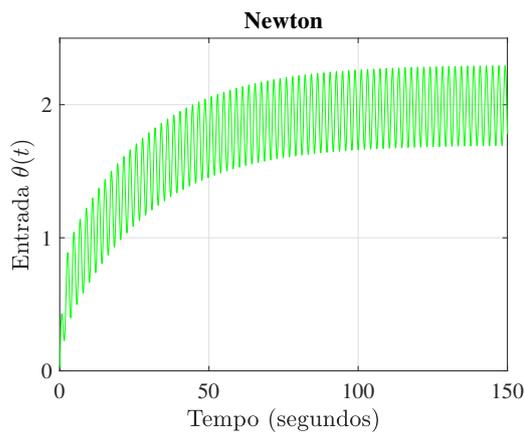
longo do tempo e que a saída convergiu para o ponto extremo. Na Figura 7(d), nota-se o Gradiente convergindo para zero à medida que a saída converge para o ponto extremo  $y^* = 5$ .

### 1.6 Exemplo Numérico de ESC baseado no algoritmo de Newton Determinístico

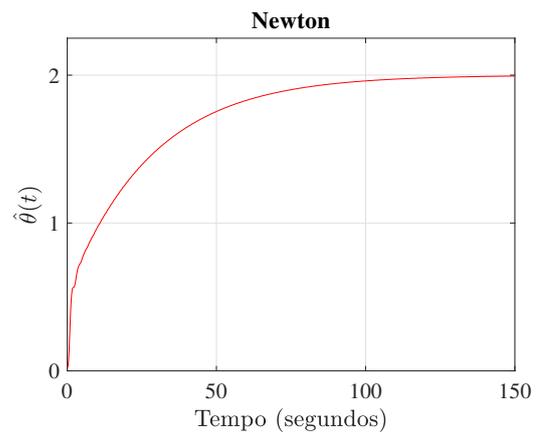
Para demonstração do algoritmo de Newton, considera-se o seguinte mapeamento quadrático estático não-linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{H}{2}(\theta - 2)^2, \quad (1.20)$$

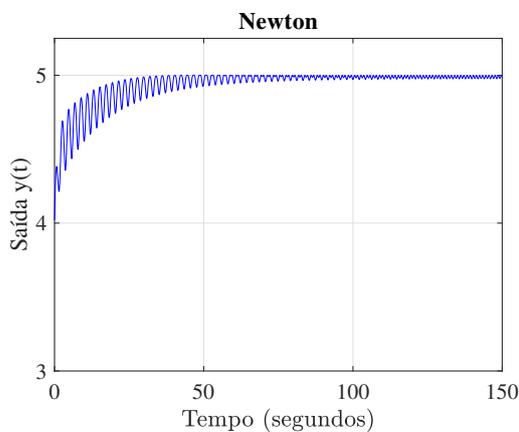
onde o ponto de extremo é  $(\theta^*, y^*)$  e a Hessiana do mapeamento é  $H = -1/2$ . Na simulação, os seguintes parâmetros foram utilizados:  $Q^* = 5$ ,  $\theta^* = 2$ ,  $a = 0.3$ ,  $\omega = 3$ ,  $k = 0.04$ ,  $\omega_r = 0.08$ ,  $\Gamma(0) = -1.99$  e condição inicial  $\theta(0) = 0.02$ .



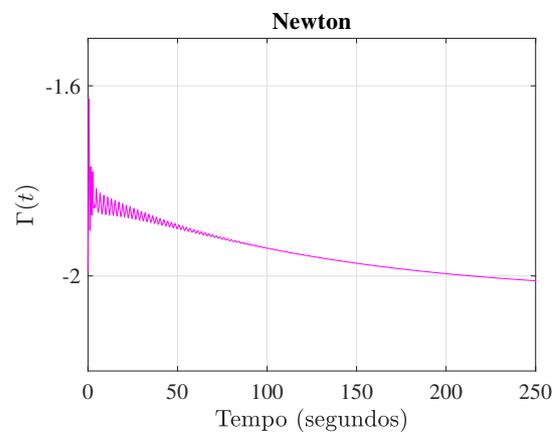
(e) Entrada  $\theta(t)$  do algoritmo de Newton.



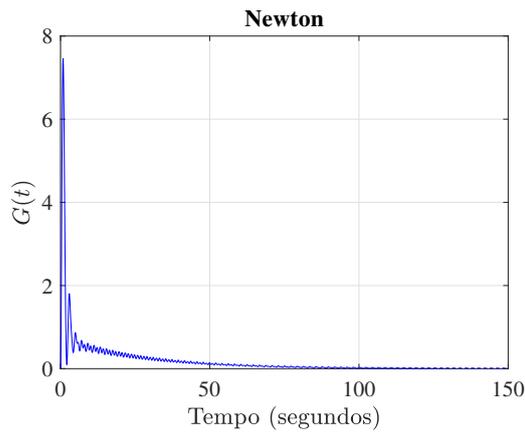
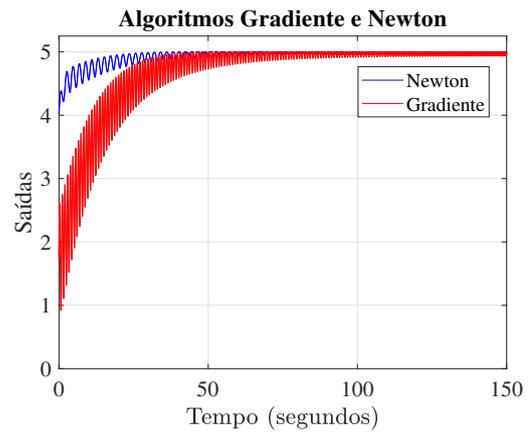
(f) Estimativa  $\hat{\theta}(t)$ .



(g) Saída do algoritmo do tipo Newton.



(h)  $\Gamma(t)$  convergindo para a vizinhança do valor desejado.

(i) Estimativa  $G(t)$  do algoritmo de Newton.

(j) Saídas dos algoritmos Gradiente e Newton.

Na Figura 7(e), observa-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = 2$ , pela Figura 7(f), confere-se a convergência de  $\hat{\theta}(t)$  para a vizinhança do valor ótimo desejado  $\theta^* = 2$  e através da Figura 7(g), constata-se uma vez mais a estabilidade do sistema em malha fechada e que a saída da planta convergiu para a vizinhança ótima desejada  $Q(\theta) = 5$ .

Pela Figura 7(h), nota-se a estimativa de Gamma convergindo para o valor desejado  $\Gamma(t) = -2$ , através da Figura 7(i) observa-se a estimativa do Gradiente convergindo uma vez mais a zero durante o tempo de simulação e na Figura 7(j), verifica-se Newton apresentando uma taxa de convergência mais rápida que o algoritmo Gradiente.

## 2 INTRODUÇÃO AO ESC ESTOCÁSTICO

Nesta seção, introduz-se o conceito básico do controle extremal por busca extremal estocástica, faz-se uma comparação com o ESC determinístico e discute-se também a idéia heurística de média estocástica como uma forma de estudo da estabilidade do algoritmo do controle extremal estocástico. Enquanto for aplicável em plantas com dinâmicas (ou seja, plantas modeladas por equações diferenciais ordinárias), adiciona-se o controle extremal sob a óptica do problema mais simples possível (a otimização do mapa estático  $f(\theta)$ ). Sem perda de generalidade, assume-se que  $f$  possui um mínimo/máximo em  $\theta = \theta^*$ , o qual se buscam esses valores [5, 32].

Ainda que exista um elevado número de trabalhos e artigos detalhando o controle extremal [12, 18–27, 33–36], não existia até então na literatura um trabalho que examinasse rigorosamente o desafio do problema de ESC estocástico [32] baseado no algoritmo do tipo Gradiente e de Newton [28, 29] com inserção de atrasos na entrada e saída [37], respectivamente.

Além disso, vale comentar que as principais vantagens do controlador extremal estocástico sobre o controlador extremal determinístico (com sinais de excitação determinísticos) são a possibilidade de escapar dos extremos locais, bem como a garantia de uma taxa de convergência mais rápida [32] e que o ESC está relacionado com uma boa taxa de convergência, enquanto que os atrasos quando são inseridos em um sistema de malha fechada e simplesmente ignorados, restringem severamente a taxa de convergência do sistema como um todo ou leva o sistema à instabilidade e da literatura sabe-se que o controle extremal não é robusto à presença de atrasos [37], que foi o ponto de partida para a jornada de estudos do ESC determinístico com a inserção dos atrasos de entrada e/ou saída. Desse modo, o desafio aqui consiste em realizar um estudo que pesquise os algoritmos do controle extremal no meio estocástico, mais uma vez inserindo os atrasos nos sinais de entrada e saída do sistema e fazendo o uso do preditor realimentado.

### 2.1 Por que o controle extremal estocástico?

Nos algoritmos existentes de controle extremal baseados em perturbação, os sinais de excitação periódica (senoidais) são usadas principalmente para examinar a não-linearidade e estimar o Gradiente. Em sistemas artificiais de busca pela fonte, o movi-

mento quase aleatório de busca pela fonte do buscador estocástico tem suas vantagens em aplicações onde o próprio buscador pode ser perseguido por outro buscador. Um buscador que com sucesso realiza a tarefa de busca da fonte, mas com uma imprevisibilidade, trajetória quase aleatória, é um alvo muito mais desafiador e, portanto, menos vulnerável que um buscador determinístico [32]. Além do mais, se o sistema possui alta dimensionalidade, as exigências de ortogonalidade sobre os elementos do vetor de perturbação periódica impõem uma implementação desafiadora. Dessa maneira, existe o mérito na investigação do emprego de perturbações estocásticas dentro da arquitetura do controle extremal. Os primeiros resultados nessa direção foram alcançados no caso do tempo discreto [38], empregando a teoria existente de média estocástica no caso do tempo-discreto. Os resultados de *source seeking* utilizando perturbações na presença de ruído estocástico tem sido reportados em [39, 40], também no tempo discreto.

Controle extremal estocástico e sua análise de estabilidade apresentam algumas ideias e técnicas em comum com os métodos clássicos de anelamento, de aproximação estocástica e controle adaptativo estocástico [41–46].

## 2.2 Esquema básico do controle extremal estocástico

A seguir, mostra-se a Figura 7 com os sinais  $a\eta(t)$  e  $\eta(t)$ . O parâmetro  $a$  é a amplitude que fornece uma compensação entre o desempenho assintótico e a região de atração do algoritmo,  $\eta = \frac{q\sqrt{\epsilon}}{\epsilon s + 1}[\dot{W}]$  e  $\dot{W}$  são processos independentes de ruído branco de intensidade unitária. São apresentados também gráficos de sinais determinísticos e estocásticos, demonstrando as diferenças dos sinais estudados, conforme as Figura 7(k) e Figura 7(l).

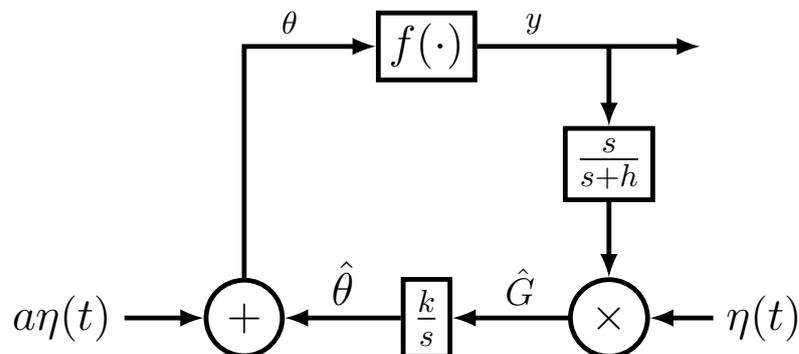
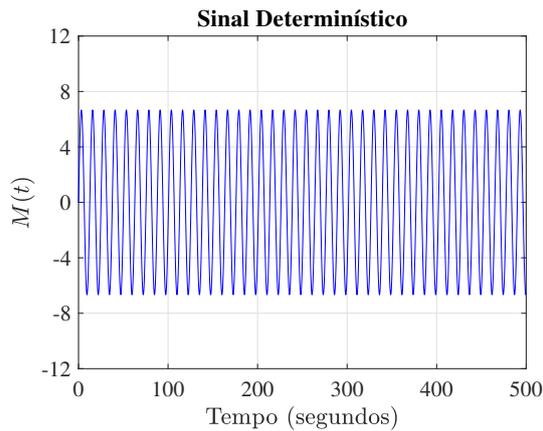
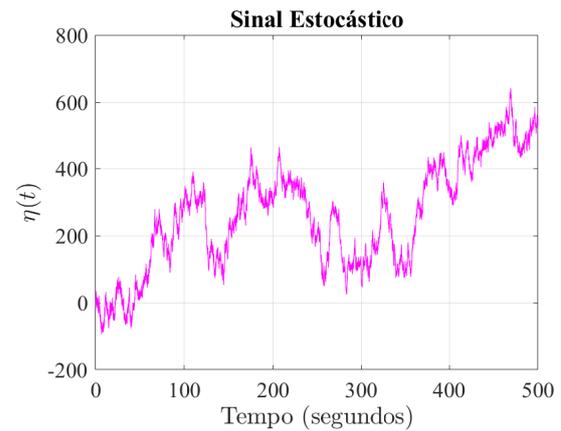


Figura 7 Algoritmo (escalar) Gradiente estocástico.



(k) Gráfico gerado a partir do sinal determinístico  $M(t)$ .



(l) Gráfico gerado a partir do sinal randômico  $\eta(t)$ .

As limitações do esquema do controle extremal determinístico incluem o fato que a perturbação é uniformemente limitada por  $a$ , que pode restringir severamente a região de atração do algoritmo.

Para superar tais limitações de sinais de busca determinísticos, considera-se o uso de sinais estocásticos. Os sinais senoidais possuem duas propriedades que são cruciais para o controle extremal, que são:

- Possuem médias iguais a zero.
- Quando elevados ao quadrado, possuem médias positivas.

Tais propriedades são semelhantes às propriedades dos sinais de ruído Gaussiano branco, isto é, têm valor esperado igual a zero e variância sempre positiva.

Conseqüentemente, considera-se uma substituição de sinais  $\sin(\omega t)$  na Figura 4 pelo ruído branco  $\dot{W}$ , no qual  $W(t)$  é um processo padrão de movimento browniano, que também é conhecido como processo de Wiener. Contudo tal perturbação é extremamente agressiva e torna a análise matemática intratável em virtude da equação diferencial de modo não-linear.

Assim sendo, para suavizar o impacto das perturbações de ruído branco, enquanto introduz-se a aleatoriedade tornando as dinâmicas resultantes matematicamente tratáveis, há a substituição dos sinais  $\sin(\omega t)$  na Figura 4 pelo sinal  $\eta(t)$  obtida pela passagem do ruído branco  $\dot{W}(t)$  através do filtro passa-baixas  $\frac{q\sqrt{\epsilon}}{\epsilon s+1}$  por algumas constantes positivas  $\epsilon$  e  $q$  ou dado em termos de uma equação diferencial de Itô. Emprega-se a perturbação  $\eta(t)$

governada da seguinte maneira:

$$\epsilon d\eta = -\eta dt + \sqrt{\epsilon}q dW. \quad (2.1)$$

### 2.3 Avaliação heurística de um algoritmo do ESC estocástico

Nesta seção, fornece-se uma análise preliminar do algoritmo de controle extremal representado pela Figura 7. Também será exposta uma série de cálculos, que embora não reflitam diretamente os métodos rigorosos perseguidos, ilustra conceitualmente as ideias básicas por trás da estabilidade estabelecida quantificando as taxas de convergência do ESC.

Para simplificar a análise e o estudo, elimina-se o filtro passa-alta do esquema do controle extremal, que possui a função de eliminar a componente DC do mapa, ou seja, substitui-se  $\frac{s}{s+h}$  da Figura 7 pelo bloco de ganho unitário. Essa aproximação é certamente justificada por  $h$ , que é muito pequeno levando em consideração os outros parâmetros, principalmente em relação a  $k$ . A eliminação do filtro passa-alta resulta em um sistema de primeira ordem, cujo único estado é o estado  $\hat{\theta}$  do integrador na Figura 7, que é dirigido por outro sistema linear estocástico de primeira ordem com estado  $\eta$ . Apesar de possuir uma ordem baixa, a análise do sistema em malha fechada não é trivial, pois o sistema é não-linear, variante no tempo e estocástico.

Inicia-se introduzindo a notação descrita no sistema da Figura 7. Mostra-se que:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a\eta(t) \quad (2.2)$$

e o erro de estimativa é apresentado como:

$$\tilde{\theta}(t) = \theta^* - \hat{\theta}(t). \quad (2.3)$$

Combinando as equações (2.2) e (2.3) chega-se:

$$\theta(t) = a\eta(t) - \tilde{\theta}(t) \quad (2.4)$$

Portanto, a partir do bloco integrador observa-se que o erro de estimativa é governado

por:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\theta}}(t) &= -\dot{\hat{\theta}}(t) \\
&= k\eta(t)y(t) \\
&= k\eta(t)f(\theta(t)).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Usando a equação (2.4) e aplicando a expansão de Taylor para  $f(\theta)$  em torno de  $\theta^*$  até a segunda ordem, obtém-se:

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= f(a\eta - \tilde{\theta}) \\
&\approx f(\theta^*) + f'(\theta^*)(a\eta - \tilde{\theta}) + \frac{1}{2}f''(\theta^*)(a\eta - \tilde{\theta})^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dada a hipótese que o mapeamento  $f(\theta)$  possui um mínimo em  $\theta^*$ , seguido de  $f'(\theta^*) = 0$ , que produz:

$$\begin{aligned}
f(\theta) &\approx f(\theta^*) + \frac{1}{2}f''(\theta^*)(a\eta - \tilde{\theta})^2 \\
&= f(\theta^*) + \frac{1}{2}f''(\theta^*)[a^2\eta^2 - 2a\eta\tilde{\theta} + \tilde{\theta}^2].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Substituindo a equação (2.7) em (2.5), chega-se:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\theta}} &\approx k\eta \left\{ f(\theta^*) + \frac{1}{2}f''(\theta^*)[a^2\eta^2 - 2a\eta\tilde{\theta} + \tilde{\theta}^2] \right\} \\
&= k\eta \left[ f(\theta^*) + \frac{a^2}{2}f''(\theta^*)\eta^2 - af''(\theta^*)\eta\tilde{\theta} + \frac{1}{2}f''(\theta^*)\tilde{\theta}^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Agrupando-se os termos em potência de  $\eta$ , chega-se em:

$$\dot{\tilde{\theta}} \approx k \left\{ \eta(t) \left[ f(\theta^*) + \frac{1}{2}f''(\theta^*)\tilde{\theta}^2(t) \right] - \eta^2(t)af''(\theta^*)\tilde{\theta}(t) + \eta^3(t)\frac{a^2}{2}f''(\theta^*) \right\}. \tag{2.9}$$

O sinal  $\eta(t)$  é uma perturbação estocástica governada pela equação diferencial estocástica linear (2.1), do qual  $W(t)$  é o processo de Wiener [47, 48]. Com  $\epsilon$  pequeno, o sinal  $\eta$  é uma aproximação bem próxima do ruído branco. Usando o cálculo elementar de Itô [47, 48], são calculados os valores esperados das três potências de  $\eta$ , que aparecem em (2.9). Esses valores esperados possuem a seguinte propriedade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \{ \eta(t) \} = 0, \quad (2.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \{ \eta^2(t) \} = \frac{q^2}{2}, \quad (2.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \{ \eta^3(t) \} = 0. \quad (2.12)$$

Para ilustrar como essas relações são obtidas, considera-se o caso de  $\eta^2$ , isto é, (2.11), que é obtida aplicando uma regra de diferenciação de Itô para  $\eta^2$  com a ajuda de (2.1), que produz a EDO

$$\frac{\epsilon}{2} \frac{dE \{ \eta^2(t) \}}{dt} = -E \{ \eta^2(t) \} + \frac{q^2}{2}. \quad (2.13)$$

A solução da EDO linear (2.13) é:

$$E \{ \eta^2(t) \} = e^{-2t/\epsilon} E \{ \eta^2(0) \} + \frac{q^2}{2} (1 - e^{-2t/\epsilon}). \quad (2.14)$$

$E \{ \eta^2(t) \} \rightarrow \frac{q^2}{2}$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

Com  $\epsilon$  pequeno, fica evidente que a partir de (2.14) a convergência no tempo  $t$  é muito rápida. Este é o caso das taxas de convergência dos três valores esperados dados em (2.10), (2.11) e (2.12).

Aproximando os  $\eta$  termos em (2.9) pelos respectivos valores esperados, após um pequeno transitório, cujo comprimento é  $O(\epsilon)$ , a estimativa do erro é governada por:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) \approx -\frac{kaq^2}{2} f''(\theta^*) \tilde{\theta}(t). \quad (2.15)$$

Isso finaliza o preliminar estudo heurístico de estabilidade do controle extremal estocástico da Figura 7. A estabilidade local é esperada, em um sentido probabilístico adequado, desde que  $ka > 0$  e que o mapeamento possua um mínimo em  $\theta^*$ . Além disso, a velocidade de convergência é governada pelos valores dos parâmetros  $k$ ,  $a$ ,  $q$  e também pelo valor de  $f''(\theta^*) > 0$ . (Lembrando que aqui  $f''$  é a Hessiana  $H$  desconhecida, declarada no Capítulo 1).

### 3 ALGORITMO GRADIENTE ESTOCÁSTICO NA PRESENÇA DE ATRASOS

Bastante popular em aplicações em torno da metade do século XX, o controle por busca extremal estava quase adormecido durante décadas até a emergência da prova de estabilidade [11], com um subsequente reaparecimento do interesse no ESC para adicionais desenvolvimentos teóricos e aplicações.

O aumento da complexidade de sistemas de engenharia, incluindo sistemas de realimentação, tem conduzido a muitos desafios de otimização desde soluções analíticas a problemas de otimização multiagente, não-linear e sistemas de dimensões infinitas que são muito difíceis, se não impossíveis, de serem obtidas. Estas dificuldades surgem por inúmeras razões, incluindo a presença de objetivos concorrentes ou contraditórios, a alta dimensionalidade do sistema e a sua incerteza inerente. Além do mais, se uma solução baseada no modelo é obtida para esses complicados problemas de otimização, é provável que ela seja conservadora devido as deficiências de modelagem. Dessa maneira, os métodos de controle extremal que não sejam baseados em um modelo são uma opção bastante atrativa para resolver esses problemas.

A área do controle extremal tem visto significativos avanços teóricos durante a década passada, incluindo a prova de convergência local [2, 49–51], sintonia de ganhos do controlador PID [52], melhorias no desempenho e limitações do controle extremal [53], extensão a convergência semi-global [54], desenvolvimento do algoritmo escalar de Newton [55, 56], incluindo a medição do ruído [57], controle extremal com informação parcial da modelagem [13, 58–61]. O controle extremal tem sido empregado em diversas aplicações com sistemas incertos/desconhecidos, tais como: energia eólica [62], energia fotovoltaica [63], máquinas de exercício humano [64], otimizando biorreatores [65].

### 3.1 Controle extremal estocástico do tipo Gradiente com atrasos

O controle extremal possui aplicações, cujos objetivos consistem em maximizar ou minimizar a saída  $y \in R$  de um mapeamento não-linear  $Q(\theta)$  desconhecido, variando a entrada  $\theta \in R$ . Assume-se que existe um atraso constante e conhecido  $D \geq 0$  no caminho de atuação ou no sistema de medição, tal que a saída mensurada seja dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (3.1)$$

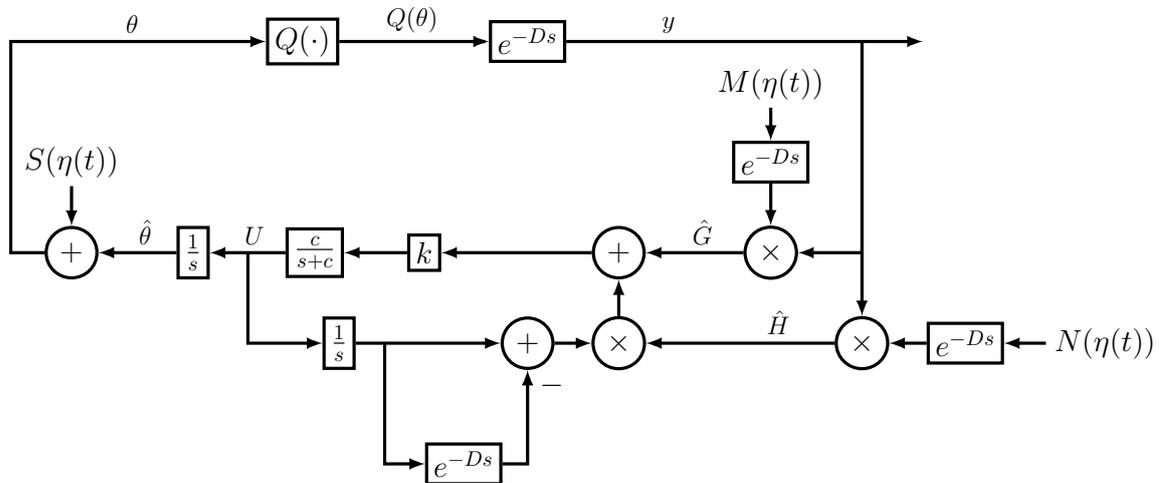


Figura 8 Esquema de predição para a compensação dos atrasos na saída por busca extremal estocástica empregando o algoritmo Gradiente. A realimentação por preditor com uma estimativa da Hessiana baseada em perturbações estocásticas e *averaging* obedece a equação (3.25) e os sinais de *dither* são dados por:  $S(\eta(t)) = a \sin(\eta(t))$ ,  $M(\eta(t)) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t))$  e sinal de demodulação  $N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t))$ .

Presume-se também que ao longo deste trabalho o sistema possui a saída atrasada de acordo com o esquema da Figura 8. No entanto, os resultados podem ser diretamente estendidos para o caso da entrada atrasada, visto que qualquer atraso na entrada pode ser movido para a saída do mapa estático. O caso no qual os atrasos de entrada  $D_{in}$  e de saída  $D_{out}$  aparecem simultaneamente também pode ser tratado assumindo que o atraso total a ser neutralizado seja:  $D = D_{in} + D_{out}$ , com  $D_{in}$  e  $D_{out} > 0$ .

Sem perda de generalidade, assume-se o problema de busca pelo máximo, de tal forma que o valor de  $\theta$  que maximiza  $y$  é denotado por  $\theta^*$ . Por simplicidade, considera-se que o mapeamento *escalar quadrático não-linear* é da forma:

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (3.2)$$

assume-se também que além das constantes  $\theta \in R$  e  $y \in R$  serem desconhecidas, o escalar desconhecido  $H < 0$  é a Hessiana do mapeamento estático.

Na Figura 8, exemplifica-se a versão escalar para o controle por busca extremal estocástica baseado no algoritmo Gradiente empregando a realimentação por preditor para a compensação dos atrasos.

### 3.2 Sinais do sistema

Substituindo-se (3.2) em (3.1), obtém-se o mapeamento quadrático e estático com atraso de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D) - \theta^*)^2. \quad (3.3)$$

seja  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta^*$  e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (3.4)$$

o erro de estimativa. Da Figura 8, tem-se que  $\dot{\tilde{\theta}}(t) = U(t)$  e conclui-se que a dinâmica do erro pode ser descrita da seguinte maneira (atrasando em  $D$  ambos os lados da equação resultante):

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = U(t - D). \quad (3.5)$$

Além disso, tem-se

$$G(t) = M(\eta(t - D))y(t), \quad (3.6)$$

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \quad (3.7)$$

em que os sinais de perturbação senoidal (chamados de sinais de *dither*) são dados por:

$$S(\eta(t)) = a \sin(\eta(t)), \quad (3.8)$$

$$M(\eta(t)) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t)), \quad (3.9)$$

com amplitude  $a > 0$  e frequência  $\omega$  não-nulas. Empregam-se perturbações senoidais estocásticas via processo de Wiener sobre o limite de um círculo [32, 66],

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\eta(t)), \quad (3.10)$$

no qual

$$\eta(t) = \omega\pi(1 + \sin(W_{\omega t})) \quad (3.11)$$

representa um processo de Markov homogeneamente ergódico e utilizando o cálculo estocástico baseado em Itô [32], obtém-se:

$$d\eta = -\omega \frac{\pi}{2} \sin(W_{\omega t}) dt + \omega\pi \cos(W_{\omega t}) dW_{\omega t}. \quad (3.12)$$

Uma vez que o atraso na saída pode ser transferido para a saída do integrador com a finalidade de análise ou equivalentemente para a entrada do sistema, então o deslocamento de fase  $D$  é aplicado para compensar o efeito do atraso no sinal de *dither* em (3.9) e na demodulação de saída em (3.14). O sinal

$$\hat{H}(t) = N(\eta(t - D))y(t) \quad (3.13)$$

é aplicado para se obter uma estimativa da Hessiana  $H$  desconhecida, onde o sinal de demodulação  $N(\eta(t))$  é dado por:

$$N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t)). \quad (3.14)$$

Em [32, 33], foi provado que:

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} M(\sigma)y d\sigma = H\tilde{\theta}_{av}, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (3.16)$$

se um mapeamento quadrático como em (3.2) é considerado. Desse modo, a versão média de  $\hat{H}(t)$  é dada por  $\hat{H}_{av} = (Ny)_{av} = H$  e  $G_{av}(t) = (My)_{av} = H\tilde{\theta}_{av}(t - D)$ .

### 3.3 Realimentação por preditor com estimativa da Hessiana

Utilizando a análise média, verifica-se que a versão média do sinal  $G(t)$  em (3.6) é dada por:

$$G_{av}(t) = H\tilde{\theta}_{av}(t - D). \quad (3.17)$$

De (3.5), os seguintes modelos médios podem ser obtidos

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t - D) = U_{av}(t - D), \quad (3.18)$$

$$\dot{G}_{av}(t) = HU_{av}(t - D), \quad (3.19)$$

onde  $U_{av} \in R$  é o controle médio resultante para  $U \in R$ .

Com a finalidade de motivar o projeto de controle por preditor, a ideia consiste em compensar o atraso pela realimentação do estado futuro  $G(t + D)$  ou  $G_{av}(t + D)$  no sistema médio equivalente. Dado qualquer ganho de estabilização  $k > 0$  para o sistema não atrasado, deseja-se ter uma lei de controle que alcance

$$U_{av}(t) = kG_{av}(t + D), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.20)$$

o que parece ser não implementável, já que requer valores futuros do estado. No entanto, aplicando a fórmula da variação das constantes para (3.18) e (3.19), expressa-se o estado futuro como:

$$G_{av}(t + D) = G_{av}(t) + H \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma, \quad (3.21)$$

que fornece o estado futuro  $G_{av}(t + D)$  em termos do sinal de controle médio  $U_{av}(\sigma)$  da janela causal de tempo  $[t - D, t]$ . Isso produz a seguinte lei de realimentação:

$$U_{av}(t) = k \left[ G_{av}(t) + H \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma \right]. \quad (3.22)$$

Portanto, a partir de (3.21) e (3.22), a lei de realimentação média (3.20) pode ser

obtida realmente como desejada. Consequentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = kG_{av}(t + D), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.23)$$

Dessa maneira, a partir de (3.17), chega-se a:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = kH\tilde{\theta}_{av}(t), \quad \forall t \geq D, \quad (3.24)$$

com um equilíbrio  $\tilde{\theta}_{av}^e = 0$  exponencialmente atrativo, uma vez que  $k > 0$  no projeto de controle e  $H < 0$  por hipótese.

No próximo tópico, mostra-se que os objetivos de controle podem ainda ser alcançados se uma modificação simples, que utiliza um filtro passa-baixas, é aplicada ao controlador baseado em preditor. Neste caso, propõe-se a seguinte versão filtrada do preditor de dimensão infinita para a compensação do atraso [67].

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (3.25)$$

onde  $c > 0$  é suficientemente grande. A versão média do sinal (3.25) é um filtrado de (3.22). Esta filtragem passa-baixas é particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas [30, 68] é invocado, já que não existe resultados de teorema da média para sistemas com atrasos na saída/entrada. Dessa maneira, manipula-se matematicamente o sistema, inserindo o filtro e transformando atrasos de saída em atrasos distribuídos no estado, assim como a variável de controle  $U(t)$  passa a ser vista como uma variável de estado do sistema em malha fechada.

Note que na equação (3.25), utiliza-se uma notação mista tempo-frequência com o domínio do tempo representado pela variável  $t$  e o domínio da transformada de Laplace pela variável  $s$ .

A realimentação por preditor é baseada em perturbação porque  $\hat{H}$  é atualizado de acordo com a estimativa da média (3.13) da Hessiana  $H$ , satisfazendo a propriedade (3.15).

### 3.4 Análise de estabilidade

O principal resultado de estabilidade/convergência para o sistema em malha fechada é dado a seguir. Os operadores  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  e  $\mathbf{P}\{\cdot\}$  denotam respectivamente, o valor esperado e a probabilidade dos sinais.

**Teorema 1** Considere o sistema em malha fechada da Figura 8, com saída atrasada (3.3). Existe  $c^* > 0$  tal que,  $\forall c \geq c^*$ ,  $\exists \omega^*(c)$  de maneira tal que,  $\forall \omega \geq \omega^*$ , o sistema atrasado em malha fechada (3.5) e (3.25), com  $G(t)$  em (3.6),  $\hat{H}(t)$  em (3.13), e o estado  $\tilde{\theta}(t - D)$ ,  $U(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t - D, t]$ , tem uma única solução periódica localmente exponencialmente estável em  $t$  de período  $\Pi = 2\pi/\omega$ , denotada por  $\tilde{\theta}^\Pi(t - D)$ ,  $U^\Pi(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t - D, t]$ , satisfazendo  $\forall t \geq 0$  [28, 29]:

$$\mathbf{E} \left\{ |\tilde{\theta}^\Pi(t - D)|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right\}^{1/2} \leq O(1/\omega). \quad (3.26)$$

além disso,

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| \right\} = O(a + 1/\omega), \quad (3.27)$$

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| \right\} = O(a^2 + 1/\omega^2). \quad (3.28)$$

A demonstração do **Teorema 1** segue os passos detalhados nas seções a seguir.

#### 3.4.1 Sistema Médio EDO-EDP

De acordo com [5], o atraso em (3.5) pode ser representado empregando uma EDP de transporte como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = u(0, t), \quad (3.29)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (3.30)$$

$$u(D, t) = U(t). \quad (3.31)$$

A solução de (3.30)-(3.31) é

$$u(x, t) = U(t + x - D), \quad (3.32)$$

no qual  $t$  é o tempo,  $D$  é o atraso e  $x$  a variável espacial que permite a representação do sistema EDO-EDP acima.

### 3.4.2 Sistema em Malha Fechada

Primeiramente, substituindo-se  $S(\eta(t))$  dado na equação (3.8) em  $\theta(t)$  de (3.7), obtém-se:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\eta(t)). \quad (3.33)$$

Inserindo-se (3.4) e (3.33) em (3.3) tal que a saída seja dada em termos de  $\tilde{\theta}$ :

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\eta(t - D)) \right)^2. \quad (3.34)$$

Substituindo-se  $M(\eta(t))$  definido por (3.9) em  $G(t)$  dado por (3.6) e (3.14) em (3.13), representando o integrando em (3.25) e usando o estado da EDP de transporte, tem-se

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H} \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (3.35)$$

$$G(t) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t - D)) y(t), \quad (3.36)$$

$$\hat{H}(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t - D)) y(t). \quad (3.37)$$

Depois, substituindo-se (3.34) em (3.36) e (3.37) e então o resultado de (3.36) e (3.37) em (3.35). Em seguida, extraindo o fator comum  $y$  na versão resultante de (3.35), tem-se:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}(t-D) + a \sin(\eta(t-D)) \right)^2 \right] \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D)) - \frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t-D)) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.38)$$

Então, expandindo-se o binômio em (3.38), obtém-se:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H a \sin(\eta(t-D)) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\eta(t-D)) \right] \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D)) - \frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t-D)) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.39)$$

Para facilitar o desenvolvimento, o termo  $\eta(t-D)$  foi chamado de  $B$ . Desse modo a equação (3.39) fica da seguinte maneira:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H a \sin(B) \tilde{\theta}(t-D) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(B) \right] \times \left[ \frac{2}{a} \sin(B) - \frac{8}{a^2} \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.40)$$

Finalmente, substituindo (3.39) em (3.31), pode-se reescrever (3.29)-(3.31) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (3.41)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (3.42)$$

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H \sin(B) \tilde{\theta}(t-D) \right. \right. \quad (3.43)$$

$$\left. \left. + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(B) \right] \times \left[ \frac{2}{a} \sin(B) - \frac{8}{a^2} \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\},$$

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* \frac{2}{a} \sin(B) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(B) \right. \right.$$

$$- \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t-D) \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + 2H \sin^2(B) \tilde{\theta}(t-D)$$

$$- \frac{8H}{a} \sin(B) \tilde{\theta}(t-D) \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + aH \sin^3(B)$$

$$\left. \left. - 4H \sin^2(B) \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.44)$$

Utilizando-se  $2\sin^2(x) = 1 - 2\cos(2x)$ ,  $4\sin^3(x) = 3\sin(x) - \sin(3x)$  e  $\cos^2(2x) = (1 + \cos(4x))/2$  e aplicando na equação (3.44), chega-se a

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* \frac{2}{a} \sin(B) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(B) \right. \right.$$

$$- \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t-D) \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + H \tilde{\theta}(t-D) - H \tilde{\theta}(t-D) \cos(2B)$$

$$- \frac{4H}{a} [\sin(3B) - \sin(B)] \tilde{\theta}(t-D) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + \frac{3aH}{4} \sin(B) - \frac{aH}{4} \sin(3B)$$

$$\left. \left. - 2H \cos(2B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + \left[ H + H \cos(4B) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Finalmente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
u(D, t) = \frac{c}{s+c} & \left\{ k \left[ y^* \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D)) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t-D)) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\
& + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(\eta(t-D)) - \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t-D) \cos(2\eta(t-D)) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + H\tilde{\theta}(t-D) \\
& - H\tilde{\theta}(t-D) \cos(2\eta(t-D)) - \frac{4H}{a} \left[ \sin(3\eta(t-D)) - \sin(\eta(t-D)) \right] \tilde{\theta}(t-D) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \\
& + \frac{3aH}{4} \sin(\eta(t-D)) - \frac{aH}{4} \sin(3\eta(t-D)) - 2H \cos(2\eta(t-D)) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma + \\
& \left. \left. \left[ H + H \cos(4\eta(t-D)) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

### 3.4.3 Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

De maneira semelhante ao cálculo realizado em [33], as duas seguintes propriedades de média podem ser obtidas caso um mapeamento quadrático como em (3.35) seja considerado:

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} M(\lambda) y d\lambda = H \tilde{\theta}_{av}(t-D) \tag{3.47}$$

e

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\lambda) y \bar{u} d\lambda = H \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma, \tag{3.48}$$

onde  $\bar{u}(t) = \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma$ , enquanto que  $\tilde{\theta}_{av}(t-D)$  e  $u_{av}(\sigma, t)$  indicam as versões médias de  $\tilde{\theta}(t-D)$  e  $u(\sigma, t)$  respectivamente.

Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t-D), \tag{3.49}$$

a versão média do sistema (3.41)-(3.46) é

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (3.50)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (3.51)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) + ckH \left[ \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (3.52)$$

onde o filtro  $c/s + c$  também foi representado na forma de espaço de estado. A solução da EDP de transporte (3.51)-(3.52) é dada por

$$u_{av}(x, t) = U_{av}(t + x - D). \quad (3.53)$$

#### 3.4.4 Transformação *Backstepping*, sua Inversa e o Sistema Alvo

Considera-se a seguinte transformação *backstepping* [5] de dimensão infinita do estado atrasado

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - kH \left[ \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (3.54)$$

no qual  $\tilde{\vartheta}_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$ .

A transformação (3.54) mapeia o sistema linearizado (3.50)-(3.52) em

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = kH \tilde{\vartheta}_{av}(t) + w(0, t), \quad (3.55)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_x w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (3.56)$$

$$w(D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t u_{av}(D, t). \quad (3.57)$$

Empregando-se (3.54) para  $x = D$  e o fato que  $u_{av}(D, t) = U_{av}(t)$ , a partir de (3.57), obtém-se (3.52), i.e.,

$$U_{av}(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ kH \left[ \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.58)$$

Considerando-se  $\omega(D, t)$ , tem-se:

$$\partial_t w(D, t) = \partial_t u_{av}(D, t) - kH u_{av}(D, t), \quad (3.59)$$

onde  $\partial_t u_{av}(D, t) = \dot{U}_{av}(t)$ . Além disso, considere a transformação inversa de (3.54):

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) + kH \left[ e^{kHx} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x e^{kH(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (3.60)$$

Substituindo-se (3.57) e (3.60) em (3.59), obtém-se:

$$\partial_t w(D, t) = -cw(D, t) - kHw(D, t) - (kH)^2 \left[ e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (3.61)$$

### 3.4.5 Funcional de Lyapunov

Dado o seguinte funcional de Lyapunov:

$$V(t) = \frac{(\tilde{\vartheta}_{av}(t))^2}{2} + \frac{b}{2} \int_0^D (1+x) w^2(x, t) dx + \frac{1}{2} w^2(D, t), \quad (3.62)$$

onde o parâmetro  $b > 0$  será escolhido mais adiante. Derivando (3.62), alcança-se:

$$\dot{V}(t) = kH \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t) \omega(0, t) + b \int_0^D (1+x) \omega(x, t) \omega_x(x, t) + \omega(D, t) \omega_t(D, t), \quad (3.63)$$

e recordando (3.55), encontra-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= kH \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t) \omega(0, t) + \frac{b(1+D)}{2} \omega^2(D, t) \\ &\quad - \frac{b}{2} \omega^2(0, t) - \frac{b}{2} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \omega_t(D, t), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\dot{V}(t) \leq kH\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2b} - \frac{b}{2} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \left[ \omega_t(D, t) + \frac{b(1+D)}{2} \omega(D, t) \right], \quad (3.65)$$

relembrando-se que  $k > 0$  e  $H < 0$ , escolhe-se:

$$b = -\frac{1}{kH}. \quad (3.66)$$

Então,

$$\dot{V}(t) \leq \frac{kH}{2} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{1}{2kH} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \left[ \omega_t(D, t) - \frac{(1+D)}{2kH} \omega(D, t) \right] \quad (3.67)$$

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2b} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{b}{2} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \left[ \omega_t(D, t) + \frac{b(1+D)}{2} \omega(D, t) \right]. \quad (3.68)$$

Agora, considera-se (3.68) juntamente com (3.61). Completando-se os quadrados, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4b} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{b}{4} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + b \left| (kH)^2 e^{kHD} \right|^2 \omega^2(D, t) \\ &+ \frac{1}{b} \left| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right|^2 \omega^2(D, t) + \left[ \frac{b(1+D)}{2} - kH \right] \omega^2(D, t) - c\omega^2(D, t). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Para a obtenção de (3.69), utilizou-se:

$$\begin{aligned} -\omega(D, t) \left\langle (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)}, \omega(\sigma, t) \right\rangle &\leq |\omega(D, t)| \left| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right| \|\omega(t)\| \\ &\leq \frac{b}{4} \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{b} \left| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right|^2 \omega^2(D, t). \end{aligned} \quad (3.70)$$

A notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno na variável espacial  $\sigma \in [0, D]$ , em que ambas  $e^{kH(D-\sigma)}$  e  $\omega(\sigma, t)$  dependem e  $\|\cdot\|$  denota a norma  $L_2$  em  $\sigma$ . Vale ressaltar que a primeira desigualdade é de Cauchy-Scharwz e a segunda é a de Young (com  $\gamma = b/2$  para o desenvolvimento da desigualdade). Vale destacar também que o termo  $-\frac{1}{4b} \tilde{\vartheta}_{av}^2(t)$  de (3.69) é alcançado utilizando mais uma vez a desigualdade de Young (com  $\gamma = 2b$ ).

Então, a partir de (3.69), chega-se a:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4b}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{b}{4(1+D)} \int_0^D (1+x)\omega^2(x,t)dx - (c-c^*)\omega^2(D,t), \quad (3.71)$$

onde

$$c^* = \frac{b(1+D)}{2} - kH + b \left| (kH)^2 e^{kHD} \right|^2 + \frac{1}{b} \left| \left| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right| \right|^2. \quad (3.72)$$

A partir de (3.72), é evidente que um limitante superior  $c^*$  pode ser obtido de limitantes inferiores e superiores da Hessiana desconhecida  $H$ . Portanto, de (3.71), se  $c$  é escolhido de tal forma que  $c > c^*$ , obtém-se:

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \quad (3.73)$$

para algum  $\mu > 0$ . Portanto, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido de norma completa do estado:

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + w^2(D,t) + \int_0^D w^2(x,t)dx}, \quad (3.74)$$

i.e., na variável transformada  $(\tilde{\vartheta}_{av}, \omega)$ .

### 3.4.6 Estabilidade exponencial do Sistema Médio

Para obter a estabilidade exponencial no sentido de norma

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + u_{av}^2(D,t) + \int_0^D u_{av}^2(x,t)dx}, \quad (3.75)$$

precisa-se demonstrar que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (3.76)$$

para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sendo números positivos apropriados e

$$\Psi(t) := |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2 + U_{av}^2(t) + \int_{t-D}^t (U_{av}(\tau))^2 d\tau. \quad (3.77)$$

Isso é realizado utilizando uma abordagem similar àquela em [5, Theorem 1]. As-

sim, obtém-se:

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (3.78)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial para o sistema médio nas variáveis originais  $(\tilde{\theta}_{av}(t-D), u_{av}(x, t))$ .

### 3.4.7 Invocando o Teorema da Média

Reescrevendo as equações (3.5) e (3.25), o sistema em malha fechada é obtido como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D), \quad (3.79)$$

$$\dot{U}(t) = -cU(t) + c \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (3.80)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -cU(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U(t-D) \\ ckG(t) + ck\hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d(\tau) \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

no qual  $\mathbf{z}^\epsilon(t) = [\tilde{\theta}(t-D), U(t)]^T$  é o vetor de estado definido da seguinte forma:

$$\mathbf{z}^\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

que geralmente permite expressar (3.81) na forma de uma equação diferencial funcional estocástica tridimensional

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z}^\epsilon(t) = G(\mathbf{z}_t^\epsilon) + \epsilon F(t, \mathbf{z}_t^\epsilon, \eta(t), \epsilon), \quad (3.83)$$

da qual  $\epsilon := 1/\omega$ . Portanto, uma vez que  $\eta(t)$  é um processo de Markov homogeneamente ergódico (assumindo valores no espaço de fase  $Y$ ) com medida invariante  $\mu(d\eta)$  e propriedade de ergodicidade exponencial,  $\mathbf{z}_t^\epsilon(\delta) = \mathbf{z}^\epsilon(t+\delta)$  para  $-D \leq \delta \leq 0$  e  $G : \mathbf{C}_3([-D, 0]) \rightarrow R^3$ , bem como a função Lipschitz  $F : R_+ \times \mathbf{C}_3([-D, 0]) \times Y \times [0, 1] \rightarrow R^3$  com  $F(t, 0, \eta, \epsilon) = 0$  são mapeamentos contínuos e  $\mathbf{C}_3([-D, 0])$  denotando a classe de funções vetoriais contínuas de dimensão 3 no intervalo  $[-D, 0]$ , pode-se aplicar o teorema

da média de [9] para concluir o resultado exponencial de  $p$ -estabilidade (com  $p=2$ ) do sistema aleatório inicial considerando  $\epsilon$  suficientemente pequeno e obter assim a desigualdade (3.26).

### 3.4.8 Convergência Assintótica para um Resíduo

Define-se o tempo de parada [69]:

$$\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)} := \inf \{ \forall t \geq 0 : |\phi(t)| > M|\phi(0)|e^{-\lambda t} + O(\epsilon) \}, \quad (3.84)$$

Além disso, aparecem as constantes da seguinte forma:  $M > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Como a primeira vez em que a norma do vetor de erro deixa de satisfazer a propriedade de decaimento exponencial. A norma do vetor erro  $|\phi(t)|$  converge para um valor menor do que o valor residual  $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ . Trata-se de uma convergência exponencialmente rápida, que pode se dar de duas formas: *almost surely (a.s.)* e *in probability*:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \{ \forall t \geq 0 : |\phi(t)| > M|\phi(0)|e^{-\lambda t} + \Delta \} = \infty, \text{ a.s.}, \quad (3.85)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \{ |\phi(t)| \leq M|\phi(0)|e^{-\lambda t} + \Delta, \forall t \in [0, T(\epsilon)] \} = 1, \quad (3.86)$$

com  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = \infty$ . De (3.85) fica claro que  $\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)}$  se aproxima de infinito à medida que  $\epsilon$  tende a zero. De forma similar, em (3.86) a função determinística  $T(\epsilon)$  tende a infinito à medida que  $\epsilon$  vai a zero. Segue de (3.85) e (3.86) que a convergência exponencial é satisfeita dentro de um intervalo de tempo arbitrariamente longo. Qualquer componente do vetor erro converge para um valor menor que  $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ , particularmente o componente  $\tilde{\theta}(t)$ . Então, pode-se dizer que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| \right\} = O(\epsilon)$ .

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + a \sin(\eta(t)). \quad (3.87)$$

Uma vez que o primeiro termo no lado direito de (3.87) é da ordem de  $O(\epsilon)$  e o segundo termo é da ordem de  $O(a)$ , chega-se à equação (3.27). Finalmente, a partir de (3.3) e (3.27), obtém-se (3.28).

## 4 ALGORITMO DE NEWTON ESTOCÁSTICO NA PRESENÇA DE ATRASOS

O algoritmo de controle extremal baseado em Newton foi introduzido por [70], no qual para o caso de entrada única uma estimativa da segunda derivada (Hessiana  $H$  desconhecida) do mapeamento estático foi empregada em um algoritmo contínuo no tempo semelhante a Newton. Uma generalização utilizando uma abordagem diferente que em [70] foi introduzida por [3], na qual uma metodologia foi apresentada para a geração de ordem superior de um mapeamento desconhecido de única entrada, para a simulação mais geral de algoritmos de otimização contínuos no tempo, com o algoritmo de Newton sendo um caso especial.

As vantagens do algoritmo de Newton em relação ao algoritmo do Gradiente, na ausência de atrasos, foram profundamente estudadas em [12, 33] e a partir do capítulo 2, as vantagens do primeiro algoritmo citado em relação ao segundo foram observadas. Vale ressaltar que a discussão pode ser resumida no fato do algoritmo de Newton remover a dependência da taxa de convergência da Hessiana desconhecida do mapeamento não-linear a ser otimizado, sendo então arbitrariamente atribuída. A garantia dessa propriedade, mesmo na presença de atrasos, é um dos objetivos do projeto. De fato, este é um problema bastante desafiador, já que o ESC está intimamente relacionado com a convergência, com uma boa taxa de convergência, enquanto que atrasos, quando simplesmente ignorados, restringem severamente a taxa de convergência ou desestabilizam o sistema em malha fechada.

A solução proposta para o problema de inserção dos atrasos é obtida empregando-se uma realimentação por preditor com uma estimativa da inversa da Hessiana desconhecida baseada em perturbação senoidal [33].

#### 4.1 Controle extremal estocástico do tipo Newton com atrasos

O controle por busca extremal considera aplicações nas quais o objetivo é maximizar ou minimizar a saída  $y \in R$  de um mapeamento estático não-linear  $Q(\theta)$  desconhecido através da variação em tempo real da entrada  $\theta \in R$ . Aqui, considera-se adicionalmente que existe um atraso constante e desconhecido  $D$  no caminho de atuação ou no sistema de medição, tal que a saída medida é dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (4.1)$$

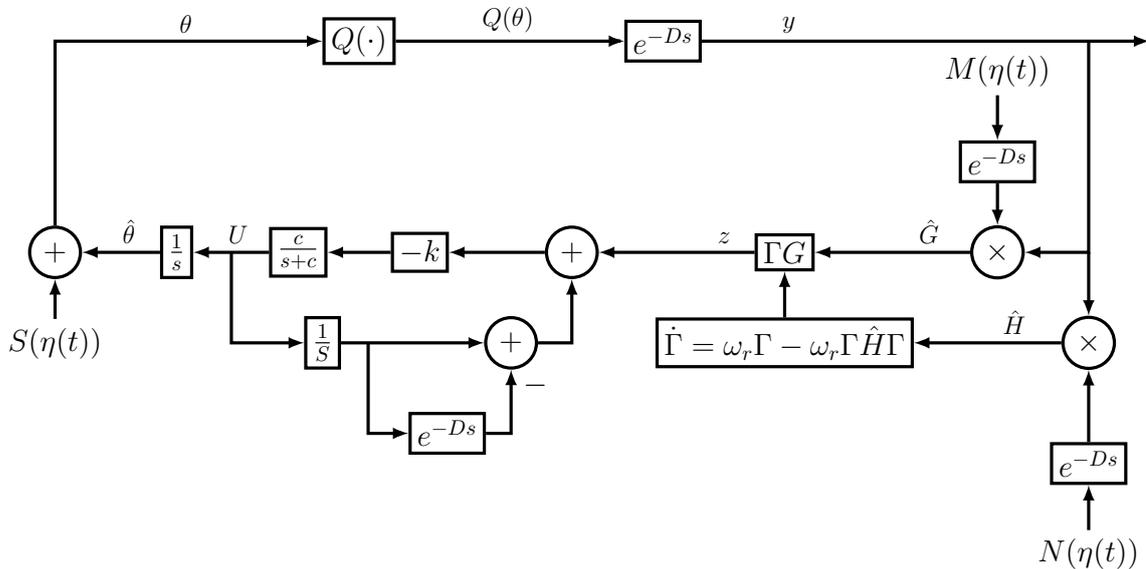


Figura 9 Esquema de predição para compensação dos atrasos na saída para busca extremal através do algoritmo do Newton. A realimentação por preditor com uma estimativa da inversa da Hessiana baseada em perturbações senoidais obedece as equações (4.16), (4.17) e (4.28), os sinais de *dither* são dados por:  $S(\eta(t)) = a \sin(\eta(t))$  e  $M(\eta(t)) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t))$  e o sinal de demodulação  $N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t))$ .

Para o melhor entendimento da notação, assume-se ao longo do projeto que o sistema tem apenas a saída atrasada conforme visto na Figura 9 e os resultados encontrados neste trabalho podem ser diretamente estendidos ao caso de entrada atrasada, uma vez que qualquer atraso de entrada possa ser direcionado para a saída do mapeamento estático. O caso no qual os atrasos de entrada  $D_{in}$  e de saída  $D_{out}$  ocorrem simultaneamente também pode ser tratado assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado seja

$D = D_{in} + D_{out}$ , com  $D_{in}$  e  $D_{out} \geq 0$ .

Sem perda de generalidade, assume-se o problema de busca pelo máximo, de tal forma que o valor de  $\theta$  que maximiza  $y$  é denotado por  $\theta^*$ . Por simplicidade, considera-se que o mapeamento *escalar quadrático não-linear* é da forma:

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (4.2)$$

no qual além das constantes  $\theta^* \in R$  e  $y^* \in R$  serem desconhecidas, o escalar  $H < 0$  é a Hessiana desconhecida do mapeamento estático.

Na Figura 9, exemplifica-se a versão escalar para o controle por busca extremal estocástica baseado no algoritmo de Newton empregando a realimentação por preditor para a compensação dos atrasos.

#### 4.2 Sinais do sistema

Substituindo-se (4.2) em (4.1), obtém-se o mapeamento quadrático e estático com atraso de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D) - \theta^*)^2. \quad (4.3)$$

Seja  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta^*$  e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (4.4)$$

o erro de estimativa. Da Figura 9, tem-se que  $\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t)$  e conclui-se que a dinâmica do erro pode ser escrita da seguinte maneira (atrasando-se em  $D$  ambos os lados da equação resultante):

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = U(t - D). \quad (4.5)$$

Além disso, tem-se

$$G(t) = M(\eta(t - D))y(t), \quad (4.6)$$

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \quad (4.7)$$

em que os sinais de perturbação senoidais (chamados de sinais de *dither*) são dados por:

$$S(\eta(t)) = a \sin(\eta(t)), \quad (4.8)$$

$$M(\eta(t)) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t)), \quad (4.9)$$

com amplitude  $a$  e frequência  $\omega$  não-nulas. Empregam-se perturbações senoidais estocásticas via processo de Wiener sobre o limite de um círculo [32, 66],

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\eta(t)), \quad (4.10)$$

onde

$$\eta(t) = \omega\pi(1 + \sin(W_{\omega t})) \quad (4.11)$$

representa um processo de Markov homogeneamente ergódico e utilizando o cálculo estocástico baseado em Itô [32], obtém-se:

$$d\eta = -\omega \frac{\pi}{2} \sin(W_{\omega t}) dt + \omega \pi \cos(W_{\omega t}) dW_{\omega t}. \quad (4.12)$$

Uma vez que o atraso na saída pode ser transferido para a saída do integrador com a finalidade de análise ou equivalentemente para a entrada do sistema, então o deslocamento de fase  $D$  é aplicado para compensar o efeito do atraso no sinal de *dither* em (4.9) e no sinal de demodulação em (4.14). A estimativa da Hessiana  $H$  desconhecida é

$$\hat{H}(t) = N(\eta(t - D))y(t), \quad (4.13)$$

cujo sinal de demodulação é dado por:

$$N(\eta(t)) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t)). \quad (4.14)$$

Em [32, 33], foi provado que:

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (4.15)$$

se um mapeamento quadrático com em (4.2) é considerado. Além disso, a versão média de  $H(t)$  é dada por  $\hat{H}_{av}(t) = (Ny)_{av}(t) = H$ .

Define-se o sinal mensurável:

$$z(t) = \Gamma(t)G(t), \quad (4.16)$$

em que  $\Gamma(t)$  é atualizado pela seguinte equação diferencial de Riccati

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \hat{H} \Gamma^2, \quad (4.17)$$

com  $\omega_r > 0$  sendo uma constante de projeto. A equação (4.17) gera uma estimativa da inversa da Hessiana ( $H^{-1}$ ), evitando-se assim inversões da Hessiana estimada, que durante a fase transitória pode ser zero. O erro de estimação da inversa da Hessiana pode ser definido como:

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1} \quad (4.18)$$

e sua equação dinâmica pode ser alcançada a partir de (4.17) e (4.18) como

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = \omega_r \left[ \tilde{\Gamma} + H^{-1} \right] \times \left[ 1 - \hat{H}(\tilde{\Gamma} + H^{-1}) \right]. \quad (4.19)$$

### 4.3 Realimentação via preditor através da estimativa inversa da Hessiana

Pela análise da média [12, 33], pode-se verificar de  $G(t)$  em (4.6) e  $z(t)$  em (4.16) que

$$z_{av}(t) = \Gamma_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t - D). \quad (4.20)$$

De (4.18), a equação (4.20) pode ser escrita em termos de  $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = \Gamma_{av}(t) - H^{-1}$  como:

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D) + \tilde{\Gamma}_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t - D). \quad (4.21)$$

O segundo termo no lado direito de (4.21) é quadrático em  $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$ , então a linearização de  $\Gamma_{av}(t)$  em  $H^{-1}$  resulta em uma versão linearizada de (4.20) dada por:

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D). \quad (4.22)$$

De (4.5) e (4.22), os seguintes modelos médios podem ser alcançados

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t - D) = U_{av}(t - D), \quad (4.23)$$

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t - D). \quad (4.24)$$

onde  $U_{av} \in R$  é o controle médio resultante de  $U \in R$ .

Com o objetivo de motivar o projeto da realimentação por preditor, a ideia aqui consiste em compensar o atraso através do estado futuro  $z(t + D)$ , ou  $z_{av}(t + D)$  na versão média equivalente do sistema. Para se obter  $z_{av}(t + D)$  com a fórmula da variação das constantes para (4.23) e (4.24), o estado futuro é dado por

$$z_{av}(t + D) = z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma, \quad (4.25)$$

onde o sinal de controle  $U_{av}(\sigma)$  é calculado na janela de tempo passado  $[t - D, t]$ . Dado qualquer ganho estabilizante  $k > 0$ , o controle médio deve ser dado por

$$U_{av}(t) = -k \left[ z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma \right], \quad (4.26)$$

resultando no controle médio  $U_{av}(t) = -kz_{av}(t + D), \forall t > 0$ , como desejado. Desse modo, o sistema médio deve ser,  $\forall t \geq D$ :

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = -k\tilde{\theta}_{av}(t) - k\tilde{\Gamma}_{av}(t + D)H\tilde{\theta}_{av}(t). \quad (4.27)$$

Uma vez que  $k\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\theta}_{av}$  é quadrático em  $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$ , a linearização do sistema (4.27) tem autovalor determinado por  $-k$ . Então, a estabilidade exponencial local do algoritmo de Newton pode ser garantida com a taxa de convergência, que é independente da Hessiana  $H$  desconhecida.

Em [71], mostra-se que o objetivo de controle pode ainda ser alcançado se uma modificação no controlador baseado em preditor, que emprega um filtro passa-baixas, é

aplicada tal que o teorema da média (*Averaging Theorem*) em dimensões infinitas [30, 68] possa ser invocado. Nesse sentido, é proposta a seguinte compensação por preditor filtrado [67]:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ z(t) + \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (4.28)$$

em que  $c > 0$  é suficientemente grande, i.e., a realimentação por preditor é da forma de uma filtragem passa-baixas da versão não-média de (4.26). Utiliza-se a notação mista do domínio do tempo e da frequência em (4.28), para demonstrar que a função de transferência age como um operador em uma função no domínio do tempo. A realimentação por preditor (4.28) é baseada em perturbação média porque  $z$  em (4.21) é atualizado de acordo com a estimativa  $\Gamma$  para a inversa da Hessiana desconhecida  $H^{-1}$  dada por (4.22), com  $\hat{H}(t)$  em (4.18) satisfazendo a propriedade da média (4.20).

#### 4.4 Análise de estabilidade

O principal resultado de estabilidade/convergência para o sistema em malha fechada é dado a seguir. Os operadores  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  e  $\mathbf{P}\{\cdot\}$  denotam respectivamente, o valor esperado e a probabilidade dos sinais.

**Teorema 2** Considere o sistema em malha fechada da Figura 9, com saída atrasada (4.3). Existe  $c^* > 0$  tal que,  $\forall c \geq c^*$ ,  $\exists \omega^*(c)$  de maneira tal que  $\forall \omega \geq \omega^*$ , o sistema atrasado em malha fechada (4.5) e (4.28), com  $z(t)$  em (4.16),  $G(t)$  em (4.6),  $\Gamma(t)$  em (4.17) e estado  $\tilde{\Gamma}(t)$ ,  $\tilde{\theta}(t-D)$ ,  $U(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t-D, t]$ , tem uma solução periódica localmente exponencialmente estável em  $t$  de período  $\Pi = 2\pi/\omega$ , denotada por  $\tilde{\Gamma}^\Pi(t)$ ,  $\tilde{\theta}^\Pi(t-D)$ ,  $U^\Pi(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t-D, t]$ , satisfazendo  $\forall t \geq 0$  [28, 29]:

$$\mathbf{E} \left\{ |\tilde{\Gamma}^\Pi(t)|^2 + |\tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \left[ \int_{t-D}^t U^\Pi(\tau) d\tau \right]^2 \right\}^{1/2} \leq O(1/\omega). \quad (4.29)$$

Além do mais,

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| \right\} = O(a + 1/\omega), \quad (4.30)$$

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| \right\} = O(a^2 + 1/\omega^2). \quad (4.31)$$

A demonstração do **Teorema 2** segue os passos detalhados nas seções a seguir.

#### 4.4.1 Sistema Médio EDO-EDP

De acordo com [5], o atraso em (4.5) pode ser representado empregando uma EDP de transporte como

$$\dot{\hat{\theta}}(t - D) = u(0, t), \quad (4.32)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (4.33)$$

$$u(D, t) = U(t). \quad (4.34)$$

A solução (4.33)-(4.34) é

$$u(x, t) = U(t + x - D), \quad (4.35)$$

no qual  $t$  é o tempo,  $D$  é o atraso e  $x$  a variável espacial que permite a seguinte representação do sistema EDO-EDP acima.

#### 4.4.2 Sistema em Malha Fechada

Primeiramente, substituindo-se  $S(\eta(t))$  dado na equação (4.8) em  $\theta(t)$  de (4.7), obtém-se:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\eta(t)). \quad (4.36)$$

Inserindo-se (4.4) e (4.36) em (4.3) tal que a saída seja dada em termos de  $\tilde{\theta}$ :

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\eta(t - D)) \right)^2. \quad (4.37)$$

Substituindo-se  $M(\eta(t))$  definido por (4.9) em  $G(t)$  dado por (4.6). Além disso, representando o integrando em (4.28) usando o estado da EDP de transporte, tem-se

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ z(t) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (4.38)$$

$$z(t) = \Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D)) y(t). \quad (4.39)$$

Substituindo-se (4.37) em (4.39) e então o resultado de (4.39) em (4.38), tem-se:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H \sin(\eta(t-D)) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\eta(t-D)) \right] \times \left[ \Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D)) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \quad (4.40)$$

Para facilitar o desenvolvimento, o termo  $\eta(t-D)$  foi chamado de  $B$ . Desse modo a equação (4.40) fica da seguinte maneira:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H \sin(B) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(B) \right] \times \left[ \Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(B) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \quad (4.41)$$

Finalmente, substituindo (4.40) em (4.34), pode-se reescrever (4.32)-(4.34) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (4.42)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (4.43)$$

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + H \sin(B) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(B) \right] \times \left[ \Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(B) \right] - k \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\}, \quad (4.44)$$

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(B) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(B) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\Gamma(t) H \sin^2(B) \tilde{\theta}(t-D) + \Gamma(t) a H \sin^3(B) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (4.45)$$

Utilizando-se  $2\sin^2(x) = 1 - 2\cos(2x)$  e  $4\sin^3(x) = 3\sin(x) - \sin(3x)$ , tem-se:

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(B) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(B) \right. \right. \\ \left. \left. + \Gamma(t) H \tilde{\theta}(t-D) - \Gamma(t) H \cos(2B) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{3aH}{4} \Gamma(t) \sin(B) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{aH}{4} \Gamma(t) \sin(3B) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (4.46)$$

Finalmente, obtém-se:

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -k \left[ \Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D)) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(\eta(t-D)) \right. \right. \\ \left. \left. + \Gamma(t) H \tilde{\theta}(t-D) - \Gamma(t) H \cos(2\eta(t-D)) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{3aH}{4} \Gamma(t) \sin(\eta(t-D)) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{aH}{4} \Gamma(t) \sin(3\eta(t-D)) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (4.47)$$

#### 4.4.3 Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

A versão média do sistema (4.42)-(4.47) é da seguinte maneira:

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t-D) = u_{av}(0, t), \quad (4.48)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (4.49)$$

$$u_{av}(D, t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[ \Gamma_{av}(t) H \tilde{\theta}_{av}(t - D) + \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (4.50)$$

De (4.20) e (4.21), pode-se concluir que a linearização de  $\Gamma_{av}(t)$  em  $H^{-1}$  resulta na versão linearizada de (4.20) dada por (4.22), ou seja,  $z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$ . Então, o termo  $\Gamma_{av}(t) H \tilde{\theta}_{av}(t - D)$  pode ser substituído por  $\tilde{\theta}_{av}(t - D)$  no modelo linearizado.

Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t - D), \quad (4.51)$$

tem-se  $\tilde{\vartheta}_{av}(t) = z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$  e a seguinte versão média do sistema (4.42)-(4.47) pode ser obtida:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (4.52)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (4.53)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) - ck \left[ \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (4.54)$$

onde o filtro  $c/(s + c)$  também foi representado na forma de espaço de estado. A solução da EDP de transporte (4.53)-(4.54) é dada por

$$u_{av}(x, t) = U_{av}(t + x - D). \quad (4.55)$$

Por outro lado, o modelo médio para a estimativa do erro associada a inversa da Hessiana em (4.19) é  $\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t) - \omega_r H \tilde{\Gamma}_{av}^2(t)$  e sua versão linearizada é descrita como

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t). \quad (4.56)$$

#### 4.4.4 Transformação *Backstepping*, sua Inversa e o Sistema Alvo

Considera-se a seguinte transformação *backstepping* [5] de dimensão infinita do estado atrasado

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) + k \left[ \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (4.57)$$

onde  $\vartheta_{av}(t) := z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$  de acordo com (4.22). A transformação (4.57) mapeia o sistema linearizado (4.42)-(4.47) em

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = -k\tilde{\vartheta}_{av}(t) + w(0, t), \quad (4.58)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_x w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (4.59)$$

$$w(D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t u_{av}(D, t). \quad (4.60)$$

Empregando-se (4.57) para  $x = D$  e o fato que  $u_{av}(D, t) = U_{av}(t)$ , a partir de (4.60), obtém-se (4.54), i.e.,

$$U_{av}(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ -k \left[ \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (4.61)$$

Deriva-se parcialmente o estado transformado  $w(x, t)$  em (4.57) em relação ao tempo  $t$  e considera-se  $x = D$  tal que

$$\partial_t w(D, t) = \partial_t u_{av}(D, t) + k u_{av}(D, t), \quad (4.62)$$

onde  $\partial_t u_{av}(D, t) = \dot{U}_{av}(t)$ . Além disso, considere que a transformação inversa (4.57) é dada por:

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) - k \left[ e^{-kx} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x e^{-k(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (4.63)$$

Após substituir (4.60) e (4.63) em (4.62), alcança-se:

$$\partial_t w(D, t) = -cw(D, t) + kw(D, t) - k^2 \left[ e^{-kD} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D e^{-k(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (4.64)$$

#### 4.4.5 Funcional de Lyapunov

Dado o seguinte funcional de Lyapunov:

$$V(t) = \frac{(\tilde{\vartheta}_{av}(t))^2}{2} + \frac{b}{2} \int_0^D (1+x) w^2(x, t) dx + \frac{1}{2} w^2(D, t), \quad (4.65)$$

onde o parâmetro  $b > 0$  será escolhido mais adiante. Derivando (4.65), obtém-se:

$$\dot{V}(t) = -k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)\omega(0, t) + b \int_0^D (1+x)\omega(x, t)\omega_x(x, t) + \omega(D, t)\omega_t(D, t) \quad (4.66)$$

e recordando (4.58), encontra-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)\omega(0, t) + \frac{b(1+D)}{2}\omega^2(D, t) \\ &\quad - \frac{b}{2}\omega^2(0, t) - \frac{b}{2} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t)\omega_t(D, t), \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\dot{V}(t) \leq -k\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2b} - \frac{b}{2} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \left[ \omega_t(D, t) + \frac{b(1+D)}{2}\omega(D, t) \right]. \quad (4.68)$$

Relembrando-se que  $k > 0$ , escolhe-se:

$$b = \frac{1}{k}. \quad (4.69)$$

Então,

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{k}{2}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{1}{2k} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \left[ \omega_t(D, t) + \frac{(1+D)}{2k}\omega(D, t) \right] \quad (4.70)$$

$$\dot{V}(t) = -\frac{1}{2b}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{b}{2} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + \omega(D, t) \left[ \omega_t(D, t) + \frac{b(1+D)}{2} \omega(D, t) \right]. \quad (4.71)$$

Agora, considera-se (4.71) juntamente com (4.64). Completando-se os quadrados, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4b}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{b}{4} \int_0^D \omega^2(x, t) dx + b \left| k^2 e^{-kD} \right|^2 \omega^2(D, t) \\ &+ \frac{1}{b} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2 \omega^2(D, t) + \left[ \frac{b(1+D)}{2} + k \right] \omega^2(D, t) - c \omega^2(D, t). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Para se obter (4.72), usou-se

$$\begin{aligned} -\omega(D, t) \left\langle k^2 e^{-k(D-\sigma)}, \omega(\sigma, t) \right\rangle &\leq |\omega(D, t)| \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\| \|\omega(t)\| \\ &\leq \frac{b}{4} \|\omega(t)\|^2 + \frac{1}{b} \left\| k^2 e^{-k(D-\sigma)} \right\|^2 \omega^2(D, t). \end{aligned} \quad (4.73)$$

A notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno na variável espacial  $\sigma \in [0, D]$ , em que ambas  $e^{-k(D-\sigma)}$  e  $\omega(\sigma, t)$  dependem e  $\|\cdot\|$  denota a norma  $L_2$  em  $\sigma$ . Vale ressaltar que a primeira desigualdade é de Cauchy-Scharwz e a segunda é a de Young (com  $\gamma = b/2$  para o desenvolvimento da desigualdade). Vale destacar também que o termo  $-\frac{1}{4b}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)$  de (4.71) é alcançado utilizando mais uma vez a desigualdade de Young (com  $\gamma = 2b$ ). Então, a partir de (4.72), chega-se a:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4b}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{b}{4(1+D)} \int_0^D (1+x)\omega^2(x, t) dx - (c - c^*)\omega^2(D, t), \quad (4.74)$$

onde

$$c^* = \frac{b(1+D)}{2} + k + b \left| k^2 e^{-kD} \right|^2 + \frac{1}{b} \left\| k^2 e^{k(D-\sigma)} \right\|^2. \quad (4.75)$$

Portanto, a partir de (4.74), se  $c$  é escolhido de tal forma que  $c > c^*$ , obtém-se:

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \quad (4.76)$$

para algum  $\mu > 0$ . Portanto, O sistema em malha fechada é exponencialmente estável no

sentido de norma do estado completo:

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + w^2(D, t) + \int_0^D w^2(x, t) dx}, \quad (4.77)$$

i.e., na variável transformada  $(\tilde{\vartheta}_{av}, w)$ .

#### 4.4.6 Estabilidade exponencial do Sistema Médio

Para obter a estabilidade exponencial no sentido de norma

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + u_{av}^2(D, t) + \int_0^D u_{av}^2(x, t) dx}, \quad (4.78)$$

precisa-se demonstrar que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (4.79)$$

para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sendo numeros positivos apropriados e

$$\Psi(t) := |\tilde{\theta}_{av}(t - D)|^2 + (U_{av}(t))^2 + \int_{t-D}^t (U_{av}(\tau))^2 d\tau. \quad (4.80)$$

Isso é realizado utilizando uma abordagem similar àquela em [5, Theorem 2]. Assim, obtém-se:

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (4.81)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial para o sistema médio nas variáveis originais  $(\tilde{\theta}_{av}(t - D), u_{av}(x, t))$ .

#### 4.4.7 Invocando o Teorema da Média

Utilizando (4.5), (4.28) e (4.19), obtem-se:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t - D) \\ U(t) \\ \tilde{\Gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -cU(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U(t - D) \\ -ckz(t) - ck \int_{t-D}^t U(\tau) d(\tau) \\ \omega_r(\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1})(1 - \hat{H}(t)) [\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1}] \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Define-se o vetor de estado

$$\mathbf{u}^\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \\ \tilde{\Gamma}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

que geralmente permite expressar (4.82) na forma de uma equação diferencial funcional estocástica tridimensional

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}^\epsilon(t) = G(\mathbf{u}_t^\epsilon) + \epsilon F(t, \mathbf{u}_t^\epsilon, \eta(t), \epsilon), \quad (4.84)$$

onde  $\epsilon := 1/\omega$ . Portanto, uma vez que  $\eta(t)$  é um processo de Markov homogeneamente ergódico com medida variante  $\mu(d\eta)$  e a propriedade de ergodicidade exponencial,  $\mathbf{u}_t^\epsilon(\delta) = \mathbf{u}^\epsilon(t + \delta)$  para  $-D \leq \delta \leq 0$  e  $G : \mathbf{C}_3([-D, 0]) \rightarrow R^3$ , bem como a função Lipschitz  $F : R_+ \times \mathbf{C}_3([-D, 0]) \times Y \times [0, 1] \rightarrow R^3$  com  $F(t, 0, \eta, \epsilon) = 0$  são mapeamentos contínuos, e  $\mathbf{C}_3([-D, 0])$  denotando a classe de funções vetoriais contínuas de dimensão 3 no intervalo  $[-D, 0]$ , pode-se aplicar o teorema da média de [9] para concluir o resultado exponencial de  $p$ -estabilidade (com  $p=2$ ) do sistema aleatório inicial considerando  $\epsilon$  suficientemente pequeno e obter assim a desigualdade (4.29).

#### 4.4.8 Convergência Assintótica para um Resíduo

Define-se o tempo de parada [66]:

$$\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)} := \inf \{ \forall t \geq 0 : |\phi(t)| > M|\phi(0)|e^{-\lambda t} + O(\epsilon) \} \quad (4.85)$$

Além disso, aparecem as constantes da seguinte forma:  $M > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Como a primeira vez em que a norma do vetor de erro deixa de satisfazer a propriedade de decaimento exponencial. A norma do vetor erro  $|\phi(t)|$  converge para um valor menor do que o valor residual  $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ . Trata-se de uma convergência exponencial e rápida, que pode se dar de duas formas: *almost surely (a.s.)* e *in probability*:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \{ \forall t \geq 0 : |\phi(t)| > M|\phi(0)|e^{-\lambda t} + \Delta \} = \infty, \text{ a.s.}, \quad (4.86)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\{|\phi(t)| \leq M|\phi(0)|e^{-\lambda t} + \Delta, \forall t \in [0, T(\epsilon)]\} = 1, \quad (4.87)$$

com  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = \infty$ . De (4.86) fica claro que  $\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)}$  se aproxima de infinito à medida que  $\epsilon$  tende a zero. De forma similar, em (4.87) a função determinística  $T(\epsilon)$  tende a infinito à medida que  $\epsilon$  vai a zero. Segue de (4.86) e (4.87) que a convergência exponencial é satisfeita dentro de um intervalo de tempo arbitrariamente longo. Qualquer componente do vetor erro converge para um valor menor que  $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ , particularmente o componente  $\tilde{\theta}(t)$ . Então, pode-se dizer que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\left\{\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|\right\} = O(\epsilon)$ . A partir das equações (4.4) e (4.10), chega-se a

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + a \sin(\eta(t)). \quad (4.88)$$

Uma vez que o primeiro termo no lado direito de (4.88) é da ordem de  $O(\epsilon)$  e o segundo termo é da ordem de  $O(a)$ , chega-se à equação (4.30). Finalmente, a partir de (4.3) e (4.30), obtém-se (4.31).

## 5 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

### 5.1 Simulações numéricas

Inicialmente, os dados aleatórios foram gerados através do processo de Wiener e as simulações foram realizadas para os algoritmos do tipo Gradiente e Newton com fontes de excitação senoidais de fase aleatória, havendo também a inserção de atrasos nos sinais de excitação e matriz demodulação, além do uso do preditor na técnica estudada. Essas mudanças propostas permitem a obtenção de estimativas do Gradiente e da Hessiana do Mapeamento convexo desconhecido.

As simulações foram realizadas a partir de uma função quadrática não-linear desconhecida da seguinte maneira:

$$Q(\theta) = Q^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2. \quad (5.1)$$

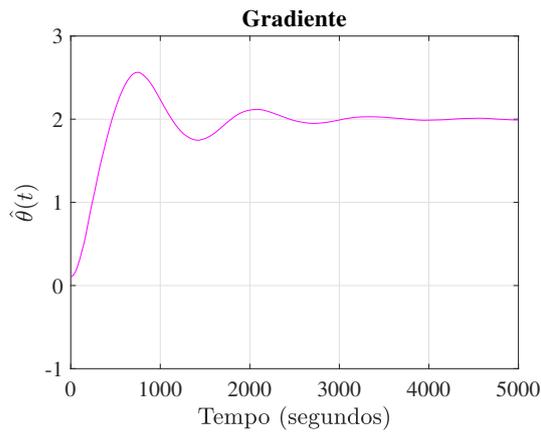
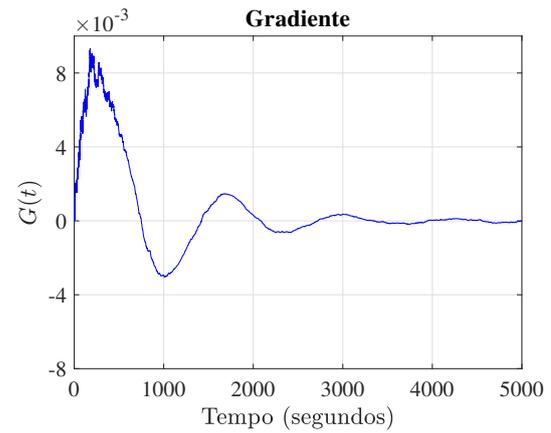
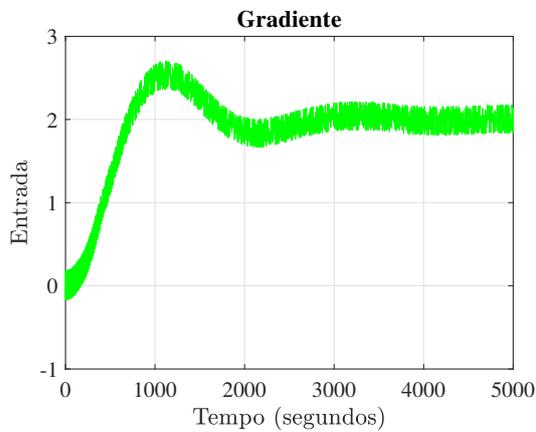
Utilizou-se um preditor com sinais estocásticos para compensar a estimativa atrasada do Gradiente  $G(t-D)$ , ocasionada pelo efeito dos atrasos de atuação e/ou medição. Além disso, foi demonstrado da literatura que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade [6].

#### 5.1.1 Resultados obtidos para o algoritmo Gradiente

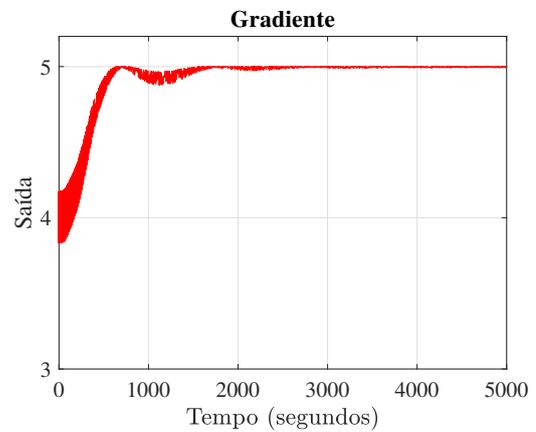
Com o objetivo de avaliar a compensação do atraso no ESC estocástico, considera-se o seguinte mapeamento quadrático estático não-linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{H}{2}(\theta - 2)^2, \quad (5.2)$$

aplicando-se uma saída atrasada de  $D = 100s$ . A partir de (5.2), o ponto de extremo é  $(\theta^*, y^*)$  e a Hessiana do mapeamento é  $H = -1/2$ . As simulações numéricas do preditor (3.25) são apresentadas, onde  $\hat{H}$  é dado em (3.13) e  $c = 20$ . Os testes foram realizados empregando os seguintes valores:  $a = 0.17$ ,  $Q^* = 5$ ,  $\theta^* = 2$  e  $k = 0.8$ . Para as simulações do algoritmo do Gradiente sem atrasos, com atrasos sem compensação via preditor e com atrasos com compensação via preditor foi utilizado a seguinte condição inicial  $\theta(0) = 0.1$ .

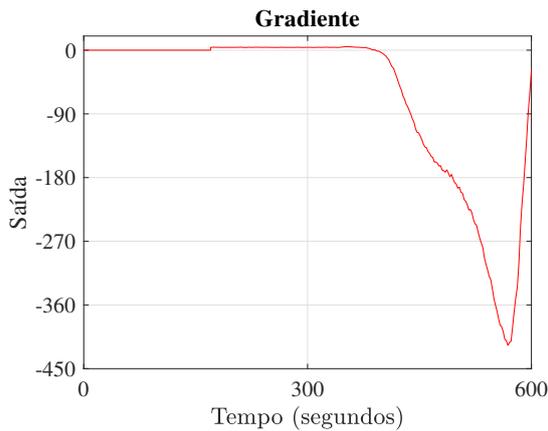
(a) Estimativa  $\hat{\theta}(t)$ .(b) Gradiente  $G(t)$  do mapeamento quadrático não-linear.

(c) Entrada do algoritmo Gradiente estocástico sem atrasos.

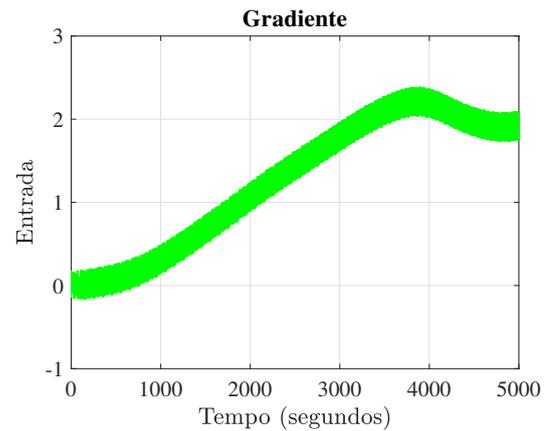


(d) Saída do algoritmo Gradiente estocástico sem atrasos.

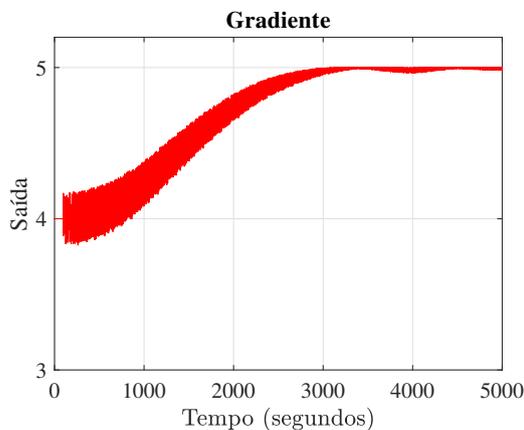
Pela Figura 10(a), observa-se a convergência de  $\hat{\theta}(t)$  para a vizinhança do valor ótimo desejado  $\theta^* = 2$  ao longo do tempo, Através da Figura 10(b), verifica-se o Gradiente convergindo ao longo do tempo para zero na medida que a saída converge para o ponto extremo  $y^* = 5$  e na Figura 10(c), Confere-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = 2$ . Além disso, Pela Figura 10(d), constata-se uma vez mais a preservação da estabilidade do sistema em malha fechada e a saída da planta convergindo para a vizinhança ótima desejeja  $Q(\theta) = 5$ .



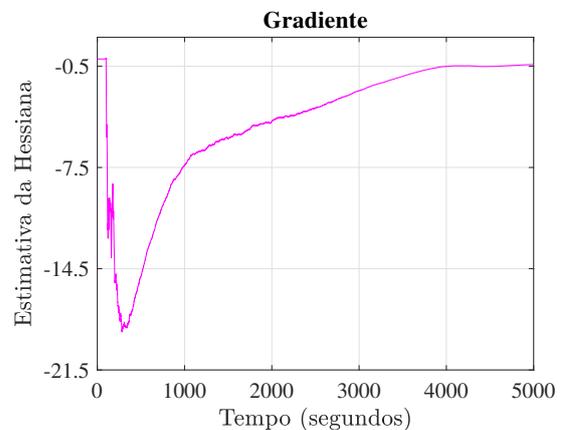
(e) Algoritmo Gradiente estocástico com inserção de atraso de  $D = 100s$ , mas sem compensação via preditor.



(f) Entrada do algoritmo Gradiente na presença de atraso de  $D = 100s$  com compensação via preditor.



(g) Saída do algoritmo Gradiente na presença de atraso de  $D = 100s$  com compensação via preditor.



(h) Estimativa da Hessiana convergindo para o valor desejado  $H = -1/2$ .

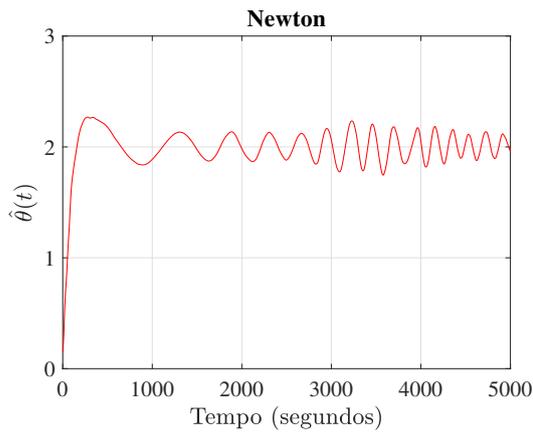
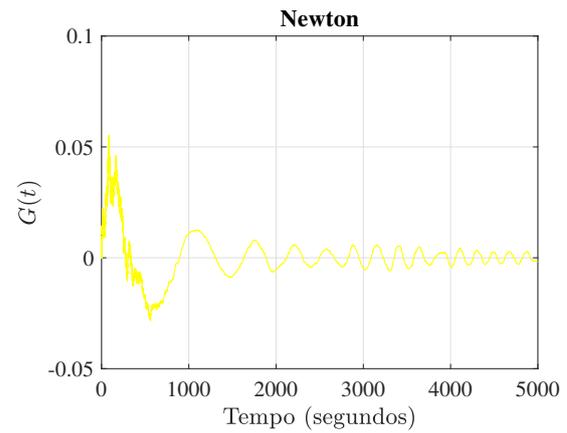
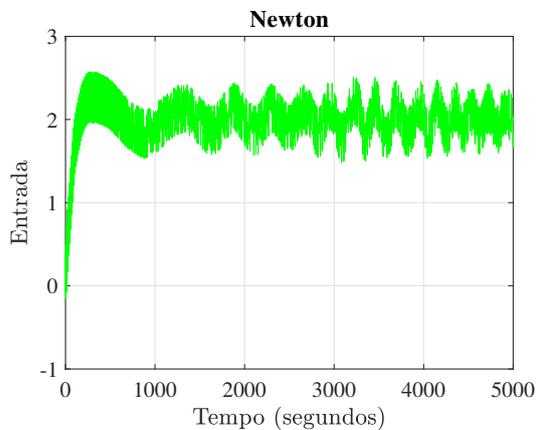
Pela Figura 10(e), verifica-se o que foi demonstrado na literatura que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade, através da Figura 10(f), confere-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = 2$  e pela Figura 10(g), observa-se que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado  $Q^* = 5$ . Além do mais, na Figura 10(h), constata-se uma vez mais a estabilidade do sistema em malha fechada e a estimativa da Hessiana convergindo para o valor desejado  $H = -1/2$ .

### 5.1.2 Resultados obtidos para o algoritmo de Newton

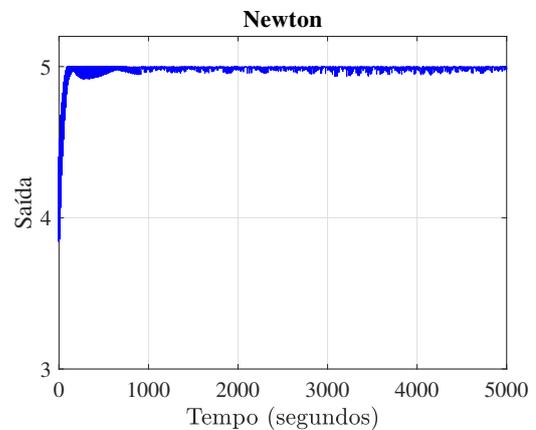
Visando avaliar a compensação do atraso no ESC estocástico, considera-se uma vez mais o seguinte mapeamento quadrático estático não-linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{H}{2}(\theta - 2)^2, \quad (5.3)$$

aplicando-se uma saída atrasada de  $D = 100s$ . De acordo com (5.3), o ponto de extremo é  $(\theta^*, y^*)$  e a Hessiana do mapeamento é  $H = -1/2$ . As simulações numéricas do preditor (4.28) são apresentadas com  $c = 20$ ,  $z$  sendo dado por (4.16) e  $G$  em (4.6), enquanto  $\Gamma$  é definido em (4.17). Os testes foram realizados empregando os seguintes valores:  $a = 0.3$ ,  $Q^* = 5$ ,  $\theta^* = 2$ ,  $k = 0.7$ ,  $\omega_r = 0.0052$ ,  $\Gamma(0) = -2.14$  (sem atrasos) e  $\Gamma(0) = -1.78$  (com atrasos mais preditor). Para as simulações do algoritmo de Newton sem atrasos, com atrasos sem compensação via preditor e com atrasos com compensação via preditor foram utilizadas condições iniciais  $\theta(0) = 0.1$ .

(i) Estimativa  $\hat{\theta}(t)$ .(j) Gradiente  $G(t)$  do mapeamento quadrático não-linear.

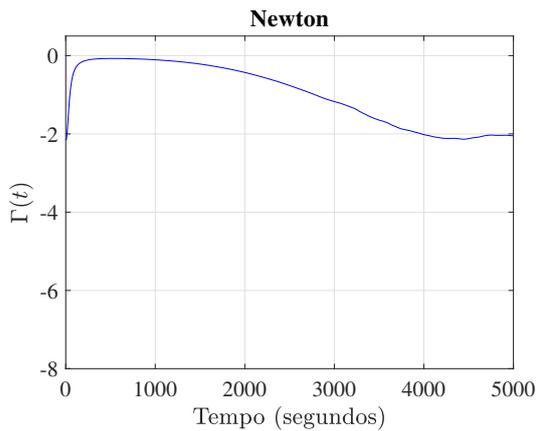
(k) Entrada do algoritmo de Newton estocástico sem atrasos.



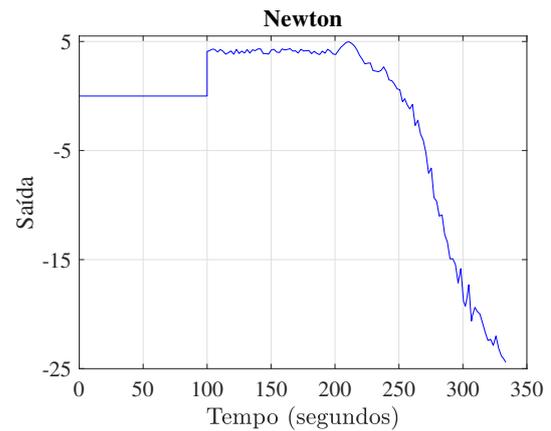
(l) Saída do algoritmo de Newton estocástico sem atrasos.

Pela Figura 10(i), observa-se a convergência de  $\hat{\theta}(t)$  para a vizinhança do valor ótimo desejado  $\theta^* = 2$  ao longo do tempo, na Figura 10(j), o Gradiente converge ao longo do tempo para zero na medida em que a saída converge para o ponto extremo  $y^* = 5$  e através da Figura 10(k), confere-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = 2$ .

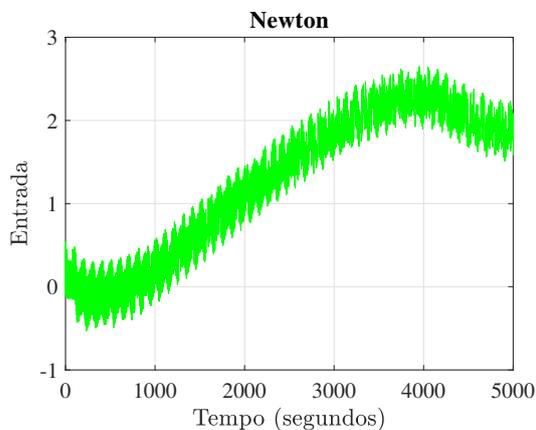
Além disso, Pela Figura 10(l), constata-se uma vez mais a estabilidade do sistema em malha fechada e a saída da planta convergindo para a vizinhança ótima desejada  $Q(\theta) = 5$ .



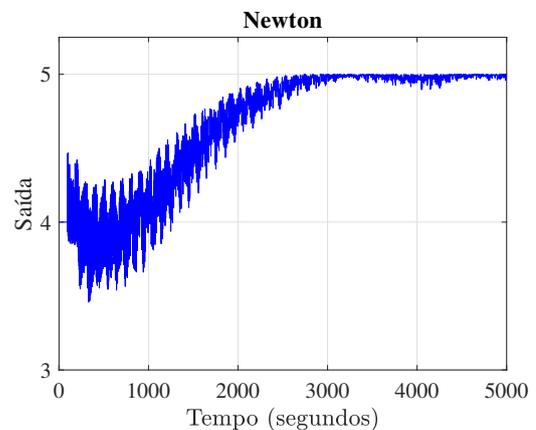
(m)  $\Gamma(t)$  convergindo para a vizinhança do valor desejado.



(n) Algoritmo de Newton estocástico com inserção de atrasos de  $D = 100s$ , mas sem compensação via preditor.



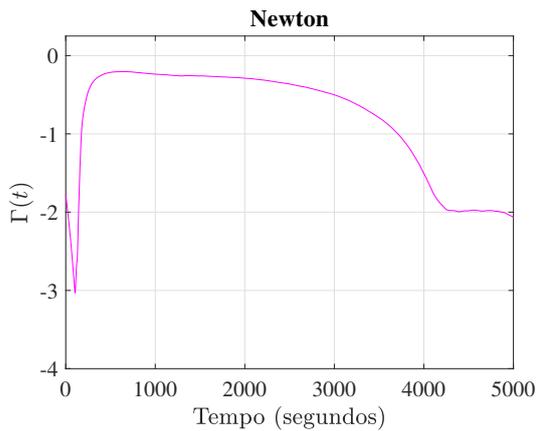
(o) Entrada do algoritmo de Newton na presença de atraso de  $D = 100s$ , com compensação via preditor.



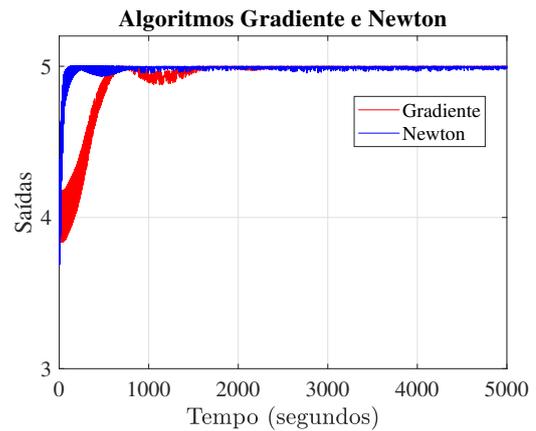
(p) Saída do algoritmo de Newton na presença de atraso de  $D = 100s$ , com compensação via preditor.

Na Figura 10(m), verifica-se a estabilidade do sistema em malha fechada e a estimativa de Gamma convergindo para o valor desejado  $\Gamma(t) = -2$ , pela Figura 10(n), nota-se o que foi demonstrado na literatura que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade e através da Figura 10(o), confere-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo  $\theta^* = 2$ .

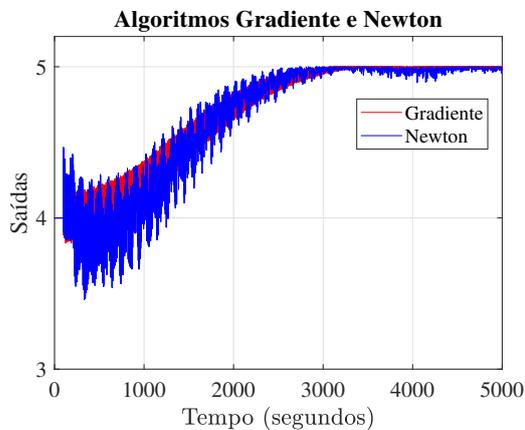
Pela Figura 10(p), observa-se que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado  $Q^* = 5$ .



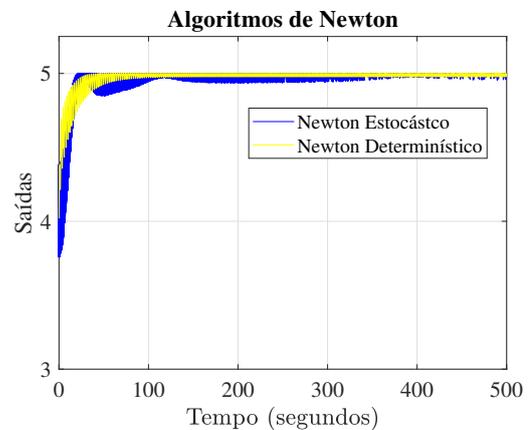
(q)  $\Gamma(t)$  convergindo para a vizinhança do valor desejado.



(r) Saídas do algoritmo do Gradiente e Newton sem atrasos.



(s) Saídas do algoritmo do Gradiente e Newton com inserção de atrasos de  $D = 100s$  e compensação via preditor.



(t) Saídas dos algoritmos de Newton sem atrasos.

Através da Figura 10(q), constata-se uma vez mais a estabilidade do sistema em malha fechada e a estimativa de Gamma convergindo para o valor desejado  $\Gamma(t) = -2$ , pela Figura 10(r) e Figura 10(s), observam-se que as saídas dos algoritmos do Gradiente e de Newton (na ausência de atrasos e com inserção de atrasos mais emprego do preditor) convergiram para a vizinhança do valor desejado, a estabilidade do sistema em malha fechada permaneceu preservada ao longo do tempo. Verifica-se também no segundo caso que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor e que o algoritmo de Newton é mais rápido que o algoritmo do tipo Gradiente.

Na Figura 10(t), observam-se os algoritmos de Newton determinístico e estocástico sem atrasos convergindo para a vizinhança do valor ótimo desejado, preservando a estabilidade do sistema em malha fechada. Verifica-se também que o algoritmo estocástico apresenta uma taxa de convergência mais rápida.

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação apresentou a busca por controle extremal estocástica na presença de atrasos. Da introdução, foi vista as diversas aplicações e trabalhos existentes na área, além da sua importância e crescimento do interesse de indústrias no tópico de pesquisa. No Capítulo 1, foram apresentados diversos tipos de controle extremal (Algoritmo do Gradiente, de Newton, Gradiente multivariável, entre outros), estudo este que serviu como base para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, houve a introdução do algoritmo Gradiente no meio estocástico, bem como o motivo do estudo do ESC estocástico, seguido da apresentação do esquema básico de controle extremal estocástico e uma análise heurística de um algoritmo de ESC no meio estocástico. No Capítulo 3, foi proposta uma nova estratégia de realimentação via preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbações estocásticas, que é apresentada para lidar com os atrasos na entrada e/ou saída da malha de controle extremal estocástico, utilizando-se o algoritmo Gradiente. A nova abordagem preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema à uma pequena vizinhança do ponto de extremo, mesmo na presença de atrasos. Realizou-se uma rigorosa demonstração de estabilidade via transformação *backstepping* e teorema da média em dimensões infinitas. Os resultados numéricos mostram os desafios e vantagens de lidar com a inserção dos atrasos no sistema e a posterior implementação do preditor no algoritmo do Gradiente para a compensação dos atrasos. No Capítulo 4, uma nova estratégia de realimentação via preditor baseada em perturbações estocásticas e estimativa da inversa da Hessiana é apresentada para lidar com os atrasos na entrada e/ou saída da malha de controle extremal estocástico, utilizando-se o método de Newton. Essa abordagem também preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema a uma pequena vizinhança do ponto de extremo, mesmo na presença de atrasos. Uma rigorosa demonstração de estabilidade via transformação *backstepping* e teorema da média em dimensões infinitas também é apresentada para este segundo método de ESC estocástico. Vale comentar que a taxa de convergência é independente da Hessiana do mapeamento a ser otimizado. Dessa maneira, a compensação dos atrasos pôde ser alcançada com uma taxa de convergência atribuída pelo projetista, melhorando-se o desempenho do controlador extremal. As simulações numéricas demonstram que o atraso total inserido foi devidamente compensado

pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado.

### **Trabalhos Futuros**

Esse trabalho focou no controle extremal estocástico na presença de atrasos conhecidos e constantes em mapeamentos estáticos com entrada e saída escalares. Para novos trabalhos na área de Controle, podem ser desenvolvidos os seguintes tópicos: a generalização para mapeamentos multivariáveis (com múltiplas entradas e atrasos distintos para cada uma delas), a inclusão de mapeamentos estáticos em cascata com sistemas dinâmicos, a extensão para atrasos variantes no tempo e mesmo atrasos constantes, mas desconhecidos e a análise completa de estabilidade do sistema em malha fechada para esses novos cenários com a compensação baseada em preditor. Além de explorar a busca extremal estocástica distribuída para sistemas multiagentes [72] e jogos não cooperativos [73].

## REFERÊNCIAS

- [1] LEBLANC, M. Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricité*, 1922.
- [2] KRSTIC, M.; ARYIUR, K. B. *Real-Time optimization by Extremum Seeking Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.
- [3] TAN, Y.; MOASE, W.; MANZIE, C. Extremum Seeking From 1922 and to 2010. In: *In 29th Control Conference Chinese (CCC)*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 14–26.
- [4] ZHANG, C.; ORDONEZ, R. *Extremum-Seeking Control and Application: A Numerical Optimization-based approach*. [S.l.]: Springer, 2012.
- [5] KRSTIC, M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. [S.l.]: Birkhauser, 2009.
- [6] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. Gradient extremum seeking with delays. *IFAC-PapersOnLine*, v. 48, n. 12, p. 227–232, 2015.
- [7] DRAPER, C.; LI, Y. Principles of optimizing control systems and an application to the internal combustion engine. In *R. Oldenburger Ed., Optimal and selfoptimizing control*, 1951.
- [8] AMINDE, N. *Controle extremal via funções de monitoração e realimentação de saída*. Dissertação (Mestrado) — COPPE/UFRJ, 2013.
- [9] KATAFYGIOTIS, L.; TSARKOV, Y. Averaging and stability of quasilinear functional differential equations with markov parameters. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, v. 12, p. 1–15, 1999.
- [10] OLALLA, C.; ARTEAGA, M.; LEYVA, R. Analysis and comparison of Extremum Seeking Control Techniques. In: *2007 IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. Vigo, Spain: [s.n.], 2007.
- [11] KRSTIC, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamics systems. *Automatica*, v. 36, p. 595–601, 2000.

- [12] KRSTIC, M. *Extremum Seeking Control*, in T. Samad and J. Baillieul, *Encyclopedia of Systems and Control*. [S.l.]: Springer, 2014.
- [13] ADETOLA, V.; DEHAAN, D.; GUAY, M. Adaptive Extremum Seeking Receding Horizon Control of Nonlinear Systems. In: *In: Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 2937–2942.
- [14] ASTROM, K.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2005.
- [15] YU, H.; OZGUNER, U. Extremum-seeking control strategy for abs system with time delay. *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, v. 5, p. 3753–3758, 2002.
- [16] PETERSON, K. S.; STEFANOPOULOU, A. G. Extremum seeking control for soft landing of an eletromechanical valve actuator. *Automatica*, v. 40, p. 1063–1069, 2004.
- [17] ZHANG, C.; SIRANOSIAN, A.; KRSTIC, M. Extremum seeking for moderately unstable systems and for autonomous vehicle target tracking without position measurements. *Automatica*, v. 43, p. 1832–1839, 2007.
- [18] SANTOS, G. C. *Controle extremal com atrasos variantes no tempo*. Dissertação (Mestrado) — PEL/UERJ, 2017.
- [19] DIBO, A. L. *Controle extremal para mapeamentos estáticos e dinâmicos com sinal de Hessiana desconhecido*. Dissertação (Mestrado) — PEL/UERJ, 2019.
- [20] ALBUQUERQUE, P. Z. *Controle extremal para sistemas descritos por equações diferenciais*. Dissertação (Mestrado) — Pel/UERJ, 2019.
- [21] FERREIRA, D. C.; OLIVEIRA, T. R. Otimalidade inversa em controle extremal com atrasos. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v. 1, p. 3073–3080, 2019.
- [22] FERREIRA, D. C.; OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. Otimalidade inversa em controle extremal do tipo newton com atrasos. *Congresso Brasileiro de Automatica*, v. 2, n. 1, 2020.

- [23] DIBO, A. L.; OLIVEIRA, T. R. Controle extremal para mapeamentos dinâmicos com sinal de Hessiana desconhecido. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v. 1, p. 2034–2039, 2019.
- [24] SILVA, F. S. *Compensação da equação diferencial parcial da onda na dinâmica de atuação de sistemas de controle extremal*. Dissertação (Mestrado) — PEL/UERJ, 2020.
- [25] AMINDE, N.; OLIVEIRA, T. R.; HSU, L. Controle extremal cíclico multivariável via função de monitoração. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v. 1, p. 1700–1706, 2019.
- [26] SILVA, F. S.; OLIVEIRA, T. R. Controle extremal para cascatas e interconexões de equações diferenciais parciais. *Congresso Brasileiro de Automatica*, v. 2, n. 1, 2020.
- [27] AMINDE, N.; OLIVEIRA, T. R.; HSU, L. Controle multivariável para busca extremal cíclica usando modos deslizantes e função de chaveamento periódica. *Congresso Brasileiro de Automatica*, v. 2, n. 1, 2020.
- [28] SILVA, P. C. S.; OLIVEIRA, T. R. Controle extremal estocástico na presença de atrasos. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v. 1, p. 3202–3208, 2019.
- [29] SILVA, P. C. S.; OLIVEIRA, T. R. Controle extremal estocástico baseado no algoritmo do gradiente na presença de atrasos. *Congresso Brasileiro de Automatica*, v. 2, n. 1, 2020.
- [30] HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, v. 2, p. 463–494, 1990.
- [31] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. [S.l.]: Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2002.
- [32] LIU, S.-J.; KRSTIC, M. *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. [S.l.]: springer, 2012.
- [33] GHAFFARI, A.; KRSTIC, M.; NESIC, D. Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, v. 48, p. 1759–1767, 2012.
- [34] ADETOLA, V.; GUAY, M. Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, v. 43, p. 105–110, 2007.

- [35] OLIVEIRA, T. R.; HSU, L.; PEIXOTO, A. J. Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with applications to extremum-seeking control. *Automatica*, v. 47, p. 2029–2038, 2011.
- [36] HOLNESS, E.; OLIVEIRA, T. R.; TSUBAKINO, D. Controle extremal multivariável simplificado para atrasos distintos de entrada. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v. 1, p. 3153–3158, 2019.
- [37] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, p. 1911–1926, 2017.
- [38] KRSTIC, M.; MANZIE, C. Extremum seeking with stochastic perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, p. 580–585, 2009.
- [39] STANKOVIC, M.; STIPANOVIC, D. Stochastic Extremum Seeking With Applications to mobile sensor networks. In: : *Proceedings of the 2009 american control conference*. St. Louis, MA, USA: [s.n.], 2009. p. 5622–5627.
- [40] STANKOVIC, M.; STIPANOVIC, D. Discrete Time Extremum Seeking by autonomous vehicles in a stochastic environment. In: : *Proceedings of the joint 48th IEEE conference on decision and control and 18th Chinese Control Conference*. Shanghai, China: [s.n.], 2009. p. 4541–4546.
- [41] BECKER, A.; KUMAR, P.; WEI, C. Adaptive Control With Stochastic Approximation algorithm: Geometry and Convergence. *IEEE Transactions autom control*, n. 30, p. 330–338, 1985.
- [42] GELFAND, S.; MITTER, S. Recursive Stochastic Algorithms for Global Optimizaion in  $\mathbb{R}^d$ . *Siam J Control Optim*, n. 29, p.999 – –1018, 1991.
- [43] KUMAR, P.; VARAIYA, P. *Stochastic Systems: estimation, identification and adaptive control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1986.
- [44] LJUNG, L.; PFLUG, G.; WALK, H. *Stochastic Approximation and optimization of Random Systems*. [S.l.]: Birkhause, 1992.
- [45] LJUNG, L. Strong Convergence of a Stochastic Approximation algorithm. *Ann Stat*, n. 6, p. 680–696, 1978.

- [46] LJUNG, L. Recursive Least-Squares and Accelerated Convergence in Stochastic Approximation Schemes . *Int J Adapt Control Process*, n. 15, p. 169–178, 1985.
- [47] Rossi, A. and Matheus, V. *Cálculo Estocástico*. Disponível em: <<https://lamfounb.github.io/2019/10/05/Calculo-Estocastico/>>. Acesso em: 20 de Dezembro de 2020.
- [48] Portal Action. *Integral de Wiener*. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/processo-estocastico/101-integral-de-wiener>>. Acesso em: 20 de Dezembro de 2020.
- [49] CHOI, J.-Y. et al. Extremum seeking control for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 12, p. 318–323, 2002.
- [50] ROTEA, M. Analysis of Multivariable Extremum Seeking Algorithms. In: *Proceedings of the 2000 american control conference*. Chicago, IL, USA: [s.n.], 2000. p. 433–437.
- [51] KRSTIC, M.; WANG, H.-H. Extremum seeking for limit cycle minimization. *IEEE Trans Autom Control*, v. 45, p. 2432–2437, 2000.
- [52] KILLINGSWORTH, N.; KRSTIC, M. Auto-tuning of PID controllers via extremum seeking . In: *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 2251–2256.
- [53] KRSTIC, M. Performance improvement and limitations in extremum seeking control. *Systems Control Letters*, v. 39, p. 313–326, 2000.
- [54] TAN, Y.; NESIC, D.; MAREELS, I. On non-local stability properties of extremum seeking controllers. *Automatica*, v. 42, p. 889–903, 2006.
- [55] MOASE, W.; MANZIE, C.; BREAR, M. Newton-like extremum seeking part I: Theory. In: *Proceedings of the joint 48th IEEE conference on decision and control and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, China: [s.n.], 2009. p. 3839–3844.
- [56] MOASE, W.; MANZIE, C.; BREAR, M. Newton-like extremum seeking part I: Simulation. In: *Proceedings of the joint 48th IEEE conference on decision and control and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, China: [s.n.], 2009. p. 3845–3850.

- [57] STANKOVIC, M.; STIPANOVIC, D. Extremum seeking under stochastic noise and applications to mobile sensors. *Automatica*, v. 46, p. 1243–1251, 2010.
- [58] ADETOLA, V.; GUAY, M. Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, v. 43, p. 105–110, 2007.
- [59] DEHAAN, D.; GUAY, M. Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems. *Automatica*, v. 41, p. 1567–1574, 2005.
- [60] FAVACHE, A. et al. Extremum seeking control of retention for a microparticulate system. *Can J Chem Eng*, v. 86, p. 815–827, 2008.
- [61] GUAY, M. et al. Flatness-based extremum-seeking control over periodic orbits. *IEEE Trans Autom Control*, v. 52, p. 2005–2012, 2007.
- [62] CREABY, J.; Y., L.; SEEM, J. Maximizing wind turbine energy capture using multivariable extremum seeking control. *Wind Eng*, v. 33, p. 361–387, 2009.
- [63] LEI, P. et al. Extremum Seeking Control Based Integration of MPPT and Degradation Detection for Photovoltaics Arrays. In: *Proceedings of 2010 American Control Conference*. Baltimore, MD, USA: [s.n.], 2010. p. 3536–3541.
- [64] ZHANG, X. et al. Extremum-seeking nonlinear controllers for a human exercise machine. *IEEE/ASME Trans Mechatron*, v. 11, p. 233–240, 2006.
- [65] KRSTIC, M.; WANG, H.-H.; BASTIN, G. Optimizing bioreactors by extremum seeking. *Int J Adapt Control Signal Process*, v. 13, p. 651–669, 1999.
- [66] MILLS, G.; KRSTIC, M. Maximizing map sensitivity and higher derivatives via extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 63, p. 3237–3247, 2018.
- [67] KRSTIC, M. Lyapunov tools for predictor feedback for delays systems: Inverse optimality and robustness to delays mismatch. *Automatica*, v. 44, p. 2930–2935, 2008.
- [68] LEHMAN, B. The influence of delays when averaging slow and fast oscillations systems: Overview. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 19, p. 201–215, 2002.

- [69] LIU, S.-J.; KRSTIC, M. Stochastic averaging in continuous time and its applications in to extremum seeking. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 55, p. 2235–2250, 2010.
- [70] MOASE, W.; MANZIE, C.; BREAR, M. Newton like extremum-seeking for thermoacoustic instability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, p. 2094–2105, 2010.
- [71] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, v. 48, p. 304–309, 2015.
- [72] OGWURU, J.; GUAY, M. Distributed extremum seeking control of multi-agent systems with unknown dynamics for optimal resource allocation. *Elsevier*, v. 381, p. 217–226, 2020.
- [73] KRSTIC, M. et al. Nash equilibrium seeking in quadratic noncooperative games under two delayed information-sharing schemes. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2020.