



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Filipe Sacchi da Silva

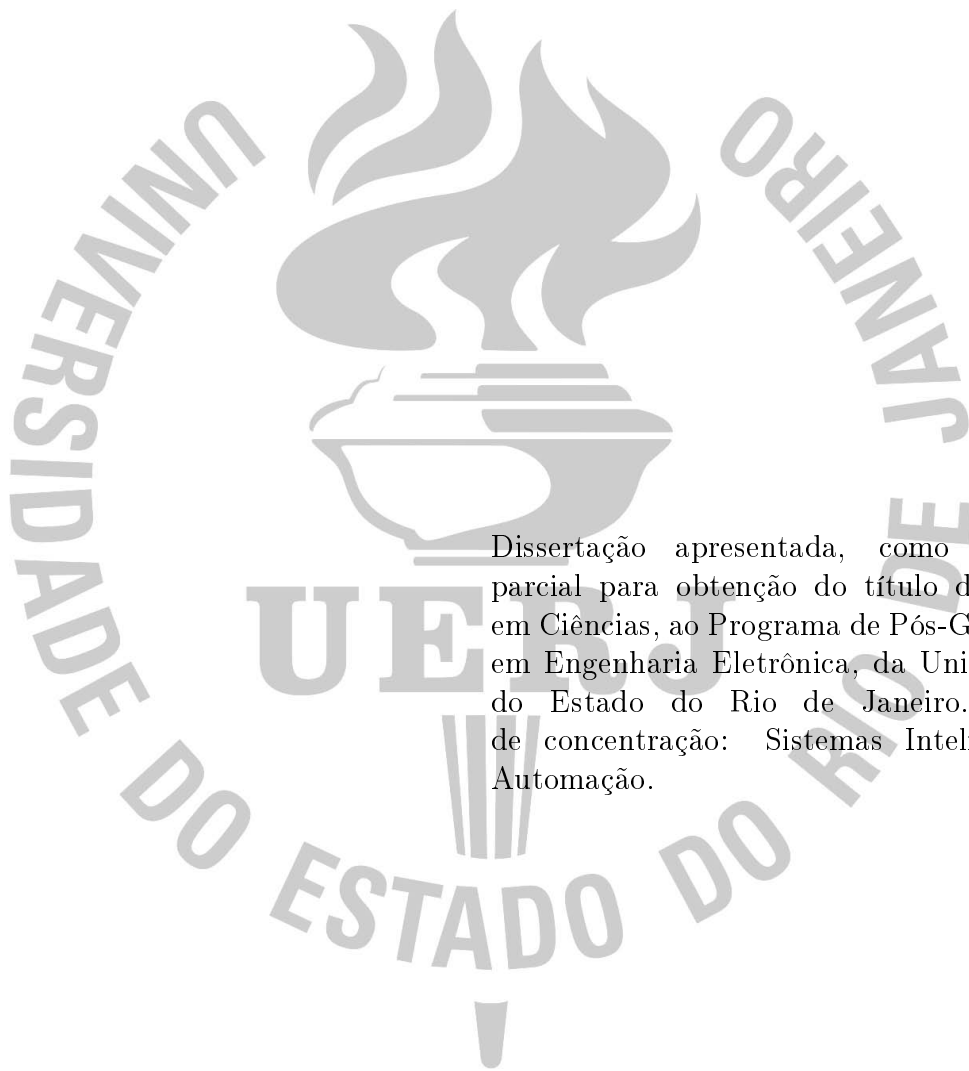
**Compensação da Equação Diferencial Parcial da Onda na  
Dinâmica de Atuação de Sistemas de Controle Extremal**

Rio de Janeiro

2020

Filipe Sacchi da Silva

**Compensação da Equação Diferencial Parcial da Onda na Dinâmica de  
Atuação de Sistemas de Controle Extremal**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Filipe Sacchi da.  
Compensação da equação diferencial parcial da onda na  
dinâmica de atuação de sistemas de controle extremal / Filipe  
Sacchi da Silva. – 2020.  
68f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Equação de onda -  
Teses. 3. Sistemas de controle inteligente - Teses. 4. Métodos  
de simulação - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Universidade  
do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III.  
Título.

CDU 681.513.4

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou  
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

  
Assinatura

  
Data

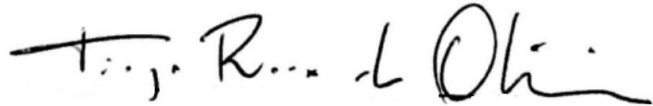
Filipe Sacchi da Silva

**Compensação da Equação Diferencial Parcial da Onda na Dinâmica de  
Atuação de Sistemas de Controle Extremal**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 12 de Novembro de 2020

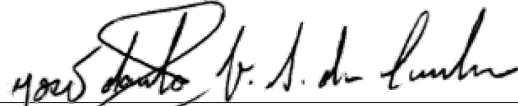
Banca Examinadora:



---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

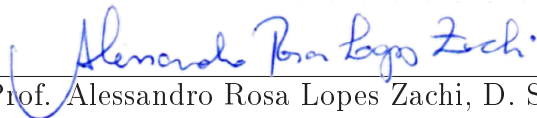
Faculdade de Engenharia - UERJ



---

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UERJ



---

Prof. Alessandro Rosa Lopes Zachi, D. Sc.

CEFET-RJ

Rio de Janeiro

2020

## AGRADECIMENTO

Agradeço à minha esposa Aline e a minha pequena Lara por fazerem parte da minha vida. Agradeço à UERJ pela oportunidade de crescimento e aprendizado. Agradeço ao meu orientador Tiago Roux de Oliveira, que muito mais do que eu, acreditou no término deste trabalho. Por fim, agradeço também aos colegas de turma Manuchi Martins Dansa e Paulo Cesar Souza da Silva pela prestatividade e companheirismo.

## RESUMO

SILVA, Filipe Sacchi. Compensação da Equação Diferencial Parcial da Onda na Dinâmica de Atuação de Sistemas de Controle Extremal. 68 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2020.

É proposta uma estratégia de controle extremal baseada no método do gradiente para a compensação da dinâmica de atuação da equação diferencial parcial (EDP) da onda em cascata com um mapeamento estático. Este problema é inspirado em uma aplicação específica de engenharia, relacionada à perfuração de poços de petróleo. Esta classe de EDPs - equação da onda - associada ao controle extremal ainda não foi estudada na literatura. A partir de uma transformação do tipo *backstepping*, e de uma formulação adequada usando condições de Neumann, apresenta-se a lei de controle dinâmica baseada em parâmetros distribuídos. A estabilidade local e a convergência para uma pequena vizinhança do ponto de extremo desejado (desconhecido) são provadas a partir de uma função de Lyapunov e da teoria da média em dimensões infinitas. Apresenta-se também a extensão dos resultados para a equação da onda anti-estáveis com condições de Dirichlet e a aplicação do controle extremal para cascatas e interconexões de EDPs envolvendo a equação da onda e outras equações hiperbólicas de atraso de transporte. Simulações numéricas ilustram os resultados teóricos.

Palavras-chave: Controle por busca extremal; *Backstepping*; Equação diferencial parcial da onda; Controle de perfuração.

## ABSTRACT

SILVA, Filipe Sacchi. Compensation of Wave PDE Applied to Extremum Seeking Actuator Dynamics. 68 f. Dissertation (Master Degree Course in Electronic Engineering) - Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro State University (UERJ), Rio de Janeiro, 2020.

A gradient extremum seeking for compensating wave actuator dynamics in cascade with static scalar maps is proposed to address a problem inspired by a specific engineering application related to drilling of oil wells. This class of Partial Differential Equations (PDEs) - Wave equation - for extremum seeking has not been studied yet. A dynamic feedback control law based on distributed parameters is proposed by employing backstepping transformation with an appropriate target system and an adequate formulation using Neumann interconnections. Local stability and convergence to a small neighborhood of the desired (but unknown) extremum is proved by means of a Lyapunov functional and the theory of averaging in infinite dimensions. The extension for wave equations with Dirichlet actuation, antistable wave PDEs as well as the design for the delay-wave PDE cascade are also discussed. Numerical simulations illustrate the theoretical results.

Keywords: Extremum seeking Control; Backstepping; Wave Partial Differential Equation; Drilling Control

## LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 Cascata de uma EDP da onda com um mapa estático <math>y(\Theta(t)) = Q(\Theta(t))</math>. O valor extremo <math>y(t) = y^*</math> é alcançado para <math>\Theta(t) = \Theta^*</math>. Equações diferenciais da onda são usadas para modelar diferentes tipos de processos, como por exemplo: mecânicos, acústicos, eletromagnéticos e de dinâmica dos fluidos. ....</p>	11
<p>Figura 2 Parte superior de uma plataforma de perfuração. Figura extraída de [1] ..</p>	12
<p>Figura 3 Relações entre as variáveis(ROP, WOB, RPM, Design da boca, Tipo de sedimento) que afetam a eficiência de um processo de perfuração. Gráficos adaptados de [2] .....</p>	13
<p>Figura 4 Conceito de <i>bit foundering</i>, partir do ponto conhecido como <i>foundering point</i>, a taxa de penetração - ROP reduz com o aumento do peso na broca - WOB. Ponto 1 determina o início da eficiência da relação entre o WOB e a ROP; Ponto 2 é o chamado <i>foundering point</i>; Ponto 3 é o extremo do mapeamento entre o WOB e a ROP. Gráfico adaptado de [2] .....</p>	14
<p>Figura 5 Esquerda: Corda fixa em ambas as extremidades; Direita: Ampliação do segmento. Figura extraída de [3]. .....</p>	18
<p>Figura 6 Esquema básico do controle extremal pelo método do gradiente .....</p>	24
<p>Figura 7 Análise dos sinais que compõem o controle extremal pelo método do gradiente .....</p>	25
<p>Figura 8 Simulação de algoritmo de busca extremal pelo método do gradiente para mapeamento <math>y = y^* + H(\theta - \theta^*)</math>, com parâmetros: <math>\theta^* = 8</math>, <math>H = -1</math>, <math>y^* = 64</math>, <math>k = 1</math> e <math>\omega = 100rad/s</math> .....</p>	28
<p>Figura 9 Simulação de algoritmo de busca extremal pelo método do gradiente com dinâmica de atuação governada pela EDP da onda sob condição de Neumann, para um mapeamento <math>y = y^* + H(\theta - \theta^*)</math>, com parâmetros: <math>\theta^* = 8</math>, <math>H = -1</math>, <math>y^* = 64</math>, <math>k = 1</math> e <math>\omega = 100rad/s</math> .....</p>	30
<p>Figura 10 Esquema básico da busca extremal pelo método do gradiente com dinâmica de atuação governada pela EDP da onda .....</p>	30



Figura 11 Controle extremal pelo método do gradiente com compensação para dinâmica de atuação governada pela equação da onda. ....	31
Figura 12 Etapas para prova de estabilidade do controlador para compensação da dinâmica de atuação da onda. ....	37
Figura 13 Busca extremal pelo método do gradiente para mapeamento estático $y = y^* + H(\theta - \theta^*)$ , com dinâmica de atuação governada pela EDP da onda. ..	48
Figura 14 Compensação da EDP anti-estável da onda para controle em malha fechada por busca extremal com condição de atuação de Dirichlet: $\alpha(0, t) = \Theta(t)$ e $\alpha(D, t) = \theta(t)$ , e $D = 1$ , $q = 5$ , e $\Theta^* = \theta^* = 2$ . ....	57
Figura 15 Compensação da EDP anti-estável da onda para controle em malha fechada por busca extremal com condição de atuação de Dirichlet: $y(t)$ convergindo para o extremo $y^* = 5$ e Hessiana estimada $\hat{H}(t)$ convergindo para $H = -2$ .	58
Figura 16 Controle extremal pelo método do gradiente, com compensação para dinâmica de atuação governada pela equação da onda com entrada atrasada. ....	59
Figura 17 Evolução do estado de dimensão infinita $\alpha(x, t)$ do modelo da EDP da onda com entrada atrasada ( $D = 1$ ), a partir de $\alpha(1, t) = \theta(t - D)$ até $\alpha(0, t) = \Theta(t)$ , com $\Theta^* = \theta^* = 2$ . ....	61
Figura 18 Compensação da EDP da onda com entrada atrasada na busca extremal usando condição de contorno de Dirichlet: tempo de resposta de $\theta(t - D)$ , $\Theta(t)$ convergindo para os máximos $\theta^* = \Theta^* = 2$ e $y(t)$ convergindo para o extremo $y^* = 5$ . ....	62
Figura 19 Compensação da EDP da onda com entrada atrasada na busca extremal usando condição de contorno de Dirichlet: tempo de resposta para estimação do gradiente $G(t)$ convergir para zero e tempo de resposta para estimação da Hessiana $\hat{H}(t)$ convergir para $H = -2$ . ....	62

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
1	<b>EMBASAMENTO MATEMÁTICO E DEFINIÇÕES IMPORTANTES</b> .....	17
1.1	Equações diferenciais parciais lineares .....	17
1.2	Transformação <i>backstepping</i> .....	20
1.3	Notações e desigualdades .....	21
1.4	Teorema da média para equações diferenciais funcionais .....	23
2	<b>CONTROLE EXTREMAL PARA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL DA ONDA USANDO ALGORITMO DO GRADIENTE</b> .....	24
2.1	Conceitos básicos do controle extremal para mapas estáticos pelo método do gradiente .....	24
2.2	Descrição da equação diferencial parcial da onda sob a condição de Neumann	29
2.3	Sinais e sistema .....	31
3	<b>PROJETO DO CONTROLADOR E SISTEMA EM MALHA FECHADA</b> .....	34
3.1	Compensação da dinâmica da onda com controle de fronteira e estimação da Hessiana .....	34
3.2	Sistema em malha fechada .....	36
3.3	Análise de estabilidade .....	36
3.4	Simulação .....	47
4	<b>DESCRIÇÃO DO CONTROLE EXTREMAL APLICADA À EDP DA ONDA SOB A CONDIÇÃO DE DIRICHLET</b> .....	49
5	<b>CONTROLE EXTREMAL PARA CASCATAS E INTERCONEXÕES DE EDPS ENVOLVENDO A EQUAÇÃO DA ONDA</b> ..	52
5.1	EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas equações diferenciais parciais de transporte (atraso) .....	52

5.2	EDP anti-estável da onda com entrada atrasada .....	58
6	<b>CONCLUSÕES</b> .....	63
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	65

## INTRODUÇÃO

A técnica de controle extremal (*Extremum Seeking - ES*) tem recebido grande atenção por estudiosos na área de controle, sendo reconhecida como uma das mais poderosas metodologias de sistemas adaptativos, capaz de ser aplicada em problemas onde a planta possui modelagem indeterminada e seu modelo é dotado de incertezas ou dinâmicas desconhecidas [4]. Apesar do controle extremal já ter sido empregado com sucesso em muitas aplicações de engenharia, conforme observado em [5–8], os autores em [9] e [10] apontam a presença de atrasos como um dos fatores limitantes para aplicação do controle extremal em situações práticas. Estas publicações apresentam uma análise completa e detalhada para compensação de atrasos no projeto do controlador extremal para mapas estáticos e dinâmicos, e fazem também uma descrição sistemática e efetiva para os algoritmos de Newton e do gradiente. Em [9], apenas equações diferenciais parciais (EDPs) hiperbólicas de primeira ordem são usadas para representar os atrasos. Esta idéia chave possibilitou a extensão para outras classes de EDPs, como aquelas que descrevem fenômenos de difusão, conforme estudado em [11] e [12], e aquelas relacionadas às EDPs parabólicas de reação-advecção-difusão, visto em [13]. Apesar da existência de várias publicações teóricas e práticas referentes à estabilização de EDPs, e também à sistemas com atraso, conforme observado em [14–23], a aplicação do controle extremal para sistemas baseados em equações diferenciais parciais ainda apresenta poucos resultados. O autor em [14] desenvolveu um controle para estabilizar a fronteira que compensa longos atrasos na entrada de um sistema composto pela equação anti-estável da onda. A referência [15] desenvolve um observador adaptativo para EDP, a fim de estimar o estado da carga de uma bateria. Por outro lado, os autores em [16] projetaram um controlador para vibrações induzidas por fluido de uma membrana de banda infinita. O modelo de vibrações induzidas é dado pela EDP da onda com termo de anti-amortecimento através do domínio unidimensional. A referência [18] lida com as vibrações axiais do cabo de sustentação para gaiola de transporte de operários em uma mina. A dinâmica de vibrações pode ser descrita pelo acoplamento entre a EDP da onda e uma equação diferencial ordinária (EDO) com interconexões de Neumann no domínio espacial variante no tempo. De acordo com o anteriormente exposto, o presente trabalho expande então a classe de EDPs para as quais o controle extremal pode ser aplicado, considerando a dinâmica da onda em cascata com o mapa escalar a ser otimizado, conforme observado na Figura 1.

O problema observado neste trabalho é motivado por uma aplicação específica da engenharia de petróleo relacionada à perfuração de poços [24], onde a abordagem de otimização em tempo real é afetada pela EDP da onda presente na dinâmica de atuação.

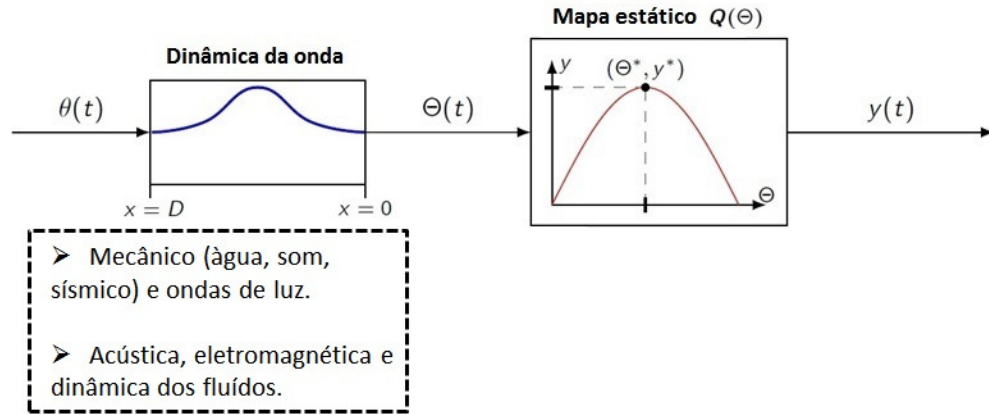


Figura 1: Cascata de uma EDP da onda com um mapa estático  $y(\Theta(t)) = Q(\Theta(t))$ . O valor extremo  $y(t) = y^*$  é alcançado para  $\Theta(t) = \Theta^*$ . Equações diferenciais da onda são usadas para modelar diferentes tipos de processos, como por exemplo: mecânicos, acústicos, eletromagnéticos e de dinâmica dos fluídos.

A equação da onda é particularmente desafiadora já que todos os seus autovalores encontram-se no eixo imaginário, e devido ao fato de que possui velocidade de propagação finita [25].

## Exemplo motivador - Controle de perfuração<sup>1</sup>

O foco desta seção é apenas mostrar uma conexão em potencial entre o controle extremal proposto com uma aplicação do mundo real, observa-se que o objetivo principal desta dissertação é desenvolver as estratégias para o controle extremal, e analisar sua estabilidade quando a dinâmica de atuação é governada pela EDP da onda. Deste modo, é apresentada uma situação prática onde existe um mapeamento estático entre a variável de controle e uma variável que se deseja otimizar, permitindo aplicação do conceito do controle extremal, no entanto a entrada deste mapeamento será influenciada pela dinâmica da EDP da onda.

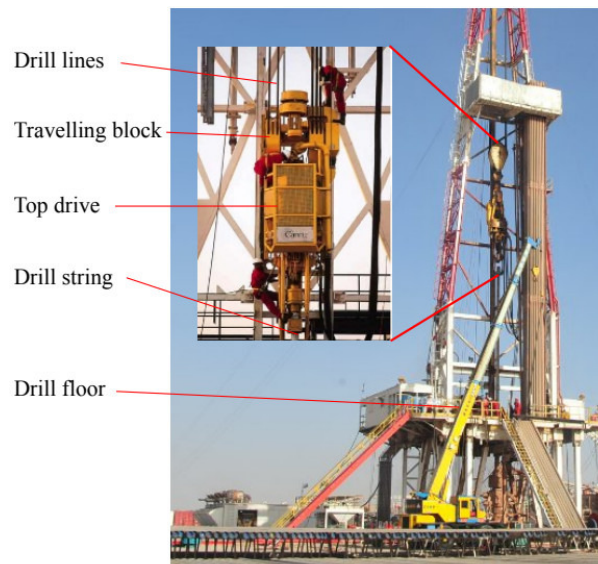


Figura 2: Parte superior de uma plataforma de perfuração. Figura extraída de [1]

A imagem na Figura 2 mostra uma plataforma moderna de perfuração *onshore*. O sistema opera como uma torre de guindaste, de modo que através de um motor CA, o aparato conhecido como *travelling block* é deslocado verticalmente ao longo da estrutura. Conectado ao *travelling block* encontra-se um outro motor elétrico chamado de *Top drive*, este é usado para rotacionar a coluna de perfuração (*drill string*), formada por uma série de tubos, de aproximadamente 9 metros cada, que carrega um conjunto chamado de *Bore Hole Assembly* (BHA). A BHA contém vários sensores (pressão, temperatura, vibração, entre outros), além da broca de perfuração. As brocas podem ser de diferentes modelos e materiais, cada uma adequada para um tipo de formação rochosa. Em analogia, uma plataforma de perfuração opera como uma furadeira, mas com a broca tendo a largura de

<sup>1</sup>Alguns termos técnicos desta seção foram mantidos em inglês, a fim de se evitar traduções indevidas.

várias polegadas e o comprimento de várias centenas de metros. Pela rotação da coluna de perfuração e usando seu peso para gerar uma força axial, a BHA é capaz de moer as rochas, perfurando o poço.

Segundo [2], um processo eficiente de perfuração é aquele em que com o aumento do RPM (rotações por minuto) da broca ou do peso (*Weight on bit - WOB*) que esta exerce sobre a rocha perfurada, tem-se o aumento proporcional da taxa de perfuração (*rate of penetration - ROP*). Conseqüentemente, se o ROP não aumenta de maneira proporcional, o processo é dito ineficiente, e esta situação pode ocorrer, por exemplo, quando se tem uma instabilidade causada pela oscilação de *stick-slip*, induzida pelo atrito sofrido pela broca, quando a mesma encontra diferentes tipos de rochas (ver [24] e suas referências). Esta instabilidade resulta em vibrações de torsão na coluna de perfuração que podem danificar severamente todo o conjunto, ver Figura 2. Ainda segundo [2], a eficiência do processo também é afetada pelo design da broca utilizada, e pela característica de dureza do sedimento a ser perfurado. A Figura 3 mostra as relações entre as variáveis que afetam a eficiência de um processo de perfuração. Para os três gráficos apresentados mostra-se a relação entre o WOB e a ROP de acordo com a variação das demais variáveis. Na Figura 3(a) observa-se que o coeficiente de proporcionalidade entre WOB e ROP será maior, quanto maior for o RPM, já em Figura 3(b) observa-se que este coeficiente será maior para sedimentos mais macios, e por fim em Figura 3(c) vê-se que com o design mais adequado da broca de perfuração, como era de se esperar, consegue-se um maior coeficiente de proporcionalidade entre o WOB e a ROP. Observa-se que nesta dissertação será considerada apenas a relação entre o WOB e a ROP conforme discutido a seguir.

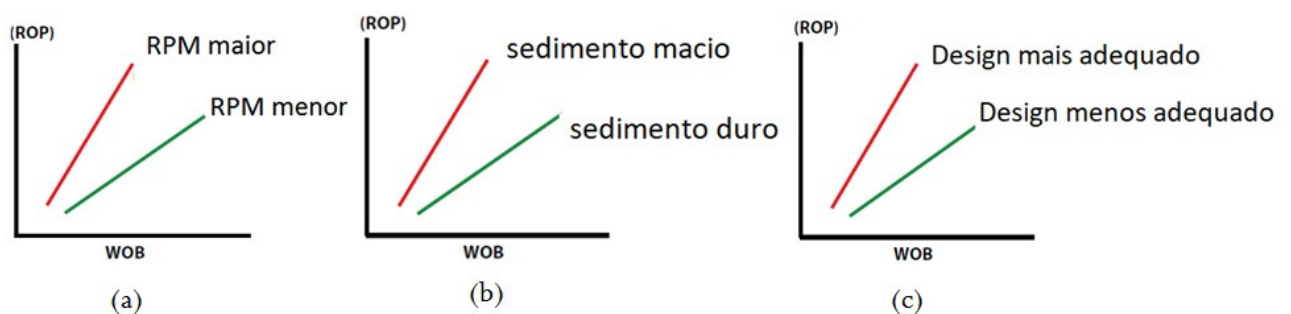


Figura 3: Relações entre as variáveis (ROP, WOB, RPM, Design da boca, Tipo de sedimento) que afetam a eficiência de um processo de perfuração. Gráficos adaptados de [2]

Em [1], os autores discutem a viabilidade de se controlar a WOB, a fim de se otimizar a ROP, durante o processo de perfuração. A idéia chave que permite a abordagem anterior é relacionada ao conceito chamado de *bit foundering* [1], isto se deve ao fato de que a ROP pode decrescer com o aumento do peso da broca quando passa-se de um valor determinado, tornando o processo de perfuração ineficiente [2], conforme visto na Figura 4.

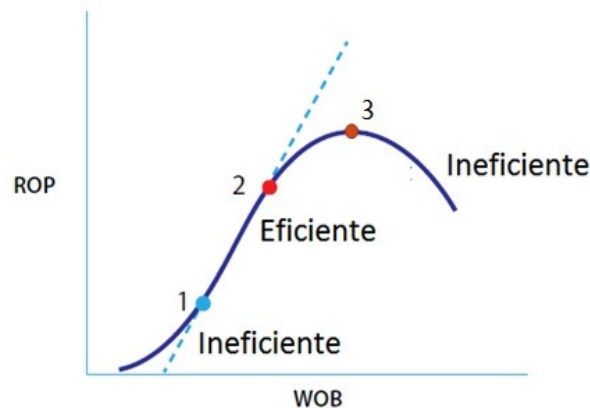


Figura 4: Conceito de *bit foundering*, partir do ponto conhecido como *foundering point*, a taxa de penetração - ROP reduz com o aumento do peso na broca - WOB. Ponto 1 determina o início da eficiência da relação entre o WOB e a ROP; Ponto 2 é o chamado *foundering point*; Ponto 3 é o extremo do mapeamento entre o WOB e a ROP. Gráfico adaptado de [2]

Deste modo, o mapa estático entre a ROP e o peso da broca tem a forma convexa para cima, com o ponto máximo (ponto 3 da Figura 4) bem próximo ao ponto determinado como *foundering point* (ponto 2 da Figura 4). Conseqüentemente, estes sinais podem ser usados como entrada e saída para um mapeamento estático em um sistema de controle extremal.

Observando as características geométricas da coluna de perfuração, vê-se que seu diâmetro é pequeno quando comparado a seu comprimento, deste modo, a mesma está sujeita a efeitos axiais e de torção, muito semelhante a uma haste flexível. Devido a esta elasticidade, a força e a velocidade de propagação podem ser modelados pela equação da onda. Neste modelo em particular, a atuação é a velocidade do *travelling block*, isto é a velocidade axial da coluna de perfuração. No entanto, no cenário real e não representado aqui, a velocidade de rotação também influencia a taxa de penetração (*rate of penetration* - ROP). A saída do modelo, representado pela equação da onda, é o peso da broca (*Weight on bit* - WOB), o qual estima o contato entre a broca e a formação rochosa. A WOB é



a condição de limite de fundo de poço a ser controlada, a fim de que se alcance o ponto ótimo da ROP.

Assim, esta aplicação física motiva o esquema de controle por busca extremal para mapas estáticos com dinâmica de atuação descrita pela equação da onda, conforme mostrado na Figura 1.

### Objetivos

Conforme o anteriormente exposto, este trabalho tem como objetivo apresentar a aplicação do controle extremal para uma dinâmica de atuação de dimensão infinita governada pela equação da onda. O problema estudado aqui é um pouco mais desafiador que o caso da EDP de difusão [11] e [12], devido a outra particularidade - a EDP da onda é de segunda ordem no tempo, o que significa que o estado é de duas dimensões infinitas (deslocamento e velocidade distribuídas). Assim, não se trata tanto de um problema de dimensionalidade, mas sim um problema na construção das transformações de estado para compensar a EDP [25], sendo necessário então lidar com o acoplamento de dois estados de dimensões infinitas. Para completar o projeto do controlador, o compensador para a dinâmica de atuação da onda é desenvolvido via uma transformação *backstepping* alimentada pela estimativa do gradiente e da Hessiana (primeira e segunda derivadas) do mapa estático a ser maximizado. As provas para a estabilidade local do sistema em malha fechada e para a convergência para uma pequena vizinhança do ponto extremo são baseadas em: (i) na metodologia de *backstepping* para o controle de EDP [26], (ii) na construção da função de Lyapunov e (iii) uso do teorema da média para sistemas de dimensão infinita [27]. Para o projeto do controlador são consideradas as condições de fronteira de Neumann e Dirichlet. Completa-se o estudo realizado com a expansão da aplicação do controle extremal para cascatas de EDPs, especificamente EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas EDPs de transporte (*atraso*), e a EDP anti-estável da onda com entrada atrasada [14]. Além das provas completas e de novos resultados numéricos, as considerações sobre as EDPs anti-estáveis compõem as diferenças teóricas substanciais para a versão apresentada em [28].

### Organização do texto

Observando que este trabalho é focado no método do gradiente, o capítulo 1 traz o embasamento matemático e definições importantes para o endendimento do texto, o

capítulo 2 inicialmente descreve os resultados básicos deste algoritmo aplicados aos mapas estáticos sem a presença de EDPs. Na segunda parte do capítulo, considera-se a EDP da onda como entrada do mapa estático a ser maximizado levando em consideração a condição de Neumann, e por fim são apresentados o sinais e o sistema que compõem o esquema de controle extremal proposto. No capítulo 3 é apresentada a transformação *backstepping* usada para compensação da dinâmica da onda e o sistema médio em malha fechada, obtido a partir da aplicação do teorema da média. Na parte final do capítulo, através do funcional de Lyapunov-Krasovskii é apresentada a prova de estabilidade do sistema médio em malha fechada, e para finalizar, mostra-se a convergência para uma vizinhança do extremo do mapeamento estático desconhecido. No capítulo 4 é mostrada a formulação do problema apresentado no capítulo 2, no entanto, considerando a condição de contorno de Dirichlet. O capítulo 5 estende a aplicação do controle extremal considerando agora cascatas de EDPs na dinâmica de atuação. Na primeira situação, uma EDP anti-estável da onda é descrita como uma interconexão de duas EDPs de transporte (*atraso*), enquanto que na segunda situação, considera-se a EDP anti-estável da onda com entrada atrasada, observando que para ambas as situações, tem-se como objetivo apenas obter as leis de controle. Simulações numéricas são apresentadas ao término dos capítulos 3 e 5 a fim de validar as características de estabilidade e convergência dos esquemas de controle propostos. Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e possibilidades que não foram exploradas neste trabalho, e que podem ser elencadas para trabalhos futuros.

## 1 EMBASAMENTO MATEMÁTICO E DEFINIÇÕES IMPORTANTES

Neste capítulo são realizadas algumas definições para melhor entendimento por parte do leitor, e apresenta-se também o embasamento matemático importante que será utilizado ao longo do texto.

### 1.1 Equações diferenciais parciais lineares

A forma geral de uma equação de derivadas parciais de segunda ordem linear (EDP) em duas variáveis independentes  $x$  e  $y$  é dada por:

$$A(\partial u^2/\partial x^2) + B(\partial u^2/\partial x\partial y) + C(\partial u^2/\partial y^2) + D(\partial u/\partial x) + E(\partial u/\partial y) + Fu = G, \quad (1)$$

onde,  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  são funções de  $x$  e  $y$ . Quando  $G(x, y) = 0$ , a equação se diz homogênea; em caso contrário se diz não-homogênea.

Uma solução de uma equação de derivadas parciais em duas variáveis independentes  $x$  e  $y$  é uma função  $u(x, y)$  que possui todas as derivadas parciais que comparecem na equação e que satisfaz a equação em alguma região do plano  $xy$ .

De acordo com os coeficientes constantes visto na (1), uma equação de derivadas parciais linear de segunda ordem será classificada como: (i) hiperbólica, se  $B^2 - 4AC > 0$ ; (ii) parabólica, se  $B^2 - 4AC = 0$ ; (iii) elíptica, se  $B^2 - 4AC < 0$ . A razão desta classificação está relacionada a resolução destas equações sujeitas a certas condições laterais, conhecidas como condições de contorno, e condições iniciais. O gênero das condições laterais adequadas a uma determinada equação depende do fato de a equação ser hiperbólica, parabólica ou elíptica.

As equações diferenciais parciais (2), (3) e (4) são clássicas da física matemática e conhecidas respectivamente, como equação unidimensional do calor, equação unidimensional da onda e equação de Laplace em duas dimensões:

$$k(\partial^2 u/\partial x^2) = B(\partial u/\partial t), \quad (2)$$

$$a^2(\partial^2 u / \partial x^2) = B(\partial^2 u / \partial t^2), \quad (3)$$

$$(\partial^2 u / \partial x^2) + (\partial^2 u / \partial y^2) = 0. \quad (4)$$

A expressão unidimensional se refere ao fato de que  $x$  denota uma dimensão espacial, enquanto que  $t$  representa o tempo. Nota-se que a equação do calor (2) é parabólica, a equação da onda (3) é hiperbólica e a equação de Laplace (4) é elíptica.

### A equação da onda

Conforme já mencionado, esta dissertação lida com o controle extremal quando sua dinâmica de atuação é governada pela equação diferencial parcial da onda (3), deste modo, nesta subseção deriva-se tal EDP.

Considerando uma corda de comprimento  $L$ , como uma corda de violão, mantida tensa e fixada em dois pontos no eixo  $x$ ,  $x = 0$  e  $x = L$ .

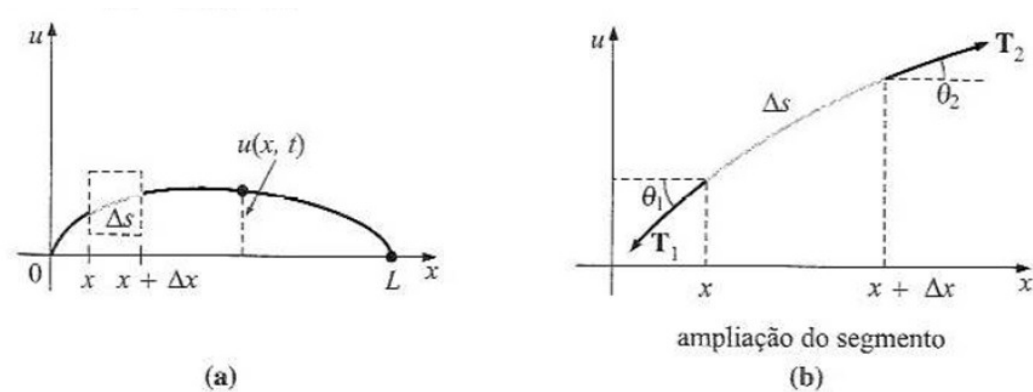


Figura 5: Esquerda: Corda fixa em ambas as extremidades; Direita: Ampliação do segmento. Figura extraída de [3].

Quando a corda começa a vibrar, suponha-se que o movimento se verifique no plano  $xy$  de tal maneira que cada ponto da corda se mova em uma direção perpendicular ao eixo  $x$  (vibrações transversais). Conforme mostra a Figura 5 (a), denota-se por  $u(x, t)$  o deslocamento vertical de um ponto arbitrário da corda medido a contar do eixo  $x$  para  $t > 0$ . Supondo ainda que:

- (i) A corda é perfeitamente flexível;
- (ii) A corda é homogênea, isto é sua massa  $\rho$  por unidade de comprimento é constante;
- (iii) Os deslocamento  $u$  são pequenos comparados com o comprimento da corda;

- (iv) A inclinação da curva é pequena em todos os pontos;
- (v) A tensão  $T$  atua tangencialmente à corda e seu módulo  $T$  é o mesmo em todos os pontos;
- (vi) A tensão é grande comparada com a força da gravidade;
- (vii) Nenhuma outra força externa atua sobre a corda.

A partir da Figura 5 (b), não existe deslocamento horizontal do segmento definido no intervalo  $[x, x + \Delta x]$ , deste modo, têm-se  $T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2$ . A partir da proposição (iv) acima, os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são pequenos e assim  $\cos \theta_1 \approx 1$  e  $\cos \theta_2 \approx 1$ , deste modo  $T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 = T$ . Observando ainda a Figura 5 (b), o somatório de forças verticais no intervalo  $[x, x + \Delta x]$  será:

$$T_2 \text{ sen } \theta_2 - T_1 \text{ sen } \theta_1 = \text{massa} \times a_{\text{vertical}}, \quad (5)$$

e assim,

$$T_2 \text{ sen } \theta_2 - T_1 \text{ sen } \theta_1 = \text{massa} \times \partial^2 u / \partial t^2. \quad (6)$$

Pela inserção da definição de densidade, obtém-se

$$T_2 \text{ sen } \theta_2 - T_1 \text{ sen } \theta_1 = \rho \Delta x \partial^2 u / \partial t^2. \quad (7)$$

Dividindo todos os termos por  $T$  e considerando a relação  $T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 = T$  já mostrada acima, tem-se:

$$\text{tg } \theta_2 - \text{tg } \theta_1 = ((\rho \Delta x) / T) \times \partial^2 u / \partial t^2. \quad (8)$$

Os termos do lado esquerdo da (8) representam a diferença entre as derivadas  $\partial u / \partial x$  nos pontos:  $x = x$  e  $x = x + \Delta x$ , ou seja trata-se da  $\partial^2 u / \partial x^2$ , deste modo  $(\partial^2 u / \partial x^2) = (\rho / T) \times (\partial^2 u / \partial t^2)$ . Como os valores da densidade ( $\rho$ ) e Tração ( $T$ ) são sempre positivos, escreve-se a equação da onda conforme abaixo:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \times \partial^2 u / \partial x^2 \quad (9)$$

onde  $c^2 = T / \rho$ .

### Condições de contorno de Neumann e Dirichlet

A condição de contorno de Neumann(ou de segundo tipo) é um tipo de condição de contorno que quando aplicada a uma equação diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que a derivada de uma solução deve tomar nos limites do domínio. Já a condição de contorno de Dirichlet especifica o valor da função neste contorno. No caso de uma equação diferencial ordinária, tal como no exemplo a seguir:

$$d^2y/d^2x + 3y = 1 \quad (10)$$

no intervalo  $[0,1]$  as condições de contorno de Neumann serão:

$$dy/dx(0) = \alpha_1, \quad (11)$$

$$dy/dx(1) = \alpha_2, \quad (12)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são números reais. Já as condições de contorno de Dirichlet serão:

$$y(0) = \alpha_3, \quad (13)$$

$$y(1) = \alpha_4, \quad (14)$$

onde  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  são também números reais.

### 1.2 Transformação *backstepping*

A transformação de *backstepping* é uma abordagem para estabilização de sistemas dinâmicos com uma estrutura "triangular", muito bem sucedida na área de controle não linear para equações diferenciais ordinárias. Para equações diferenciais parciais, o *backstepping* é um método construtivo que alcança a estabilidade de Lyapunov pela transformação do sistema original em um sistema alvo estável, o que é frequentemente alcançado deslocando coletivamente todos os autovalores em uma direção favorável do plano complexo. De acordo com [29], os seguintes passos são tomados para aplicação do método:

- (i) Identificação dos termos indesejados da equação diferencial parcial.
- (ii) Escolha de um sistema alvo no qual os termos indesejados são eliminados por uma transformação de estados e realimentação.
- (iii) Determinação da transformação de estados, tipicamente escolhida como identidade menos o operador de Volterra (Operador da integral com limites de 0 até  $x$ ).
- (iv) Obtenção da realimentação de fronteira a partir da transformação de Volterra. A transformação sozinha não elimina os termos indesejados, no entanto, traz os mesmos para a fronteira, permitindo que o controle possa cancelá-los.

### 1.3 Notações e desigualdades

As derivadas parciais de uma função de duas variáveis  $u(x, t)$  são denotadas por:  $u(x, t)$  as  $\partial_x u(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$ ,  $\partial_t u(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$ , ou ainda são respectivamente usadas nas seguintes formas compactas:  $u_x(x, t)$  and  $u_t(x, t)$ . A norma-2 de um vetor de estado  $\vartheta(t)$  de dimensão finita de uma EDO é denotada por barras simples  $|\vartheta(t)|$ . Por outro lado, as normas de funções (de  $x$ ) são denotadas por barras duplas. A norma espacial  $\mathcal{L}_2[0, D]$  do estado  $u(x, t)$  de uma EDP é denotada como:  $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}^2 := \int_0^D u^2(x, t) dx$ , onde na sequência, o índice  $\mathcal{L}_2([0, D])$  é retirado, conseqüentemente  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}$ , se não especificado.

Como definido em [30], a função vetorial  $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$  é dita ser de ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$  no intervalo  $[t_1, t_2]$ , se  $\exists k, \bar{\epsilon} : |f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon, \forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$  e  $\forall t \in [t_1, t_2]$ . Na maioria dos casos, não se fornece a estimativa precisa para as constantes  $k$  e  $\bar{\epsilon}$ , então  $\mathcal{O}(\epsilon)$  pode ser interpretado como uma relação de ordem de grandeza para  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

O sobrescrito  $*$  denota a otimização de um valor, deste modo,  $y^*$  é o valor ótimo para uma função  $y = f(x)$  quando  $x = x^*$ .

Presume-se que a definição de estabilidade entrada-estado *Input-to-State Stability* para EDOs, bem como sistemas governados por EDPs, são fornecidas em [30] e [31] respectivamente.

Considerando um sistema não linear genérico  $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x, \epsilon)$  seja periódica em  $t$  com período  $T$ , isto é  $f(t + T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$ , pode-se obter, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, seu sistema médio dado por  $\dot{x}_{av} = f_{av}(x_{av})$  com  $f_{av}(x_{av}) = 1/T \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$ , onde  $x_{av}(t)$  denota a versão média do estado  $x(t)$ , conforme [30].

Neste trabalho, as desigualdades de *Young, Poincaré, Agmon e Cauchy-Schwarz*

são usadas com frequência. Assim, declara-se estas desigualdades na forma como são usadas, nominalmente para um domínio espacial  $[0, D]$ .

**Proposição 1.** *Desigualdade de Poincaré*

$$\|\omega(t)\|^2 \leq 2\omega(D, t)^2 + 4D^2\|\omega_x(t)\|^2 \quad (15)$$

$$\|\omega(t)\|^2 \leq 2D\omega(0, t)^2 + 4D^2\|\omega_x(t)\|^2 \quad (16)$$

**Proposição 2.** *Desigualdade de Agmon (Caso1)*

$$\max_{x \in [0, D]} |\omega(x, t)|^2 \leq \omega(0, t)^2 + 2\|\omega(t)\|\|\omega_x(t)\| \quad (17)$$

$$\max_{x \in [0, D]} |\omega(x, t)|^2 \leq \omega(D, t)^2 + 2\|\omega(t)\|\|\omega_x(t)\| \quad (18)$$

**Proposição 3.** *Desigualdade de Agmon (Caso2)*

$$\omega(0, t)^2 \leq \frac{D+1}{D}\|\omega(t)\|^2 + \|\omega_x(t)\|^2 \quad (19)$$

$$\omega(D, t)^2 \leq \frac{D+1}{D}\|\omega(t)\|^2 + \|\omega_x(t)\|^2 \quad (20)$$

**Proposição 4.** *Desigualdade de Young*

$$ab \leq \frac{\gamma}{2}a^2 + \frac{1}{2\gamma}b^2, \gamma > 0 \quad (21)$$

**Proposição 5.** *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$\int_0^D u(x, t)\omega(x, t)dx \leq \|u(t)\|\|\omega(t)\| \quad (22)$$

Observa-se que na literatura [32], as desigualdades acima são declaradas para o domínio espacial  $[0, 1]$ .



#### 1.4 Teorema da média para equações diferenciais funcionais

Considerando um sistema com atraso [27]:

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\epsilon}, x_t\right), \quad (23)$$

para  $t > 0$  e  $\epsilon$  sendo um parâmetro real,  $x_t(\Theta) = x(t + \Theta)$  para  $-r \leq \Theta \leq 0$ , e  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um funcional contínuo de uma vizinhança  $\Omega$  de 0 do espaço de Banach  $X = C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$  de funções contínuas de  $[-r, 0]$  em  $\mathbb{R}^n$ . Assume-se que  $f(t, \varphi)$  é periódico em  $t$  uniformemente com respeito à  $\varphi$  em subconjuntos compactos de  $\Omega$  e que  $f$  tem uma derivada de Fréchet contínua  $\partial(f, \varphi)/\partial\varphi$  em  $\varphi$  no  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Se  $y = y_0 \in \Omega$  é um equilíbrio exponencialmente estável para o sistema médio  $\dot{y}(t) = f_0(y_t)$ , para  $t > 0$ , onde  $f_0(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T f(s, \varphi) ds$ , então, para algum  $\epsilon_0 > 0$  e  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ , existe uma única solução periódica  $t \rightarrow x^*(t, \epsilon)$  de (23) com as propriedades de ser contínua em  $t$  e  $\epsilon$ , satisfazendo  $|x^*(t, \epsilon) - y_0| \leq \mathcal{O}(\epsilon)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , e tal que exista  $\rho > 0$  de modo que, se  $x(\cdot; \rho)$  é uma solução para (23) com  $x(s) = \varphi$  e  $|\varphi - y_0| < \rho$ , então  $|x(t) - x^*(t, \epsilon)| \leq C e^{-\gamma(t-s)}$ , para  $C > 0$  e  $\gamma > 0$ .

## 2 CONTROLE EXTREMAL PARA EDP DA ONDA USANDO ALGORITMO DO GRADIENTE

Este capítulo inicialmente recorda os resultados básicos do controle extremal para mapas estáticos pelo método do gradiente. Posteriormente, na segunda seção, a EDP da onda é considerada como entrada do mapa estático que se deseja otimizar em tempo real, neste caso considerando a condição de Neumann. Por fim são apresentados o sinais e sistema que compõem o esquema de controle extremal proposto.

### 2.1 Conceitos básicos do controle extremal para mapas estáticos pelo método do gradiente

No caso mais simples do controle extremal para mapas estáticos, o objetivo é encontrar e manter o ponto ótimo para o mapeamento estático não-linear desconhecido  $Q(\cdot)$ , com saída ótima desconhecida  $y^*$ , e otimizador ótimo também desconhecido  $\theta^*$ , tendo como sinais conhecidos a saída  $y$  e a entrada  $\theta$  do sistema básico de controle extremal visto na Figura 6. Sem perda de generalidade, considera-se aqui problemas de maximização.

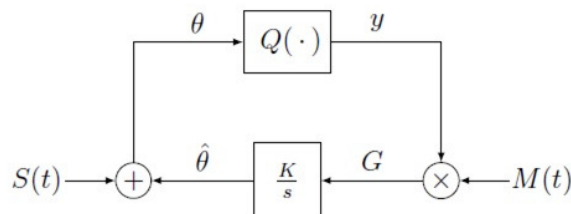


Figura 6: Esquema básico do controle extremal pelo método do gradiente

O método da perturbação senoidal [4] varia o parâmetro de entrada  $\theta$  pela soma com o sinal  $S(t)$ . A saída do mapa estático é multiplicada pelo sinal  $M(t)$  para obter a estimativa do gradiente  $G$  do mapa estático. Observa-se que os sinais  $S(t)$  e  $M(t)$  podem ser iguais.

Observando a Figura 7 é possível realizar uma análise intuitiva do funcionamento do controle extremal pelo método do gradiente. O eixo das abscissas representa o sinal  $\theta$  na entrada do mapa estático, e o eixo das ordenadas representa o sinal de saída  $y$  deste mesmo mapa estático. O mapeamento apresenta a saída ótima  $y^*$  quanto a entrada é  $\theta^*$ . Para análise em questão, considera-se três situações possíveis para o valor de teta estimado  $\hat{\theta}$ :

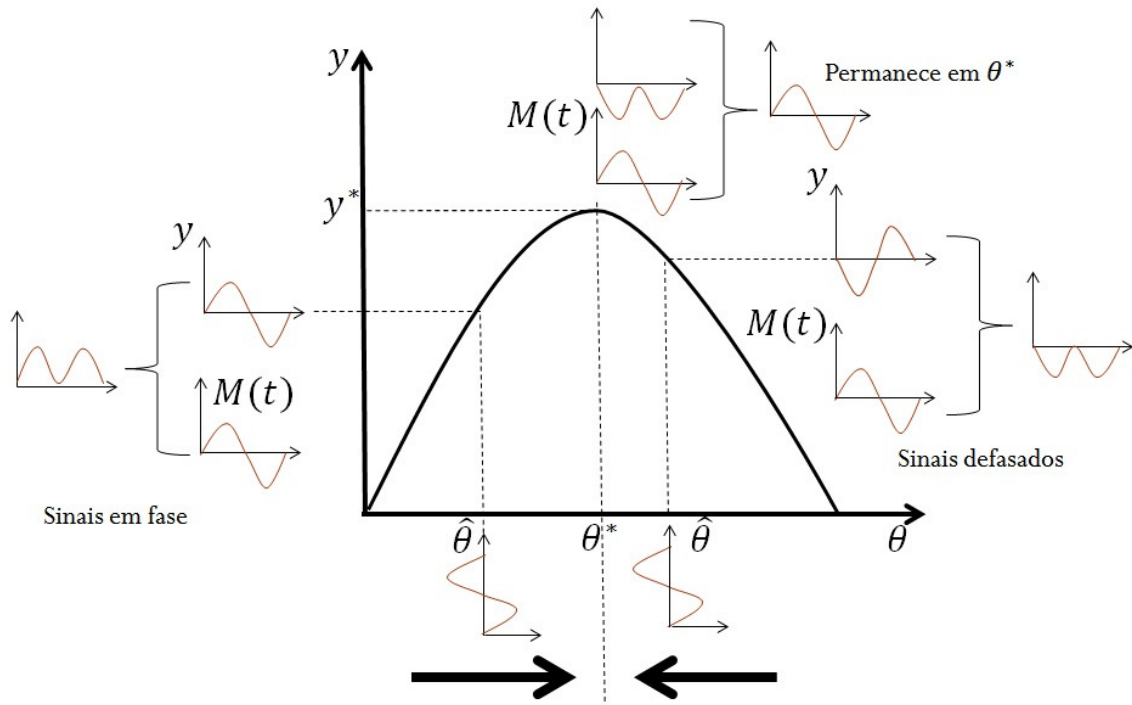


Figura 7: Análise dos sinais que compõem o controle extremal pelo método do gradiente

(i)  $\hat{\theta} < \theta^* \Rightarrow$  Neste caso, o somatório de  $\hat{\theta}$  com o sinal de perturbação  $S(t)$  produzirá na saída do mapa estático, um sinal  $y(t)$  formado por um *offset* acrescido de uma componente senoidal de mesma frequência e fase do sinal de perturbação  $S(t)$ . Considerando nesta análise que os sinais  $S(t)$  e  $M(t)$  são iguais, ao multiplicar o sinal  $y(t)$  pelo sinal  $M(t)$  tem-se como resultado um sinal cujo valor médio é positivo, esta componente positiva é então integrada, aumentando o valor de teta estimado  $\hat{\theta}$ , a fim de que o mesmo se desloque na direção de  $\theta^*$ .

(ii)  $\hat{\theta} > \theta^* \Rightarrow$  Neste caso, o somatório de  $\hat{\theta}$  com o sinal de perturbação  $S(t)$  produzirá na saída do mapa estático, um sinal  $y(t)$  formado por um *offset* acrescido de uma componente senoidal de mesma frequência, mas defasada em  $180^\circ$  do sinal de perturbação  $S(t)$ . Considerando nesta análise que os sinais  $S(t)$  e  $M(t)$  são iguais, ao multiplicar o sinal  $y(t)$  pelo sinal  $M(t)$  tem-se como resultado um sinal cujo valor médio é negativo, esta componente negativa é então integrada, reduzindo o valor de teta estimado  $\hat{\theta}$ , a fim de que o mesmo se desloque na direção de  $\theta^*$ .

(iii)  $\hat{\theta} = \theta^* \Rightarrow$  Neste caso, o somatório de  $\hat{\theta}$  com o sinal de perturbação  $S(t)$  produzirá na saída do mapa estático, um sinal  $y(t)$  formado por um *offset* acrescido de uma componente

de mesma frequência que o sinal  $S(t)$ , no entanto apenas com valores negativos, uma vez que como se está no pico positivo do mapeamento estático, qualquer que seja a variação positiva ou negativa do sinal de entrada  $\theta$ , o sinal de saída  $y(t)$  irá diminuir. Considerando nesta análise que os sinais  $S(t)$  e  $M(t)$  são iguais, ao multiplicar o sinal  $y(t)$  pelo sinal  $M(t)$  tem-se como resultado um sinal cujo valor médio é zero, deste modo, o valor de teta estimado  $\hat{\theta}$  mantém-se em  $\theta^*$ .

Observa-se que para a implementação prática do que foi descrito nas três situações anteriores, acrescenta-se um filtro passa-alta na saída do mapa estático a fim de permitir que apenas a componente senoidal do sinal de saída  $y(t)$  seja multiplicada pelo sinal  $M(t)$ .

Além da análise intuitiva vista anteriormente, é possível realizar uma análise matemática para o comportamento do controle extremal pelo método do gradiente, de acordo com o que será descrito a seguir. O sinal de perturbação dado por:

$$S(t) = a \operatorname{sen}(\omega t), \quad (24)$$

com amplitude  $a$  e frequência  $\omega$  é adicionado à estimativa  $\hat{\theta}$  do valor ótimo  $\theta^*$ . O sinal de perturbação que multiplica o sinal de saída  $y$  do mapa estático, responsável pela estimação do gradiente é dado por:

$$M(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (25)$$

A ideia de escolher os sinais de perturbação dados por (24) e (25) é entendida observando a média do sinal  $G$  e assumindo que o mapeamento estático  $Q(\cdot)$  pode ser localmente aproximado na vizinhança de  $\theta^*$  por uma função quadrática, com a forma abaixo:

$$Q(\cdot) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (26)$$

com Hessiana  $H$  negativa e desconhecida. Observa-se que para problemas de minimização, onde  $H$  é positiva, deve-se escolher o ganho  $K$  com valor negativo no diagrama da Figura 6. O pressuposto em (26) pode ser satisfeito na região ótima para qualquer mapeamento

não-linear contínuo em  $C^2$ . Abaixo, introduz-se o erro de estimação:

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*. \quad (27)$$

Observando a Figura 6, tem-se que a estimativa do gradiente e o  $\theta$  de entrada do mapa estático são dados respectivamente por:

$$G(t) = M(t)y(t), \quad (28)$$

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \operatorname{sen} \omega t. \quad (29)$$

Manipulando então (25),(26),(27), (28) e (29), obtém-se:

$$G(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \times [y^* + \frac{H}{2}(\tilde{\theta} + a \operatorname{sen} \omega t)^2]. \quad (30)$$

Expandindo o lado direito da equação chega-se a

$$G(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t)y^* + \frac{H}{a}\tilde{\theta}^2 \operatorname{sen}(\omega t) + 2H\tilde{\theta} \operatorname{sen}^2(\omega t) + Ha \operatorname{sen}^3(\omega t), \quad (31)$$

onde aplica-se o teorema da média, resultando no gradiente médio do mapeamento. A equação (32) a seguir é obtida fazendo  $\omega$  grande e definindo como zero todos os termos em (31) que dependem de  $\operatorname{sen}$  e  $\operatorname{sen}^3$ , já o termo que depende de  $\operatorname{sen}^2$  terá média  $\frac{1}{2}$ :

$$G_{av}(t) = H(\tilde{\theta}_{av}) = H(\hat{\theta}_{av} - \theta^*), \quad (32)$$

Resultando na dinâmica de erro médio

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av} = KH\tilde{\theta}_{av}. \quad (33)$$

Sabendo que a Hessiana é negativa, e tendo  $K > 0$ , o sistema em (33) é exponencialmente estável e pelo teorema da média em [30], a dinâmica do erro original também será atrativa para um conjunto residual. De acordo com Ariyur e Krstić [33], a convergência de  $(\theta, y)$

para uma vizinhança do extremo  $(\theta^*, y^*)$  é dada por:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}\left(|a| + \frac{1}{\omega}\right), \quad (34)$$

e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}\left(|a|^2 + \frac{1}{\omega^2}\right). \quad (35)$$

Observa-se assim que o algoritmo de controle extremal baseado no gradiente é localmente convergente, com a taxa dependente da Hessiana  $H$ . Além disto, em um contexto geral, o valor ótimo  $\theta^*$  pode sofrer alterações ao longo do tempo, embora no desenvolvimento desta dissertação este será considerado como tendo um valor constante. Com relação às constantes de um sistema com controle extremal, as seguintes observações podem ser realizadas: (i) Variações em  $\theta^*$  devem ser lentas quando comparadas com a frequência do sinal de perturbação; (ii) A frequência do sinal de perturbação deve ser lenta quando comparada ao tempo de resposta do sistema formado pela planta em conjunto com o mapa estático, observando que nesta dissertação, a planta será composta apenas pelo mapa estático.

A Figura 8 mostra um exemplo numérico para o comportamento típico da saída  $y$  e sua convergência para o valor ótimo  $y^*$  em um dado mapeamento estático.

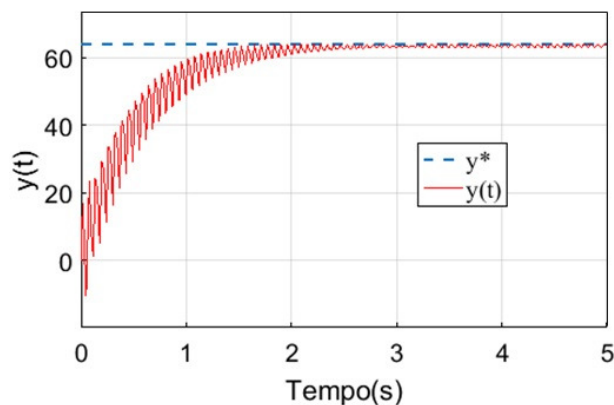


Figura 8: Simulação de algoritmo de busca extremal pelo método do gradiente para mapeamento  $y = y^* + H(\theta - \theta^*)$ , com parâmetros:  $\theta^* = 8$ ,  $H = -1$ ,  $y^* = 64$ ,  $k = 1$  e  $\omega = 100\text{rad/s}$

Para evitar a dependência da Hessiana presente no método do gradiente, pode-se utilizar o algoritmo de controle extremal baseado no método de Newton. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [34].

## 2.2 Descrição da equação diferencial parcial da onda sob a condição de Neumann

Considerando a dinâmica de atuação descrita pela EDP da onda, o atuador  $\theta(t)$  e o atuador de propagação  $\Theta(t)$  são dados por:

$$\Theta(t) = \partial_x \alpha(0, t) \quad (36)$$

$$\partial_{tt} \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (37)$$

$$\alpha(0, t) = 0 \quad (38)$$

$$\partial_x \alpha(D, t) = \theta(t), \quad (39)$$

com domínio de comprimento  $D$  arbitrário, mas conhecido. A descrição da atuação pela condição de Neumann  $\partial_x \alpha(D, t) = \theta(t)$  é a primeira escolha a ser feita, já que no exemplo de motivação da Introdução  $\partial_x \alpha(D, t)$  representaria a força sofrida no limite da coluna de perfuração pelo contato entre a broca e a parede rochosa. No capítulo 4, é mostrada a formulação do problema usando a condição de Dirichlet  $\alpha(D, t) = \theta(t)$  como atuação na descrição do problema.

A saída do mapa estático, dependerá então da entrada (36), e será dada por:

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (40)$$

Por questões de simplicidade, considera-se a seguinte hipótese:

**Hipótese 1.** *O mapa estático não linear desconhecido é quadrático, isto é,*

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \quad (41)$$

onde  $\Theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$  são desconhecidos e  $H < 0$  escalar é a Hessiana desconhecida do mapa estático.

Desse modo, a saída do mapa estático é dada por:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \quad (42)$$

A Figura 9 mostra um exemplo de simulação para um esquema básico de controle por busca extremal com a dinâmica de atuação governada pela EDP da onda, sob a

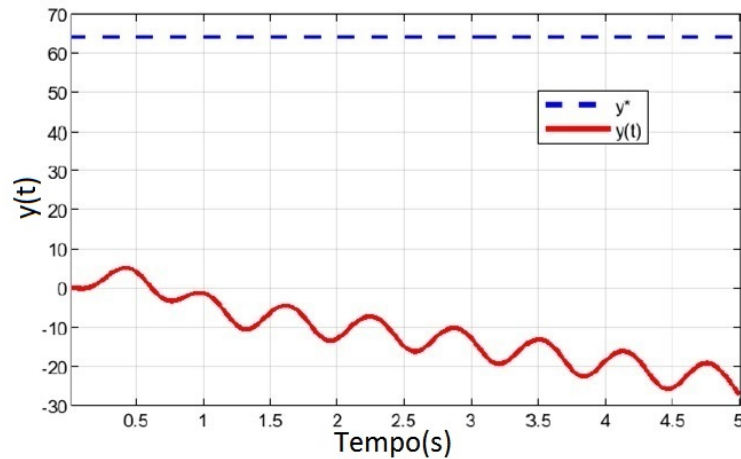


Figura 9: Simulação de algoritmo de busca extremal pelo método do gradiente com dinâmica de atuação governada pela EDP da onda sob condição de Neumann, para um mapeamento  $y = y^* + H(\theta - \theta^*)$ , com parâmetros:  $\theta^* = 8$ ,  $H = -1$ ,  $y^* = 64$ ,  $k = 1$  e  $\omega = 100\text{rad/s}$

condição de Neumann, conforme diagrama mostrado na Figura 10. Neste caso, percebe-se que sem a presença de um compensador para a EDP, a saída do mapa estático diverge, afastando-se do valor ótimo  $y^* = 64$ .

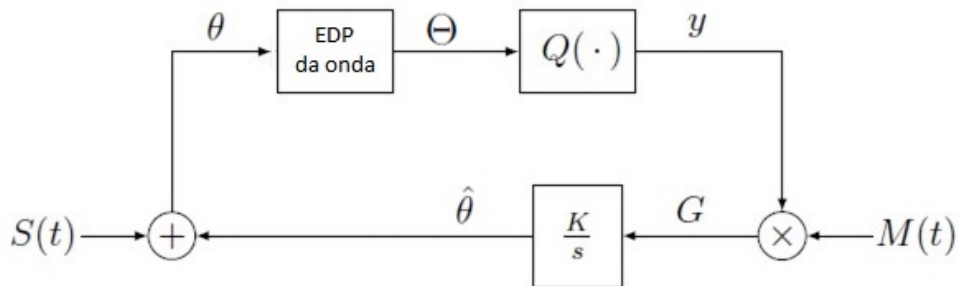


Figura 10: Esquema básico da busca extremal pelo método do gradiente com dinâmica de atuação governada pela EDP da onda

A fim então de tornar o sistema estável e convergente para o valor ótimo do mapeamento estático, combina-se a dinâmica de atuação da EDP da onda sob condição de Neumann com o esquema básico de controle extremal, e generaliza-se o esquema proposto em [9]. Deste modo, tem-se que o sistema em malha fechada por busca extremal para dinâmica de atuação governada pela equação diferencial da onda, compensada por um controlador de fronteira a ser apresentado é ilustrado conforme o diagrama de blocos na Figura 11.



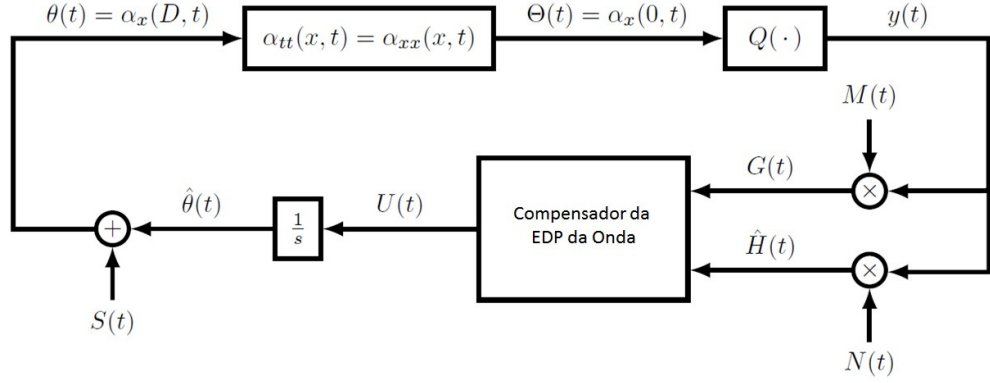


Figura 11: Controle extremal pelo método do gradiente com compensação para dinâmica de atuação governada pela equação da onda.

### 2.3 Sinais e sistema

Conforme observado no esquema básico de controle extremal, define-se a entrada ótima desconhecida  $\theta^*$  de  $\theta(t)$  para o mapa estático e o processo governado pela equação da onda, com a relação de que  $\Theta^* = \theta^*$ , uma vez que  $\Theta$  representa a propagação de  $\theta$  ao longo do domínio  $D$  sob efeito da dinâmica da onda. Como o objetivo então é encontrar a entrada ótima desconhecida  $\theta^*$ , define-se o erro de estimação conforme abaixo:

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (43)$$

onde  $\hat{\theta}(t)$  é o valor estimado para  $\theta^*$ , representado na saída do integrador no diagrama da Figura 11. A fim de fazer (43) consistente com o otimizador do mapa estático  $\Theta^*$ , introduz-se o erro de estimação propagado  $\vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*$  pelo domínio da EDP da onda:

$$\vartheta(t) := \partial_x \bar{\alpha}(0, t) \quad (44)$$

$$\partial_{tt} \bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx} \bar{\alpha}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (45)$$

$$\bar{\alpha}(0, t) = 0 \quad (46)$$

$$\partial_x \bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t). \quad (47)$$

A partir da malha de controle da Figura 11, tem-se que

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t). \quad (48)$$

Calculando-se a derivada temporal de (44)-(47) e com ajuda de (43) e (48), a dinâmica propagada do erro é descrita como uma cascata da EDP da onda com uma EDO (integrador) sob a condição de Neumann [35]:

$$\dot{\vartheta}(t) = \partial_x u(0, t), \quad (49)$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (50)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (51)$$

$$\partial_x u(D, t) = U(t), \quad (52)$$

onde  $\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t)$ , uma vez que  $\theta^*$  é constante, e

$$u(x, t) = \partial_t \bar{\alpha}(x, t). \quad (53)$$

No controle extremal livre da EDP da onda, o sinal de perturbação  $S(t)$  deve adicionar  $a \sin(\omega t)$  em  $\Theta(t)$  e assim na presença da EDP, precisa-se também compensar a dinâmica da onda no sinal de perturbação aditiva  $S(t)$ . Conseqüentemente,  $\sin(\omega t)$  com amplitude de perturbação  $a$  e frequência  $\omega$  é aplicado conforme abaixo

$$S(t) := \partial_x \beta(D, t) \quad (54)$$

$$\partial_{tt}\beta(x, t) = \partial_{xx}\beta(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (55)$$

$$\beta(0, t) = 0 \quad (56)$$

$$\partial_x \beta(0, t) = a \sin(\omega t). \quad (57)$$

As equações (54)-(57) descrevem o problema de *geração de trajetórias* como visto em [26]. A solução explícita de (54) é dada por:

$$S(t) = a \cos(\omega D) \sin(\omega t), \quad (58)$$

sendo  $\beta(x, t) = \frac{a}{\omega} \sin(\omega x) \sin(\omega t)$ . A relação entre o erro de estimação propagado  $\vartheta(t)$ , a entrada propagada  $\Theta(t)$ , e o otimizador do mapa estático  $\Theta^*$ , é dada por

$$\vartheta(t) + a \sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*, \quad (59)$$

o que pode ser provado já que

$$\bar{\alpha}(x, t) = \alpha(x, t) - \beta(x, t) - \Theta^*, \quad (60)$$

para  $x = D$ , considerando  $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$  juntamente com as soluções de (36)-(39), (44)-(47) e (54)-(57). Resta definir o sinal de perturbação  $N(t)$  que será usado para estimar a Hessiana do mapa estático, multiplicando-o pela saída  $y(t)$  do mapa estático. Em [34], obtém-se a estimativa da Hessiana como:

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad \text{com} \quad N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (61)$$

Observa-se que o sinal de perturbação multiplicativa  $M(t)$  para estimar o gradiente é o mesmo utilizado no algoritmo de busca estremoal básico (ver (25)), tal que:

$$G(t) = M(t)y(t) \quad \text{com} \quad M(t) = \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t). \quad (62)$$

### 3 PROJETO DO CONTROLADOR E SISTEMA EM MALHA FECHADA

Neste capítulo, dando continuidade ao já exposto anteriormente, apresenta-se o controle de fronteira (*boundary control*), que emprega estimativas (baseadas na média) para o gradiente e Hessiana, usado para compensar a dinâmica da onda no esquema de controle extremal da Figura 11. São apresentadas a análise de estabilidade para o controlador proposto, assim como a convergência para uma pequena vizinhança dos valores ótimos  $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$ . A parte final do capítulo mostra simulações para o controle proposto, as quais ilustram as propriedades de estabilidade e convergência obtidas.

#### 3.1 Compensação da dinâmica da onda com controle de fronteira e estimação da Hessiana

Considere a cascata de EDP-EDO (49)-(52). Conforme [35], usa-se a seguinte transformação *backstepping*:

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x l(x, \sigma) u_t(\sigma, t) d\sigma - \gamma(x) \vartheta(t), \quad (63)$$

com ganhos *kernel*:

$$l(x, \sigma) = \gamma(x - \sigma), \quad (64)$$

$$\gamma(x) = \bar{K} [0 \ I] e^{Ax} [I \ 0]^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

que transforma (49)-(52) no seguinte sistema:

$$\dot{\vartheta}(t) = \bar{K} \vartheta(t) + w_x(0, t), \quad \bar{K} < 0, \quad (66)$$

$$\partial_{tt} w(x, t) = \partial_{xx} w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (67)$$

$$w(0, t) = 0, \quad (68)$$

$$w_x(D, t) = -\bar{c} w_t(D, t), \quad \bar{c} > 0. \quad (69)$$

Como será mostrado que o sistema (66)-(69) é exponencialmente estável, o controlador que compensa a dinâmica da onda pode ser obtido avaliando a transformação de *backstepping*

(63) para  $x = D$ , conforme a seguir

$$U(t) = \bar{c} [\bar{K}u(D, t) - \partial_t u(D, t)] + \rho(D)\vartheta(t) + \int_0^D \rho(D - \sigma)\partial_t u(\sigma, t)d\sigma, \quad (70)$$

onde  $\rho(s) = \bar{K}[0 \ I]e^{As}[0 \ I]^T$ . No entanto, a lei de controle proposta em (70) não pode ser diretamente aplicada, uma vez que o sinal  $\vartheta(t)$  não pode ser medido. Deste modo, introduz-se um importante resultado de [34]: a versão média do gradiente (62) e a estimativa da Hessiana (61) são dados por:

$$G_{av}(t) = H\vartheta_{av}(t), \quad \hat{H}_{av}(t) = H, \quad (71)$$

se um mapa quadrático como em (41) for considerado. Para a prova de (71), ver [34]. Considerando (71), calcula-se a média de (70) e escolhe-se  $\bar{K} = KH$  com  $K > 0$ , tal que:

$$U_{av}(t) = \bar{c} [KHu_{av}(D, t) - \partial_t u_{av}(D, t)] + \bar{\rho}(D)KH\vartheta_{av}(t) + KH \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma)\partial_t u_{av}(\sigma, t)d\sigma, \quad (72)$$

com

$$\bar{\rho}(s) = [0 \ I]e^{As}[0 \ I]^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Assim, aplicando a estimativa da média (71) em (72), obtém-se:

$$U_{av}(t) = \bar{c} [KHu_{av}(D, t) - \partial_t u_{av}(D, t)] + \bar{\rho}(D)KG_{av}(t) + KH \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma)\partial_t u_{av}(\sigma, t)d\sigma. \quad (74)$$

Devido a razões técnicas para aplicação do teorema da média em sistemas de dimensão infinita [27], introduz-se um filtro passa-baixa no controlador, de modo que  $U(t)$  possa ser tratado como uma variável de estado. Por fim, obtém-se a lei de controle

média de dimensão infinita para compensar a dinâmica da onda:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ \bar{c} \left[ K\hat{H}(t)u(D,t) - \partial_t u(D,t) \right] + \bar{\rho}(D)KG(t) + K\hat{H}(t) \int_0^D \bar{\rho}(D-\sigma) \partial_t u(\sigma,t) d\sigma \right\}, \quad (75)$$

onde  $c > 0$  é posteriormente escolhido. Por conveniência de notação em (75), mistura-se o domínio do tempo e frequência, onde o filtro passa-baixa atua como um operador no termo dentro das chaves.

### 3.2 Sistema em malha fechada

Substituindo (75) em (52), pode-se escrever o sistema em malha fechada (49)–(52) como:

$$\dot{v}(t) = \partial_x u(0,t), \quad (76)$$

$$\partial_{tt} u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), \quad x \in [0, D], \quad (77)$$

$$u(0,t) = 0, \quad (78)$$

$$\partial_x u(D,t) = \frac{c}{s+c} \left\{ \bar{c} \left[ K\hat{H}(t)u(D,t) - \partial_t u(D,t) \right] + \bar{\rho}(D)KG(t) + K\hat{H}(t) \int_0^D \bar{\rho}(D-\sigma) \partial_t u(\sigma,t) d\sigma \right\}. \quad (79)$$

A existência de funções de Lyapunov via transformações *backstepping* [26] permite a análise de estabilidade para o sistema completo em malha fechada (76)–(79), conforme visto na próxima seção.

### 3.3 Análise de estabilidade

O seguinte teorema sumariza as propriedades de estabilidade e convergência local para o sistema em malha fechada apresentado na seção anterior.

**Teorema 1.** *Considere o diagrama da Figura 11 com o sistema dinâmico sendo representado pelo mapa quadrático não linear dado em (42), que satisfaz a Hipótese 1, em cascata com a dinâmica de atuação governada pela equação diferencial parcial da onda (36)–(39). Para  $c > 0$  suficientemente grande, existe algum  $\bar{\omega}(c) > 0$ , tal que  $\forall \omega > \bar{\omega}$ ,*

o sistema em malha fechada (76)-(79), com os estados  $\vartheta(t)$ ,  $u(x,t)$ , possui uma única solução exponencialmente estável periódica em  $t$ , com período de  $\Pi := 2\pi/\omega$ , denotada por  $\vartheta^\Pi(t)$ ,  $u^\Pi(x,t)$ , e que satisfaz  $\forall t \geq 0$ :

$$\left( |\vartheta^\Pi(t)|^2 + \|\partial_x u^\Pi(t)\|^2 + \|\partial_t u^\Pi(t)\|^2 + |\partial_x u^\Pi(D,t)|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (80)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (81)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (82)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega^2). \quad (83)$$

A Figura 12 mostra a estrutura usada para a prova de estabilidade apresentada nesta seção.

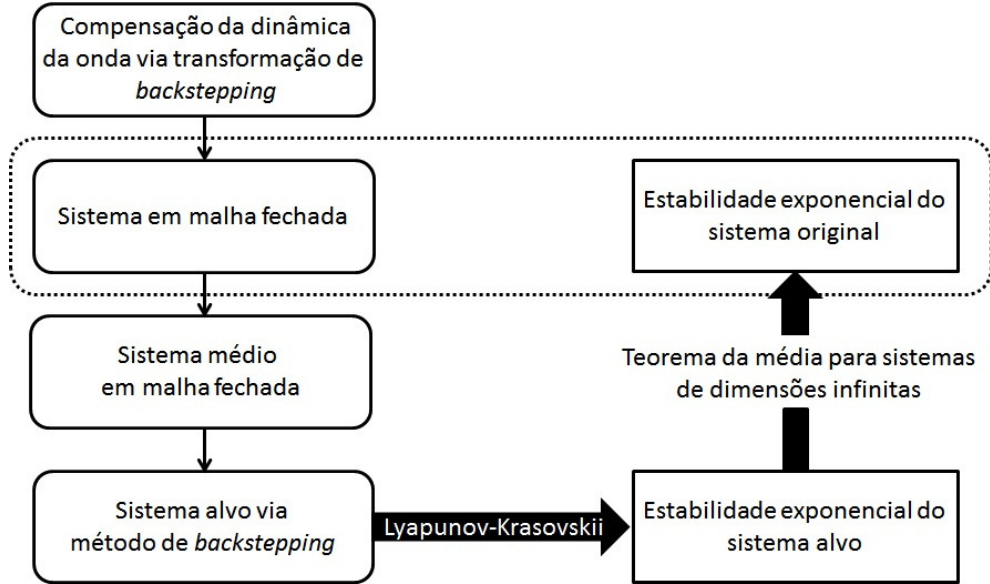


Figura 12: Etapas para prova de estabilidade do controlador para compensação da dinâmica de atuação da onda.

A prova de estabilidade é estruturada em **6 Passos**, analogamente ao que é feito em [11]. Primeiramente, nos passos de 1-4 demonstra-se a estabilidade exponencial para o sistema médio em malha fechada de (76)-(79) via transformação *backstepping* e fazendo-se uso de funções de Luapunov-Krasovskii. Então, no passo 5 invoca-se o teorema da média

para sistemas de dimensão infinita [27], para mostrar a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada original (76)-(79). Finalmente, no passo 6 mostra a convergência de  $(\theta(t), \Theta(t), y(t))$  para uma pequena vizinhança dos valores extremos  $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$ .

**Passo 1:** *Sistema médio em malha fechada*

A versão média para o sistema (76)-(79), é dada por:

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = \partial_x u_{\text{av}}(0, t) \quad (84)$$

$$\partial_{tt} u_{\text{av}}(x, t) = \partial_{xx} u_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (85)$$

$$u_{\text{av}}(0, t) = 0 \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \partial_x u_{\text{av}}(D, t) = & -c \partial_x u_{\text{av}}(D, t) - c \left[ \bar{c} [KH u_{\text{av}}(D, t) - \partial_t u_{\text{av}}(D, t)] + \bar{\rho}(D) KH \vartheta_{\text{av}}(t) \right. \\ & \left. + KH \int_0^D \bar{\rho}(D - \sigma) \partial_t u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (87) \end{aligned}$$

onde o filtro passa-baixa é representado no espaço de estados.

**Passo 2:** *Transformação backstepping para o sistema alvo*

Com algum abuso de notação, utiliza-se  $w(x, t)$  para denotar o estado médio transformado. A partir de (63), a transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u_{\text{av}}(x, t) - \int_0^x \gamma(x - \sigma) \partial_t u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma - \gamma(x) \vartheta_{\text{av}}(t) \quad (88)$$



mapeia o sistema médio em malha fechada (84)-(87) para o sistema alvo exponencialmente estável (mostrado no passo 3) a seguir:

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = KH\vartheta_{\text{av}}(t) + w_x(0, t), \quad (89)$$

$$\partial_{tt}w(x, t) = \partial_{xx}w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (90)$$

$$w(0, t) = 0, \quad (91)$$

$$w_t(D, t) = -\frac{1}{\bar{c}}\partial_xw(D, t), \quad \bar{c} > 0, \quad (92)$$

$$\partial_xw(D, t) = -\frac{1}{c}\partial_t\partial_xu_{\text{av}}(D, t). \quad (93)$$

Por outro lado, a transformação *backstepping* inversa [35]:

$$u_{\text{av}}(x, t) = w(x, t) + KHn(x)\vartheta_{\text{av}}(t) + KH \int_0^x n(x - \sigma)w_t(\sigma, t)d\sigma, \quad (94)$$

com

$$n(x) = [0 \ I]e^{\bar{A}x}[I \ 0]^T, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & (KH)^2 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

transforma o sistema alvo (89)-(93) no sistema médio em malha fechada (84)-(87). Assim, tomando-se a derivada no tempo da transformação *backstepping* (88) junto com (87) e sua inversa (94), obtém-se (93) lembrando que  $\dot{U}_{\text{av}}(t) = \partial_t\partial_xu_{\text{av}}(D, t)$ , ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \partial_t w_x(D, t) &= -cw_x(D, t) + KHw(D, t) \\ &+ (KH)^2n(D)\vartheta_{\text{av}}(t) + (KH)^2 \int_0^D n(D - \sigma)w_t(\sigma, t)d\sigma. \end{aligned} \quad (96)$$

### **Passo 3:** *Estabilidade exponencial do sistema alvo*

Considere as normas do sistema

$$\Omega(t) = \|\partial_xu_{\text{av}}(t)\|^2 + \|\partial_tu_{\text{av}}(t)\|^2 + |\vartheta_{\text{av}}(t)|^2 + |\partial_xu_{\text{av}}(D, t)|^2, \quad (97)$$

$$\Xi(t) = \|w_x(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + |\vartheta_{\text{av}}(t)|^2 + |w_x(D, t)|^2. \quad (98)$$

Para provar a estabilidade do sistema alvo, considera-se também a seguinte a função

Lyapunov-Krasovskii

$$V(t) = \frac{\vartheta_{av}^2(t)}{2} + aE(t) + \frac{b}{2}w_x^2(D, t), \quad (99)$$

onde os parâmetros  $a, b > 0$  são escolhidos posteriormente, e o funcional  $E(t)$  é definido por [35]:

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|w_x(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2) + \delta \int_0^D (1+y) w_x(y, t) w_t(y, t) dy, \quad (100)$$

onde  $\delta > 0$  é também um parâmetro a ser escolhido mais adiante no texto. Observa-se que

$$\theta_1 \Xi \leq V \leq \theta_2 \Xi, \quad (101)$$

onde

$$\theta_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a}{2} [1 - \delta (1 + D)], \frac{b}{2} \right\}, \quad (102)$$

$$\theta_2 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a}{2} [1 + \delta (1 + D)], \frac{b}{2} \right\}. \quad (103)$$

Escolhe-se

$$0 < \delta < \frac{1}{1 + D} \quad (104)$$

afim de garantir que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são não-negativos e então a função de Lyapunov  $V$  em (99) é positiva. Posteriormente, calcula-se a derivada no tempo de  $E(t)$

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) = & -\frac{\delta}{2} [\|w_x(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + w_x(0, t)^2] + \frac{\delta}{2}(1 + D) [w_t(D, t)^2 + w_x(D, t)^2] + \\ & + w_x(D, t)w_t(D, t). \end{aligned} \quad (105)$$

A partir de (92), substitui-se a condição de contorno  $w_x(D, t) = -\bar{c}w_t(D, t)$  em (105) e

obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) = & -\frac{\delta}{2} [||w_x(t)||^2 + ||w_t(t)||^2 + w_x(0, t)^2] + \\ & - \left[ \bar{c} - \delta \frac{1+D}{2} (1 + \bar{c}^2) \right] w_t(D, t)^2. \end{aligned} \quad (106)$$

Escolhendo agora

$$\delta < \frac{2\bar{c}}{(1+D)(1+\bar{c}^2)}, \quad (107)$$

tem-se que a constante entre os colchetes no segundo termo de (106) é positiva. Agora, computando a derivada completa de  $V(t)$ , associada com a solução do sistema alvo (89)-(93), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & KH\vartheta_{av}^2(t) + \vartheta_{av}(t)w_x(0, t) \\ & + a\dot{E}(t) + bw_x(D, t)\partial_t w_x(D, t). \end{aligned} \quad (108)$$

Aplicando a desigualdade de Young no segundo termo em (108), escreve-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \frac{KH}{2}\vartheta_{av}^2(t) + \left[ \frac{1}{2|KH|} - a\frac{\delta}{2} \right] w_x(0, t)^2 + \\ & - a\frac{\delta}{2} [||w_x(t)||^2 + ||w_t(t)||^2] + bw_x(D, t)\partial_t w_x(D, t). \end{aligned} \quad (109)$$

Escolhendo

$$a \geq \frac{1}{\delta|KH|}, \quad (110)$$

obtém-se

$$\dot{V}(t) \leq \frac{KH}{2}\vartheta_{av}^2(t) - a\frac{\delta}{2} [||w_x(t)||^2 + ||w_t(t)||^2] + bw_x(D, t)\partial_t w_x(D, t). \quad (111)$$

Rigorosamente, substituindo (96) em (111), o último termo do lado direito de (111) pode ser tratado analogamente ao que é feito nas referências [11] e [12] para processos de difusão, ou mesmo como realizado em [9] com atrasos puros, onde o parâmetro  $c > 0$  é considerado suficientemente grande. O primeiro termo  $-cw_x(D, t)$  no lado direito de

(96) quando associado a (111) resulta em  $-bcw_x^2(D, t)$ . Intuitivamente,  $w_x(D, t) \rightarrow 0$  a medida que  $c \rightarrow +\infty$  de acordo com (93), já que  $w_x(x, t)$  é ao menos limitado por (106) e, conseqüentemente, (111) se torna negativa definida. Após alguns cálculos, aplicando frequentemente as desigualdades de Young, Poincare, Agmon e Cauchy-Schwarz e com ajuda da integração por partes, conclui-se que existe  $c^* > 0$  (dependente de  $KH$  e  $D$ ), tal que, para  $c > c^*$  suficientemente grande em (75), tem-se

$$\dot{V}(t) \leq -\eta V(t), \eta > 0, \quad (112)$$

e assim o sistema alvo (89)-(93) é exponencialmente estável na norma

$$(|\vartheta_{av}(t)|^2 + \|w_x(t)\|^2 + \|w_t(t)\|^2 + |w_x(D, t)|^2)^{1/2}$$

i.e., nas variáveis transformadas  $(\vartheta_{av}, w)$ .

**Passo 4:** *Estimativa da estabilidade exponencial (na norma  $(\mathcal{H}_1)$ ) do sistema médio em malha fechada*

No passo anterior, chegou-se a

$$V(t) \leq e^{-\eta t} V(0), \quad \eta > 0. \quad (113)$$

A prova de estabilidade do sistema em malha fechada em suas variáveis originais  $(\vartheta_{av}, u_{av})$  é obtida a partir de (113) através das desigualdades que relacionam as variáveis  $u(x, t)$  e  $w(x, t)$ . A partir da transformação inversa (94), obtém-se que

$$\begin{aligned} \partial_x u_{av}(x, t) &= w_x(x, t) + \int_0^x \phi'(x-y)w(y, t)dy + \\ &+ \int_0^x n'(x-y)w_t(y, t)dy + \psi(x)'\vartheta_{av}(t), \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_{av}(x, t) &= w_t(x, t) + \int_0^x \phi(x-y)w_t(y, t)dy + \\ &+ \int_0^x n'(x-y)w(y, t)dy + \psi(x)KH\vartheta_{av}(t). \end{aligned} \quad (115)$$

Aplicando as desigualdades de Poincare, Young e Cauchy-Schwartz, obtém-se

$$\begin{aligned} \|\partial_x u_{av}(t)\|^2 &\leq \alpha_1 \|w_x(t)\|^2 + \alpha_2 \|w_t(t)\|^2 + \alpha_3 |\vartheta_{av}(t)|^2, \\ \|\partial_t u_{av}(t)\|^2 &\leq \beta_1 \|w_x(t)\|^2 + \beta_2 \|w_t(t)\|^2 + \beta_3 |\vartheta_{av}(t)|^2, \end{aligned} \quad (116)$$

onde

$$\alpha_1 = 4(1 + 4D^3 \|\phi'\|^2), \quad (117)$$

$$\alpha_2 = 4D \|n'\|^2, \quad (118)$$

$$\alpha_3 = 4 \|\psi'\|^2, \quad (119)$$

$$\beta_1 = 4 \|n'\|^2 \quad (120)$$

$$\beta_2 = 4(1 + 4D^3 \|\phi\|^2), \quad (121)$$

$$\beta_3 = 4 \|\psi KH\|^2. \quad (122)$$

Aplicando (116), obtém-se

$$\Omega(t) \leq \theta_4 \Xi(t), \quad (123)$$

onde

$$\theta_4 = \max \{ \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3 \}. \quad (124)$$

Com ajuda das derivadas temporal e espacial de (63) – ver [35] para mais detalhes – e aplicando novamente as desigualdades de Poincare, Young e Cauchy-Schwartz, obtém-se as seguintes desigualdades:

$$\|w_x(t)\|^2 \leq a_1 \|\partial_x u_{av}(t)\|^2 + a_2 \|\partial_t u_{av}(t)\|^2 + a_3 |\vartheta_{av}(t)|^2, \quad (125)$$

$$\|w_t(t)\|^2 \leq b_1 \|\partial_x u_{av}(t)\|^2 + b_2 \|\partial_t u_{av}(t)\|^2 + b_3 |\vartheta_{av}(t)|^2. \quad (126)$$

Por meio destas, obtém-se

$$\theta_3 \Xi \leq \Omega(t), \quad (127)$$

onde

$$\theta_3 = \frac{1}{\max \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 + 1\}}. \quad (128)$$

Com ajuda de (101), (113), (123) and (127), obtém-se

$$\Omega(t) \leq \frac{\theta_1 \theta_3}{\theta_2 \theta_4} \Omega(0) e^{-\eta t}, \quad (129)$$

O que completa a prova de estabilidade exponencial do sistema médio em malha fechada em termos da norma (97) nas variáveis  $(\vartheta_{av}, u_{av})$ .

**Passo 5:** *Invocando o teorema da média para sistemas de dimensão infinita*

A idéia chave é converter a equação da onda presente no sistema em malha fechada (76)–(79) para uma cascata de duas equações de transporte de primeira ordem com direções de propagação opostas. Para alcançar tal objetivo, define-se as transformações de Riemann [24]:

$$\bar{\zeta}(x, t) = u_t(x, t) + u_x(x, t) \quad (130)$$

$$\bar{\omega}(x, t) = u_t(x, t) - u_x(x, t) \quad (131)$$

junto com suas inversas dadas por

$$u_t(x, t) = \frac{\bar{\zeta}(x, t) + \bar{\omega}(x, t)}{2}, \quad (132)$$

$$u_x(x, t) = \frac{\bar{\zeta}(x, t) - \bar{\omega}(x, t)}{2}. \quad (133)$$

Definindo

$$\xi(t) = u(0, t) \quad (134)$$

tem-se que  $\bar{\zeta}(0, t) = \dot{\xi}(t) + u_x(0, t)$  e o sistema (76)–(79) é escrito como:

$$\dot{\vartheta}(t) = \frac{\bar{\zeta}(0, t) - \bar{\omega}(0, t)}{2}, \quad (135)$$

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\bar{\zeta}(0, t) + \bar{\omega}(0, t)}{2}, \quad (136)$$

$$\bar{\omega}_t(x, t) = -\bar{\omega}_x(x, t), \quad (137)$$

$$\bar{\omega}(0, t) = \bar{\zeta}(0, t) - 2u_x(0, t), \quad (138)$$

$$\bar{\zeta}_t(x, t) = \bar{\zeta}_x(x, t), \quad (139)$$

$$\bar{\zeta}(D, t) = U(t) + u_t(D, t), \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) = -cU(t) + c \left\{ \bar{c} \left[ K\hat{H}(t)u(D, t) - u_t(D, t) \right] \right. \\ \left. + \bar{\rho}(D)KG(t) + K\hat{H}(t) \int_0^D \bar{\rho}(D-\sigma)u_t(\sigma, t)d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (141)$$

Nesta nova abordagem, o fenômeno da dinâmica da onda é representado como a cascata de duas EDPs de transporte, com duas EDOs (integradores simples), tendo como entradas os estados das duas EDPs. A ODE (135) tem o papel central, uma vez que é estável através de realimentação, a qual é aplicada através da equação de transporte (139) na fronteira  $x = D$  nesta nova forma de representação. A segunda ODE (136) já está no equilíbrio  $\xi(t) \equiv 0$  pela escolha da condição de contorno (78) e (134). O segundo fenômeno de transporte (137) é também presente, na direção oposta, contabilizando a reflexão da onda em  $x = 0$ .

O subsistema (135) e (139)–(141) também pode ser interpretado como uma equação diferencial ordinária com entrada em atraso por  $D$  unidades de tempo, seguido pelo fenômeno de transporte estável (137)–(138). Assim, o sistema em malha fechada (135)–(141) pode ser escrito como

$$\dot{z}(t) = f(\omega t, z_t), \quad (142)$$

onde  $z(t) = [\vartheta(t), \xi(t), U(t)]^T$  é o vetor de estados e os termos distribuídos são abrangidos por  $z_t(r) = z(t+r)$  para  $-D \leq r \leq 0$ , com  $f$  sendo uma função contínua apropriada, de tal forma que o teorema da média por Hale & Lunel [27, Seção 5] pode ser diretamente aplicado, considerando  $\omega = 1/\epsilon$ .

Uma vez que já foi provado que o sistema médio em malha fechada com EDPs é

exponencialmente estável de acordo com (129) e  $\xi_{av}(t) \equiv 0$  a partir de (78) e (134), pela aplicação do teorema da média para dimensões infinitas desenvolvido em [27, Seção 5], para  $\omega$  suficientemente grande, conclui-se que (84)-(87) têm uma única solução periódica exponencialmente estável ao redor de seu equilíbrio satisfazendo (80).

**Passo 6:** *Convergência para uma vizinhança do ponto extremo  $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$*

Aplicando as desigualdades de Agmon, Poincare e Young no lado esquerdo de (44), junto com (44)-(47), tem-se

$$\tilde{\theta}^2(t) \leq (1 + 2D)\vartheta(t)^2 + (4D^2 + 1)\|\bar{\alpha}_x(t)\|^2. \quad (143)$$

Usando novamente a desigualdade de Poincare

$$\|\bar{\alpha}_x(t)\|^2 \leq 2\bar{\alpha}_x(0, t)^2 + 4D^2\|\bar{\alpha}_{xx}(t)\|^2, \quad (144)$$

com  $\bar{\alpha}_x(0, t) = \vartheta(t)$  de (44) e  $\partial_t u(x, t) = \partial_{tt}\bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx}\bar{\alpha}(x, t)$  de (45) e (53), rescrevesse (143) como

$$\tilde{\theta}^2(t) \leq (3 + 2D + 8D^2)\vartheta(t)^2 + (16D^4 + 4D^2)\|\partial_t u(t)\|^2. \quad (145)$$

A desigualdade (145) pode ser escrita em termos da solução periódica  $\vartheta^\Pi(t)$  e  $\partial_t u^\Pi(x, t)$  como se segue

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = & \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ & (3 + 2D + 8D^2)|\vartheta(t) + \vartheta^\Pi(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 \} + \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ & (16D^4 + 4D^2)\|\partial_t u(t) + \partial_t u^\Pi(t) - \partial_t u^\Pi(t)\|^2 \}. \end{aligned} \quad (146)$$

Pela aplicação da desigualdade de Young e alguma álgebra, tem-se

$$|\vartheta(t) + \vartheta^\Pi(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 \leq \sqrt{2} (|\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 + |\vartheta^\Pi(t)|^2).$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado ao segundo termo do lado direito de (146). A partir do teorema da média [27, Seção 5], sabe-se que  $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$  e  $\partial_t u(t) - \partial_t u^\Pi(t) \rightarrow$



0, exponencialmente com  $t \rightarrow +\infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2}(3 + 2D + 8D^2) |\vartheta^\Pi(t)|^2 \right\} \\ &+ \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2}(16D^4 + 4D^2) \|\partial_t u^\Pi(t)\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (147)$$

Juntamente com (80), é possível mostrar que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega). \quad (148)$$

A partir de (43) e da Figura 11, escreve-se  $\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)$ , e lembrando que  $S(t)$  em (58) é de ordem  $\mathcal{O}(a)$ , finalmente obtém-se (81). A convergência do atuador de propagação  $\Theta(t)$  para o otimizador  $\Theta^*$  pode ser também provada. Usando (59) e tomando o valor absoluto, tem-se

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a \operatorname{sen}(\omega(t))|. \quad (149)$$

Como na prova de convergência do parâmetro  $\theta(t)$  para a entrada ótima  $\theta^*$ , escreve-se (149) em termos da solução periódica  $\vartheta^\Pi(t)$ , e segue-se os mesmos passos pela aplicação da desigualdade de Young, e relembando que  $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$  exponencialmente de acordo com o teorema da média [27, Seção 5]. Consequentemente, junto com (80), finalmente tem-se (82). Para mostrar a convergência da saída  $y(t)$  do mapa estático para o valor ótimo  $y^*$ , substitui-se  $\Theta(t) - \Theta^*$  em (42) por (59) e toma-se novamente o valor absoluto

$$|y(t) - y^*| = \left| \frac{H}{2} [\vartheta(t) + a \operatorname{sen}(\omega(t))]^2 \right|. \quad (150)$$

Expandindo o termo quadrático em (150) e aplicando a desigualdade de Young à equação resultante, tem-se  $|y(t) - y^*| = |H [\vartheta(t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)]|$ . Assim como antes, soma-se e subtrai-se a solução periódica  $\vartheta^\Pi(t)$  e utiliza-se a convergência de  $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$  via teorema da média [27, Seção 5]. Assim, novamente com (80), obtém-se (83).  $\square$

### 3.4 Simulação

Para realizar a simulação do esquema de controle proposto para compensação da dinâmica de atuação da onda, considera-se um mapeamento estático quadrático como em

(41), com Hessiana negativa igual a  $H = -1$ ,  $\theta^* = 8$  e  $y^* = 64$ . O ganho do controlador foi configurado para  $k = 0.17$  e a frequência do sinal de perturbação  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ . Observando os resultados da simulação na Figura 13, vê-se que o sinal  $\theta$  que otimiza a saída do mapa estático converge para seu valor ótimo  $\theta^* = 8$ , e assim, a saída do mapeamento estático também se aproxima de seu valor máximo  $y^* = 64$ , conforme esperado.

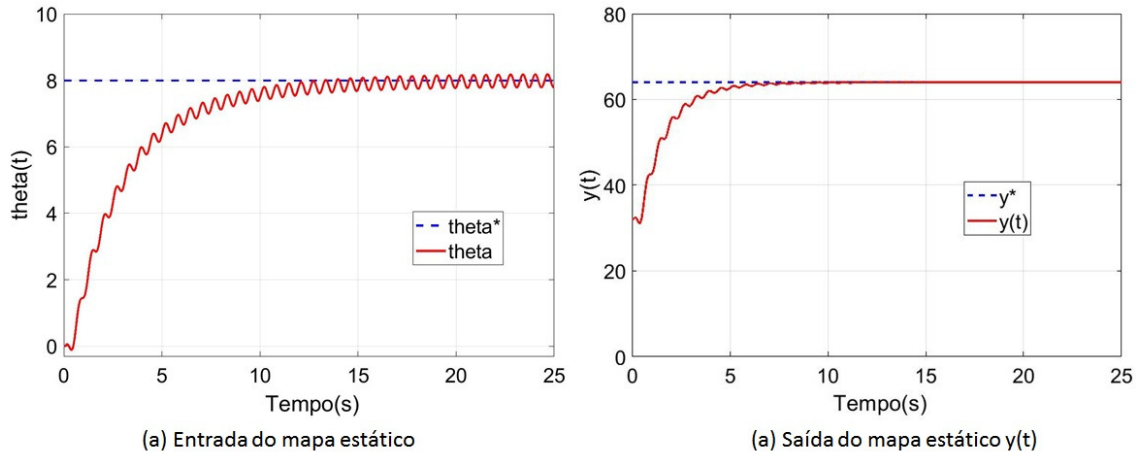


Figura 13: Busca extremal pelo método do gradiente para mapeamento estático  $y = y^* + H(\theta - \theta^*)$ , com dinâmica de atuação governada pela EDP da onda.

#### 4 DESCRIÇÃO DO CONTROLE EXTREMAL APLICADA À EDP DA ONDA SOB A CONDIÇÃO DE DIRICHLET

Neste capítulo retorna-se à formulação do problema como observado no capítulo 2, mas com uma escolha distinta para a variável atuada na equação diferencial parcial da onda.

Por uma questão de simplicidade no que segue, assume-se que  $c \rightarrow +\infty$ , então foca-se a atenção no projeto do novo controlador em malha fechada, não distraindo-se com detalhes técnicos da inclusão do filtro passa-baixa na malha de controle, assim como feito em (75). No entanto, como discutido em [9] vale a pena mencionar que a inclusão do filtro  $c/(s+c)$  é um passo fundamental que permite aplicar o teorema da média para sistemas de dimensão infinita [27] e completar rigorosamente a prova dos teoremas.

Neste sentido, considera-se o sistema

$$\Theta(t) = \alpha(0, t) \tag{151}$$

$$\partial_{tt}\alpha(x, t) = \partial_{xx}\alpha(x, t), \quad x \in [0, D] \tag{152}$$

$$\partial_x\alpha(0, t) = 0 \tag{153}$$

$$\alpha(D, t) = \theta(t), \tag{154}$$

no qual ao invés de se considerar a condição de contorno de Neumann,  $\partial_x\alpha(D, t) = \theta(t)$ , utiliza-se a condição de Dirichlet  $\alpha(D, t) = \theta(t)$ .

Na condição de Dirichlet, as equações (49)–(52) podem ser reescritas como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \tag{155}$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad x \in [0, D] \tag{156}$$

$$\partial_xu(0, t) = 0, \tag{157}$$

$$u(D, t) = U(t). \tag{158}$$

A lei de controle é obtida assim como em [32, Capítulo 16.4]:

$$\begin{aligned}
U(t) &= c_0 K \hat{H}(t) \int_0^D (1 + M(D - y)) u(y, t) dy \\
&+ K \hat{H}(t) \int_0^D m(D - y) u_t(y, t) dy - c_0 \int_0^D u_t(y, t) dy \\
&+ KM(D)G(t),
\end{aligned} \tag{159}$$

onde  $\hat{H}(t)$  e  $G(t)$  são os mesmo sinais dados por (61) and (62) respectivamente. Além disto, as funções  $M(\cdot)$  e  $m(\cdot)$  são simplesmente

$$M(s) = [I \ 0] e^{As} [I \ 0]^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{160}$$

$$m(s) = \int_0^s M(\xi) d\xi. \tag{161}$$

Por outro lado, o sinal  $S(t)$  em (54)–(57) deve ser projetado novamente de acordo com o problema de *geração de trajetórias* [26, Capítulo 12], levando em conta a condição de atuação de Dirichlet, o que resulta em

$$S(t) = \frac{a}{2} [\text{sen}(\omega(t + D)) + \text{sen}(\omega(t - D))]. \tag{162}$$

Observa-se que o problema de geração de trajetórias para EDP da onda descrita com condição de Dirichlet é um caso particular da equação da onda com amortecimento de Kelvin-Voigt ( $\epsilon \partial_{tt} u(x, t) = (1 + d \partial_t) \partial_{xx} u(x, t)$ ,  $\partial_x u(0, t) = 0$ ,  $\epsilon, d > 0$ ), estudado em [19].

Assim sendo, o sistema alvo médio para a equação da onda com atuação de Dirichlet se torna

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = KH \vartheta_{\text{av}}(t) + w(0, t), \tag{163}$$

$$\partial_{tt} w(x, t) = \partial_{xx} w(x, t), \quad x \in [0, D], \tag{164}$$

$$\partial_x w(0, t) = c_0 \partial_t w(0, t), \quad c_0 > 0, \tag{165}$$

$$w(D, t) = 0, \tag{166}$$

que é exponencialmente estável com a seguinte taxa de decaimento

$$\text{eig}\{KH\} \cup \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+c_0}{1-c_0} \right| + j \frac{\pi}{D} \begin{cases} n + \frac{1}{2}, & 0 \leq c_0 < 1 \\ n, & c_0 > 1 \end{cases} \right\}. \quad (167)$$

O fato de se empregar a atuação de Dirichlet em  $x = D$ , impede-se a aplicação do amortecimento nesta fronteira, assim, introduz-se um amortecimento na posição de fronteira final oposta em  $x = 0$ . Um teorema similar de estabilidade pode ser provado como foi feito para o caso da atuação por Neumann (Teorema 1).

**Observação 1.** *A lei de controle (159) pode ser escrita em termos de  $U(t)$  ao invés de  $u(x, t)$ , de acordo com [32, Capítulo 16.5]*

$$U(t) = \frac{1}{1 + c_0 \tanh(Ds)} [KM(D)G(t)] + \frac{1}{1 + e^{-2s} + c_0(1 - e^{-2Ds})} [K\hat{H}(t)\mathcal{D}(t)], \quad (168)$$

onde

$$\mathcal{D}(t) = \int_{t-D}^t \rho(t - \tau)U(\tau)d\tau - \int_{t-2D}^{t-D} \rho(\tau - t + 2D)U(\tau)d\tau, \quad (169)$$

com  $\rho(\tau) = c_0 + (1 + c_0)M(\tau)$ .

## 5 CONTROLE EXTREMAL PARA CASCATAS E INTERCONEXÕES DE EDPS ENVOLVENDO A EQUAÇÃO DA ONDA

Neste capítulo, cujo conteúdo principal foi publicado no Congresso Brasileiro de Automática 2020 [36], estende-se a aplicação do controle extremal e considera-se cascatas de EDPs envolvendo a equação diferencial parcial da onda, especificamente a EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas EDPs de transporte (atraso), e a EDP anti-estável da onda com entrada atrasada [14]. Observa-se que para ambos os cenários de interconexões de EDPs mencionados, o texto se restringe a apresentar os passos para determinação das leis de controle  $U(t)$ , onde emprega-se um compensador para dinâmica de atuação da onda através de uma transformação do tipo *backstepping*, e obter os sinais de perturbação  $S(t)$  que resolvem o problema de geração de trajetórias [26, Capítulo 12]. Ao término do capítulo são apresentadas simulações.

### 5.1 EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas equações diferenciais parciais de transporte (atraso)

Considera-se a EDP anti-estável da onda com condição de anti-amortecimento

$$\Theta(t) = \alpha(0, t) \quad (170)$$

$$\partial_{tt}\alpha(x, t) = \partial_{xx}\alpha(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (171)$$

$$\partial_x\alpha(0, t) = -q\partial_t\alpha(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (172)$$

$$\partial_x\alpha(D, t) = \theta(t), \quad (173)$$

onde  $\theta$  é a entrada que aparece na forma da atuação de Neumann e a saída  $\Theta$  está na forma do atuador de propagação de Dirichlet. Considera-se conhecido o coeficiente de amortecimento  $q \geq 0$ . Como discutido em [32, Capítulo 19], quando  $q = 1$ , a parte real dos autovalores (infinitos) da planta é  $+\infty$ , enquanto que para  $q \neq 1$  e  $q \geq 0$ , a parte real

é positiva, no entanto finita. Consequentemente, pode-se escrever (44)–(47) como:

$$\vartheta(t) := \bar{\alpha}(0, t) \quad (174)$$

$$\partial_{tt}\bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx}\bar{\alpha}(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (175)$$

$$\partial_x\bar{\alpha}(0, t) = -q\partial_t\bar{\alpha}(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (176)$$

$$\partial_x\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t) \quad (177)$$

e, lembrando que  $u(x, t) = \partial_t\bar{\alpha}(x, t)$ , as equações (49)–(52) podem ser escritas como:

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (178)$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (179)$$

$$\partial_xu(0, t) = -q\partial_tu(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (180)$$

$$\partial_xu(D, t) = U(t). \quad (181)$$

Aplicando as transformações de Riemann [24], mas agora para o sistema (170)–(173), redefine-se:

$$\bar{\zeta}(x, t) = \frac{1}{1-q}[u_t(x, t) + u_x(x, t)] \quad (182)$$

$$\bar{\omega}(x, t) = \frac{1}{1+q}[u_t(x, t) - u_x(x, t)] \quad (183)$$

com seu correspondente inverso dado por

$$u_t(x, t) = \frac{(1-q)\bar{\zeta}(x, t) + (1+q)\bar{\omega}(x, t)}{2}, \quad (184)$$

$$u_x(x, t) = \frac{(1-q)\bar{\zeta}(x, t) - (1+q)\bar{\omega}(x, t)}{2}. \quad (185)$$

Assim, (178)–(181) é redefinido como:

$$\mathbf{EDO:} \quad \dot{\vartheta}(t) = \bar{\zeta}(0, t), \quad (186)$$

$$\mathbf{EDP 1:} \quad \begin{cases} \bar{\zeta}_t(x, t) = \bar{\zeta}_x(x, t), & x \in [0, D], \\ \bar{\zeta}(D, t) = \frac{1}{1-q}[U(t) + u_t(D, t)], \end{cases} \quad (187)$$

$$\mathbf{EDP 2:} \quad \begin{cases} \bar{\omega}_t(x, t) = -\bar{\omega}_x(x, t), & x \in [0, D], \\ \bar{\omega}(0, t) = \bar{\zeta}(0, t). \end{cases} \quad (188)$$

Aplicando transformação *backstepping* [24]

$$w(x, t) = \bar{\zeta}(x, t) - KH \int_0^x \bar{\zeta}(\sigma, t) d\sigma - KH\vartheta(t), \quad (189)$$

$$\varpi(x, t) = \bar{\omega}(x, t) + KH \int_0^x \bar{\omega}(\sigma, t) d\sigma - KH\vartheta(t), \quad (190)$$

o sistema médio alvo resultante para (186)–(188) é

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = KH\vartheta_{\text{av}}(t) + w_{\text{av}}(0, t), \quad (191)$$

$$\partial_t w_{\text{av}}(x, t) = \partial_x w_{\text{av}}(x, t), \quad w_{\text{av}}(0, t) = \varpi_{\text{av}}(0, t), \quad (192)$$

$$\partial_t \varpi_{\text{av}}(x, t) = -\partial_x \varpi_{\text{av}}(x, t), \quad (193)$$

$$w_{\text{av}}(D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t \partial_x u_{\text{av}}(D, t), \quad (194)$$

que é exponencialmente estável para  $c > 0$  suficiente grande. Este resultado pode ser provado, uma vez que (191) é ISS (*Input-to-State Stable*) [31] com respeito a  $w_{\text{av}}(0, t)$ . Por outro lado,  $w_{\text{av}}(x, t)$  é estável em tempo finito com respeito a  $\varpi_{\text{av}}(0, t)$  e  $\varpi_{\text{av}}(x, t)$  é assintoticamente estável para  $c \rightarrow +\infty$  (ou  $w_{\text{av}}(D, t) \rightarrow 0$ ) [24].

Introduzindo (189) com  $x = D$  em (194), pode-se escrever  $\dot{U}_{\text{av}}(t) = -c w_{\text{av}}(D, t)$  de acordo com (181) e consequentemente

$$\dot{U}_{\text{av}}(t) = -c \bar{\zeta}_{\text{av}}(D, t) + cK \left[ H\vartheta_{\text{av}}(t) + H \int_0^D \bar{\zeta}_{\text{av}}(x, t) dx \right]. \quad (195)$$



Introduzindo a versão média de (187) e (182) em (195) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{av}}(t) &= -\frac{c}{1-q}[U_{\text{av}}(t) + \partial_t u_{\text{av}}(D, t)] \\ &+ cK \left[ H\vartheta_{\text{av}}(t) + H \int_0^D \frac{1}{1-q} [\partial_t u_{\text{av}}(x, t) + \partial_x u_{\text{av}}(x, t)] dx \right], \end{aligned} \quad (196)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{av}}(t) &= -\bar{c}U_{\text{av}}(t) - \bar{c}\partial_t u_{\text{av}}(D, t) \\ &+ \bar{c}K \left[ (1-q)H\vartheta_{\text{av}}(t) + H \int_0^D [\partial_t u_{\text{av}}(x, t) + \partial_x u_{\text{av}}(x, t)] dx \right], \end{aligned} \quad (197)$$

ou, equivalentemente

$$\begin{aligned} U_{\text{av}}(t) &= \frac{\bar{c}}{s+\bar{c}} \left\{ -\partial_t u_{\text{av}}(D, t) + K \left[ (1-q)H\vartheta_{\text{av}}(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + H \int_0^D [\partial_t u_{\text{av}}(x, t) + \partial_x u_{\text{av}}(x, t)] dx \right] \right\}, \end{aligned} \quad (198)$$

onde  $\bar{c} = \frac{c}{1-q}$ . Lembrando que  $G_{\text{av}}(t) = H\vartheta_{\text{av}}(t)$  e  $\hat{H}_{\text{av}}(t) = H$  a partir de (71), pode-se finalmente obter a lei de controle implementável

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{\bar{c}}{s+\bar{c}} \left\{ -u_t(D, t) + K \left[ (1-q)G(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{H}(t) \int_0^D [u_t(x, t) + u_x(x, t)] dx \right] \right\}, \end{aligned} \quad (199)$$

com  $\hat{H}(t)$  e  $G(t)$  definido por (62) e (61), respectivamente.

A última etapa é obter o sinal de perturbação  $S(t)$  que resolve o seguinte problema de geração de trajetórias

$$S(t) := \partial_x \beta(D, t) \quad (200)$$

$$\partial_{tt} \beta(x, t) = \partial_{xx} \beta(x, t), \quad x \in [0, D] \quad (201)$$

$$\partial_x \beta(0, t) = -q \partial_t \beta(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (202)$$

$$\beta(0, t) = a \text{sen}(\omega t). \quad (203)$$

A solução explícita de (200) é dada de acordo com [26, Capítulo 12]

$$S(t) = -a\omega \text{sen}(\omega D) \cos(\omega t) - aq\omega \cos(\omega D) \cos(\omega t), \quad (204)$$

visto que  $\beta(x, t) = a \cos(\omega x) \sin(\omega t) - aq \sin(\omega x) \cos(\omega t)$ .

**Observação 1.** Um resultado similar pode ser obtido para o atuador de Dirichlet  $\alpha(D, t) = \theta(t)$ ,  $\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t)$  e  $u(D, t) = U(t)$  pela redefinição da transformação de Riemann (182) e (183) para

$$\bar{\zeta}(x, t) = \frac{1}{1-q} [\bar{\alpha}_t(x, t) + \bar{\alpha}_x(x, t)] \quad (205)$$

$$\bar{\omega}(x, t) = \frac{1}{1+q} [\bar{\alpha}_t(x, t) - \bar{\alpha}_x(x, t)]. \quad (206)$$

Neste caso, a lei de controle pode ser expressa em termos de  $\bar{\alpha}(x, t)$  ao invés de  $u(x, t)$ , de acordo com:

$$U(t) = \frac{\bar{c}}{s+\bar{c}} \left\{ -\partial_x \bar{\alpha}(D, t) + K \left[ (1-q)G(t) + \hat{H}(t) \int_0^D [u(x, t) + \partial_x \bar{\alpha}(x, t)] dx \right] \right\}, \quad (207)$$

com  $\hat{H}(t)$  e  $G(t)$  definidos por (62) e (61), respectivamente. Relembrando (60), a lei de controle (207) é de fato implementável já que o termo  $\partial_x \bar{\alpha}(x, t)$  pode ser escrito em termos dos sinais mensuráveis.

$$\partial_x \bar{\alpha}(x, t) = \partial_x \alpha(x, t) - \partial_x \beta(x, t). \quad (208)$$

A integral em (207) pode também ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_0^D \partial_x \bar{\alpha}(x, t) dx &= \bar{\alpha}(D, t) - \bar{\alpha}(0, t) \\ &= \alpha(D, t) - \beta(D, t) - \Theta^* - \alpha(0, t) + \beta(0, t) + \Theta^* \\ &= \theta(t) - \beta(D, t) - \Theta(t) + a \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (209)$$

O termo  $\beta(x, t)$  é definido como problema de geração de trajetórias (200)–(203), mas substituindo (200) por  $S(t) := \beta(D, t)$ , que resulta em [26, Chapter 12]:

$$S(t) = a \cos(\omega D) \operatorname{sen}(\omega t) - aq \operatorname{sen}(\omega D) \cos(\omega t), \quad (210)$$

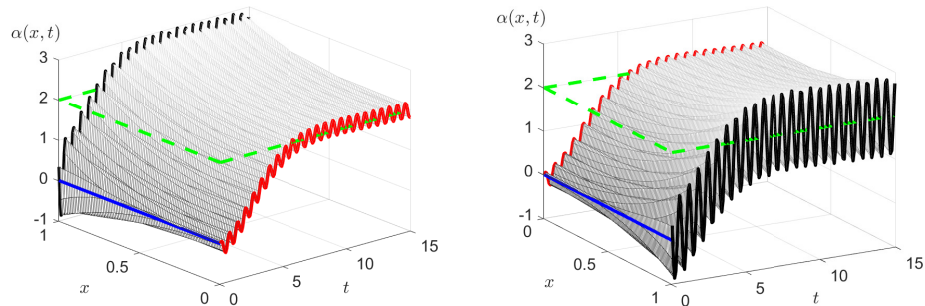
uma vez que  $\beta(x, t) = a \cos(\omega x) \operatorname{sen}(\omega t) - aq \operatorname{sen}(\omega x) \cos(\omega t)$ . Verifica-se que (210) corresponde exatamente (após algumas manipulações) à expressão (211), quando  $q = 0$  é considerado em (210).

$$S(t) = \frac{a}{2} [\operatorname{sen}(\omega(t + D)) + \operatorname{sen}(\omega(t - D))]. \quad (211)$$

## Simulações

Para os resultados de simulação a seguir, considera-se a equação anti-estável da onda sob condição de Dirichlet (Seção 5.1, Observação 1). Neste contexto, tem-se um mapa estático como em (41) com Hessiana  $H = -0.2$ , otimizador  $\Theta^* = \theta^* = 2$  e valor ótimo  $y^* = 5$ . O comprimento do domínio para a EDP da onda e o coeficiente de amortecimento são definidos como  $D = 1$  e  $q = 5$ , respectivamente. Os parâmetros para o controle extremal proposto são os seguintes:  $\omega = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $\bar{c} = 0.5$ , e  $K = 0.4$ .

Os resultados da simulação para o sistema em malha fechada são mostrados na Figura 14(a) e Figura 14(b). Observa-se que as variáveis  $\Theta$  e  $\theta$  convergem para vizinhança dos valores ótimos  $\Theta^*$  e  $\theta^*$ , respectivamente.



(a) Parâmetro  $\Theta(t)$  (vermelho) converge para  $\Theta^*$  (verde traçado).

(b) Parâmetro  $\theta(t)$  (preto) converge para  $\theta^*$  (verde traçado).

Figura 14: Compensação da EDP anti-estável da onda para controle em malha fechada por busca extremal com condição de atuação de Dirichlet:  $\alpha(0, t) = \Theta(t)$  e  $\alpha(D, t) = \theta(t)$ , e  $D = 1$ ,  $q = 5$ , e  $\Theta^* = \theta^* = 2$ .

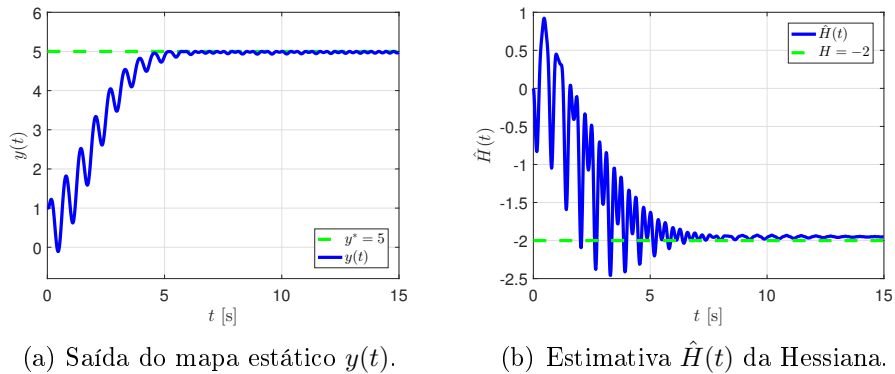


Figura 15: Compensação da EDP anti-estável da onda para controle em malha fechada por busca extremal com condição de atuação de Dirichlet:  $y(t)$  convergindo para o extremo  $y^* = 5$  e Hessiana estimada  $\hat{H}(t)$  convergindo para  $H = -2$ .

As Figuras 12(a) e 12(b) apresentam as variáveis relevantes para a busca extremal. Observando estas curvas, nota-se claramente a evolução do sinal de saída  $y(t)$  e da Hessiana estimada  $\hat{H}(t)$  finalmente atingindo o valor extremo  $y^* = 5$ , e o valor correto da Hessiana dado por  $H = -2$ , mesmo na presença da EDP da onda.

## 5.2 EDP anti-estável da onda com entrada atrasada

Inspirado por [14] discute-se a extensão da abordagem do controle extremal para a mesma EDP anti-estável da onda da seção anterior, mas agora com a entrada em atraso. Este é um problema particularmente importante uma vez que a referência [37] mostrou que leis de realimentação clássicas para a equação da onda não têm margem de robustez para introdução de atrasos na malha fechada.

Considera-se o sistema em cascata atraso-equação da onda, visto na Figura 16, como sendo:

$$\Theta(t) = \alpha(0, t) \quad (212)$$

$$\partial_{tt}\alpha(x, t) = \partial_{xx}\alpha(x, t), \quad x \in [0, 1] \quad (213)$$

$$\partial_x\alpha(0, t) = -q\partial_t\alpha(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (214)$$

$$\alpha(1, t) = \theta(t - D), \quad (215)$$

onde  $\alpha(x, t)$  é o estado de dimensão infinita da equação diferencial parcial anti-estável da onda, com domínio espacial definido sem perda de generalidade por  $x \in [0, 1]$ . A fronteira

do atraso é denotada por  $D > 0$ , sendo qualquer constante arbitrária conhecida.

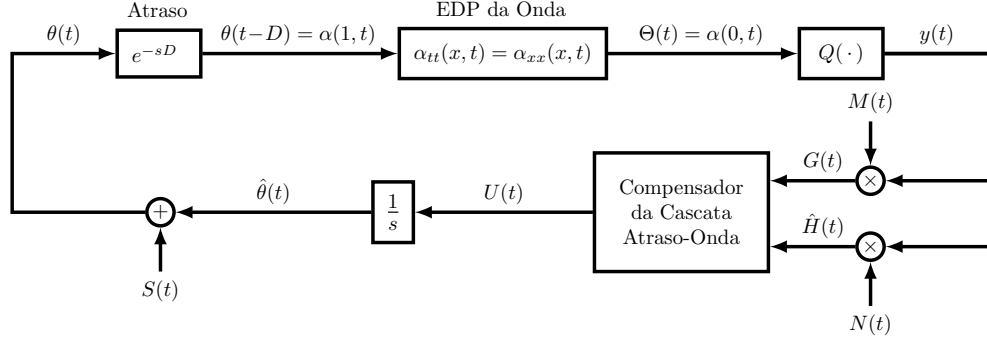


Figura 16: Controle extremal pelo método do gradiente, com compensação para dinâmica de atuação governada pela equação da onda com entrada atrasada.

O sistema atraso-equação da onda é escrito alternativamente como [14]:

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (216)$$

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad x \in [0, 1] \quad (217)$$

$$\partial_x u(0, t) = -q\partial_t u(0, t), \quad |q| \neq 1, \quad (218)$$

$$u(1, t) = v(1, t), \quad (219)$$

$$\partial_t v(x, t) = \partial_x v(x, t), \quad x \in [1, 1 + D] \quad (220)$$

$$v(1 + D, t) = U(t), \quad (221)$$

onde  $U(t)$  é a entrada de controle do sistema geral e  $(\vartheta, u, v)$  é o estado da cascata EDO-EDP-EDO. A partir da forma de representação da EDP de transporte para entrada em atraso, sabe-se que [32]

$$v(x, t) = U(t + x - 1 - D), \quad x \in [1, 1 + D]. \quad (222)$$

Relembrando que (217)–(219) pode ser representada por (187)–(188), e aplicando as

transformações abaixo

$$w(x, t) = \bar{\zeta}(x, t) - KH \int_0^x \bar{\zeta}(\sigma, t) d\sigma - KH \vartheta(t), \quad x \in [0, 1], \quad (223)$$

$$\varpi(x, t) = \bar{\omega}(x, t) + KH \int_0^x \bar{\omega}(\sigma, t) d\sigma - KH \vartheta(t), \quad x \in [0, 1], \quad (224)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) = & v(x, t) - KH \int_1^x v(\sigma, t) d\sigma + \bar{\alpha}_x(1, t) \\ & - KH \int_0^1 \bar{\zeta}(\sigma, t) d\sigma - KH \vartheta(t), \quad x \in [1, 1 + D], \end{aligned} \quad (225)$$

o sistema médio resultante para (216)–(221) será

$$\dot{\vartheta}_{\text{av}}(t) = KH \vartheta_{\text{av}}(t) + w_{\text{av}}(0, t), \quad (226)$$

$$\partial_t w_{\text{av}}(x, t) = \partial_x w_{\text{av}}(x, t), \quad w_{\text{av}}(0, t) = \varpi_{\text{av}}(0, t) \quad (227)$$

$$\partial_t \varpi_{\text{av}}(x, t) = -\partial_x \varpi_{\text{av}}(x, t), \quad (228)$$

$$w_{\text{av}}(1, t) = \zeta_{\text{av}}(1, t), \quad (229)$$

$$\partial_t \zeta_{\text{av}}(x, t) = \partial_x \zeta_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [1, 1 + D] \quad (230)$$

$$\zeta_{\text{av}}(1 + D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t v_{\text{av}}(1 + D, t). \quad (231)$$

A partir de (225) e (231), pode-se obter a expressão para  $\dot{U}_{\text{av}}(t) = -c\zeta_{\text{av}}(1 + D, t)$ , como

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{\bar{c}}{s + \bar{c}} \left\{ -\bar{\alpha}_x(1, t) + K \left[ (1 - q)G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{H}(t) \int_0^1 \frac{1}{1 - q} [u(x, t) + \bar{\alpha}_x(x, t)] dx \right] \right\}, \end{aligned} \quad (232)$$

para  $\bar{c} = \frac{c}{1-q}$ ,  $c > 0$  suficientemente grande,  $u(x, t) = \bar{\alpha}_t(x, t)$  e  $\bar{\alpha}_x(x, t)$  satisfazendo (208)–(209).

Conforme discutido em [9], a solução explícita para o problema de geração de trajetórias [26] com atraso poderia ser resolvido a partir de (210) com  $S(t - D) = a \cos(\omega D) \sin(\omega t) - aq \sin(\omega D) \cos(\omega t)$ , levando a

$$S(t) = a \cos(\omega D) \sin(\omega(t + D)) - aq \sin(\omega D) \cos(\omega(t + D)). \quad (233)$$

## Simulações

Neste contexto, considera-se um mapa estático quadrático como em (41), com Hessiana

$H = -2$ , otimizador  $\Theta^* = \theta^* = 2$ , e valor ótimo  $y^* = 5$ . O atraso da entrada é definido como  $D = 1$ . Como discutido em [37], este pequeno atraso é suficiente para produzir instabilidade no sistema em malha aberta composto pela cascata das EDPs atraso-onda. Os parâmetros propostos para a busca extremal são escolhidos como  $\omega = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $c = 10$  e  $k = 0.4$ . Em particular foi usado um filtro passa-baixa e um filtro passa-alta com frequências de corte  $\omega_h = 1$  e  $\omega_l = 1$ , afim de melhorar a estimação numérica do gradiente  $G(t)$  e da Hessiana  $\hat{H}(t)$ , como sugerido na Figuras 1 e 4 das respectivas referências [4] e [34].

Os resultados para as simulações do sistema em malha fechada são ilustrados na Figura 17(a), Figura 17(b), Figura 18(a), Figura 18(b), Figura 19(a) e Figura 19(b).

A evolução do estado  $\alpha(x, t)$  da EDP da onda (212)–(215) com entrada em atraso é observada na Figura 17(a) e Figura 17(b). Os valores para entrada  $\theta(t - D)$  e saída  $\Theta(t)$  estão destacados nas cores preta/vermelha, e a condição inicial é destacada na cor azul. Observa-se na Figura 18(a) que depois de um atraso de  $D = 1$  segundos, as variáveis  $\Theta$  e  $\theta$  convergem respectivamente para vizinhança dos valores ótimos  $\theta^*$  e  $\Theta^*$ .

A Figura 18(b) e Figura 19(a)– Figura 19(b) também apresentam variáveis relevantes para o controle extremal. É evidente a notável evolução do sinal de saída  $y(t)$  finalmente alcançando o extremo  $y^* = 5$ , bem como a estimação da Hessiana  $\hat{H}(t)$  alcançando o valor correto ( $H = -2$ ), mesmo na presença da cascata de EDPs onda-atraso. Como esperado, a estimação do gradiente é levada a zero a medida que a saída do mapa estático  $y(t)$  se aproxima de seu ponto extremo.

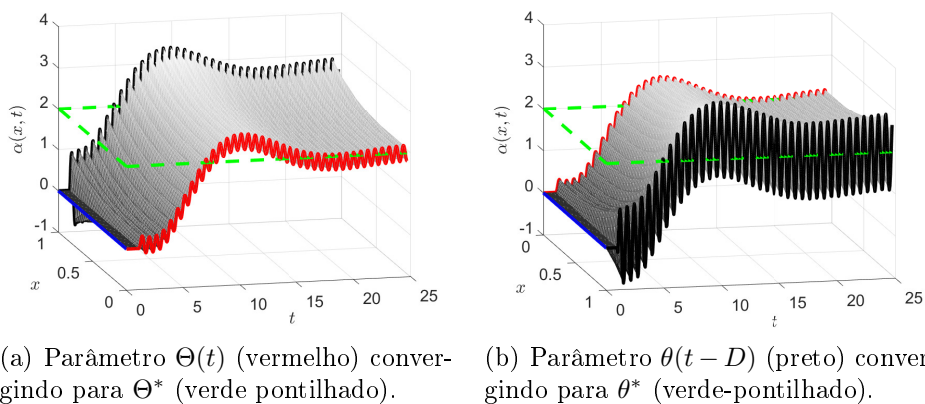
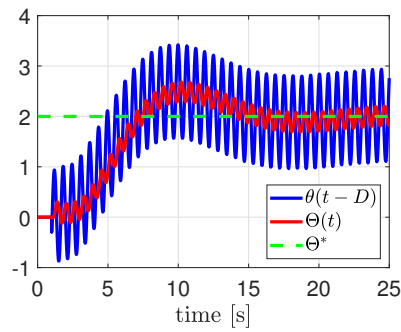
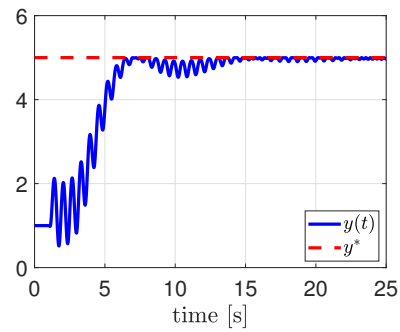


Figura 17: Evolução do estado de dimensão infinita  $\alpha(x, t)$  do modelo da EDP da onda com entrada atrasada ( $D = 1$ ), a partir de  $\alpha(1, t) = \theta(t - D)$  até  $\alpha(0, t) = \Theta(t)$ , com  $\Theta^* = \theta^* = 2$ .

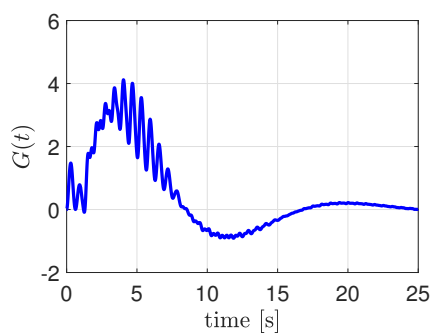


(a) Entrada da EDP da onda  $\theta(t - D)$  e entrada do mapa estático  $\Theta(t)$ .

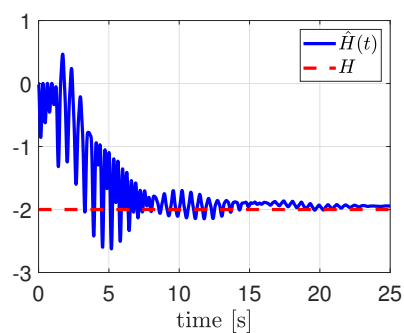


(b) Saída do mapa estático  $y(t)$ .

Figura 18: Compensação da EDP da onda com entrada atrasada na busca extremal usando condição de contorno de Dirichlet: tempo de resposta de  $\theta(t - D)$ ,  $\Theta(t)$  convergindo para os máximos  $\theta^* = \Theta^* = 2$  e  $y(t)$  convergindo para o extremo  $y^* = 5$ .



(a) Estimação do gradiente  $G(t)$ .



(b) Estimação da Hessiana  $\hat{H}(t)$ .

Figura 19: Compensação da EDP da onda com entrada atrasada na busca extremal usando condição de contorno de Dirichlet: tempo de resposta para estimação do gradiente  $G(t)$  convergir para zero e tempo de resposta para estimação da Hessiana  $\hat{H}(t)$  convergir para  $H = -2$ .



## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise completa e detalhada da aplicação do controle extremal para compensação da dinâmica da onda em diferentes cenários.

Foi apresentada o controle extremal baseada no método do gradiente para mapas estáticos escalares com dinâmica de atuação governada pela equação diferencial parcial da onda. A dinâmica de atuação deve ser conhecida, mas nenhum conhecimento prévio é assumido para os parâmetros do mapeamento. A lei de controle média para compensar a dinâmica de atuação da onda foi construída por uma combinação de ferramentas no estado-da-arte na área de controle de fronteira via método *backstepping* para EDPs, com a estimação baseada em perturbação para o gradiente e Hessiana do mapa estático. O sinal aditivo de perturbação foi projetado de forma a compensar também os efeitos da dinâmica da onda. Por fim, foram garantidas a estabilidade exponencial local e a convergência para uma pequena vizinhança do extremo desejado. A abordagem proposta tem também uma ampla aplicabilidade na prática, uma vez que a presença de EDPs nos modelos dinâmicos é frequentemente listada como um fator limitante na aplicação prática do controle extremal.

Além do exposto anteriormente, esta dissertação apresentou uma extensão para abordagem do controle extremal para equações diferenciais parciais, considerando também cascatas de EDPs que envolvam a equação diferencial parcial da onda, neste caso, uma EDP anti-estável da onda como uma interconexão de duas EDPs de transporte (atraso), e também uma EDP anti-estável da onda com entrada atrasada. Para ambos os casos, derivou-se as leis de controle em malha fechada, e os sinais de perturbação que resolvem o problema de geração de trajetórias. Observa-se que o assunto mencionado neste parágrafo compõe o conteúdo principal de um artigo publicado no CBA2020 [36].

Os exemplos acadêmicos estudados nas seções de simulação podem ser encarados como uma versão bem simplificada do problema de controle de perfuração descrito na seção de motivação. Não foi considerada nenhuma modelagem específica para os fenômenos não-lineares presentes no processo de perfuração de um poço de petróleo. Assumiu-se a modelagem para o processo como uma cadeia de dinâmicas de atraso, ou simplesmente como a equação diferencial parcial da onda. Contudo, parece promissor correlacionar este problema de perfuração ideal em tempo real e os métodos de busca extremos baseados em equações diferenciais parciais porpostos nesta dissertação.

O presente trabalho apresentou apenas o controle extremal baseado no método do gradiente. Deste modo, considera-se como uma possível perspectiva de melhoria, a extensão da estratégia de controle apresentada para a abordagem usando o método de Newton [34], seguindo o procedimento apresentado em [9], e assim eliminar a dependência da taxa de convergência do algoritmo do valor da Hessiana do mapeamento estático. Além disto, pode-se estender o estudo para uma modelagem mais realística da planta considerada, a fim de se adaptar e mostrar a capacidade da metodologia proposta para o controle extremal em resolver algum problema de otimização específico na área de perfuração de poços.

## REFERÊNCIAS

- [1] AARSNES, U. J. F.; AAMO, O. M.; KRSTIC, M. Extremum seeking for real-time optimal drilling control. In: IEEE. *2019 American Control Conference (ACC)*. [S.l.], 2019. p. 5222–5227.
- [2] IADC. *IADC Drilling manual*. 12th. ed. [S.l.]: IADC, 2015.
- [3] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais vol. 2*. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2008.
- [4] KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.
- [5] GHODS, N.; KRSTIC, M. Source seeking with very slow or drifting sensors. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 133, n. 4, p. 1–8, 2011.
- [6] SCHEINKER, A.; KRSTIĆ, M. Non-c2 lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 136, n. 1, p. 1–11, 2014.
- [7] FRIHAUF, P.; LIU, S.-J.; KRSTIC, M. A single forward-velocity control signal for stochastic source seeking with multiple nonholonomic vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 136, n. 5, p. 1–9, 2014.
- [8] BAGHERI, M.; KRSTIĆ, M.; NASERADINMOUSAVI, P. Multivariable extremum seeking for joint-space trajectory optimization of a high-degrees-of-freedom robot. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 140, n. 11, p. 1–13, 2018.
- [9] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 62, n. 4, p. 1911–1926, 2017.

- [10] RUŠITI, D. et al. Stochastic extremum seeking for dynamic maps with delays. *IEEE control systems letters*, IEEE, v. 3, n. 1, p. 61–66, 2018.
- [11] FEILING, J. et al. Gradient extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion PDEs. *Automatica*, Elsevier, v. 95, p. 197–206, 2018.
- [12] OLIVEIRA, T. R. et al. Scalar newton-based extremum seeking for a class of diffusion PDEs. In: IEEE. *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. [S.l.], 2018. p. 2926–2931.
- [13] OLIVEIRA, T. R.; FEILING, J.; KRSTIC, M. Extremum seeking for maximizing higher derivatives of unknown maps in cascade with reaction-advection-diffusion PDEs. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 52, n. 29, p. 210–215, 2019.
- [14] KRSTIC, M. Dead-time compensation for wave/string PDEs. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 133, n. 3, p. 1–13, 2011.
- [15] MOURA, S. J.; CHATURVEDI, N. A.; KRSTIĆ, M. Adaptive partial differential equation observer for battery state-of-charge/state-of-health estimation via an electrochemical model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 136, n. 1, p. 1–11, 2014.
- [16] SEZGIN, A.; KRSTIC, M. Boundary backstepping control of flow-induced vibrations of a membrane at high mach numbers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 137, n. 8, p. 1–8, 2015.
- [17] GHAFFARI, A.; MOURA, S.; KRSTIC, M. PDE-based modeling, control, and stability analysis of heterogeneous thermostatically controlled load populations. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 137, n. 10, p. 1–9, 2015.
- [18] WANG, J. et al. Axial vibration suppression in a partial differential equation model of ascending mining cable elevator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 140, n. 11, p. 1–13, 2018.

- [19] SIRANOSIAN, A. A. et al. Motion planning and tracking for tip displacement and deflection angle for flexible beams. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 131, n. 3, p. 1–10, 2009.
- [20] GU, K.; NICULESCU, S.-I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, v. 125, n. 2, p. 158–165, 2003.
- [21] EVESQUE, S. et al. Adaptive control of a class of time-delay systems. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, v. 125, n. 2, p. 186–193, 2003.
- [22] OLGAC, N.; SIPAHI, R. The cluster treatment of characteristic roots and the neutral type time-delayed systems. *ASME J. Dyn Syst., Meas., Control*, n. 127, p. 215–223, 2005.
- [23] ASL, F. M.; ULSOY, A. G. Analysis of a system of linear delay differential equations. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, v. 125, n. 2, p. 215–223, 2003.
- [24] BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIC, M. Compensation of wave actuator dynamics for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 59, n. 6, p. 1555–1570, 2014.
- [25] KRSTIC, M. Compensating a string PDE in the actuation or sensing path of an unstable ODE. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 54, n. 6, p. 1362–1368, 2009.
- [26] KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*. [S.l.]: Siam, 2008.
- [27] HALE, J.; LUNEL, S. V. Averaging in infinite dimensions. *The Journal of integral equations and applications*, JSTOR, p. 463–494, 1990.
- [28] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIC, M. Compensation of wave PDEs in actuator dynamics for extremum seeking feedback. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 52, n. 29, p. 134–139, 2019.
- [29] KRSTIC, M. Intro to backstepping control for PDEs. Slides presented in Doc-Course: "Partial Differential Equations: Analysis, Numerics and Control", by Rafael Vazquez - Sevilla (2018). 2018.

- [30] KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. W. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [31] KARAFYLLIS, I.; KRSTIC, M. *Input-to-state stability for PDEs*. [S.l.]: Springer, 2019.
- [32] KRSTIC, M. *Delay compensation for nonlinear, adaptative, and PDE systems*. [S.l.]: Springer, 2009.
- [33] ARIYUR, K. B.; KRSTIC, M. *Real-time optimization by extremum-seeking control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003.
- [34] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NEŠIĆ, D. Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 8, p. 1759–1767, 2012.
- [35] SUSTO, G. A.; KRSTIC, M. Control of PDE-ODE cascades with neumann interconnections. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 347, n. 1, p. 284–314, 2010.
- [36] OLIVEIRA, T. R.; SACCHI, F. Controle extremal para cascatas e interconexões de equações diferenciais parciais. *Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, 2020.
- [37] DATKO, R.; LAGNESE, J.; POLIS, M. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM journal on control and optimization*, SIAM, v. 24, n. 1, p. 152–156, 1986.