



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Débora Marques Lopes dos Santos

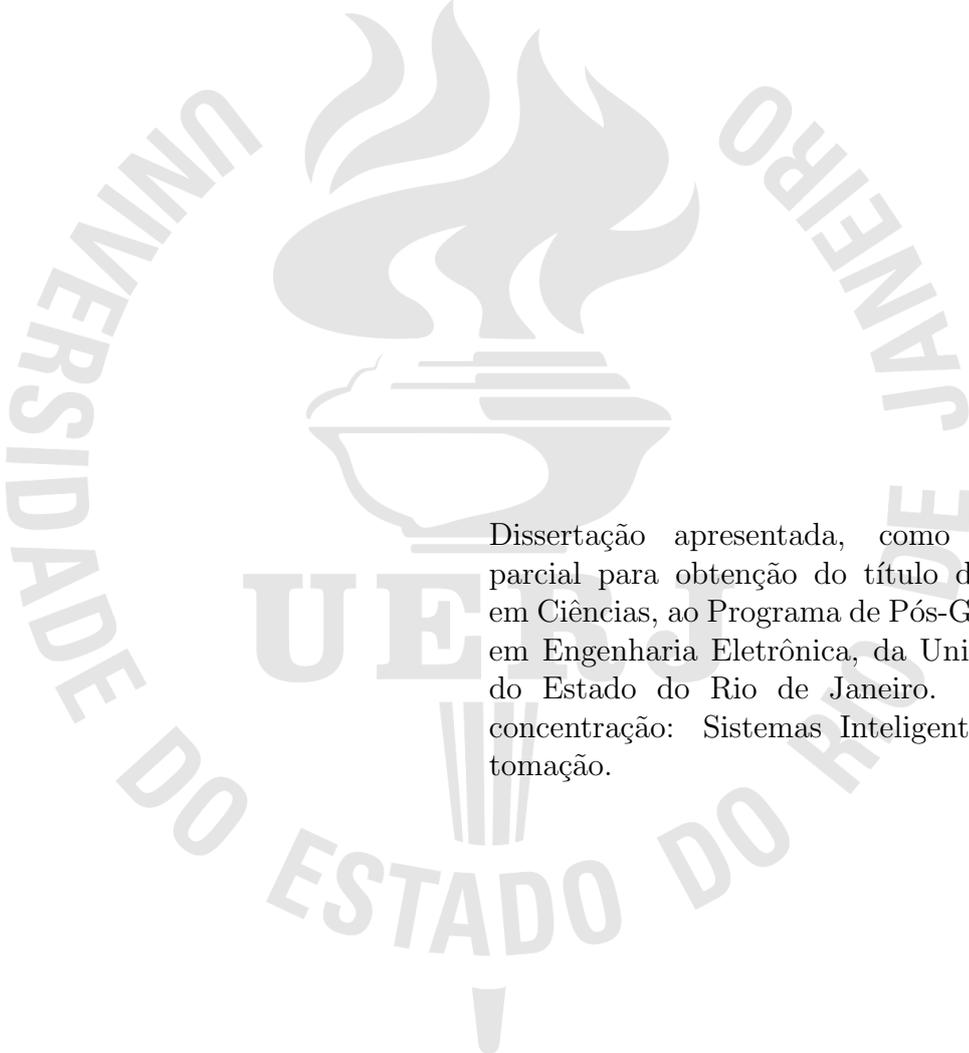
**Controle Epidemiológico da COVID-19 através da Teoria de  
Sistemas a Estrutura Variável e Modos Deslizantes**

Rio de Janeiro

2020

Débora Marques Lopes dos Santos

**Controle Epidemiológico da COVID-19 através da Teoria de Sistemas a  
Estrutura Variável e Modos Deslizantes**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S237

Santos, Débora Marques Lopes dos.

Controle epidemiológico da COVID-19 através da teoria de sistemas a estrutura variável e modos deslizantes / Débora Marques Lopes dos Santos. - 2020.

54f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira.

Dissertação(Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de controle por realimentação - Teses. 3. Epidemiologia - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681.516

Bibliotecária: Júlia Vieira - CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Débora Marques Lopes dos Santos

**Controle Epidemiológico da COVID-19 através da Teoria de Sistemas a  
Estrutura Variável e Modos Deslizantes**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 15 de Dezembro de 2020

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Andrei Giordano Holanda Battistel, D.Sc.  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Americo Barbosa da Cunha Junior, D.Sc.  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof. Oumar Diene, D.Sc.  
Departamento de Engenharia Elétrica - UFRJ

Rio de Janeiro

2020

## AGRADECIMENTO

A Deus que tem me sustentado todos os dias e renovado as minhas forças - eu jamais teria conseguido sem Ele.

À minha família, por ter acreditado e me dado o suporte ao longo de todo o mestrado. Especialmente à minha mãe Elizabeth, o meu pai Evandro e minha avó Lea por terem acreditado em meus sonhos e me ajudado com toda a dedicação e amor, vocês foram essenciais.

Ao meu melhor amigo e marido Rafael que nunca desistiu de me incentivar, agradeço pelo seu amor e compreensão durante a minha trajetória no mestrado - que sorte a minha ter você, te amo.

Ao meu professor e orientador Tiago Roux, onde tenho admiração, agradeço pela confiança e apoio durante toda a elaboração desde trabalho e bons conselhos nos momentos difíceis - sem a sua ajuda este trabalho não existiria.

Ao Victor Hugo Pereira Rodrigues, por compartilhar todo o seu conhecimento e contribuir na elaboração desta dissertação.

A todos os professores do PEL/UERJ, creio que cada um de vocês teve um papel fundamental para a minha formação.

Aos professores Andrei Giordano Holanda Battistel, Americo Barbosa da Cunha Junior e Oumar Diene por terem aceitado o convite para a participação da banca examinadora, sem dúvida os seus comentários e sugestões foram essenciais para a aperfeiçoar a versão final desta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Que ninguém se engane, só se consegue a simplicidade através de muito trabalho.

*Clarice Lispector*

## RESUMO

SANTOS, Débora Marques Lopes dos. *Controle Epidemiológico da COVID-19 através da Teoria de Sistemas a Estrutura Variável e Modos Deslizantes*. 54 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2020.

A epidemia causada pelo recente coronavírus (COVID-19) tem atraído a atenção de diversas áreas de pesquisa. Muitas publicações tentam obter respostas quanto à dinâmica de propagação da infecção uma vez que os resultados da sua disseminação têm sido catastróficos. Um método sistemático para a análise e controle da dinâmica da COVID-19 é uma necessidade imediata. Este trabalho propõe um novo modelo matemático denominado SIRDQ considerando leis de controle para as ações governamentais de modo a reduzir os períodos de quarentena. As leis de controle propostas garantem a regulação do número básico de reprodução para um valor desejado, que está diretamente relacionado com a dinâmica de propagação do modelo epidêmico. Considera-se estratégias de controle baseadas na teoria de sistemas a estrutura variável e modos deslizantes devido à sua robustez com relação a incertezas paramétricas e perturbações, assim como encontradas em modelos epidemiológicos. A análise de estabilidade do sistema em malha fechada é rigorosamente apresentada. Simulações mostram que as estratégias de controle empregadas asseguram melhores níveis de isolamento a serem adotados.

Palavras-chave: COVID-19; Dinâmica Epidemiológica; Controle por Modos Deslizantes; Realimentação de Saída.

## ABSTRACT

SANTOS, Débora Marques Lopes dos. *Epidemiological Control of COVID-19 through the Theory of Variable Structure Systems and Sliding Modes*. 54 p. Master Thesis (Master in Science of Electronic Engineering) - Engineering Faculty, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2020.

The epidemic caused by the recent coronavirus (COVID-19) has attracted the attention of several research areas. Many publications try to obtain answers regarding the dynamics of the spread of the infection since the results of its dissemination have been catastrophic. A systematic method for the analysis and control of the COVID-19 dynamics is an immediate necessity. This work proposes a new mathematical called SIRDQ model considering control laws for the government actions in order to reduce the periods of quarantine. The proposed control laws guarantee the regulation of the basic number of reproduction to a desired value, which is directly related to the propagation of the epidemic model. We consider control strategies based on variable structure systems and sliding modes due to its robustness with respect to parametric uncertainties and disturbances, as found in epidemiological models. The stability analysis of the closed-loop system is rigorously presented. Simulations shows that the employed control strategies assure better levels of isolation to be adopted.

Keywords: COVID-19; Epidemiological Dynamics; Sliding Mode control; Output Feedback.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Casos confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro .....	11
Figura 2 - Recuperados confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro	11
Figura 3 - Óbitos confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro .....	12
Figura 4 - Superfície de Descontinuidade .....	16
Figura 5 - Sistemas Variantes no Tempo Assintoticamente Estáveis.....	19
Figura 6 - Controle por modos deslizantes: observação e regulação em tempo finito .	20
Figura 7 - Desempenho do diferenciador (1.18) com $n = 5, n_f = 2, L = 1$ para $\tau = 10^{-5}$ e entrada (1.19): apenas estimativas de $f_0, \dot{f}_0, \ddot{f}_0$ são mostradas .	28
Figura 8 - Desempenho do controle do carro 3-SM (1.16) para $r = 3, n_f = 2,$ $L = 50, \alpha = 0,5$ e passo de integração/amostragem $\tau = 10^{-5}$ .....	30
Figura 9 - Desempenho do controle do carro 3-SM (1.16) para $r = 3, n_f = 2,$ $L = 50, \alpha = 0,5,$ passo de amostragem: $\tau = 10^{-5}s$ e $\tau = 0,01s$ e ângulo de rotação $\theta$ para $\tau = 0,01s$ . .....	31
Figura 10- Sinal de controle $u$ .....	41
Figura 11- Variável de deslizamento $\tilde{R}_0(t)$ (erro de regulação) .....	41
Figura 12- Número básico de reprodução $R_0(t)$ .....	41
Figura 13- Indivíduos suscetíveis $S(t)$ .....	42
Figura 14- Indivíduos infectados $I(t)$ .....	42
Figura 15- Acumulado de indivíduos recuperados $R(t)$ .....	42
Figura 16- Acumulado de indivíduos mortos $D(t)$ .....	43
Figura 17- Indivíduos em regime de quarentena $Q(t)$ .....	43
Figura 18- Sinal de controle $u$ .....	44
Figura 19- Variável de deslizamento $\tilde{R}_0(t)$ (erro de regulação) .....	44
Figura 20- Número básico de reprodução $\hat{R}_0(t)$ . .....	45
Figura 21- Indivíduos suscetíveis $S(t)$ .....	45
Figura 22- Indivíduos infectados $I(t)$ .....	45
Figura 23- Acumulado de indivíduos recuperados $R(t)$ .....	46
Figura 24- Acumulado de indivíduos mortos $D(t)$ .....	46
Figura 25- Indivíduos em regime de quarentena $Q(t)$ .....	46

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n+n_f}$ do diferenciador (1.12), (1.13) para $n + n_f =$ $0, 1, \dots, 7$ .....	25
---	----

# SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
1	<b>SISTEMAS A ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES</b> .....	16
1.1	Controle por Modos Deslizantes: Observação e Regulação em Tempo Finito	19
1.1.1	Definição de Filippov e Modo Deslizante .....	21
1.1.2	Grau Relativo .....	21
1.1.3	Ordem do Modo Deslizante .....	22
1.1.4	Conexão com o Grau Relativo .....	22
1.1.5	Atenuação do Efeito de <i>Chattering</i> .....	22
1.1.6	<b>Regulação de Saída em Tempo Finito</b> .....	23
1.1.7	SMC Homogêneo .....	23
1.1.8	Diferenciação e Filtragem .....	24
1.1.9	Diferenciação Assintoticamente Ótima .....	24
1.1.10	SMC Homogêneo de Realimentação de Saída .....	26
1.1.11	Discretização .....	27
1.1.12	<b>Exemplos Numéricos</b> .....	28
2	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	32
2.1	Objetivo de Controle .....	35
3	<b>CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES PARA O CONTROLE EPIDEMIOLÓGICO DA COVID-19</b> .....	37
3.1	Lei de Controle .....	37
3.2	Análise de Estabilidade .....	37
4	<b>RESULTADOS DE SIMULAÇÕES</b> .....	40
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	48
	<b>APÊNDICE</b> .....	50
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	51

## INTRODUÇÃO

Em 31 de dezembro de 2019, a Organização Mundial da Saúde (OMS) foi informada de casos de pneumonia de causa desconhecida na cidade de Wuhan, China. Um novo coronavírus, que pertence a uma grande família de vírus que causam doenças que vão desde o resfriado comum até doenças mais graves foi identificado como a causa pelas autoridades chinesas em 7 de janeiro de 2020 e foi inicialmente denominado “2019-nCoV” [1].

Com uma alta capacidade de propagação e, conseqüentemente, um rápido aumento do número de casos, o vírus se espalhou para a maioria dos países do mundo. Por isso, em 11 de março de 2020, a OMS declarou que o surto poderia ser caracterizado como uma pandemia.

A transmissão do vírus ocorre de pessoa para pessoa por meio de gotículas respiratórias, principalmente. O SARS-CoV-2 demonstrou padrão de infecção em humanos semelhante a outros coronavírus, particularmente o coronavírus com síndrome respiratória aguda grave (SARS-CoV) e o coronavírus com síndrome respiratória do Oriente Médio (MERS-CoV) [2].

A COVID-19 tem avançado rapidamente pelo país, com transmissão comunitária declarada em todo o território nacional [2]. Neste contexto, está a cidade do Rio de Janeiro, que é um dos maiores centros urbanos do país e a segunda cidade com maior número de casos [2]. O primeiro caso de COVID-19 no município do Rio de Janeiro foi registrado em 6 de março de 2020, apenas 11 dias após o primeiro caso do Brasil [2]. Desde então, a prefeitura do Rio de Janeiro tem disponibilizado dados de casos e óbitos confirmados de SARS-CoV-2, por local de residência, de acesso aberto. Esses dados são disponibilizados considerando casos confirmados, recuperados e infectados, por dia e por média móvel dos últimos 7 dias [3].

A Figura 1 a Figura 3 demonstram esses dados, considerando o período de propagação da epidemia de 28 de março de 2020 à 03 de agosto de 2020.

Neste cenário de pandemia, o tratamento da doença e a sua prevenção exigem recursos sociais e médicos que geralmente são insuficientes. Por sua vez, os sistemas de saúde ficam cada vez mais sobrecarregados, na tentativa de mitigar as conseqüências, evitando complicações e resultados ainda mais graves [4]. Além do medo de contrair a doença, a COVID-19 tem provocado sensação de insegurança em todos aspectos da vida,

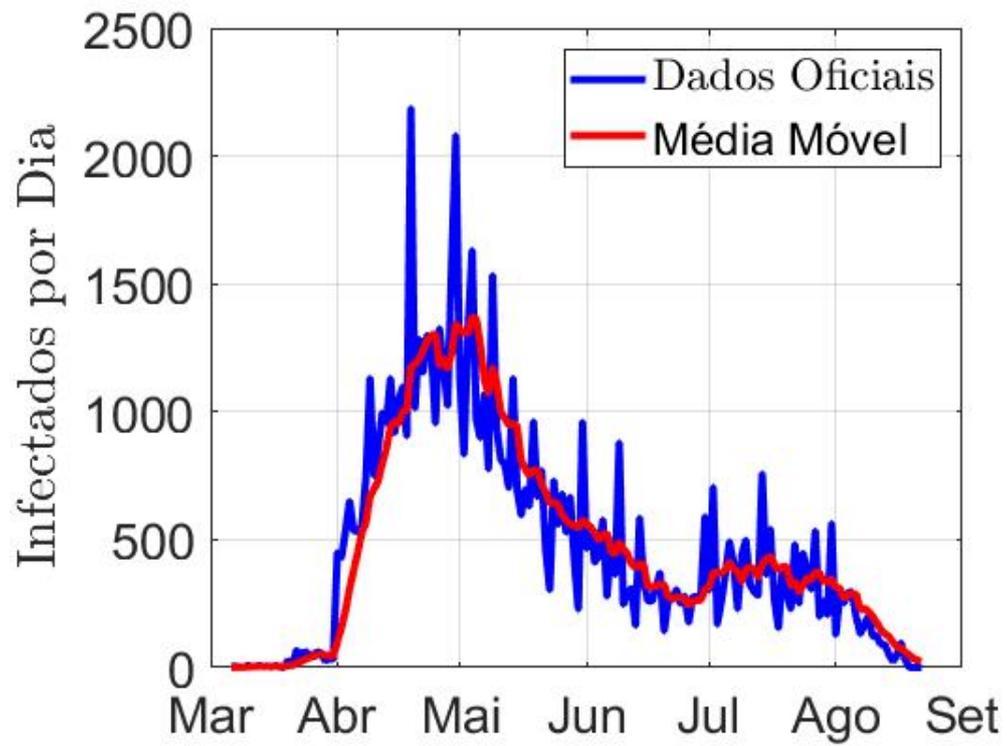


Figura 1 - Casos confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro

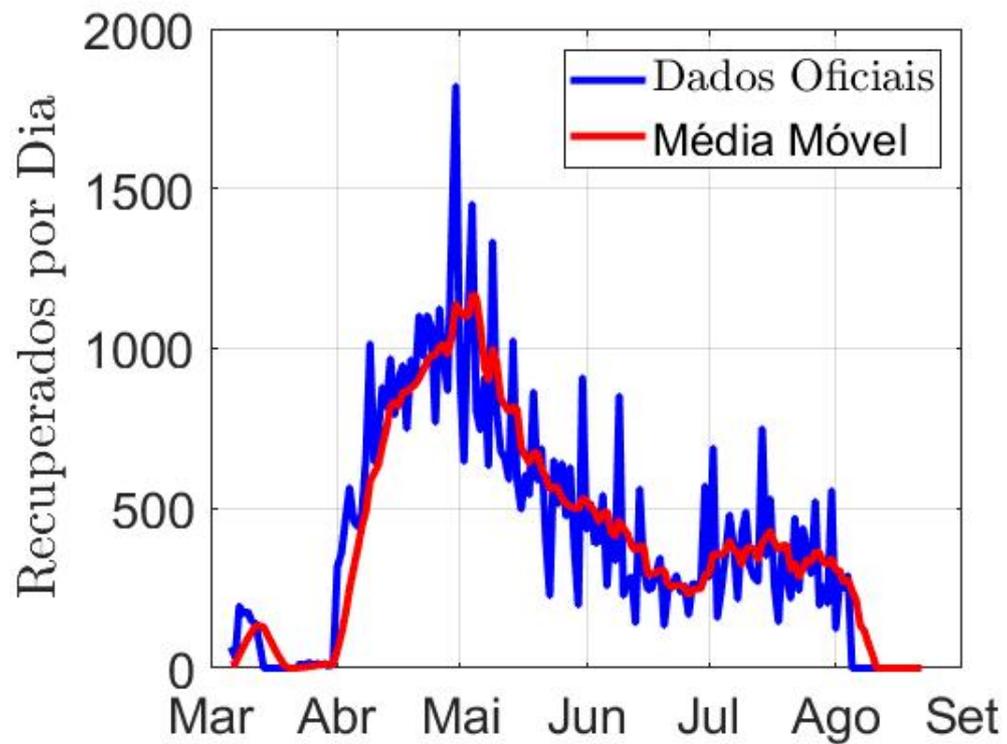


Figura 2 - Recuperados confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro

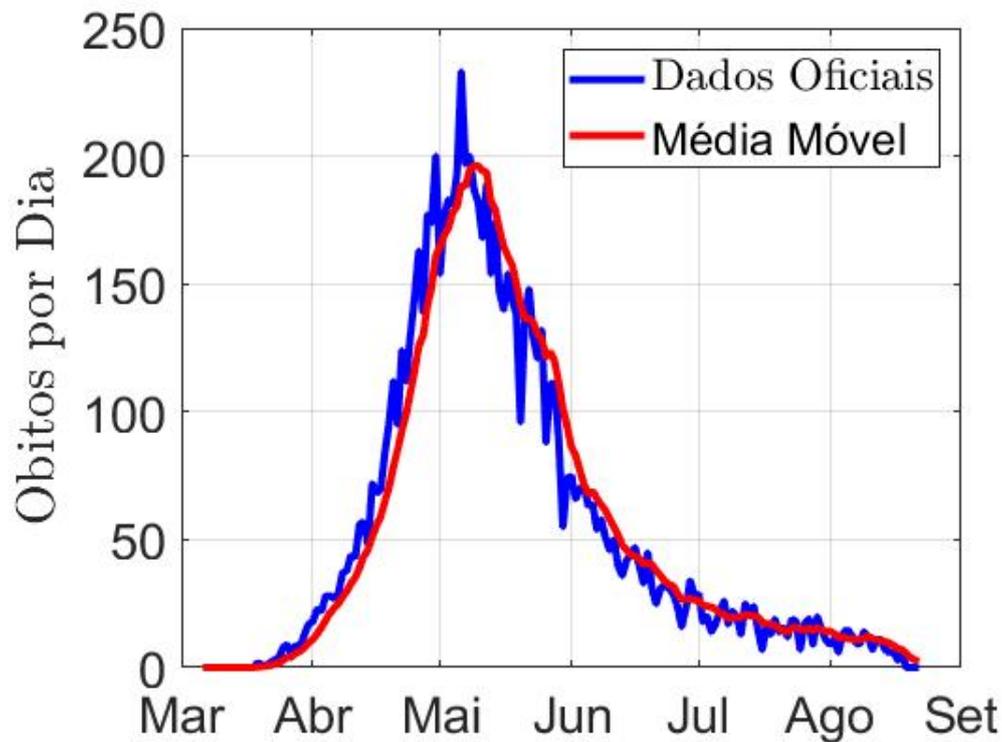


Figura 3 - Óbitos confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro

da perspectiva coletiva à individual, do funcionamento diário da sociedade às modificações nas relações interpessoais [5]. Embora medidas como quarentena e isolamento social sejam possibilidades de controle em situações de pandemia, o seu prolongamento pode ser prejudicial à economia do país e, além disso impacta consideravelmente a saúde mental da população. Em decorrência disso, estudos sobre a dinâmica e possíveis estratégias de controle podem ser de grande interesse para a comunidade científica e para a sociedade como um todo.

A literatura apresenta exemplos relacionados a dinâmica de doenças infecciosas. Diferentes tipos de modelos, principalmente o de equações não-lineares que podem ser empregados, em [6] é descrita a dinâmica da infecção por coronavírus em humanos, fornecendo um sistema de modelos de equações diferenciais ordinárias (EDOs) para descrever o processo dinâmico das interações entre o sistema imunológico e as infecções por COVID-19.

Os modelos matemáticos são fundamentais para compreender e prever os mecanismos de propagação de uma epidemia. O mais popular e amplamente utilizado é o modelo SIR [7] para transmissão de pessoa para pessoa. Para a pandemia COVID-19, muitos modelos foram construídos para explorar a epidemia na escala de um país como o modelo

SIDARTHE, que é uma atualização do modelo SIR e é encontrado em [8]. O modelo considera oito estágios de infecção: suscetível (S), infectado (I), diagnosticado (D), doente (A), reconhecido (R), ameaçado (T), curado (H) e extinto (E). O modelo SIDARTHE destacou que medidas restritivas de distanciamento social precisam ser combinadas com testes generalizados e rastreamento de contato [8].

Dois modelos matemáticos da dinâmica do COVID-19 são considerados pelos sistemas de saúde de alguns países. O primeiro modelo macroscópico para a dinâmica do vírus no nível da população geral do país é derivado de um modelo SIR padrão. O segundo modelo local se refere a um nó único da rede do sistema de saúde, ou seja, modela os fluxos de pacientes com uma granularidade menor no nível de um centro de atendimento hospitalar regional para pacientes infectados com COVID-19. Dados diários (baixo custo) são facilmente coletados a este nível e são elaborados para uma avaliação rápida do estado de saúde local graças aos métodos dos sistemas de controle [9].

Em [10] são apresentados resultados baseados em controle ótimo aplicado aos modelos SIR, SIRS e SEIR, incluindo opções de vacinação e tratamento sob taxas variáveis de incidência e morte relacionada à doença.

A utilização de técnicas de controle não lineares, especificamente o controle por modos deslizantes (Sliding Mode Control - SMC) tem sido amplamente utilizado na literatura para o controle de doenças infecciosas. Em [11], um método de prevenção da influenza foi apresentado por meio de vacinação robusta e tratamento antiviral usando SMC, o que poderia reduzir o número de pessoas suscetíveis ao vírus. Novamente, em [12] usando a vacinação como entrada de controle, um SMC adaptativo foi projetado para controlar os modelos de epidemia SEIR. Em [13], ao forçar um limite nos níveis de infecção, uma taxa de incidência por partes, alcançada usando SMC, foi usada para controlar surtos epidêmicos. Uma abordagem semelhante foi apresentada em [14], mas o valor limite foi forçado no número de indivíduos expostos. No contexto atual da pandemia de COVID-19, o autor [15] utiliza o SMC para encontrar uma maneira eficaz de forma a atenuar a propagação da doença, sintetizando o controle apropriado. O controlador é projetado de forma que a população exposta ao vírus se mantenha a limite preestabelecido, evitando a propagação em massa da doença.

A presente dissertação busca analisar a dinâmica do surto de COVID-19 propondo um novo modelo denominado SIRDQ (*S*usceptible, *I*nfected, *R*ecovered, *D*ead and

*Quarantined*) inspirados em [7] e [10], introduzindo algoritmos de controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC), capazes de regular o número básico de reprodução do vírus  $R_0$ . Uma análise de estabilidade é realizada, por meio da teoria de Lyapunov, considerando incertezas paramétricas na modelagem e perturbações externas.

Os principais objetivos desta dissertação são:

- Analisar a dinâmica do COVID-19, propondo um novo modelo matemático denominado SIRDQ, que considera a ação governamental  $u$  que força o isolamento social, por meio da quarentena, atenuando as consequências do surto, o número de infectados, sequelas e óbitos e, ao mesmo tempo contemplando o fenômeno de queda de adesão à quarentena.
- Propor uma solução para a propagação da COVID-19, introduzindo estratégias de controle baseadas em modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC), capazes de regular o número básico de reprodução do vírus  $R_0(t)$ , uma vez que esta variável tem papel fundamental quanto ao potencial de uma epidemia.

Num primeiro momento foram analisados os dados dos infectados, recuperados e mortos devido a COVID-19, emitidos pela Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro. Também foram revisados os dados bibliográficos já publicados até o presente momento, de forma a fomentar as variáveis do sistema a serem controladas e identificar os limitantes inferiores e superiores do modelo.

Após isso, deseja-se alcançar em tempo finito a regulação do sistema de controle em malha fechada. A prova de estabilidade foi apresentada. Em seguida, realiza-se a implementação do controle por modos deslizantes aplicados em diferentes cenários, ilustrados com simulações numéricas.

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

No **Capítulo 1** são apresentados os conceitos básicos do controle por modos deslizantes e sistemas a estrutura variável.

No **Capítulo 2** é apresentada a formulação do modelo matemático SIRDQ assim como sua análise.

No **Capítulo 3** é abordado o projeto SMC para controlar o surto de COVID-19. A análise de estabilidade por meio da teoria de Lyapunov é demonstrada.

No **Capítulo 4** apresenta-se os principais resultados numéricos com simulações do controlador por modos deslizantes.

As conclusões e sugestões para trabalhos futuros desta pesquisa são apresentados na parte final desta dissertação.

## 1 SISTEMAS A ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES

Nos últimos anos, cada vez mais atenção tem sido dada a sistemas onde as ações de controle são funções descontínuas em suas coordenadas e distúrbios [16].

No projetos onde os sistemas apresentam controle descontínuo, as ações geralmente são redutíveis à seleção de superfícies no espaço para a função de controle ter descontinuidades. Quando certas relações são válidas, um especial tipo de movimento, o chamado modo deslizante, pode surgir [16]. Isto pode ser o caso, por exemplo, se nas proximidades da superfície onde a função de controle tem descontinuidades, as trajetórias do estado são direcionadas para esta superfície Figura 4.

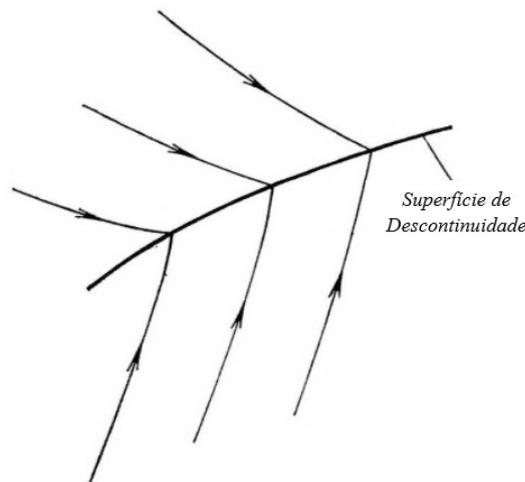


Figura 4 - Superfície de Descontinuidade

Uma vez na superfície de descontinuidade, o ponto descritivo não pode se mover ao longo de qualquer trajetória adjacente a essa superfície durante qualquer período de tempo, mesmo que curto ou finito. Na verdade, em resposta a qualquer mudança, sempre se inicia um movimento que retorna ao ponto descritivo para a superfície de descontinuidade; este movimento é convencionalmente referido como modo deslizante. Em sistemas reais, é praticamente impossível o modo deslizante ocorrer em superfícies contínuas, pois todas as funções com controle chaveado têm imperfeições tais como retardamento, histereses, etc., que fazem com que os deslizamentos ocorram em uma frequência finita e o ponto descritivo oscile em uma certa vizinhança finita da superfície de descontinuidade [16].

O potencial do Controle por Modos Deslizantes foi mais completamente revelado

e usado na pesquisa de sistemas de estrutura variável iniciada por S. V. Emelyanov no Instituto de Ciências de Controle [16]. A teoria dos sistemas de estrutura variável foi moldada em um campo independente na teoria geral dos sistemas não-lineares [16].

Projetar um controlador a estrutura variável é selecionar os parâmetros para essas estruturas (sistemas dinâmicos) de forma a definir uma lógica de chaveamento de forma que as propriedades úteis de cada estrutura sejam preservadas e, em alguns casos, novos efeitos sejam obtidos. Nos momentos em que as estruturas mudam, os lados direitos das equações diferenciais que descrevem o movimento do sistema têm descontinuidades em certas superfícies no espaço de estado do sistema. Portanto, movimentos deslizantes podem ocorrer também em sistemas a estrutura variável. É precisamente a introdução deliberada de um modo deslizante no sistema que é a ideia chave dos algoritmos de controle nesta classe de sistemas. A seguir será apresentado um exemplo simples do uso de modos deslizantes [16].

O exemplo a seguir é um problema de estabilização em um sistema de controle para uma planta invariante no tempo cujo movimento é descrito pela equação

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 - a_1x_1 + u \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  são variáveis de estado;  $a_1$ ,  $a_2$  são parâmetros constantes;  $u$  é o sinal de controle. Considere o sinal de controle como uma função linear por partes de  $x_1$ :

$$u = -\Psi x_1 \quad (1.2)$$

e assumindo que existem duas estruturas lineares neste sistema que estão associadas aos valores  $\alpha$  ou  $-\alpha$  ( $\alpha = \text{constante}$ ) do coeficiente  $\Psi$ . Seja o coeficiente  $a_2$  negativo em (1.1) e o coeficiente  $\alpha$  seja selecionado de forma que o sistema (1.1), (1.2) com  $\Psi = \alpha$  possui autovalores complexos e com  $\Psi = -\alpha$  possui autovalores reais. Os retratos de fase de ambas as estruturas estão representados na Figura 5(a) e Figura 5(b), onde cada uma das estruturas é instável. Verifica-se agora que a estabilidade assintótica pode resultar de uma mudança na estrutura. Altera-se a estrutura do sistema na reta

$$x_1 = 0, \quad s = cx_1 + x_2 = 0 \quad (c > 0, \quad c = \text{constante}) \quad (1.3)$$

onde o coeficiente  $c$  será selecionado de forma que a reta  $s = 0$  fique entre o eixo  $x_1$  e a assíntota das trajetórias hiperbólicas associadas à estrutura  $\Psi = -\alpha$  (Figura 5(b)). A Figura 5(c) é um retrato de fase do sistema com a lei de controle a estrutura variável

$$\Psi = \begin{cases} \alpha & \text{com } x_1 s > 0 \\ -\alpha & \text{com } x_1 s < 0 \end{cases}, \quad (1.4)$$

cujo retrato de fase mostra que o ponto de descrição invariavelmente alcança a linha reta de comutação  $s = 0$  de qualquer posição inicial. Nas proximidades da linha reta, as trajetórias de ambas as estruturas são direcionadas para ela; portanto, o movimento adicional prosseguirá no modo de comutação ou deslizamento ao longo da linha reta  $s = 0$ . Para encontrar um tipo de equação apropriada para a descrição do movimento em modo deslizante, vamos usar o seguinte raciocínio heurístico. Visto que no modo deslizante o ponto descritivo não pode deixar nenhuma vizinhança infinitesimal da linha reta de comutação, o valor de  $cx_1 + x_2$  é igual a zero. Como  $x_2 = \dot{x}_1$ , temos

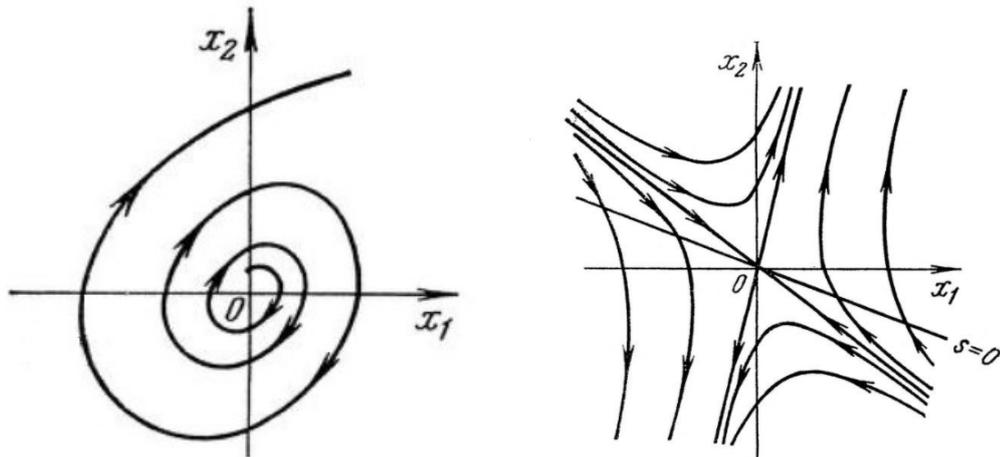
$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) é uma equação diferencial de primeira ordem, que é considerada a equação deslizante. A solução é estável com  $c > 0$  e, conseqüentemente, o sistema a estrutura variável (1.1) - (1.4) também é estável para condições iniciais arbitrárias. O que é importante é que a estabilidade resulta do uso de duas estruturas “instáveis” e da introdução deliberada de um modo deslizante no sistema.

O movimento em um modo deslizante é independente dos parâmetros da planta e distúrbios externos e o movimento depende dos fatores da equação para o plano de comutação [16].

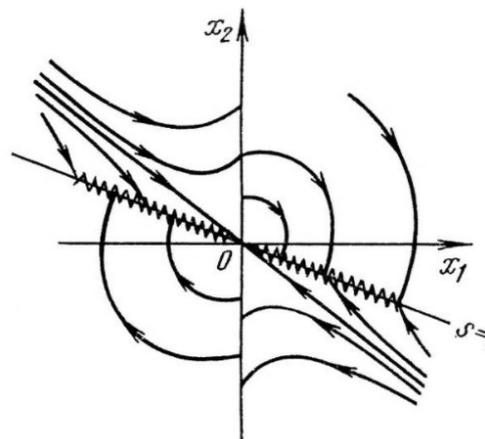
Ilustremos essa ideia de projeto com o sistema (1.1) assumindo que os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  variam no tempo e esses coeficientes não podem ser medidos e apenas suas faixas de variação são conhecidas. Em seguida, os parâmetros  $\alpha$  e  $c$  em (1.3) e (1.4) devem ser selecionados de modo que qualquer valor dos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  resultem que a linha reta de comutação seja colocada como mostrado na Figura 5(b). Neste caso, as trajetórias de fase e, conseqüentemente, o movimento além da linha de comutação  $s = 0$  dependem de  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$ , mas uma vez nesta linha o estado permanecerá nela e o movimento

posterior em modo deslizante é representado por (1.5). Como a solução da equação (1.5) depende apenas do parâmetro  $c$  que pode ser selecionado como desejado, o movimento de deslizamento no sistema não depende de mudanças nas propriedades da planta [16].



(a) Trajetória típica no caso de autovalores complexos com parte real positiva - Foco instável

(b) Retrato de fase de um ponto de sela



(c) Retrato de fase da estrutura variável

Figura 5 - Sistemas Variantes no Tempo Assintoticamente Estáveis

### 1.1 Controle por Modos Deslizantes: Observação e Regulação em Tempo Finito

Na formulação de qualquer problema de controle prático, sempre haverá uma discrepância entre a planta real e seu modelo matemático usado para o projeto do controlador. Essas discrepâncias (ou incompatibilidades) surgem de distúrbios desconhecidos externos, incertezas nos parâmetros da planta e dinâmica não modelada. Projetar leis de controle que forneçam o desempenho desejado para o sistema de malha fechada na

presença desses distúrbios/incertezas é uma tarefa muito desafiadora para um engenheiro de controle. Isso levou a um grande interesse no desenvolvimento dos chamados métodos de controle robusto que deveriam resolver este problema. Uma abordagem particular para um projeto de controlador robusto é a chamada técnica de controle de modo deslizante [17].

O sistemas de controle por modos deslizantes, também chamados de sistemas de controle a estrutura variável (*variable structure control* - VSC), neutralizam as incertezas mantendo as restrições na mudança permanente, modo chamado de *Sliding mode* - SM [18], [19], [20], [21]. Por exemplo, considere o sistema a ser estabilizado:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= A(t, x, \dot{x}) + B(t, x, \dot{x})u, \quad x, u \in R, \\ |A(t, x, \dot{x})| &\leq 1, \quad B(t, x, \dot{x}) \in [1, 2]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Qualquer linha no plano de fase  $x \times \dot{x}$  também tem o significado de uma equação diferencial. Assim, mantendo a trajetória na linha  $\sigma = \dot{x} + x = 0$  no SM  $\sigma = 0$  estabiliza assintoticamente o sistema [21]. O controle correspondente  $u = -(2 + |\dot{x}|) \text{sign } \sigma$  é um exemplo clássico de SMC, representado pela Figura 6(a). Outra opção é aplicar o controle  $u = -2 \frac{|\dot{x}|^2 + x}{\dot{x}^2 + |x|}$ . Ele estabiliza  $x$  em tempo finito e é descontínuo apenas em  $x = \dot{x} = 0$  mantendo  $x \equiv 0$  no SM de segunda ordem, conforme ilustrado na Figura 6(b).

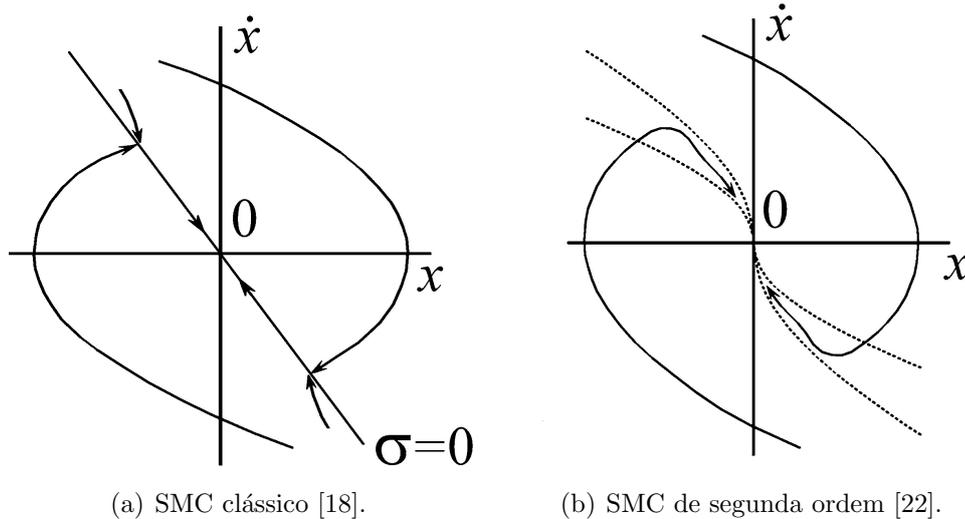


Figura 6 - Controle por modos deslizantes: observação e regulação em tempo finito

Sendo assim, a incerteza foi completamente removida por um controle (des)contínuo. Ambos os controles utilizam estimativas de  $\dot{x}$  para estabilizar  $x$ .

### 1.1.1 Definição de Filippov e Modo Deslizante

Considere uma equação diferencial  $\dot{x} = v(t, x)$ ,  $x \in R^n$ , onde  $v$  é localmente essencialmente limitado (função medida de Lebesgue). A solução segundo Filippov é uma função localmente absolutamente contínua  $x(t)$ , que quase em toda parte satisfaz  $\dot{x} \in K_F[v](t, x)$ ,  $K_F[v](t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{N=0} \overline{\text{co}} v(t, O_\delta(x)/N)$ . Onde  $\mu_L$  é a medida de Lebesgue,  $O_\delta(x)$  é a  $\delta$ -vizinhança de  $x$  e  $\overline{\text{co}}(\cdot)$  denota o contorno convexo.

Usualmente,  $v$  é contínuo em quase toda parte. Então,  $K_F[v](t, x)$  é o feixe convexo de todos os limites possíveis de  $v(t, y)$ , obtido como continuidade dos pontos  $(t, y)$  aproximados de  $(t, x)$  [21]. A solução de Filippov pode ser considerada como uma solução limite produzida por várias regularizações de troca [23]. Todas as equações diferenciais são melhor compreendidas no sentido de Filippov.

Qualquer solução de Filippov que encontra a superfície/conjunto descontínuo de uma equação diferencial é dito estar SM. Se uma restrição  $\sigma = 0$  é mantida, a notação SM  $\sigma = 0$  é usada e  $\sigma$  é chamado de variável de deslizamento [18].

### 1.1.2 Grau Relativo

A noção de grau relativo [24] é estendida aos casos não-autônomos adicionando a equação fíctícia  $i = 1$ . Prezando pela simplicidade, a seguir é considerado um sistema do tipo SISO (*Single-Input-Single-Output*). Considere o sistema SISO

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad \sigma = \sigma(t, x), \quad (1.7)$$

onde  $x \in R^n$ ,  $a, b$  e  $\sigma$  são funções suaves e  $u, \sigma(t, x) \in R$ . Se  $r$  é o grau relativo no ponto  $(t_0, x_0)$ , então

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u \quad (1.8)$$

mantém-se para algum  $h, g$ , onde a função  $g(t, x)$  não desaparece nas proximidades de  $(t_0, x_0)$ . A identificação do grau relativo é muitas vezes reduzida a encontrar a forma mais curta de diferenciação da regra da cadeia de  $\sigma$  para  $u$  e não requer o conhecimento exato do modelo [21].

### 1.1.3 Ordem do Modo Deslizante

Considere um SM  $\sigma = 0$  em um sistema em malha fechada. Seja  $\sigma$  uma função escalar contínua. A ordem de deslizamento  $k$  é o menor valor de  $k$  tal que a  $k$ -ésima derivada  $\sigma^{(k)}$  não é uma função contínua do estado e do tempo [25], [17]. O movimento correspondente  $\sigma \equiv 0$  é chamado de  $k$ -ésimo SM ou modo deslizante de ordem  $k$ .

### 1.1.4 Conexão com o Grau Relativo

Considere o sistema (1.7) com uma variável (escalar) de deslizamento  $\sigma$  do grau relativo  $r$ . Então,  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  são funções contínuas de  $t, x$ , i.e., a ordem de deslizamento nunca é menor que  $r$ .

No caso de descontinuidade de controle, o grau relativo e a ordem de deslizamento, o modo deslizante e a dinâmica zero coincidem. Nesse caso, a função  $u_{eq} = -h/g$ , encontrado de (1.8) e  $\sigma^{(r)} = 0$  é tradicionalmente chamado de controle equivalente [18]. O modo deslizante clássico [20], [18], Figura 6(a), é também chamado de primeira ordem, onde  $\sigma = 0$ .

### 1.1.5 Atenuação do Efeito de *Chattering*

O controle por modos deslizantes pode gerar vibrações indesejadas do sistema, chamadas de *Chattering* [26], que muitas vezes são consideradas a principal desvantagem deste tipo de controle. No entanto, substituindo a função  $\text{sign } \sigma$  por uma função “sigmoide”, como  $\sigma/(|\sigma| + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , em [20], produz um sistema sensível às incertezas para  $\epsilon$  finito e causa forte vibração devido a pequenos ruídos de amostragem para  $\epsilon \ll 1$  [27].

Outro método que atua na redução do efeito de *Chattering* consiste na inserção de vários integradores no sinal de controle e suas derivadas [28], [17]. Suponha que o grau relativo seja  $r$ . Então o controle descontínuo virtual  $u^{(l)}$  é aplicado para estabilizar o  $(r+l)$ -SM  $\sigma = 0$ . Correspondentemente,  $u, \dot{u}, \dots, u^{(l-1)}$  são formalmente incluídos no estado do sistema [29]. Observe que a redução deste efeito não se deve simplesmente à continuidade do controle obtido  $u(t)$ , mas é devido a  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r+l-1)}$  serem mantidos simultaneamente em zero, enquanto apenas  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  são coordenadas físicas da planta [27].

### 1.1.6 Regulação de Saída em Tempo Finito

Considere os sistemas (1.7), (1.8) de grau relativo  $r$ , assuma que

$$|h(t, x)| \leq C, \quad 0 < K_m \leq g(t, x) \leq K_M. \quad (1.9)$$

Tal suposição vale, pelo menos para qualquer região compacta operacional. Cada solução de (1.7) é assumida infinitamente extensível no tempo, desde que  $\sigma$ , suas derivadas  $\dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  e  $u$  permanecem limitados ao longo da solução.

Devido à incerteza de  $g$ ,  $h$ , alguma realimentação  $u=u(\sigma)$ ,  $\sigma = (\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$  deve ser descontínua. Esse sinal de controle é chamado quase contínuo, se for contínuo a cada  $\sigma \neq 0$ .

O problema de regulação consiste em fazer o erro de regulação  $\sigma = 0$  com realimentação  $u(t)$ , em tempo finito.

### 1.1.7 SMC Homogêneo

O sistema dinâmico incerto, representado por (1.8), satisfaz a inclusão diferencial concreta  $\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M]u$ . O controlador quase contínuo  $r$ -SMC possui a seguinte forma [30], [22]:

$$u = -\alpha \Psi_r(\sigma) = -\alpha \frac{[\sigma^{(r-1)}]^{1/\omega} + \beta_{r-2}[\sigma^{(r-2)}]^{1/\omega} + \dots + \beta_0[\sigma]^{1/\omega}}{|\sigma^{(r-1)}|^{1/\omega} + \beta_{r-2}|\sigma^{(r-2)}|^{1/\omega} + \dots + \beta_0|\sigma|^{1/\omega}}, \quad \omega > 0. \quad (1.10)$$

De acordo com a referencia [21], para qualquer  $\omega > 0$ , existe  $\beta_0, \dots, \beta_{r-2} > 0$  tal que o controlador (1.10) estabiliza  $\sigma$  em tempo finito para qualquer  $\alpha > 0$  suficientemente grande apenas dependendo de  $K_m, K_M, C$ .

As funções  $\Psi_r(\sigma)$  são invariantes com respeito a transformação  $\sigma^{(i)} \mapsto \kappa^{r-i}\sigma^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r-1, \kappa > 0$ . Esses controladores são chamados de  $r$ -SM homogêneos [31], [17]. Obviamente,  $|\Psi_r(\sigma)| \leq 1$ , i.e.,  $|u| \leq \alpha$ . Na equação (1.11) estão os controladores válidos

para  $r = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\omega = r$ :

$$\begin{aligned}
r = 1 : u &= -\alpha \operatorname{sign} \sigma; & r = 2 : u &= -\alpha \frac{[\dot{\sigma}]^2 + \sigma}{\ddot{\sigma}^2 + |\sigma|}; \\
r = 3 : u &= -\alpha \frac{\ddot{\sigma}^3 + 2[\dot{\sigma}]^{\frac{3}{2}} + \sigma}{|\ddot{\sigma}|^3 + 2|\dot{\sigma}|^{\frac{3}{2}} + |\sigma|}; & r = 4 : u &= -\alpha \frac{[\ddot{\sigma}]^4 + 2[\dot{\sigma}]^2 + 2[\dot{\sigma}]^{\frac{4}{3}} + \sigma}{\ddot{\sigma}^4 + 2\ddot{\sigma}^2 + 2\dot{\sigma}^{\frac{4}{3}} + |\sigma|}; \\
r = 5 : u &= -\alpha \frac{[\sigma^{(4)}]^5 + 6[\ddot{\sigma}]^{\frac{5}{2}} + 5[\ddot{\sigma}]^{\frac{5}{3}} + 3[\dot{\sigma}]^{\frac{5}{4}} + \sigma}{|\sigma^{(4)}|^5 + 6|\ddot{\sigma}|^{\frac{5}{2}} + 5|\ddot{\sigma}|^{\frac{5}{3}} + 3|\dot{\sigma}|^{\frac{5}{4}} + |\sigma|}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

### 1.1.8 Diferenciação e Filtragem

Seja  $\operatorname{Lip}_n(L)$  o conjunto de todas as funções  $R_+ \rightarrow R$ , no qual a  $n$ -ésima derivada tem a constante de Lipschitz  $L > 0$ . Assumindo que o sinal de interesse  $f(t)$ , dado por  $f(t) = f_0(t) + \eta(t)$ , consiste em uma perturbação mensurável de Lebesgue  $\eta(t)$  e um sinal básico desconhecido  $f_0(t)$ ,  $f_0 \in \operatorname{Lip}_n(L)$ . A perturbação  $\eta$  é limitada,  $|\eta| \leq \varepsilon_0$ . O número  $\varepsilon_0 \geq 0$  é desconhecido.

O problema é estimar as derivadas  $f_0^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , em tempo real por saídas  $z_i(t)$  de diferenciadores. Essa estimativa deve ser exata na ausência de perturbações após algum transiente em tempo finito. As precisões de estado estacionário  $\sup |z_i - f_0^{(i)}|$  devem continuamente depender de  $\varepsilon_0$ .

### 1.1.9 Diferenciação Assintoticamente Ótima

Qualquer diferenciador exato nos sinais de entrada  $f_0, f \in \operatorname{Lip}_n(L)$  tem o pior caso de precisão de estado estável  $\sup |z_i - f_0^{(i)}| = 2^{\frac{i}{n+1}} K_{n,i} L^{\frac{i}{n+1}} \varepsilon_0^{\frac{n+1-i}{n+1}}$  para algum  $f_0, f$  e  $|f(t) - f_0(t)| \leq \varepsilon_0$  [32]. Aqui  $K_{n,i} \in [1, \pi/2]$  são as constantes de Kolmogorov [33], por exemplo  $K_{1,1} = \sqrt{2}$ .

Um diferenciador é denominado assintoticamente ideal [32], [34] se por  $\mu_i > 0$  a precisão de estado estacionário  $\sup |z_i - f_0^{(i)}| \leq \mu_i L^{\frac{i}{n+1}} \varepsilon_0^{\frac{n+1-i}{n+1}}$  detém para qualquer sinal  $f_0 \in \operatorname{Lip}_n(L)$  e qualquer perturbação  $\eta$ ,  $|\eta(t)| \leq \varepsilon_0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Introduzindo o número  $\eta_f \geq 0$  que também é chamado de filtro diferenciador de

ordem. O **diferenciador de filtragem** [34], [35] tem a forma

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -\tilde{\lambda}_{n+n_f} L^{\frac{1}{n+n_f+1}} [w_1]^{\frac{n+n_f}{n+n_f+1}} + w_2, \dots \\ \dot{w}_{n_f-1} &= -\tilde{\lambda}_{n+2} L^{\frac{n_f-1}{n+n_f+1}} [w_1]^{\frac{n+2}{n+n_f+1}} + w_{n_f}, \\ \dot{w}_{n_f} &= -\tilde{\lambda}_{n+1} L^{\frac{n_f}{n+n_f+1}} [w_1]^{\frac{n+1}{n+n_f+1}} + z_0 - f(t),\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= -\tilde{\lambda}_n L^{\frac{n_f+1}{n+n_f+1}} [w_1]^{\frac{n}{n+n_f+1}} + z_1, \dots \\ \dot{z}_{n-1} &= -\tilde{\lambda}_1 L^{\frac{n+n_f}{n+n_f+1}} [w_1]^{\frac{1}{n+n_f+1}} + z_n, \\ \dot{z}_n &= -\tilde{\lambda}_0 L \operatorname{sign}(w_1).\end{aligned}\tag{1.13}$$

No caso de  $n_f = 0$  o primeiro  $n_f$  da equação (1.12) desaparece e  $w_1 = z_0 - f(t)$  é formalmente substituído por  $w_1$  produzindo o conhecido diferenciador de Levant [25]. No caso de  $n = 0$  apenas a equação para  $z_0$  permanece na parte inferior da equação (1.13).

Os parâmetros  $\tilde{\lambda}_i$  são facilmente encontrados usando os parâmetros  $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ ,  $p = n + n_f$ , da forma recursiva do diferenciador [32], [25]:  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$ ,  $\tilde{\lambda}_p = \lambda_p$  e  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j \tilde{\lambda}_{j+1}^{j/(j+1)}$ ,  $j = p - 1, p - 2, \dots, 1$ . Uma sequência infinita de parâmetros  $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$  pode ser construída [25], fornecendo os coeficientes  $\tilde{\lambda}_i$  de (1.12), (1.13) para todo  $n$ ,  $n_f \geq 0$ . Em particular,  $\lambda = \{1, 1; 1, 5; 2; 3; 5; 7; 10; 12, \dots\}$  é suficiente para  $n + n_f \leq 7$  [32]. Os parâmetros correspondentes  $\tilde{\lambda}_i$  são listados na Tabela 1.

Para resumir, denote (1.12), (1.13), por

$$\dot{\omega} = \Omega_{n,n_f}(\omega, z_0 - f, L), \quad \dot{z} = D_{n,n_f}(\omega_1, z, L),\tag{1.14}$$

com a erro de rastreamento  $z_0(t) - f(t)$  destacado como um argumento separado. Es-

0	1,1							
1	1,1	1,5						
2	1,1	2,12	2					
3	1,1	3,06	4,16	3				
4	1,1	4,57	9,30	10,03	5			
5	1,1	6,75	20,26	32,24	23,72	7		
6	1,1	9,91	43,65	101,96	110,08	47,69	10	
7	1,1	14,13	88,78	295,74	455,40	281,37	84,14	12

Tabela 1 - Parâmetros  $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n+n_f}$  do diferenciador (1.12), (1.13) para  $n+n_f = 0, 1, \dots, 7$

tendendo as condições acima na entrada, deixando a perturbação ter a forma  $\eta(t) = \eta_0(t) + \eta_1(t) + \dots + \eta_{n_f}(t)$ , onde cada  $\eta_k$ ,  $k = 0, \dots, n_f$ , é um sinal de Lebesgue mensurável

localmente integrável. Para cada  $k$  existe uma solução  $\xi_k(t)$  uniformemente limitada da equação  $\xi^{(k)} = \eta_k$ ,  $|\xi(t)| \leq \varepsilon_k$ . Apesar de  $\eta_1, \dots, \eta_{n_f}$  serem possivelmente ilimitados, eles podem ser descritos como sendo pequenos em média.

O diferenciador no tempo finito fornece a precisão

$$\begin{aligned} |z_i(t) - f_0^{(i)}(t)| &\leq \mu_i L \rho^{n+1-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \rho &= \max \left[ \left( \frac{\varepsilon_0}{L} \right)^{1/n+1}, \dots, \left( \frac{\varepsilon_{n_f}}{L} \right)^{1/(n+n_f+1)} \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

para algum  $\mu_i > 0$  apenas depende dos parâmetros  $\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_{n+n_f}$  [35].

Levando  $\eta_1, \dots, \eta_{n_f} = 0$ , obtém-se que o diferenciador (1.12), (1.13) é assintoticamente ideal. Além disso, também é aplicável no caso em que a componente de perturbação  $\eta_k$  é relativamente pequena em qualquer intervalo de tempo finito não excedendo algum  $T_k > 0$  em seu comprimento [35]. A dinâmica do erro do diferenciador é homogênea [35].

#### 1.1.10 SMC Homogêneo de Realimentação de Saída

O problema SMC declarado da estabilização exata de tempo finito de  $\sigma$  é resolvido pela realimentação de saída SMC

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \Omega_{r-1, n_f}(w, z_0 - \sigma, L), \\ \dot{z} &= D_{r-1, n_f}(w_1, z, L), \\ u &= -\alpha \Psi(z), \quad L \geq C + K_M \alpha \end{aligned} \quad (1.16)$$

para qualquer ordem de filtragem  $n_f \geq 0$ . A prova é trivial, desde que  $\sigma \in \text{Lip}_{r-1}(L)$ .

Considere que a variável deslizante é amostrada com a mesma perturbação  $\eta(t) = \eta_0(t) + \eta_1(t) + \dots + \eta_{n_f}(t)$  como acima. Então para qualquer  $\alpha > 0$  suficientemente grande, o controle (1.16) em tempo finito é preciso

$$\begin{aligned} |\sigma_0^{(i)}(t)| &\leq \tilde{\mu}_i \rho^{r-i}, \quad i = 0, 1, \dots, r-1, \\ \rho &= \max \left[ \left( \frac{\varepsilon_0}{L} \right)^{1/r}, \dots, \left( \frac{\varepsilon_{n_f}}{L} \right)^{1/(r+n_f)} \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

para algum  $\tilde{\mu}_i > 0$  apenas dependendo dos parâmetros  $\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_{n+n_f}$ ,  $L$ ,  $\alpha$ ,  $C$ ,  $K_m$ ,  $K_M$ .

Observe que o limite  $L$  pode ser muito difícil (50–100 vezes maior do que o ne-

cessário) e o conhecimento de  $C$ ,  $K_m$ ,  $K_M$  não é realmente exigido, pois o parâmetro de controle  $\alpha$  geralmente é encontrado por simulação.

### 1.1.11 Discretização

Na realidade, o sistema evolui de forma contínua no tempo, enquanto a amostragem e a injeção de controle são realizados em tempo discreto. Correspondentemente, a dinâmica do diferenciador é substituída com alguma integração numérica da equação (1.14).

Considere a entrada amostrada nos instantes  $t_0, t_1, \dots, t_k \rightarrow \infty$ ,  $\tau_k = t_{k+1} - t_k > 0$ ,  $\tau_k \leq \tau$ .

Discretização do controle de realimentação de saída (1.16) é feito pelo método de Euler de uma etapa com  $u$  e  $z$  mantidos constantes ao longo de cada intervalo de amostragem. Nesse caso, a precisão de (1.17) é mantida para  $\rho = \max [(\varepsilon/L)^{1/r}, \tau]$  com coeficiente  $\tilde{\mu}_i$  possivelmente alterado, fornecendo  $\eta_1(t) + \dots + \eta_{n_f}(t) \equiv 0$ , ou seja, apenas  $\eta_0$  está presente [36]. A fórmula geral é mais complicada e é omitida aqui [35].

A discretização autônoma do diferenciador (1.14) assume a forma [35]

$$\begin{aligned} w(t_{k+1}) &= w(t_k) + \Omega_{n,n_f}(w(t_k), z_0(t_k) - f(t_k), L)\tau_k, \\ z(t_{k+1}) &= z(t_k) + D_{n,n_f}(w_1(t_k), z(t_k), L)\tau_k + H_n(z(t_k), \tau_k), \\ H_n(z(t_k), \tau_k) &= (H_{n,0}, \dots, H_{n,n})^T, H_{n,n-1} = H_{n,n} = 0, \\ H_{n,i} &= \frac{1}{2!}z_i + 2(t_k)\tau_k^2 + \dots + \frac{1}{(n-i)!}z_n(t_k)\tau_k^{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Os termos  $H_n$  do tipo Taylor são necessários apenas para melhorar a precisão em relação a  $\tau$  na presença de ruídos muito pequenos [37]. A equação (1.15) permanece verdadeira quando apenas a perturbação  $\eta_0$  está presente e  $\rho = \max [(\varepsilon/L)^{1/n+1}, \tau]$ . A fórmula geral é mais complicada [35].

### 1.1.12 Exemplos Numéricos

#### • Diferenciação Numérica

Considere os seguintes sinais

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0(t) + \eta(t), \\ f_0(t) &= 0,5\text{sent} + 0,8\cos(0,8t), \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde  $\eta(t)$  é uma perturbação desconhecida. Considere o intervalo de amostragem constante,  $\tau_k = \tau$ . O diferenciador de filtragem (1.18) de ordem  $n = 5$  e ordem de filtragem  $n_f = 2$  é aplicado com  $L = 1$ ,  $\tau = 10^{-4}$ ,  $z(0) = 0$  e  $w(0) = 0$ . Obviamente,  $|f_0^{(6)}| \leq L$ . Os coeficientes foram retirados da Tabela 1.

O desempenho do diferenciador para  $\eta = 0$  é demonstrado na Figura 7(a). Considere  $|\Sigma|_{5,2} = (|w_1|, |w_2|, |z_0 - f_0|, \dots, |z_5 - f_0^{(5)}|)$ . A precisão de diferenciação para  $t \in [10, 20]$  é fornecida pela desigualdade  $|\Sigma|_{5,2} \leq (3,0 \cdot 10^{-23}; 2,4 \cdot 10^{-19}; 1,3 \cdot 10^{-15}; 1,4 \cdot 10^{-12}; 1,2 \cdot 10^{-9}; 5,1 \cdot 10^{-7}; 1,1 \cdot 10^{-4}; 0,012)$ . Esta precisão é praticamente a melhor que pode ser obtida na presença de erros de arredondamento digital devido ao formato de número padrão de dupla precisão [32].

Considere  $\eta(t) = 3 \cos(10000 t) - 6 \sin(20000 t) - 4 \cos(70000 t) + \eta_G(t)$ ,  $\eta_G \in N(0, 0, 1^2)$ , onde  $\eta_G(t)$  é um sinal Gaussiano com o desvio padrão 0,1. O desempenho correspondente do mesmo diferenciador aparece na Figura 7(b). A precisão é  $|\Sigma|_{5,2} \leq (1,2 \cdot 10^{-5}; 1,8 \cdot 10^{-3}; 0,015; 0,14; 0,60; 1,4; 1,9; 1,1)$ .

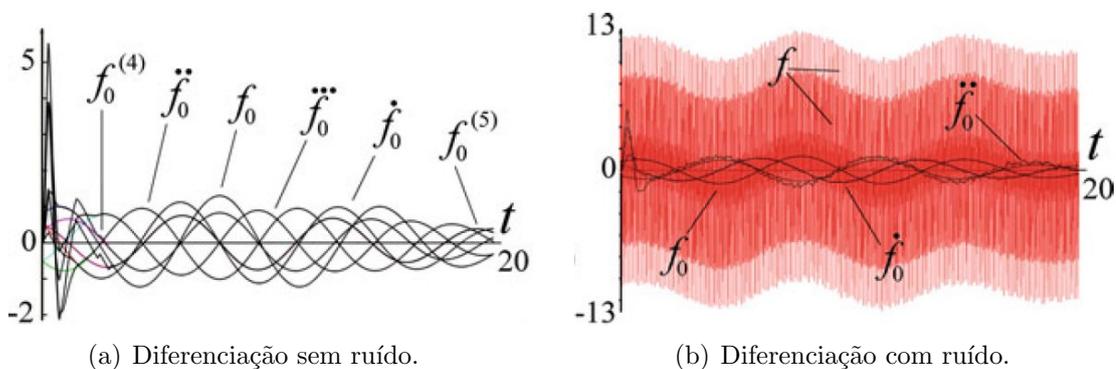


Figura 7 - Desempenho do diferenciador (1.18) com  $n = 5$ ,  $n_f = 2$ ,  $L = 1$  para  $\tau = 10^{-5}$  e entrada (1.19): apenas estimativas de  $f_0$ ,  $\dot{f}_0$ ,  $\ddot{f}_0$  são mostradas

- **Controle de um Carro**

Considere um modelo cinemático simples do tipo “bicicleta” [38]

$$\dot{x} = V \cos(\varphi), \quad \dot{y} = V \sin(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \frac{V}{\Delta} \tan \theta, \quad \dot{\theta} = u, \quad (1.20)$$

onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas do ponto médio do eixo traseiro (Figura 8(a)),  $\Delta = 5m$  é a distância entre os dois eixos,  $\varphi$  é o ângulo de orientação,  $V = 10m/s$  é a velocidade longitudinal constante,  $\theta$  é o ângulo de direção (ou seja, a entrada real) e  $u = \dot{\theta}$  é o controle.

O objetivo é se mover ao longo da trajetória  $(x(t), y(t)) = (x(t), g(t))$  enquanto que  $g(t)$ ,  $y(t)$  são amostrados em tempo real. Correspondentemente, introduzimos a variável deslizante  $\sigma = y(t) - g(t)$  amostrada com o intervalo de tempo  $\tau$  e perturbação  $\eta(t)$ . Considere  $g(t) = 10\sin(0,05x(t)) + 5$ .

Obviamente,  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  contém  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  que contém  $\theta$  e  $\dot{\theta} = u$ . Assim, o grau relativo é 3. Assim, podemos aplicar o controlador 3-SM padrão (1.11), (1.16) para  $r = 3$ ,  $n_f = 2$ ,  $L = 50$ ,  $\alpha = 0,5$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $L$  são encontrados por simulação. O diferenciador de segunda ordem começa em  $t = 0$ ; o controle é aplicado de  $t = 0$  a  $t = 40$ . A integração é realizada pelo método de Euler com o intervalo de tempo  $10^{-5}s$ .

Considere primeiro o caso das medidas exatas,  $\eta = 0$ ,  $\tau = 10^{-5}s$ . O desempenho correspondente é mostrado na Figura 8(a), Figura 8(b), Figura 8(c) e Figura 8(d). A precisão do SM  $|\sigma| \leq 1,1 \cdot 10^{-12}m$ ,  $|\dot{\sigma}| \leq 1,3 \cdot 10^{-5}m/s$ ,  $|\ddot{\sigma}| \leq 0,002m/s^2$  é mantida.

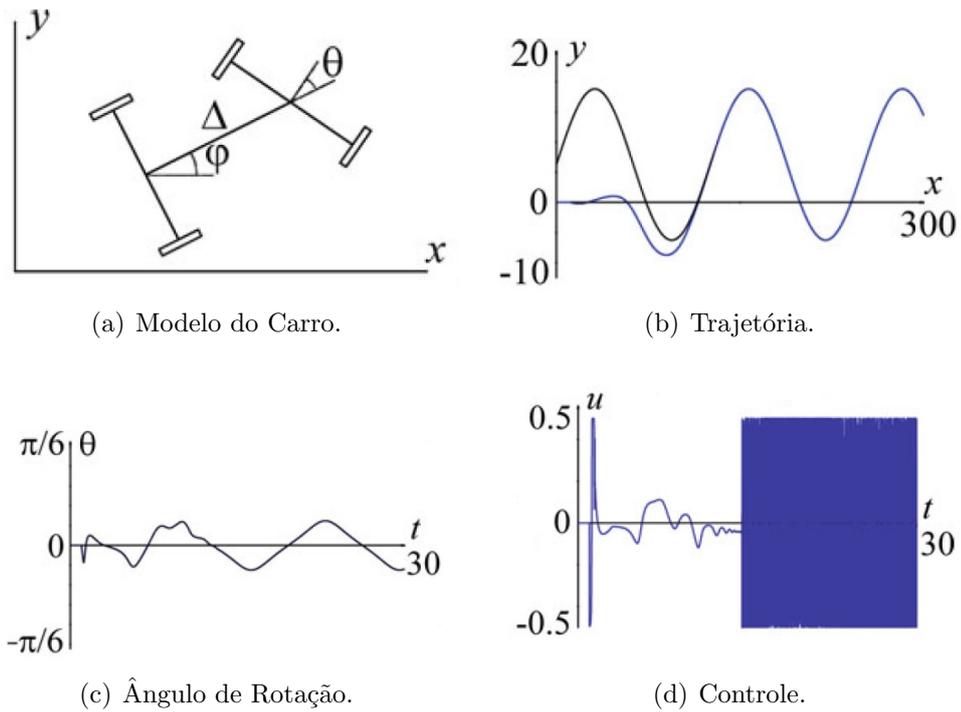
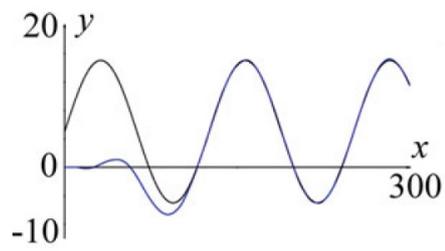
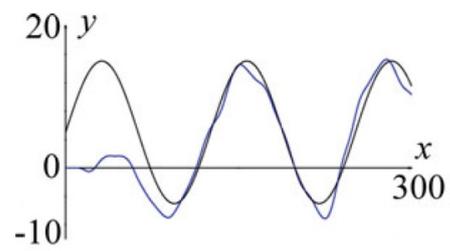
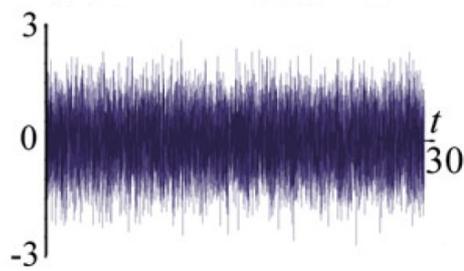


Figura 8 - Desempenho do controle do carro 3-SM (1.16) para  $r = 3$ ,  $n_f = 2$ ,  $L = 50$ ,  $\alpha = 0,5$  e passo de integração/amostragem  $\tau = 10^{-5}$

Agora introduz-se a perturbação  $\eta(t) = 2 \cos(10000t) + \eta_G(t)$ ,  $\eta_G \in N(0, 0, 5^2)$ , ilustrada na Figura 9(c). O desempenho correspondente é mostrado na Figura 9(a), Figura 9(b), Figura 9(c) e Figura 9(d). A precisão do SM  $|\sigma| \leq 0,041m$ ,  $|\dot{\sigma}| \leq 0,67m/s$ ,  $|\ddot{\sigma}| \leq 5,2m/s^2$  é mantida para o passo de amostragem  $\tau = 10^{-5}$ , vide Figura 9(a). A precisão se deteriora para passo de amostragem  $\tau = 0,01s$  a  $|\sigma| \leq 2,8m$ ,  $|\dot{\sigma}| \leq 2,7m/s$  e  $|\ddot{\sigma}| \leq 6,m/s^2$ , de acordo com Figura 9(b) e Figura 9(d). O desempenho ainda é bastante aceitável.

(a) Trajetória para  $\tau = 10^{-5}$ .(b) Trajetória para  $\tau = 10^{-2}$ .

(c) Perturbação.

(d) Ângulo de Rotação para  $\tau = 10^{-2}$ .

Figura 9 - Desempenho do controle do carro 3-SM (1.16) para  $r = 3$ ,  $n_f = 2$ ,  $L = 50$ ,  $\alpha = 0,5$ , passo de amostragem:  $\tau = 10^{-5}s$  e  $\tau = 0,01s$  e ângulo de rotação  $\theta$  para  $\tau = 0,01s$ .

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Um passo decisivo na modelagem e análise dinâmica das epidemias foi a introdução da abordagem compartimental *Susceptible, Infectious and Removed* (SIR). Segundo os próprios autores [7], a dinâmica epidemiológica pode ser explicada da seguinte forma: uma ou mais pessoas **Infectadas** são introduzidas em uma comunidade de indivíduos, mais ou menos **Suscetíveis** à doença em questão. A doença se espalha de afetado para não afetado por meio do contato. Cada pessoa infectada percorre o curso da doença e, finalmente, é **Removida** do número dos enfermos, por recuperação ou por falecimento.

O modelo SIR clássico, como apresentado em [7], limita-se ao caso em que todos os membros da comunidade são inicialmente igualmente suscetíveis à doença em um cenário onde apenas a chamada imunização de rebanho é cabível. Em outras palavras, todos os membros da comunidade podem ser contaminados e não são consideradas intervenções com o intuito de atenuar as consequências do surto epidemiológico como, por exemplo, administração de medicamentos que diminuam o número de mortes dos acometidos, vacinação que confira imunidade a população ou isolamento social que garanta a não-disseminação do agente causador da doença.

Do ponto de vista matemático, o modelo SIR é um sistema dinâmico não-linear de primeira ordem dado por,

$$\dot{S}(t) = -\frac{\alpha}{N}S(t)I(t), \quad (2.1)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\alpha}{N}S(t)I(t) - \lambda I(t), \quad (2.2)$$

$$\dot{R}(t) = \lambda I(t), \quad (2.3)$$

nas quais a variável  $t \in \mathfrak{R}^+$  representa o instante de tempo,  $S(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $I(t) \in \mathfrak{R}$  e  $R(t) \in \mathfrak{R}$  são variáveis de estado representando, respectivamente, os números de pessoas Suscetíveis, Infectadas e Removidas,  $\alpha > 0$  a taxa constante de propagação da doença,  $\lambda > 0$  a taxa constante com a qual os indivíduos passam de infectados para removidos do quadro epidêmico e  $N$  o número total de indivíduos.

Apesar da vasta utilização do modelo SIR (2.1)–(2.3), do ponto de vista de engenharia seu emprego é limitado a análise e predição do comportamento epidemiológico uma vez que intervenções como vacinas e isolamento social, medidas que diminuem o contágio

e encurtam a duração do surto, não são contempladas. Mesmo assim, não é difícil encontrar na literatura contribuições que se afastam da realidade ao assumirem uma pequena alteração em (2.1)–(2.3) por meio da troca de  $\alpha$  por

$$\alpha(t) = \alpha_0 - u(t), \quad (2.4)$$

onde a contante  $\alpha_0 > 0$  e  $u(t) \in [0, 1]$  representa o sinal de controle, no contexto, a ação governamental (nível de isolamento social ou de vacinação da população). Por mais simples e tentadora que pareça tal mudança, há uma contradição nesta abordagem que torna os resultados questionáveis. Mais precisamente, o comportamento do número básico de reprodução  $R_0$ .

O número básico de reprodução ( $R_0$ ), também chamado de razão ou taxa de reprodução básica ou taxa reprodutiva básica, é uma métrica epidemiológica usada para descrever a contagiosidade ou transmissibilidade de agentes infecciosos [39]. Interpretado como o número esperado de infecções secundárias decorrentes de um único indivíduo durante todo o seu período infeccioso [40], é definido matematicamente como a taxa de variação instantânea de casos com relação aos removidos [41], *i.e.*,

$$R_0(t) := \frac{d(I(t) + R(t))}{dR(t)} = \frac{\dot{I}(t) + \dot{R}(t)}{\dot{R}(t)}. \quad (2.5)$$

Por exemplo, para (2.1)–(2.3) tem-se o número básico de reprodução dado por

$$R_0(t) = \frac{\alpha S(t)}{\lambda N}. \quad (2.6)$$

Desta forma, é possível reescrever (2.1)–(2.3) como

$$\dot{S}(t) = -\lambda R_0(t)I(t), \quad (2.7)$$

$$\dot{I}(t) = \lambda R_0(t)I(t) - \lambda I(t), \quad (2.8)$$

$$\dot{R}(t) = \lambda I(t). \quad (2.9)$$

Note que se  $\alpha$  considerado variante, como em (2.4),

$$R_0(t) = \frac{(\alpha_0 - u(t)) S(t)}{\lambda N}. \quad (2.10)$$

Portanto, assumir (2.4) e ao mesmo tempo considerar o número básico de reprodução ( $R_0(t)$ ) como uma constante é de fato um equívoco do ponto de vista de controle tanto quanto do ponto de vista da identificação e predições a partir do modelo SIR. Perpassando essa discussão, assumindo que de fato a taxa de contaminação possa ser considerada como (2.4), depara-se com outro problema, a falta de memória da variável  $R_0(t)$ . A hipótese de (2.4) está atrelada com possibilidade de  $R_0(t)$  variar infinitesimalmente de seu valor máximo ( $\max\{R_0(t)\} = \frac{\alpha_0}{\lambda}$ ) ao mínimo ( $\min\{R_0(t)\} = 0$ ), de maneira recíproca, o que de fato é algo inviável.

Motivado por tais limitações, e inspirado pelas contribuições de [7] e [10], neste trabalho é proposto um novo modelo compartimental denominado *Susceptible, Infected, Recovered, Dead and Quarantined* (SIRDQ), no qual

$$\dot{S}(t) = -\frac{\alpha}{N}S(t)I(t) + \frac{\beta}{N}S(t)Q(t) - uS(t), \quad (2.11)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\alpha}{N}S(t)I(t) - \lambda_1 I(t) - \lambda_2 I(t), \quad (2.12)$$

$$\dot{R}(t) = \lambda_1 I(t), \quad (2.13)$$

$$\dot{D}(t) = \lambda_2 I(t), \quad (2.14)$$

$$\dot{Q}(t) = -\frac{\beta}{N}S(t)Q(t) + uS(t), \quad (2.15)$$

nas quais  $S(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $I(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $R(t) \in \mathfrak{R}$ ,  $D(t) \in \mathfrak{R}$  e  $Q(t) \in \mathfrak{R}$  são variáveis de estado que representam, respectivamente, os números de pessoas Suscetíveis, Infectadas, Recuperadas, Mortas e em Quarentena,  $u \in [0, 1]$  consiste na ação governamental não-farmacêutica, nível de isolamento social, enquanto  $\alpha > 0$  é a taxa constante de propagação da doença,  $\beta > 0$  é a taxa constante com a qual pessoas abandonam a quarentena,  $\lambda_1 > 0$  a taxa constante com a qual os indivíduos passam de infectados para recuperados,  $\lambda_2 > 0$  a taxa constante com a qual os indivíduos passam de infectados para mortos e

$$N = S(t) + I(t) + R(t) + D(t) + Q(t) \quad (2.16)$$

representa o número total de indivíduos.

Note que (2.11)-(2.15) permite que se leve em conta aspectos importantes deixados de lado na modelagem SIR. O modelo SIRDQ considera a ação governamental  $u$  que força o isolamento social, por meio da quarentena, atenuando as consequências do surto,

infectados, sequelas e óbitos. Ao mesmo tempo, tal modelagem contempla o fenômeno de queda de adesão à quarentena por meio do termo não-linear  $\frac{\beta}{N}S(t)Q(t)$ . Em cenários onde ações farmacológicas não estão disponíveis ou ainda em fase de teste, a não adesão à quarentena tem efeito direto no prolongamento do surto e queda da economia.

Finalmente, de acordo com [41], o número básico de reprodução  $R_0(t)$  do modelo SIRDQ é definido por

$$R_0(t) := \frac{\dot{I} + \dot{R} + \dot{D}}{\dot{R} + \dot{D}} = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{S(t)}{N}, \quad (2.17)$$

cuja derivada temporal satisfaz

$$\dot{R}_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ -\alpha \frac{S(t)}{N} \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{S(t)}{N} \frac{Q(t)}{N} - u \frac{S(t)}{N} \right]. \quad (2.18)$$

## 2.1 Objetivo de Controle

O potencial de uma epidemia é baseado na magnitude do valor de  $R_0(t)$ . Espera-se que um surto continue se  $R_0(t) > 1$  e termine se  $R_0(t) < 1$ . Então, com a intenção de frear o surto epidemiológico, o objetivo de controle é definido como a regulação  $R_0(t)$  em um valor de referência  $R_0^{\text{ref}} \in ]0, 1[$ . Ou seja, procura-se projetar  $u$  tal que o erro de regulação

$$\tilde{R}_0(t) := R_0(t) - R_0^{\text{ref}}, \quad (2.19)$$

com dinâmica

$$\dot{\tilde{R}}_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ -\alpha \frac{S(t)}{N} \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{S(t)}{N} \frac{Q(t)}{N} - u \frac{S(t)}{N} \right], \quad (2.20)$$

seja levado para zero. Para alcançar este objetivo, no próximo capítulo duas estratégias de controle baseadas em modos deslizantes serão apresentadas.

Ao longo deste trabalho, as seguintes hipóteses são consideradas:

- (H1)** Durante os primeiros estágios de uma epidemia, em uma grande população, o número de pessoas suscetíveis pode ser considerado constante, já que qualquer alteração é pequena em comparação ao número total de indivíduos  $N$  [7].

Para efeito de análise, utiliza-se a hipótese para simplificação da dinâmica de  $\tilde{R}_0(t)$  dada por (2.20). O argumento de que a população é grande o suficiente para que o número de indivíduos suscetíveis seja considerado constante durante o período inicial da epidemia ( $S(t)/N \approx 1$ ) aliado a rápida resposta dos controladores por modos deslizantes, com a justificativa de que estes são empregados desde o início do surto, permite que se reescreva (2.20) como

$$\dot{\tilde{R}}_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ -\alpha \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{Q(t)}{N} - u \right]. \quad (2.21)$$

**(H2)** Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em (2.11)-(2.15) são incertos, no entanto seus limitantes positivos são conhecidos, de tal forma que:

$$\underline{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha}, \quad \underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}, \quad (2.22)$$

$$\underline{\lambda}_1 < \lambda_1 < \bar{\lambda}_1 \quad \text{e} \quad \underline{\lambda}_2 < \lambda_2 < \bar{\lambda}_2. \quad (2.23)$$

**(H3)** A variável  $R_0(t)$  em (2.17) é uma saída da planta (2.11)–(2.15), *i. e.*, está disponível para realimentação.

Note que é plausível a hipótese uma vez que, na prática, dados são divulgados e ações governamentais são tomadas com intervalo de amostragem  $h = 1$  [dia] [42]. Dessa forma, o número básico de reprodução em (2.17) pode ser extraído diariamente a partir dos dados através de uma equação a diferenças recursiva dada por

$$\hat{R}_0(t) := \frac{I(t) - I(t-1) + R(t) - R(t-1) + D(t) - D(t-1)}{R(t) - R(t-1) + D(t) - D(t-1)}, \quad (2.24)$$

onde  $t \in N$  representa o dia em questão.

### 3 CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES PARA O CONTROLE EPIDEMIOLÓGICO DA COVID-19

A teoria de controle por modos deslizantes é considerada uma das principais estratégias para lidar com sistemas incertos. O modo deslizante clássico, também chamado de primeira ordem, é capaz de levar a saída de um dado sistema dinâmico para zero em tempo finito e mantê-la nesta situação de maneira precisa e robusta através de um sinal de controle por chaveamento em alta frequência [18]. Tal chaveamento por vezes é um fenômeno não-desejado e é de costume a utilização de um filtro passa-baixas  $u_{av} = \frac{1}{\tau+1}u$ , filtrando  $u$ , no projeto para que se alcance uma boa estimativa do controle equivalente. O controle equivalente seria um sinal contínuo que representaria o mínimo do esforço de controle capaz de manter o modo deslizante mas que, no entanto, só existe teoricamente.

Para um projeto de controle por modos deslizantes, a primeira etapa é definir uma superfície deslizante que caracterizaria a dinâmica desejada a ser alcançada. A segunda etapa é o projeto de leis de controle que essencialmente levaria o sistema a alcançar e permanecer na dinâmica desejada (superfície deslizante). Uma vez que o sistema atinge a superfície deslizante, diz-se que está em modo deslizante, no qual o sistema teria propriedade de robustez [15]. Portanto, para esta dissertação foi definido que:

#### 3.1 Lei de Controle

A lei de controle à estrutura variável

$$u = \begin{cases} \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \delta, & \text{se } \tilde{R}_0(t) > 0 \\ -\bar{\alpha} + \underline{\beta} - \delta, & \text{se } \tilde{R}_0(t) < 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde  $\delta > 0$  é uma constante suficientemente pequena que satisfaz  $\delta + \bar{\alpha} < \underline{\beta}$ , é utilizada com a finalidade de assegurar que a superfície de deslizamento  $\tilde{R}_0(t) = 0$  é alcançada em tempo finito.

#### 3.2 Análise de Estabilidade

**Teorema** Considere o sistema epidemiológico SIRDQ (2.11)-(2.15) com dinâmica do número básico de reprodução  $R_0(t)$  dada por (2.18), erro de regulação  $\tilde{R}_0(t)$  em (2.19),

e lei de controle  $u$  em (3.1). Se todas as hipóteses (H1)–(H3) são satisfeitas, então a superfície de deslizamento  $\tilde{R}_0(t) = 0$  é alcançada em tempo finito.

**Prova** Considere a seguinte função de energia

$$V = \tilde{R}_0^2(t), \quad (3.2)$$

cuja derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = 2\tilde{R}_0(t)\dot{\tilde{R}}_0(t). \quad (3.3)$$

Substituindo (2.21) em (3.3),

$$\dot{V} = 2\tilde{R}_0(t)\frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ -\alpha\frac{I(t)}{N} + \beta\frac{Q(t)}{N} - u \right]. \quad (3.4)$$

Se  $\tilde{R}_0(t) > 0$ , substituindo (3.1), a equação (3.4) torna-se

$$\dot{V} = 2|\tilde{R}_0(t)|\frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ -\alpha\frac{I(t)}{N} + \beta\frac{Q(t)}{N} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \delta \right]. \quad (3.5)$$

De (2.16) pode-se concluir que  $\frac{I(t)}{N} < 1$  e  $\frac{Q(t)}{N} < 1$ . Portanto,

$$\dot{V} < 2|\tilde{R}_0(t)|\frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} [\alpha + \beta - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \delta]. \quad (3.6)$$

Aplicando-se os majorantes (2.22) em (3.6), chega-se a

$$\dot{V} < -2\frac{\alpha\delta}{\lambda_1 + \lambda_2}|\tilde{R}_0(t)|. \quad (3.7)$$

Se  $\tilde{R}_0(t) < 0$ , substituindo (3.1), a equação (3.4) torna-se

$$\dot{V} = -2|\tilde{R}_0(t)|\frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ -\alpha\frac{I(t)}{N} + \beta\frac{Q(t)}{N} + \bar{\alpha} - \underline{\beta} + \delta \right]. \quad (3.8)$$

Aplicando-se os majorantes (2.22) em (3.8), chega-se a

$$\dot{V} < -2\frac{\alpha\delta}{\lambda_1 + \lambda_2}|\tilde{R}_0(t)|. \quad (3.9)$$

Logo é fácil verificar que (3.9) também é satisfeita, ou seja, a desigualdade (3.9) é satisfeita

$\forall \tilde{R}_0(t) \in R - \{0\}$ . Note que, com (3.2), é possível que se reescreva a desigualdade (3.9) como

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -2 \frac{\alpha\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{V} \\ &< -2 \frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{V}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Definindo-se a variável auxiliar  $\tilde{V} := \sqrt{V}$  verifica-se que esta satisfaz a equação diferencial  $\dot{\tilde{V}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{V}}{\sqrt{V}}$  e, portanto,

$$\dot{V} = 2\dot{\tilde{V}}\sqrt{V}. \quad (3.11)$$

Então, ao substituir (3.11) no lado esquerdo da desigualdade (3.10), chega-se a

$$\dot{\tilde{V}} < -\frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3.12)$$

Invocando o Lema da Comparação [43, p. 102], um limite superior  $\bar{V}$  para  $\tilde{V}$  é assegurado pela solução do sistema dinâmico

$$\dot{\tilde{V}} = -\frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (3.13)$$

desde que a condição inicial seja escolhida como  $\bar{V}(0) = \tilde{V}(0) = |\tilde{R}_0(0)|$ . A solução desta equação diferencial é

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= \bar{V}(0) - \frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} t \\ &= |\tilde{R}_0(0)| - \frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Então, existe um instante de tempo finito  $t_f = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|\tilde{R}_0(0)|}{\bar{\alpha}\delta}$  tal que  $\bar{V}(t_f) = 0$ . Já que  $\bar{V}(t) > \tilde{V}(t) = |\tilde{R}_0(t)|$ , pode-se afirmar que existe um tempo finito  $t_s \in [0, t_f[$  tal que o modo deslizante ocorre e a superfície de deslizamento  $\tilde{R}_0(t) = 0$  é alcançada.

## 4 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados de simulação obtidos para o sistema em malha fechada constituído pela planta (2.11)-(2.15), saída  $R_0(t)$  em (2.17) e a lei de controle (3.1). As constantes do modelo são  $\alpha = 0,5464$ ,  $\beta = 0,4417$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\lambda_2 = 0,032$ , o valor de referência é  $R_0^{\text{ref}} = 0,5$ , e as constantes do controlador são  $\underline{\alpha} = 0,1$ ,  $\bar{\alpha} = 0,6$ ,  $\underline{\beta} = 0,08$ ,  $\bar{\beta} = 0,5$  e  $\delta = 0,002$ , esses parâmetros são definidos em [44], onde o autor utiliza fontes como o Ministério da Saúde e OMS para a estimativa. Com intuito de se aproximar da realidade, escolheu-se a população da cidade do Rio de Janeiro como exemplo e, dessa forma,  $N = 6718903$  indivíduos segundo o último senso do IBGE e baseando-se em dados fornecidos pela Prefeitura da Cidade, as condições iniciais são  $I(0) = 4$ ,  $R(0) = 0$ ,  $D(0) = 0$ ,  $Q(0) = 0$ , logo,  $S(0) = N - I(0) - R(0) = 0 - D(0) - Q(0) = 6718899$  indivíduos.

Embora a abordagem pareça se afastar da realidade devido ao chaveamento em alta frequência do nível de isolamento  $u$ , é possível encontrar um sinal contínuo que se aproxima do controle equivalente  $u_{eq}(t)$  usando o controle equivalente estendido [16]. De acordo com essa teoria, uma aproximação  $u_{av}(t)$  para  $u_{eq}(t)$  é obtida filtrando-se o sinal  $u$ . Neste contexto, a dinâmica do  $u_{av}(t)$  é dada por

$$\tau \dot{u}_{av}(t) = -u_{av}(t) + u, \quad (4.1)$$

onde  $\tau$  é uma constante. Quanto menor o valor de  $\tau$ , mais  $u_{av}(t)$  se aproxima de  $u_{eq}(t)$ . Note que se  $\tau = 0$ ,  $u_{av}(t) = u$ .

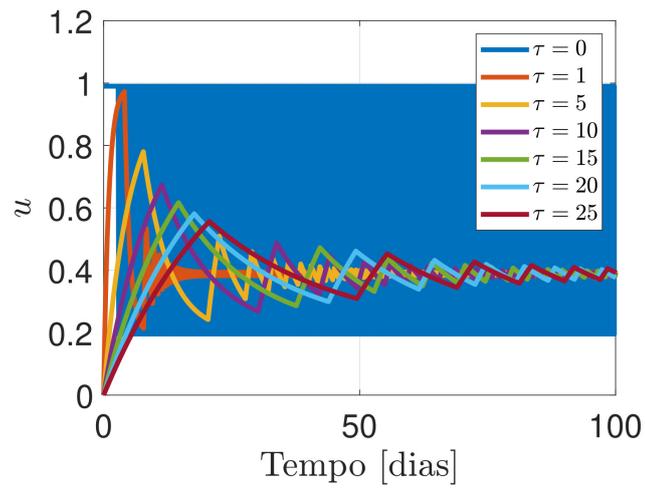


Figura 10 - Sinal de controle  $u$

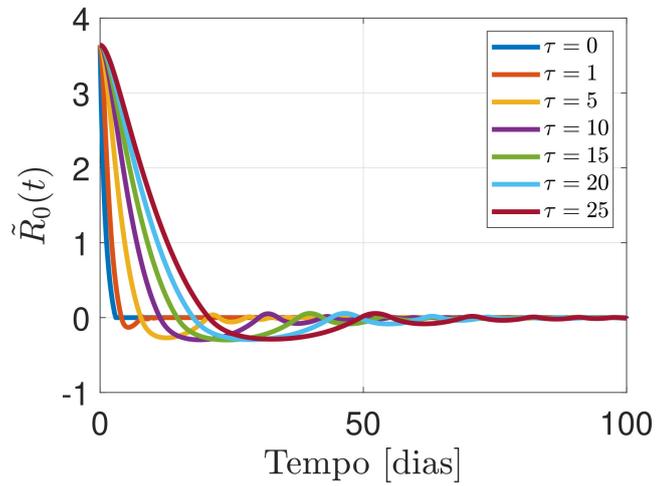


Figura 11 - Variável de deslizamento  $\tilde{R}_0(t)$  (erro de regulação)

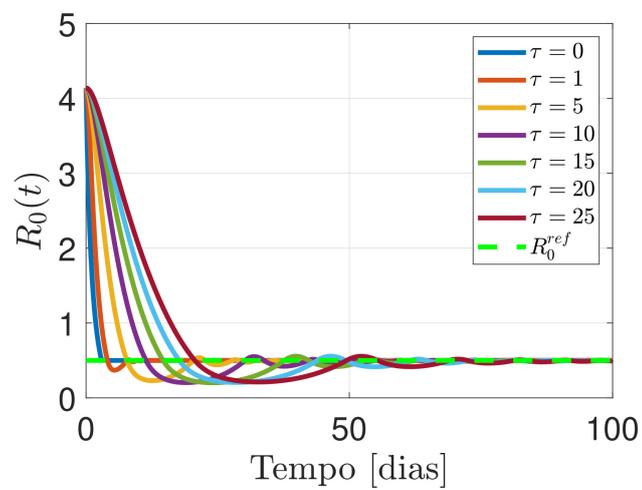


Figura 12 - Número básico de reprodução  $R_0(t)$

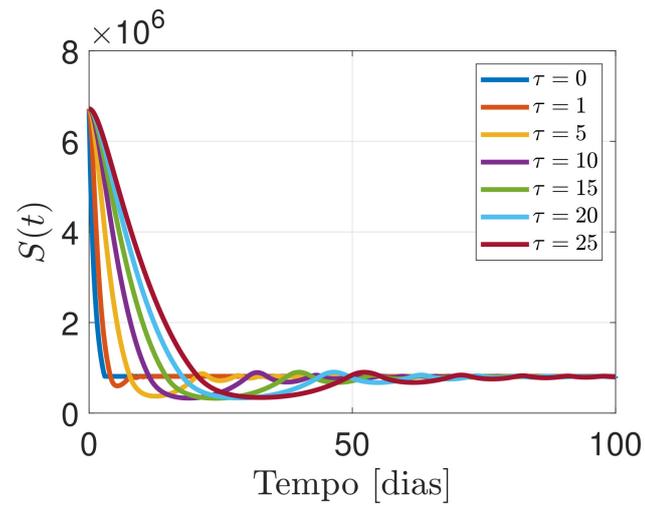


Figura 13 - Indivíduos suscetíveis  $S(t)$

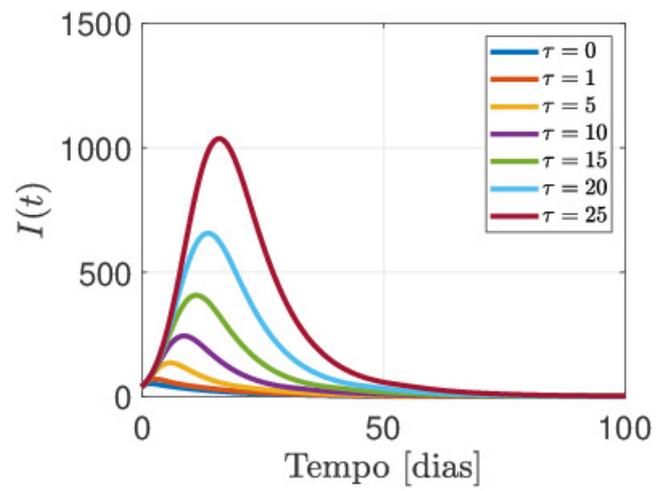


Figura 14 - Indivíduos infectados  $I(t)$

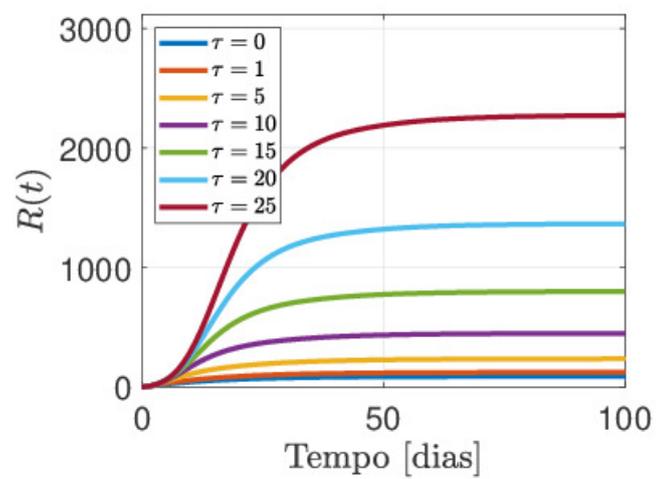


Figura 15 - Acumulado de indivíduos recuperados  $R(t)$

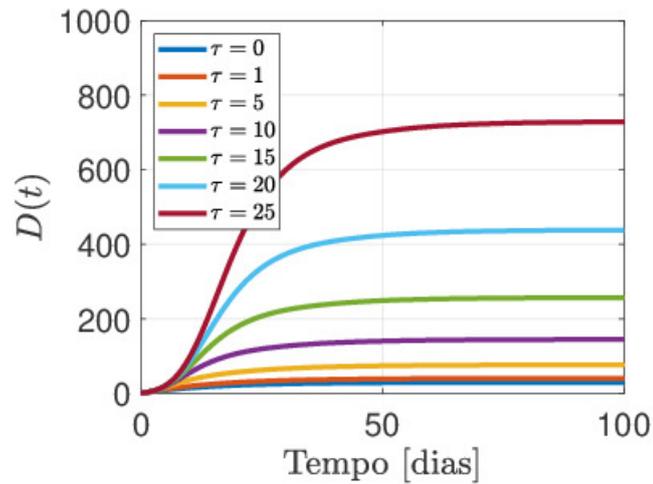


Figura 16 - Acumulado de indivíduos mortos  $D(t)$

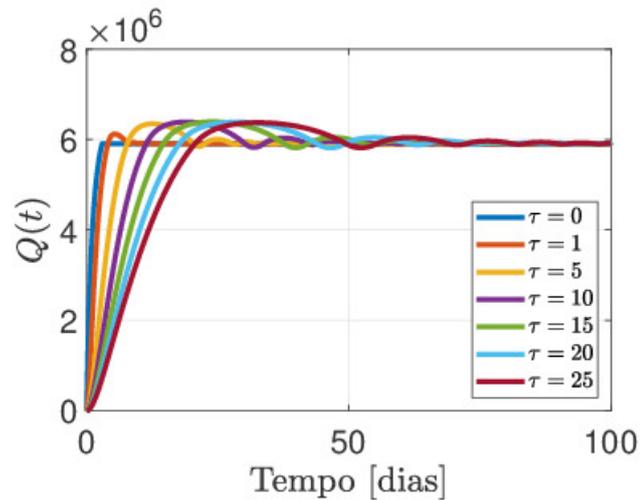


Figura 17 - Indivíduos em regime de quarentena  $Q(t)$

Na Figura 10 a Figura 17 é demonstrado o comportamento do sistema em malha fechada para diversos valores de  $\tau$ . Quanto menor o  $\tau$  mais rápido o objetivo de controle é alcançado, ver Figura 11. Supondo que deseje-se manter o  $R_0$  próximo igual a 0,5 (Figura 12), todas as estratégias irão convergir para um isolamento de aproximadamente 40%, Figura 10. No entanto, a Figura 14 e Figura 16 deixam claro que para se evitar um número alto de infectados e mortos é imprescindível, no início da epidemia, a adesão de um alto nível de isolamento social. O número básico reprodução  $R_0(t)$  está diretamente relacionado com a quantidade de indivíduos suscetíveis  $S(t)$ , ver equações (2.6), (2.10) e (2.17), portanto, para que haja uma redução no nível de transmissão da doença, é necessário que uma grande parte da população se mantenha em quarentena, ver Figura 13 e Figura 17.

A Figura 18 a Figura 25 mostram os resultados de simulação obtidos para o sistema em malha fechada quando a lei de controle é (4.1) e quando o sinal  $R_0(t)$  não está disponível e para a construção do erro de regulação utiliza-se  $\hat{R}_0(t)$  em (2.24), ou seja, o erro de regulação torna-se  $\tilde{R}_0(t) = \hat{R}_0(t) - R_0^{\text{ref}}$ . O erro de regulação alcança uma vizinhança da origem, Figura 19 e Figura 20, no entanto a falta de informações precisas agrava significativamente o quadro epidemiológico com aumento do número de infectados e mortos, ver Figura 22 e Figura 24.

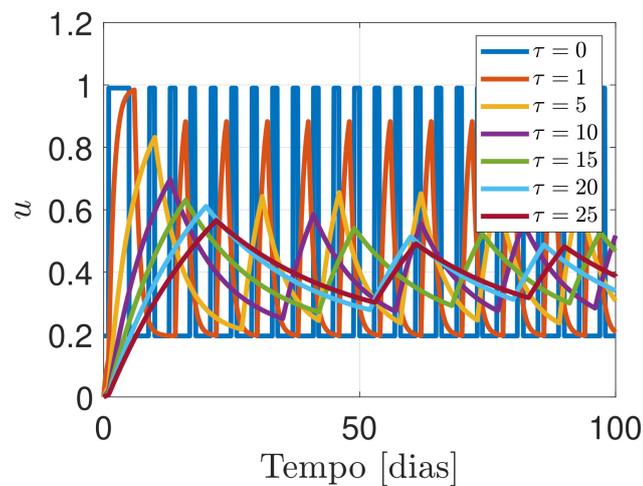


Figura 18 - Sinal de controle  $u$

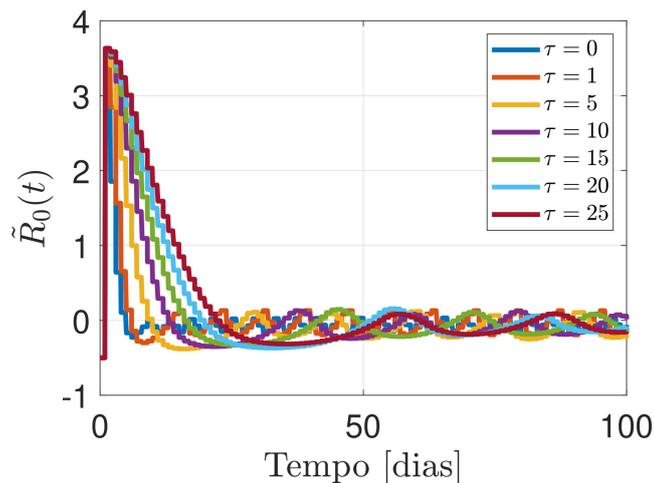


Figura 19 - Variável de deslizamento  $\tilde{R}_0(t)$  (erro de regulação)

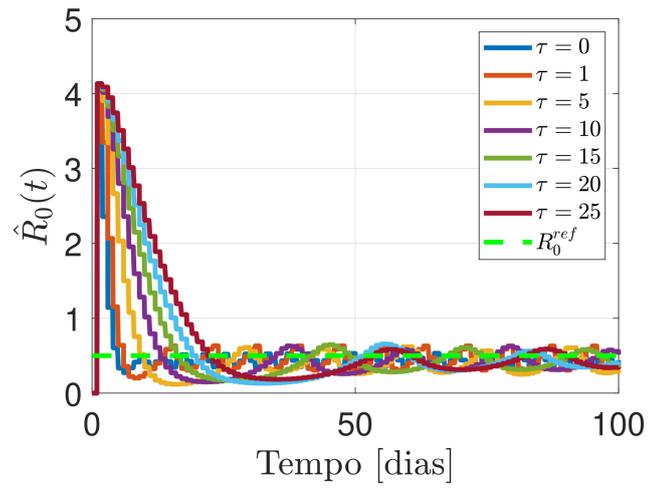


Figura 20 - Número básico de reprodução  $\hat{R}_0(t)$ .

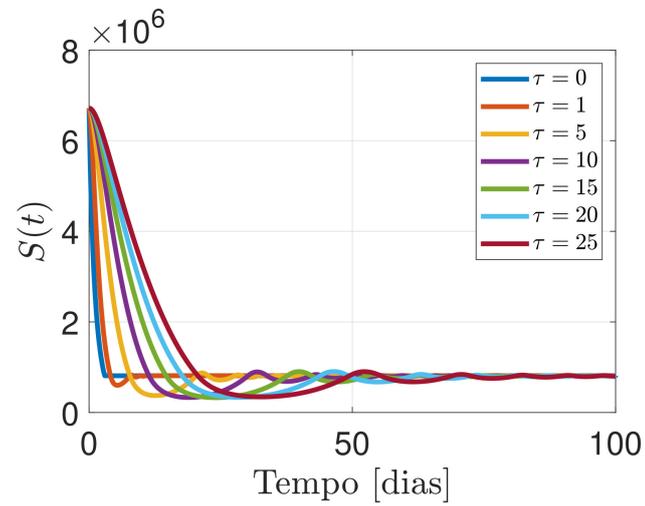


Figura 21 - Indivíduos suscetíveis  $S(t)$

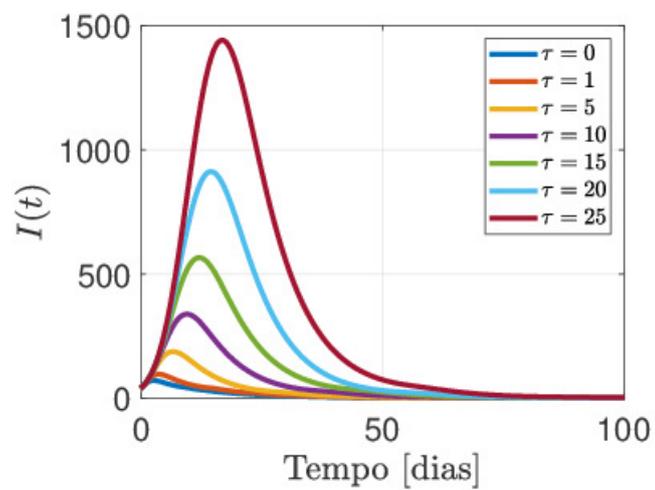


Figura 22 - Indivíduos infectados  $I(t)$

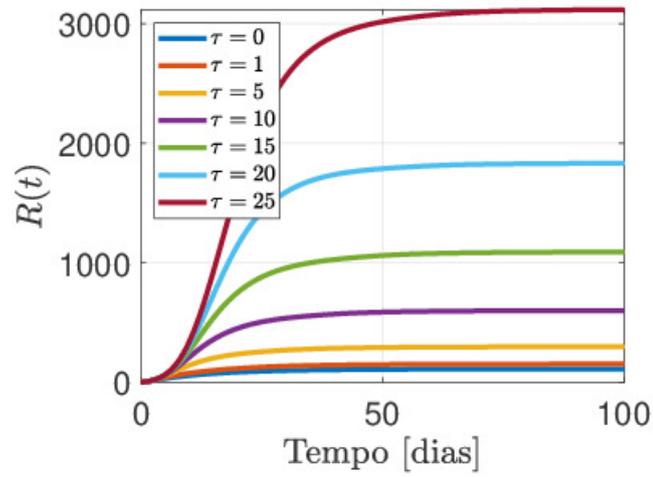


Figura 23 - Acumulado de indivíduos recuperados  $R(t)$

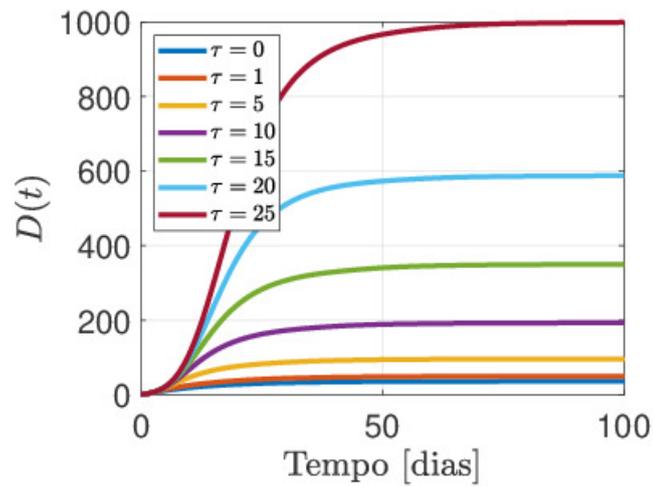


Figura 24 - Acumulado de indivíduos mortos  $D(t)$

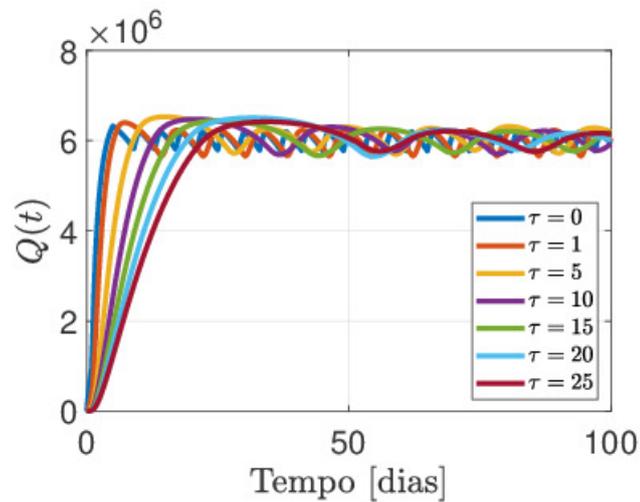


Figura 25 - Indivíduos em regime de quarentena  $Q(t)$

Um dos problemas mais importantes em epidemiologia é verificar se a interrupção do surto ocorre apenas quando nenhum indivíduo suscetível é deixado, ou se a interação dos vários fatores de infecciosidade, recuperação e mortalidade, pode resultar na interrupção, enquanto muitos indivíduos suscetíveis ainda estão presentes na população não afetada. As chances de recuperação ou morte variam de um dia para o outro durante o curso de sua doença. As chances de o afetado transmitir infecção ao não afetado também dependem do estágio da doença. À medida que a epidemia se espalha, o número de membros não afetados da comunidade diminui. Como o curso de uma epidemia é curto em comparação com a vida de um indivíduo, a população pode ser considerada como permanecendo constante, exceto na medida em que é modificada por mortes devido à própria doença epidêmica. Com o passar do tempo, a epidemia pode chegar ao fim.

## CONCLUSÃO

Epidemias de doenças infecciosas como a COVID-19 têm sido recorrentes ao longo da história e podem causar grandes problemas para a população afetada, como saturação da rede hospitalar, crise econômica, etc. Nesse contexto, os modelos matemáticos podem ser ferramentas valiosas, pois são capazes de fornecer estimativas para possíveis cenários de propagação da doença, ajudando a delimitar casos limítrofes e situações intermediárias que sejam plausíveis. Além disso, modelos dinâmicos combinados com técnicas de controle moderno permitem elaborar estratégias otimizadas para introdução e relaxamento das medidas de mitigação da epidemia. Informações como essas são essenciais para ajudar as autoridades a tomar decisões sobre a alocação de recursos limitados quando de uma epidemia.

Do ponto de vista de controle, este é um problema desafiador, uma vez que o processo é representado por um modelo não-linear, com parâmetros incertos ou mesmo variantes no tempo em alguns casos da literatura. Além disso, depara-se com a complexidade da variável  $R_0$  que pode variar de acordo com a dinâmica social de uma população, ou seja, ela não captura o status atual de uma epidemia e pode aumentar e diminuir quando o número de casos é baixo [45].

Este trabalho propôs um novo modelo matemático SIRDQ que considerou a ação governamental por meio da quarentena de modo a diminuir o número de infectados e óbitos. Além disso, leis de controle por modos deslizantes foram propostas, garantindo a regulação do número básico de reprodução  $R_0$  em valores menores que a unidade de modo a levar matematicamente à extinção da epidemia. Os resultados de simulação ilustram que as estratégias de controle utilizadas se mostraram potencialmente eficientes no processo de regulação do  $R_0$  e, por consequência, resultando em melhores (menores) níveis de isolamento a serem adotados pela população.

### **Produção Científica**

Durante o curso de mestrado, foi publicado o trabalho que contribuiu para esta dissertação:

SANTOS, D. M. L ; RODRIGUES, V. H. P. ; OLIVEIRA, T. R. .Controle Epidemiológico da COVID-19 através da Teoria de Sistemas a Estrutura Variável e Modos Deslizantes. In: XXIII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2020), 2020, Porto Alegre. Novembro de 2020.

# Apêndice

## Princípio da Comparação

**Lema 3.4 (Lema da Comparação) [43]** *Considere a equação diferencial escalar*

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \quad (4.2)$$

onde  $f(t, u)$  é contínua em  $t$  e localmente Lipschitz em  $u$ , para todo  $t \geq 0$  e todo  $u \in J \subset \mathbb{R}$ . Considere  $[t_0, T)$  ( $T$  pode ser infinito) como o intervalo máximo de existência da solução  $u(t)$  e suponha que  $u(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Seja  $v(t)$  uma função contínua cuja derivada superior direita  $D^+ v(t)$  satisfaz a desigualdade diferencial

$$D^+ v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) = v_0, \quad (4.3)$$

com  $v(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Então,  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] WHO. *World Health Organization. WHO announces COVID-19 outbreak a pandemic*. 2020. Disponível em: <<https://www.euro.who.int/en/health-topics/health-emergencies/coronavirus-covid-19/news/news/2020/3/who-announces-covid-19-outbreak-a-pandemic>>.
- [2] CAVALCANTE, J. R.; ABREU, A. J. L. Covid-19 no município do rio de janeiro: análise espacial da ocorrência dos primeiros casos e óbitos confirmados. *Scielo Analytics*, v. 29, p. 1–10, 2020.
- [3] PCRJ. *Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro.Painel Rio COVID-19*. 2020. Disponível em: <<https://experience.arcgis.com/experience/38efc69787a34659c931568bd9e2cc4>>.
- [4] PAZOS, F.; FELICIONI, F. A control approach to the covid-19 disease using a seihrd dynamical model. *medRxiv*, Cold Spring Harbor Laboratory Press, p. 1–23, 2020.
- [5] FARO, A. et al. COVID-19 e saúde mental: a emergência do cuidado. *Estudos de Psicologia (Campinas)*, scielo, v. 37, 00 2020. ISSN 0103-166X.
- [6] RIHAN, A. F.; AL-SALTI, N. S.; ANWAR, M.-N. Dynamics of coronavirus infection in human. *AIP Conference Proceedings*, v.1982, p. 1–8, 2018.
- [7] KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 115, p. 700–721, 1927.
- [8] GIORDANO, G. et al. Modelling the covid-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in italy. *Nature Medicine*, v. 26, p. 855–860, 2020.
- [9] SCHARBARG, E. et al. From the hospital scale to nationwide: observability and identification of models for the covid-19 epidemic waves. *Annual Reviews in Control*, p. 1–8, 2020.

- [10] GAFF, H.; SCHAEFER, E. Optimal control applied to vaccination and treatment strategies for various epidemiological models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, v. 6, p. 469–492, 2009.
- [11] SHARIFI, M.; MORADI, H. Nonlinear robust adaptive sliding mode control of influenza epidemic in the presence of uncertainty. *Journal of Process Control*, v. 56, p. 48–57, 2017.
- [12] IBEAS, A.; SEN, M. D. la; ALONSO-QUESADA, S. Sliding mode robust control of seir epidemic models. *2013 21st Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, p. 1–6, 2013.
- [13] XIAO, Y.; XU, X.; TANG, S. Sliding mode control of outbreaks of emerging infectious diseases. *Bull Math Biol*, v. 74, p. 2403–2422, 2012.
- [14] R, K. A.; A, H.; M., Z. Analysis and control of seir epedemic model via sliding mode control. *Advanced Modeling and Optimization*, v. 18, p. 153–162, 2016.
- [15] ROHITH, G.; DEVIKA, K. Dynamics and control of covid-19 pandemic with nonlinear incidence rates. *Nonlinear Dyn*, v. 101, p. 2013—2026, 2020.
- [16] UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moscou: MIR Publishers, 1978.
- [17] SHTESSEL, Y. et al. *Sliding mode control and observation*. New York: Birkhauser, 2014.
- [18] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin: Springer, 1992.
- [19] UTKIN, J. G. V. I.; SHI, J. *Sliding Mode Control in Electro-mechanical Systems*. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [20] SLOTINE, J.; LI, W. *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [21] LEVANT, A. Sliding mode control finite-time observation and regulation. Springer London, London, p. 1–9, 2019.

- [22] DING, S.; LEVANT, A.; LI, S. Simple homogeneous sliding-mode controller. *Automatica*, v. 67, p. 22–32, 2016.
- [23] FILIPPOV, A. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Dordrecht: Springer Science Business Media, 2013.
- [24] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems*. New York: Springer, 1995.
- [25] LEVANT, A. Higher order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *Int J Control*, v. 76, p. 924–941, 2003.
- [26] BOIKO, I.; FRIDMAN, L. Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE Trans Autom Control*, v. 50, p. 1442–1446, 2005.
- [27] LEVANT, A. Chattering analysis. *IEEE Trans Autom Control*, v. 55, p. 1380–1389, 2010.
- [28] BARTOLINI, G.; FERRARA, A.; USAI, E. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Trans Autom Control*, v. 43, p. 241–246, 1998.
- [29] DOREL, L.; LEVANT, A. On chattering-free sliding-mode control. *47th IEEE conference on decision and control*, p. 2196–2201, 2008.
- [30] CRUZ-ZAVALA, E.; MORENO, J. Homogeneous high order sliding mode design: a lyapunov approach. *Automatica*, v. 80, p. 232–238, 2017.
- [31] LEVANT, A.; LIVNE, M. Weighted homogeneity and robustness of sliding mode control. *Automatica*, v. 72, p. 186–193, 2016.
- [32] LEVANT, A.; LIVNE, M.; YU, X. Sliding-mode-based differentiation and its application. *In: Proceedings of the 20th IFAC world congress*, p. 9–14, 2017.
- [33] KOLMOGOROFF, A. On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval. *Amer Math Soc Transl Ser 1*, p. 233–242, 1962.
- [34] LEVANT, A.; YU, X. Sliding-mode-based differentiation and filtering. *IEEE Trans Autom Control*, v. 63, p. 3061–3067, 2018.

- [35] LEVANT, A.; LIVNE, M. Robust exact filtering differentiators. *European Journal of Control*, v. 55, p. 33–44, 2019.
- [36] LEVANT, A.; LIVNE, M. Uncertain disturbances' attenuation by homogeneous mimo sliding mode control and its discretization. *IET Control Theory Appl*, v. 9, p. 515–525, 2015.
- [37] LEVANT, A.; LIVNE, M. Proper discretization of homogeneous differentiators. *Automatica*, v. 50, p. 2007–2014, 2014.
- [38] RAJAMANI, R. *Vehicle dynamics and control*. New York: Springer, 2005.
- [39] DELAMATER, P. L. et al. Complexity of the basic reproduction number ( $r_0$ ). *Emerging Infectious Diseases Journal*, v. 25, p. 1–4, 2019.
- [40] HEFFERNAN, J. M.; SMITH, R. J.; WAHL, L. M. Perspectives on the basic reproductive ratio. *Journal of The Royal Society Interface*, v. 2, p. 281–293, 2005.
- [41] KEELING, M. J.; GRENFELL, B. T. Individual-based perspectives on  $r_0$ . *Journal of Theoretical Biology*, v. 203, p. 51–61, 2000.
- [42] ASTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*. Mineola, NY: Dover, 1997.
- [43] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [44] BASTOS, S.; CAJUEIRO, D. O. Modeling and forecasting the early evolution of the covid-19 pandemic in brazil. *Scientific Reports*, v. 10, p. 1–15, 2020.
- [45] ADAM, D. A guide to  $r$  - the pandemic's misunderstood metric. *Nature*, v. 583, p. 346–348, 2020.