



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Denis César Ferreira

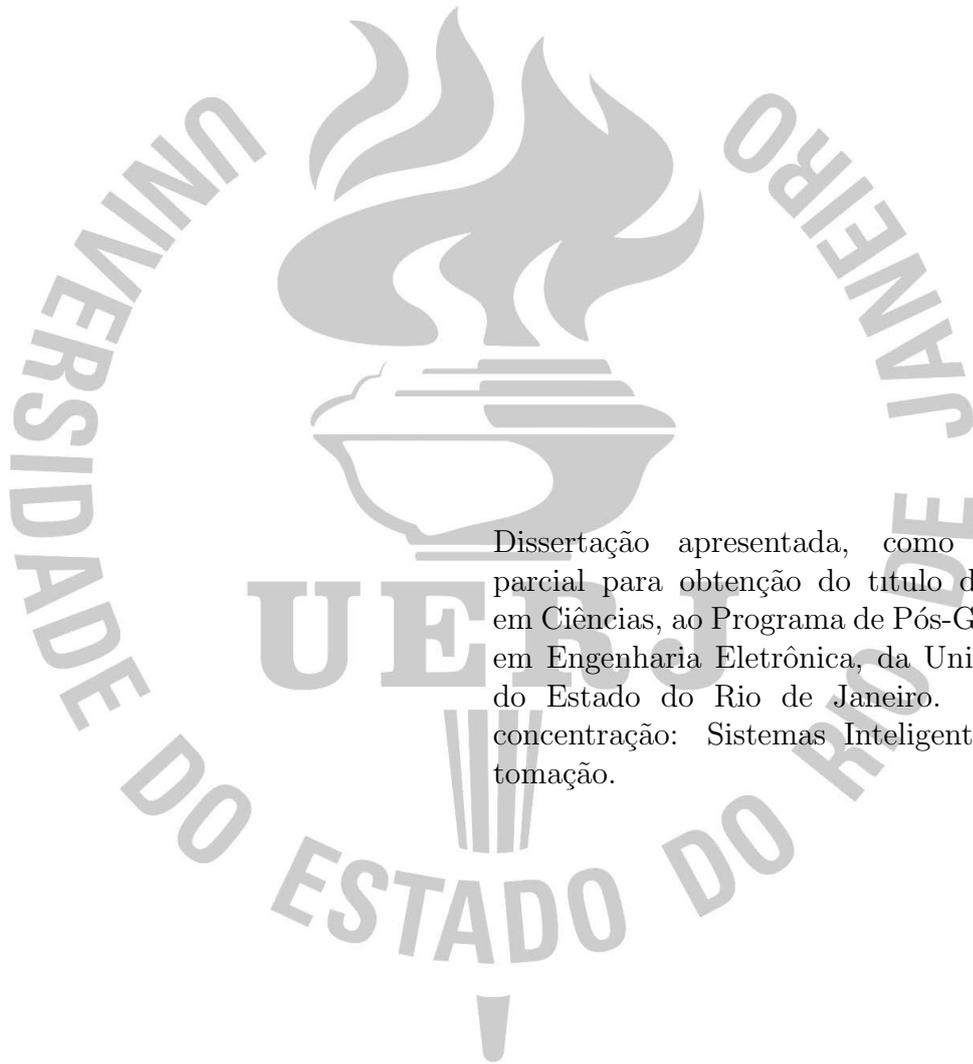
**Otimalidade Inversa em Controle Extremal com Atrasos**

Rio de Janeiro

2019

Denis César Ferreira

**Otimidade Inversa em Controle Extremal com Atrasos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

F383 Ferreira, Denis César.  
Otimidade inversa em controle extremal com  
atrasos / Denis César Ferreira. – 2019.  
61f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de  
controle inteligente - Teses. 3. Automação - Teses. I.  
Oliveira, Oliveira, Tiago Roux de. II. Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 621.38+39:681.5

Bibliotecário: Iremar Leal da Silva CRB7/5728

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Denis César Ferreira

## Otimidade Inversa em Controle Extremal com Atrasos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação

Aprovado em: 27 de Agosto de 2019

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Alberto Mota Simões, D.Sc.

Instituto Militar de Engenharia - IME

---

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira, D.Sc.

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação -  
UNICAMP

Rio de Janeiro

2019

## AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a DEUS pelo dom da vida.

Ao mestre e orientador, Professor Tiago Roux, por toda confiança e apoio despendidos na orientação e nesse trabalho. Obrigado pela companhia e descontração na hora do almoço, tenho orgulho de ter sido seu aluno e orientado.

A minha amada Poliana Dal Bianco da Silva pelo amor e carinho, fazendo essa caminhada mais leve.

Aos meus pais e minha base, Sebastião e Leia, às minhas irmãs, Letícia e Flávia, irmão Alex, sobrinhas Laura e Daniela, aos cunhado(a)s Leo, Gybert e Jaque, pelo amor e apoio incondicional, essa vitória também é de vocês.

Aos demais familiares e amigos que durante todo o tempo deram incentivo e apoio, acreditando que esse momento chegaria.

Aos amigos do mestrado, Dayane, Aline, Victor, Martha, André, Nayara, Manuchi e Marcelo, obrigado pela amizade, por compartilhar os momentos de alegrias e de angústias.

Aos amigos do trabalho que torceram e me incentivaram nessa conquista.

Por último, um agradecimento especial a todos os mestres professores, funcionários e instituições de ensino que fizeram parte de minha formação educacional, o meu muito obrigado.

*Dormirás tranquilamente,  
Se disseres satisfeito:  
“Hoje, pratiquei o bem:  
Não tive um dia vazio,  
Trabalhei, não fui vadio,  
E não fiz mal a ninguém.”*

Olavo Bilac

## RESUMO

**FERREIRA**, Denis César. *Otimidade Inversa em Controle Extremal com Atrasos*. 61f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

O controle extremal tem o objetivo de convergir e manter a saída de um mapeamento não linear desconhecido em seu ponto de extremo (ponto ótimo). Este trabalho apresenta um algoritmo de busca extremal baseado no método do Gradiente para maximizar mapas desconhecidos na presença de atrasos. Introduce-se uma versão filtrada do preditor baseada em estimativa local da Hessiana para mapas quadráticos. A estabilidade exponencial e a convergência para uma pequena vizinhança do ponto extremo desconhecido são alcançadas utilizando a transformação *backstepping* e a teoria da média em dimensões infinitas. Um filtro passa-baixa (com um polo suficientemente alto) na realimentação do preditor permite aplicação da técnica do teorema da média de Hale e Lunel para equações diferenciais funcionais e também estabelece o resultado da otimalidade inversa para o sistema de malha fechada. Esta propriedade de otimalidade inversa é pela primeira vez demonstrada em projetos de busca extremal e justifica o uso heurístico de um filtro passa-baixa entre o sinal de demodulação e o integrador, que tem sido historicamente utilizado em implementações de busca extremal sem atrasos.

Palavras-Chave: Otimalidade Inversa. Atrasos. Controle Extremal. Controle Adaptativo. Preditores. Teoria da Média em Dimensões Infinitas.

## ABSTRACT

**FERREIRA**, Denis César. *Inverse Optimality of Extremum Seeking with Delays*. 61f. Master Thesis (Master in Science of Electronic Engineering) - Engineering Faculty, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

The extremum seeking control aims to converge and maintain the output of an unknown nonlinear mapping on its extreme point (optimal point). In this work, we present a Gradient-based extremum seeking algorithm for maximizing unknown maps in the presence of constant delays. It is incorporated a filtered predictor feedback with a perturbation-based estimate for the Hessian of locally quadratic maps. Exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point are achieved by using backstepping transformation and averaging theory in infinite dimensions. The low-pass filter (with a high enough pole) in the predictor feedback allows the technical application of the Hale and Lunel's averaging theorem for functional differential equations and also establishes an inverse optimal result for the closed-loop system. This inverse optimality property is for the first time demonstrated in extremum seeking designs and justifies the heuristic use of a low-pass filter between the demodulation and the integrator, which has historically been a part of the extremum seeking implementations free of delays.

Keywords: Inverse Optimality. Time Delay. Extremum-seeking. Adaptive Control. Predictor. Averaging in infinite dimensions.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema de busca extremal para mapeamento escalar $y(t) = Q(\theta(t)) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2$ baseado em perturbações senoidais, $S(t)$ e $M(t)$ .....	20
Figura 2 - Entrada $\theta(t)$ .....	24
Figura 3 - Saída $y(t)$ .....	24
Figura 4 - Estimativa $\hat{\theta}(t)$ .....	25
Figura 5 - Gradiente do mapeamento $G(t)$ .....	25
Figura 6 -Diagrama de blocos do esquema básico de predição para compensação do atraso no ESC gradiente. ....	26
Figura 7 - Sistema $\dot{\hat{\theta}}(t - D) = U(t - D)$ com atuador de atraso em $D$ unidades de tempo.....	30
Figura 8 - Entrada $\theta(t)$ sem o efeito da otimalidade inversa.....	40
Figura 9 - Saída $y(t)$ sem o efeito da otimalidade inversa.....	41
Figura 10- Sinal de controle $U(t)$ sem o efeito da otimalidade inversa. ....	41
Figura 11- Derivada do sinal controle $U(t)$ sem o efeito da otimalidade inversa. ....	42
Figura 12- Estimativa da Hessiana $\hat{H}(t)$ sem o efeito da otimalidade inversa. ....	42
Figura 13- Entrada $\theta(t)$ com e sem o efeito da otimalidade inversa. ....	50
Figura 14- Saída $y(t)$ com e sem o efeito da otimalidade inversa. ....	51
Figura 15- Sinal de controle $U(t)$ com e sem o efeito da otimalidade inversa. ....	51
Figura 16- Derivada do sinal de controle $U(t)$ com e sem o efeito da otimalidade inversa. ....	52
Figura 17- Estimativa da Hessiana $\hat{H}(t)$ com e sem o efeito da otimalidade inversa. .	52
Figura 18- Esquema de busca extremal baseado no método do Gradiente para atrasos desconhecidos. ....	54

## LISTA DE SIGLAS

ABS	<i>Antilock Braking System</i>
CFL's	<i>Control Lyapunov Functions</i>
ESC	<i>Extremum Seeking Control</i>
HJI	<i>Hamilton-Jacobi-Isaacs</i>
MPPT	<i>Maximum Power Point Tracker</i>
ODE	<i>Ordinary Differential Equation</i>
PDE	<i>Partial Differential Equation</i>
PID	<i>Proportional Integral Derivative</i>
PV	<i>Photovoltaic Panel</i>
VPL	<i>Valor Presente Líquido</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\theta(t)$	<i>Entrada do mapeamento</i>
$\theta^*$	<i>Valor desconhecido da entrada do mapa</i>
$\hat{\theta}(t)$	<i>Estimativa em tempo real de <math>Q^*</math></i>
$y^*$	<i>Ponto de otimização do mapa quadrático</i>
$H$	<i>Sinal da Hessiana</i>
$a$	<i>Amplitude da perturbação do ESC</i>
$k$	<i>Ganho de adaptação</i>
$\omega$	<i>Frequência do sinal de perturbação de demodulação</i>
$Q(\cdot)$	<i>Mapa desconhecido</i>
$y(t)$	<i>Saída do mapa quadrático</i>
$S(t)$	<i>Sinal de perturbação</i>
$M(t)$	<i>Sinal de demodulação</i>
$\hat{G}(t)$	<i>Estimativa do Gradiente</i>
$\tilde{\theta}(t)$	<i>Erro entre a estimativa <math>\hat{\theta}(t)</math> e ponto <math>\theta^*</math> desconhecido</i>
$D$	<i>Atraso conhecido</i>
$U_{av}$	<i>Sinal de controle médio</i>
$G_{av}$	<i>Sinal médio do gradiente (Entrada preditor)</i>
$c$	<i>Polo do filtro passa-baixa</i>
$\tilde{\vartheta}_{av}(t)$	<i>Versão média do sistema em malha fechada</i>
$V(t)$	<i>Funcional de Lyapunov</i>
$\bar{a}$	<i>Coefficiente do funcional de Lyapunov</i>
$\Psi$	<i>Norma completa do estado</i>
$J$	<i>Função custo</i>
$\mathcal{L}(t)$	<i>Funcional do sistema médio</i>
$\hat{D}(t)$	<i>Atraso desconhecido</i>

# SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
1	<b>CONTROLE EXTREMAL</b> .....	20
1.1	Busca Extremal Escalar .....	20
1.2	Análise de Convergência.....	21
1.3	Exemplo Numérico de Busca Extremal.....	23
2	<b>CONTROLE EXTREMAL UTILIZANDO MÉTODO GRADI- ENTE COM ATRASOS CONSTANTES</b> .....	26
2.1	Sinais do Sistema .....	27
2.2	Realimentação por Preditor com Estimativa da Hessiana.....	28
2.3	Análise de Estabilidade.....	29
2.4	Simulações .....	39
3	<b>OTIMALIDADE INVERSA</b> .....	44
3.1	Otimalidade inversa em ESC com atrasos.....	44
3.2	Simulações .....	50
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	53
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	57

## INTRODUÇÃO

O Controle por Busca Extremal (*Extremum Seeking Control* - ESC) é um método adaptativo de otimização que tem a capacidade de determinar o extremo de um mapa não-linear de desempenho de uma planta [1]. O ESC não possui a obrigatoriedade do conhecimento explícito da planta nem da função que se pretende otimizar, desde que se tenha o conhecimento de que essa possui um extremo. O que irá definir se o mapeamento estático se trata de uma função de máximo ou de mínimo é o sinal da Hessiana [2].

### Breve Histórico

Em 1922, surge o controle extremal com Leblanc [3] no qual foi proposto um mecanismo de controle que buscava manter uma máxima transferência de potência entre uma linha de transmissão e um bonde elétrico.

Draper e Li [4] em 1951, publicaram um estudo sobre um algoritmo de Controle por Busca Extremal detalhando suas funcionalidades, que propunha otimizar um motor de combustão interna. Sendo, provavelmente esta, a primeira publicação sobre o assunto na literatura inglesa. Após essa publicação, várias outras aplicações do controle extremal em motores de combustão interna surgiram [5].

Nas décadas de 1950 e 1960, o controle extremal ganhou destaque, assim como outras formas de controle adaptativo, com estudos focados na descrição de algoritmos e em outras aplicações. Entre as décadas de 1970 e 2000 o foco da pesquisa passou a ser a busca de novas estratégias de controle adaptativo de maior complexidade com garantia de desempenho e estabilidade [6].

No ano de 2000 a publicação de Krstić e Wang [1], que provou a estabilidade do sistema clássico de controle extremal, despertou novamente o interesse no assunto. No livro do Astrom *Adaptive Control* [7], o Controle Extremal é considerado uma das áreas mais promissoras do controle adaptativo. Tendo em vista que a necessidade de otimizar plantas com o objetivo de reduzir os custos operacionais se adequando às especificações do produto é cada vez maior, o controle extremal vem ganhando destaque também em teoria de controle. Na última década, por exemplo, o número de publicações a respeito do tema cresceu aproximadamente dez vezes em relação à década anterior [8].

## Aplicações Recentes em Controle por Busca Extremal

Como mencionado, o ESC é considerada uma área promissora do controle adaptativo, com isso vem se destacando e sendo alvo de estudos em diversas aplicações.

A área de ESC tem alcançado uma certa maturidade e uma nova geração de estratégias de ESC tem sido aplicada numa ampla classe de problemas, tais como: busca extremal para sistemas dinâmicos híbridos [9], sistemas dinâmicos com atrasos [10], equações diferenciais parciais [11] e busca extremal estocástica [12], para citar alguns.

Uma dessas áreas de destaque é a indústria automobilística e o projeto de freios ABS (*Antilock Braking System*), onde o coeficiente de força de fricção alcança um valor máximo para um valor desconhecido não-nulo de coeficiente de deslizamento da roda. Essa função varia dependendo da superfície onde o carro se encontra, fazendo com que o sistema tenha que se adaptar ao tipo de solo que esteja tendo contato. Com isso, o ESC seria usado para sintonizar um controlador capaz de alcançar esse valor máximo independente do tipo de pista, [13], [14], [15].

Uma outra importante aplicação do ESC nas indústrias em geral está na otimização dos ganhos controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) [15]. Em [16] a técnica de busca extremal é apresentada como uma potencial ferramenta para sintonizar um controlador PID, sendo feita ainda uma comparação de desempenho com outros métodos de sintonia, porém todos apresentando um pior desempenho.

Em [17] foi estudada a possibilidade de usar o método de ESC para otimizar a produção de petróleo em poços que operam por elevação artificial através da injeção de gás *lift*. O objetivo seria encontrar o sistema em malha fechada e conservá-lo em torno do ponto ótimo desconhecido da curva de produção, aumentando assim o Valor Presente Líquido (VPL) do sistema e os lucros de operação. Os métodos aplicados hoje se mostram, em geral, lentos e não automatizados. Essa proposta foi desenvolvida com o intuito de ser uma alternativa, e por se tratar de um controle adaptativo que não necessita do conhecimento explícito da planta. Assim sendo, o ESC se mostra uma boa opção por permitir incertezas na modelagem do problema.

Em [18] o controle extremal é aplicado na otimização de bioreatores. Enquanto que em [19] é apresentada uma forma de diminuir os impactos em válvulas eletromecânicas

de motores de combustão interna.

Na área de energia renovável, o ESC tem se destacado na utilização em algoritmos de MPPT (*maximum power point tracking*), ajudando na extração da máxima potência dos painéis fotovoltaicos (PV). No trabalho [20], o ESC aplicado em MPPT mostrou-se superior em comparação com algoritmos clássicos como o perturbar e observar (P&O).

### **Sistemas de controle com Atraso**

A presença de atrasos é uma característica inerente de sistemas físicos e de engenharia, dos quais podemos destacar: controle de processos químicos, controle através de redes de comunicação, sistemas de tráfego rodoviário, entre outros [2].

Em geral, os atrasos podem ocorrer devido a três razões distintas: uma propriedade intrínseca do sistema, como consequência indesejada da ação de controle, ou da introdução intencional de atrasos no sistema de controle. Atrasos podem ser fixos ou variantes no tempo, e podem ocorrer nos estados do sistema, nas entradas do sistema, ou ainda, nas saídas medidas do processo.

Sistemas sujeitos a atrasos têm sido fonte de estudo ao longo dos anos. Podemos destacar na literatura os seguintes livros: [21], [22], [23] e [24]. O artigo visto em [10] mostra que a presença de atrasos na malha do controle extremal pode levar o sistema à instabilidade. Logo, existe a necessidade de se aprimorar os estudos de teoria do controle extremal na presença de atrasos.

### **Otimalidade Inversa**

Uma contribuição importante para o desenvolvimento da teoria de controle linear ótimo foi o trabalho de Kalman [25], no qual o conceito de otimalidade inversa em controle foi introduzida. A teoria da otimalidade inversa em controle pode ser definida da seguinte forma: “Dado um sistema dinâmico e uma lei de controle conhecida, encontre critérios de desempenho (se houver) para os quais essa lei de controle é ótima” [25]. Kalman considerou uma formulação precisa desse problema para sistemas lineares autônomos e derivou muitas propriedades interessantes no domínio do tempo e no domínio da frequência de sistemas de controle linear [26]. A otimalidade inversa pode ser relacionada a um conceito

de Lyapunov, como uma lei de controle especial. Nesse sentido, a otimalidade inversa é garantida quando um controlador estabilizante é ótimo para alguns critérios e, para uma determinada função de Lyapunov, é possível mostrar que a lei de realimentação é ótima em relação a alguma função custo. Em geral, essa funcionalidade inclui uma penalidade no esforço de controle (ou em sua derivada) e possui uma margem de ganho infinita [27], [28].

O conceito de otimalidade inversa é de significativa importância prática, pois permite projetar leis de controle ótimo sem a necessidade de resolver uma equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI), que pode inclusive não possuir solução. A necessidade de resolver as equações HJI pode ser evitada usando a abordagem da otimalidade inversa, originada por Kalman e introduzida no controle não-linear robusto através das Funções de Lyapunov de Controle (*Control Lyapunov Functions* - CLF's) [29].

## Objetivo

Este trabalho busca pela primeira vez na literatura discutir a prova da otimalidade inversa e a sua influência no controle por busca extremal na presença de atrasos, embora os resultados também sejam válidos no caso livre de atrasos.

O objetivo desta dissertação é investigar alguns aspectos da otimalidade inversa no controle por busca extremal, onde vários trabalhos aplicam filtros passa-alta e passa-baixa para melhorar o ajuste/sintonia dos parâmetros do controlador e o desempenho do sistema em malha fechada. Entretanto, os mesmos não apresentam nenhuma sustentação teórica que justifique a inclusão dos filtros [30], [31], [32], [33], [34], [12], [35], [36], [37] e [15], pelo contrário, apenas argumentações heurísticas são levantadas.

Dessa forma, espera-se obter uma prova matemática que justifique a utilização intuitiva de filtros passa-baixa para melhorar o desempenho dos sistemas de controle extremal.

## Metodologia

Para o desenvolvimento desta dissertação, utilizou-se como base o Controle por Busca Extremal pelo método Gradiente. Foi inserido um atraso no mapa não linear a ser otimizado, a compensação desse atraso é feita através de um preditor realimentado

com a estimativa da Hessiana. A análise da estabilidade é obtida via Transformação *Backstepping* e pela Teoria de *Averaging* em dimensões infinitas. Os efeitos da otimalidade inversa em ESC com atraso são fundamentado pelos Teoremas 6 e 2.18, presentes em [38] e [39], respectivamente.

Para tal, a metodologia empregada se baseia nos seguintes passos:

- Desenvolver as equações de malha fechada para controle extremal com atraso;
- Representar o atraso por um sistema de equações diferenciais parciais (*Partial Differential Equation -PDE*) de transporte;
- Encontrar o modelo médio do sistema em malha fechada;
- Aplicar a *Transformação Backstepping* de forma a levar o sistema original a outro sistema de equações conveniente, chamado de sistema alvo;
- Encontrar o funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema alvo;
- Encontrar uma estimativa exponencial da norma de  $L_2$  para o sistema médio;
- Invocar o Teorema da Média para garantir a convergência assintótica para a vizinhança do extremo;
- Simular o Controle Extremal com atrasos, sem otimalidade inversa;
- Provar matematicamente a otimalidade inversa aplicada no *ESC* com atrasos;
- Simulação satisfazendo a otimalidade inversa.

## Organização da Dissertação

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 1 serão apresentados os fundamentos de controle extremal para sistemas estáticos empregando o método Gradiente, ilustrando-se por meio de simulações numéricas o comportamento da entrada e da saída do sistema. Este capítulo é uma revisão bibliográfica e servirá como base para o estudo desenvolvido no caso do controle extremal com atrasos conhecidos.

No Capítulo 2 será abordado o caso do controle por busca extremal para mapeamentos estáticos escalares com atraso constante. O projeto do preditor para compensar o atraso no ESC gradiente é apresentado. A estabilidade exponencial com funções de Lyapunov-Krasovskii e a convergência em tempo real a uma pequena vizinhança do extremo desejado são também demonstradas. Ao final do capítulo um exemplo numérico juntamente com simulações demonstram o sistema controlado.

No Capítulo 3, que é a principal contribuição desse trabalho, introduz-se a prova matemática da otimalidade inversa, ilustrando-se também através de simulações os resultados da utilização da mesma em ESC com atrasos.

As conclusões e sugestões para trabalhos futuros desta pesquisa são apresentados no último capítulo.

## FUNDAMENTOS E DEFINIÇÕES

### Notações e Normas

A norma-2 de um vetor de estado  $X(t)$  de dimensão finita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é denotada por barras simples,  $|X(t)|$ . Em contraste, as normas de funções (de  $x$ ) são denotadas por barras duplas. Por padrão,  $\|\cdot\|$  denota a norma espacial  $L_2[0, D]$ , *i.e.*,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2[0, D]}$ . Como a variável de estado  $u(x, t)$  da equação diferencial parcial (EDP) é uma função de dois argumentos, deve-se dar ênfase que levando em conta a norma de uma das variáveis faz-se a norma uma função da outra variável, assim como adotado em [2]. Por exemplo, a norma  $L_2[0, D]$  de  $u(x, t)$  em  $x \in [0, D]$  é  $\|u(t)\| = \left(\int_0^D u^2(x, t) dx\right)^{1/2}$ . Em [40], define-se uma função vetorial  $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$  é dita de ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$  dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$  se existem constantes positivas  $k$  e  $\epsilon^*$  tais que  $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon \quad \forall \epsilon \in [t_1, t_2]$  e  $\forall t \in [t_1, t_2]$ . Por vezes, é possível estimar  $k$  e  $\epsilon^*$  e, com isso, quantificar  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Caso contrário, deve-se admitir  $\mathcal{O}(\epsilon)$  como sendo uma “ordem da relação de magnitude” para “ $\epsilon$  suficientemente pequeno”. As derivadas parciais de  $u(x, t)$  são denominadas por  $u_t(x, t)$  e  $u_x(x, t)$  ou, ocasionalmente, por  $\partial_t u_{\text{av}}(x, t)$  e  $\partial_x u_{\text{av}}(x, t)$  para indicar o operador do sinal médio  $u_{\text{av}}(x, t)$ .

### Teorema da Média para Equações Diferenciais Ordinárias [40]

**Teorema A** *Considere o sistema original*

$$\dot{z} = f(\omega t, z), \quad z(0) = z_0. \quad (1)$$

sendo  $f(\omega t, z)$  e suas derivadas parciais em relação a  $z$  até segunda ordem contínuas e limitadas por  $(\omega t, z) \in [0, \infty) \times D_0$  para cada conjunto compacto  $D_0 \subset D$ , onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é o domínio. Assumindo  $f$  uma função  $T$ -periódica com  $T > 0$  em  $\omega t$ , ou seja,  $f(s, z) = f(s + T, z)$ ,  $\forall s \in [0, \infty)$ , considere o sistema médio

$$\dot{z}_{\text{av}} = f_{\text{av}}(z_{\text{av}}), \quad z_{\text{av}}(0) = z_{\text{av},0}. \quad (2)$$

com

$$f_{\text{av}}(z_{\text{av}}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, z_{\text{av}}) d\tau. \quad (3)$$

Supondo que  $z_{av} = 0 \in D$  é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (2),  $D_0 \subset D$  é um subconjunto compacto da região de atração,  $z_{av}(0) \in D_0$ , e  $z(0) - z_{av} = \mathcal{O}(1/\omega)$ , então existe algum  $\bar{\omega} > 0$ ,  $\forall \omega > \bar{\omega}$ , tal que

$$\|z(t) - z_{av}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathcal{O}(1/\omega), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (4)$$

Além disso, (1) tem uma única solução,  $T$ -periódica, exponencialmente estável  $\bar{z}(t, 1/\omega)$  com propriedade  $\|\bar{z}(t, 1/\omega)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathcal{O}(1/\omega)$ .

Deve-se notar que  $\bar{z}$  é a aproximação da solução de (1), ao considerarmos a solução do sistema médio como sendo (2) [40]. Analizando o sistema médio e provando que este é exponencialmente estável, pode-se aplicar o caso acima. Então, o sistema original (1) é exponencialmente estável e a solução tem comportamento semelhante à (4).

### **Teorema da Média para Equações Diferenciais Funcionais** [41], [42]

**Teorema B** *Considerando um sistema com atraso*

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\epsilon}, x_t\right), \quad \forall t > 0, \quad (5)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro real,  $x_t(\Theta) = x(t + \Theta)$  para  $-r \leq \Theta \leq 0$ , e  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um funcional contínuo de uma vizinhança  $\Omega$  de 0 do espaço de Banach  $X = C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$  de funções contínuas de  $[-r, 0]$  em  $\mathbb{R}^n$ . Assume-se que  $f(t, \varphi)$  é periódico em  $t$  uniformemente com respeito a  $\varphi$  em subconjuntos compactos de  $\Omega$  e que  $f$  tem uma derivada de Fréchet contínua  $\partial(f, \varphi)/\partial\varphi x$  em  $\varphi$  para  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Se  $y = y_0 \in \Omega$  é um equilíbrio exponencialmente estável para o sistema médio  $\dot{y}(t) = f_0(y_t)$ , para  $t > 0$ , onde  $f_0(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T f(s, \varphi) ds$ , então, para algum  $\epsilon_0 > 0$  e  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ , existe uma única solução periódica  $t \rightarrow x^*(t, \epsilon)$  de (5) com as propriedades de ser contínua em  $t$  e  $\epsilon$ , satisfazendo  $|x^*(t, \epsilon) - y_0| \leq \mathcal{O}(\epsilon)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ , e tal que exista  $\rho > 0$  de modo que, se  $x(\cdot; \rho)$  é uma solução para (5) com  $x(s) = \varphi$  e  $|\varphi - y_0| < \rho$ , então  $|x(t) - x^*(t, \epsilon)| \leq C e^{-\gamma(t-s)}$ , para  $C > 0$  e  $\gamma > 0$ .

## Desigualdades Úteis

Algumas desigualdades importantes vistas em [2] serão invocadas neste trabalho:

### Desigualdade de Young

$$ab \leq \frac{\gamma}{2}a^2 + \frac{1}{2\gamma}b^2 \quad \forall \gamma > 0. \quad (6)$$

### Desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\int_0^1 u(x)w(x)dx \leq \left( \int_0^1 u(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 w(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

## 1 CONTROLE EXTREMAL

### 1.1 Busca Extremal Escalar

Na versão mais comum do controle extremal (*Extremum Seeking Control* - ESC), utiliza-se sinais de perturbações com o propósito de estimar o gradiente do mapa desconhecido que será otimizado. Para entender melhor a ideia do controle extremal, considere a Figura 1, que apresenta um mapeamento estático na forma quadrática com uma única entrada.

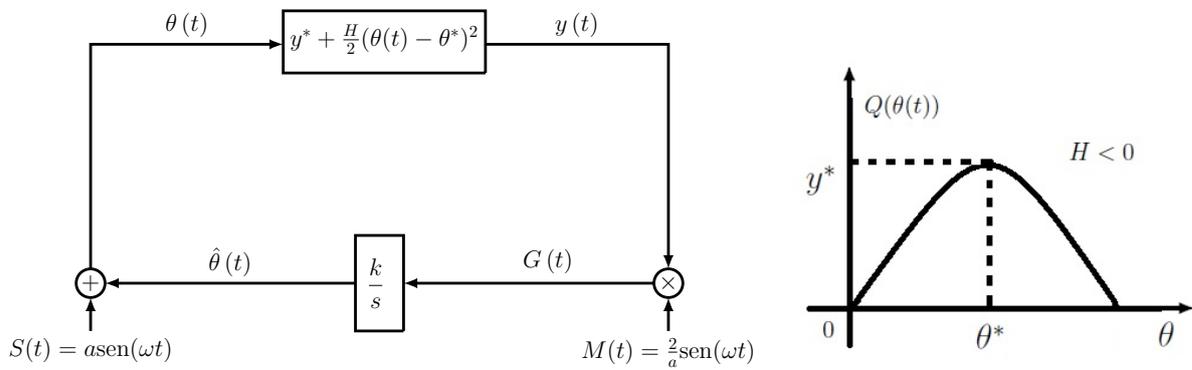


Figura 1 - Esquema de busca extremal para mapeamento escalar  $y(t) = Q(\theta(t)) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2$  baseado em perturbações senoidais,  $S(t)$  e  $M(t)$

A Figura 1 apresenta três diferentes  $\theta$ 's, onde:

- $\theta^*$  é o valor desconhecido da entrada que leva a saída do mapeamento para o ponto de otimização  $y^*$ ;
- $\hat{\theta}(t)$  é a estimativa em tempo real de  $\theta^*$ ;
- $\theta(t)$  é a entrada do mapeamento.

A entrada  $\theta(t)$  é a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  perturbada pelo sinal  $S(t) = a \sin(\omega t)$  com o propósito de se estimar o gradiente desconhecido  $[H(\theta(t) - \theta^*)]$  do mapeamento  $Q(\theta(t))$  no ponto  $G(t)$ , sendo  $Q^*$ ,  $H$  e  $\theta^*$  todos desconhecidos. O projetista deve conhecer apenas o sinal da Hessiana  $H$ , ou seja, saber se o mapa possui um máximo (valor de  $H < 0$ ) ou um mínimo (valor de  $H > 0$ ), e ser capaz de escolher um ganho de adaptação  $k$  tal que  $\text{sgn}(k) = -\text{sgn}(H)$ . O projetista também deve escolher uma frequência  $\omega$  relativamente grande quando comparada aos valores de  $a, k$  e  $H$ . A senóide foi escolhida para o sinal

de perturbação, entretanto outros tipos de perturbações tais como ondas quadradas a ruídos estocásticos, poderiam ser utilizados em vez da senóide, desde que possuam média nula [43]. A estimativa  $\hat{\theta}(t)$  é gerada pelo integrador com função de transferência  $k/s$  cujo ganho de adaptação  $k$  ajusta a velocidade de estimação.

## 1.2 Análise de Convergência

Considere a Figura 1, na qual apresenta-se um esquema de busca extremal baseado no método gradiente. Nela, o mapa quadrático é  $Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2$ , sendo que  $Q^*$ ,  $H$  e  $\theta^*$  são todos desconhecidos.

Os sinais de perturbação empregados são definidos como

$$S(t) = a \text{sen}(\omega t), \quad (8)$$

$$M(t) = \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t). \quad (9)$$

Analisando a Figura 1, pode-se concluir que

$$y(t) = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t) - \theta^*)^2, \quad (10)$$

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \text{sen}(\omega t). \quad (11)$$

Sabe-se que o objetivo do algoritmo de busca extremal é encontrar uma entrada  $\theta(t)$  em uma pequena vizinhança do ponto  $\theta^*$  que maximize ou minimize a saída  $y$  apenas com sua informação [44]. Para atingir esse objetivo o erro entre a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  e o ponto desconhecido  $\theta^*$ :

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (12)$$

deve convergir para zero, ou alguma vizinhança pequena da origem.

Com auxílio da equação (12) e pela análise da Figura 1, pode-se reescrever (11) como

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + \theta^* + a \text{sen}(\omega t). \quad (13)$$

Analisando novamente a Figura 1, conclui-se que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}(t) &= k \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) y \\ &= k \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[ y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2 \right].\end{aligned}\quad (14)$$

A partir da equação, (12) pode-se perceber que  $\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\tilde{\theta}}(t)$ . Então, substituindo-se (13) em (14), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}(t) &= k \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[ y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}(t) + a \operatorname{sen}(\omega t) \right)^2 \right] \\ &= k \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[ y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}^2(t) + 2a\tilde{\theta}(t) \operatorname{sen}(\omega t) + a^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) \right) \right] \\ &= k \frac{2}{a} y^* \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{kH}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + 2kH\tilde{\theta}(t) \operatorname{sen}^2(\omega t) + kaH \operatorname{sen}^3(\omega t),\end{aligned}$$

sabendo que  $\operatorname{sen}^2(\omega t) = (1 - \cos(2\omega t)) / 2$ . Logo,

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = k \frac{2}{a} y^* \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{kH}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + kH\tilde{\theta}(t) - kH\tilde{\theta}(t) \cos(2\omega t) + kaH \operatorname{sen}^3(\omega t).\quad (15)$$

Aplicando o Teorema da Média, o método aproxima a solução de um dado sistema pela solução de um sistema médio [40]. No sistema analisado isto é feito calculando-se a média temporal dos termos senoidais, o que nos leva a

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t) = kH\tilde{\theta}_{\text{av}}(t).\quad (16)$$

Sabendo que  $k = |k| \operatorname{sgn}(k) = -|k| \operatorname{sgn}(H)$ , tem-se

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t) = -|k| |H| \tilde{\theta}_{\text{av}}(t),\quad (17)$$

cuja solução é exponencialmente estável. O Teorema da Média [40] garante a existência de uma frequência  $\omega$  suficientemente grande tal que, se a condição inicial de  $\hat{\theta}(t)$  estiver suficientemente próxima ao ponto de otimização  $\theta^*$ , então:

$$|\theta(t) - \theta^*| \leq |\theta(0) - \theta^*| \exp(-|k| |H| t) + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \quad \forall t \geq 0.\quad (18)$$

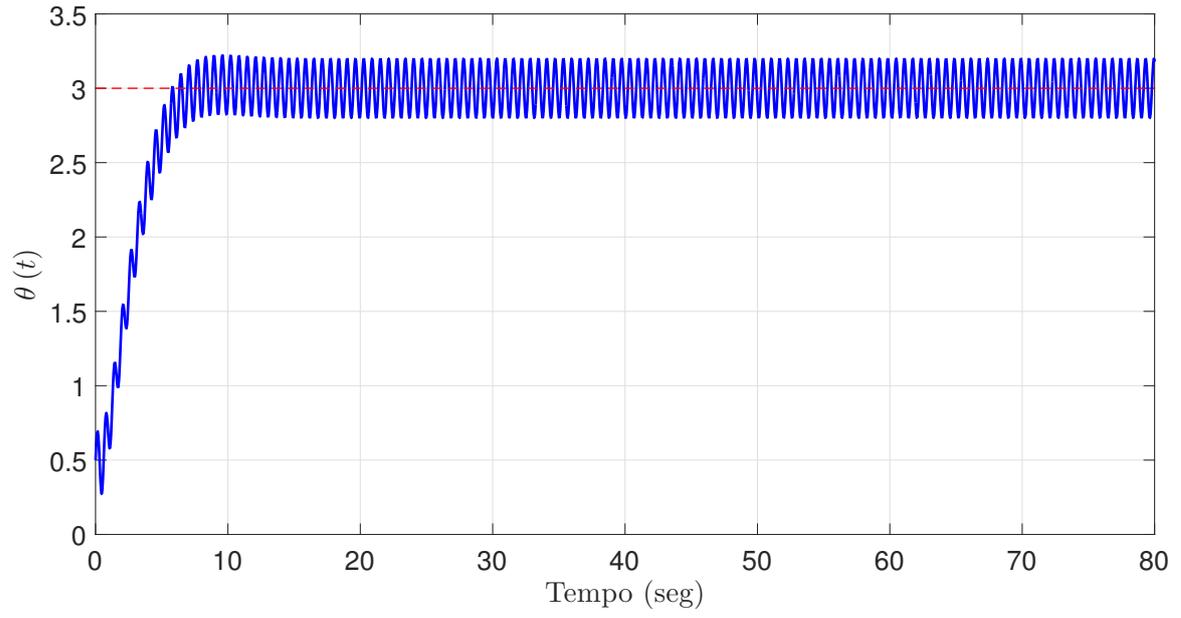
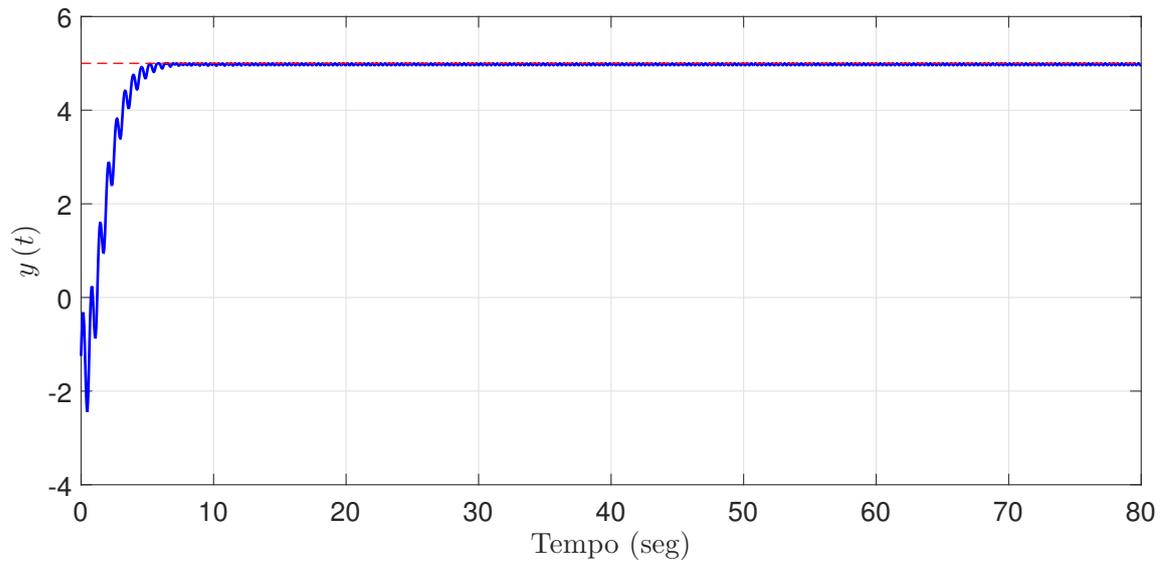
A inequação (18) garante que, se  $a$  é escolhido suficientemente pequeno e  $\omega$  é escolhido suficiente grande, a entrada  $\theta$  converge exponencialmente para um conjunto residual pequeno próximo ao ponto  $\theta^*$  desconhecido e, conseqüentemente, a saída  $y = Q(\theta(t))$  converge para a vizinhança da saída otimizada  $y^*$ .

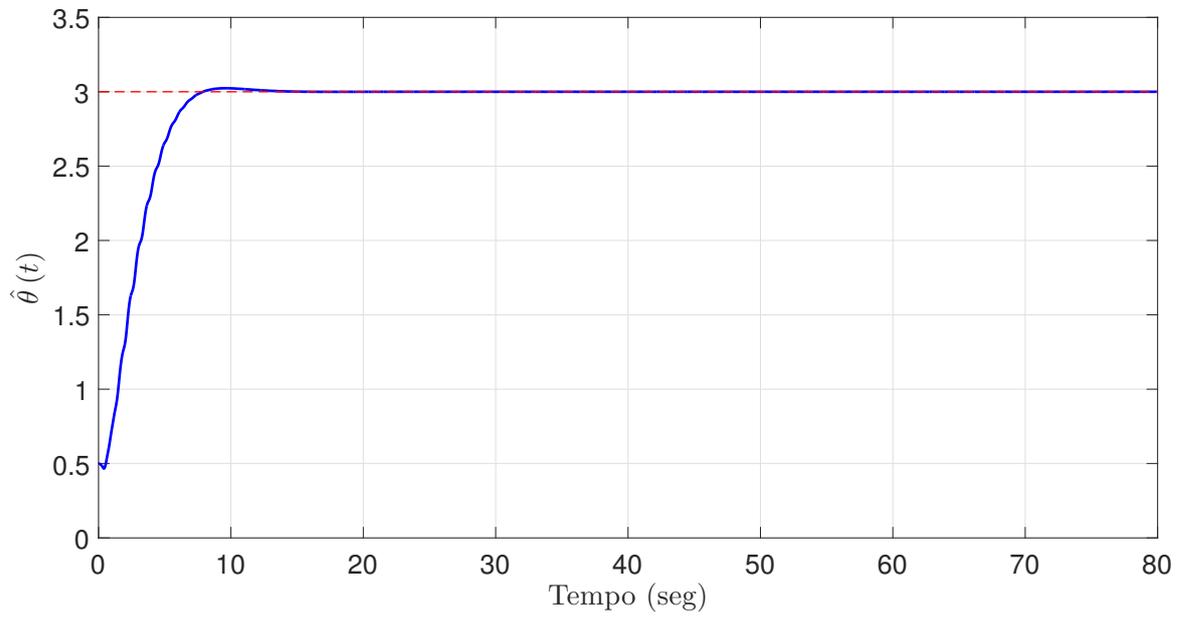
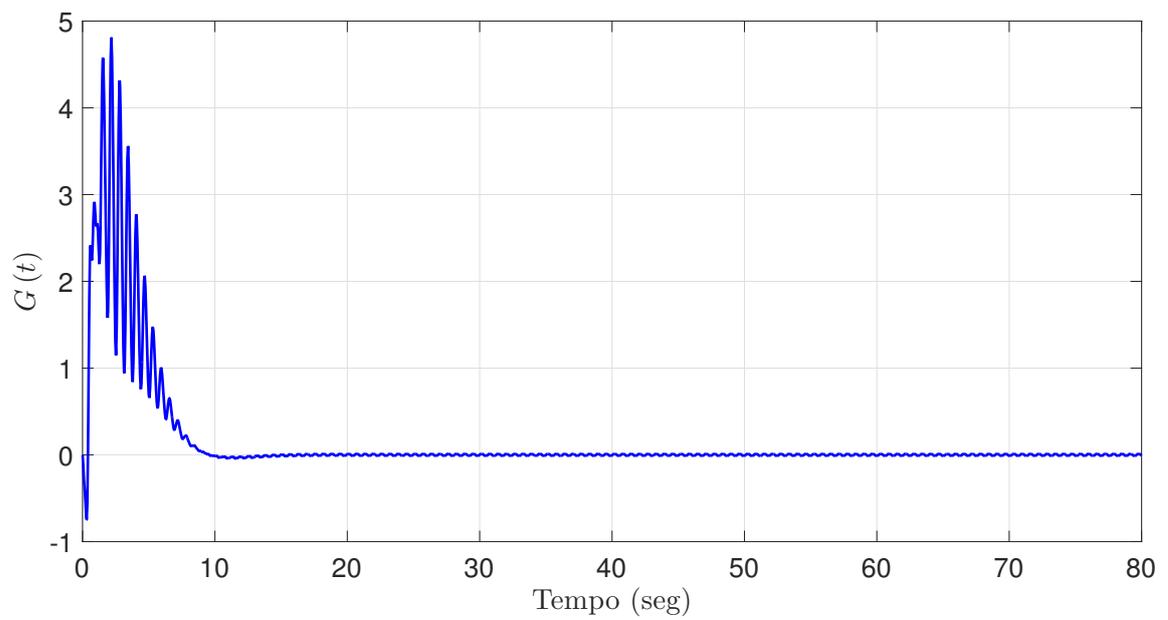
### 1.3 Exemplo Numérico de Busca Extremal

Para ilustrar esse exemplo, as Figuras 4, 5, 6 e 7 apresentam os resultados da simulação. O mapeamento utilizado nesta simulação é dado por

$$Q(\theta) = 5 - (\theta - 3)^2, \quad (19)$$

onde o ponto de extremo são  $(\theta^*, y^*)$ , respectivamente 3 e 5. Na simulação utilizou-se os parâmetros:  $a = 0.2$ ,  $\omega = 10$ ,  $k = 0.2$ ,  $\theta(0) = 0.5$  e  $H = -2$ . O comportamento da entrada  $\theta(t)$  e da saída  $y(t)$  converge para o valor ótimo  $\theta^*$  e  $y^*$ , respectivamente. Além disso, a estimativa  $\hat{\theta}$  também converge para o valor que otimiza o mapa e o gradiente do mapeamento converge para zero na medida que a saída converge para o ponto extremo.

Figura 2 - Entrada  $\theta(t)$ .Figura 3 - Saída  $y(t)$ .

Figura 4 - Estimativa  $\hat{\theta}(t)$ .Figura 5 - Gradiente do mapeamento  $G(t)$ .

## 2 CONTROLE EXTREMAL UTILIZANDO MÉTODO GRADIENTE COM ATRASOS CONSTANTES

Conforme discutido no capítulo anterior, o controle por busca extremal escalar considera aplicações em que o objetivo é maximizar (ou minimizar) a saída  $y \in \mathbb{R}$  de um mapeamento não-linear estático variando-se a entrada  $\theta \in \mathbb{R}$ . Neste capítulo, assume-se adicionalmente que existe um atraso *constante e conhecido*  $D \geq 0$  no caminho de atuação ou no sistema de medição tal que a saída mensurada é dada por

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (20)$$

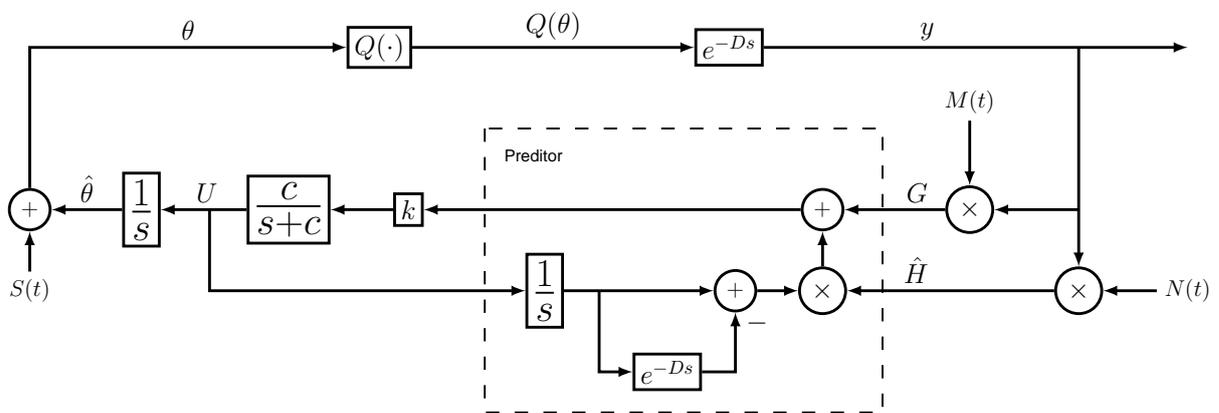


Figura 6 -Diagrama de blocos do esquema básico de predição para compensação do atraso no ESC gradiente.

A fim de facilitar a notação, assume-se ao longo deste capítulo que o sistema tem sua saída atrasada de acordo com o diagrama de blocos na Figura 6. Entretanto, os resultados nesta dissertação podem ser diretamente estendidos para o caso da entrada atrasada, visto que qualquer atraso na entrada pode ser movido para a saída do mapa estático. O caso onde atrasos de entrada  $D_{in}$  e de saída  $D_{out}$  ocorrem simultaneamente pode também ser tratado assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado é  $D = D_{in} + D_{out}$ , com  $D_{in}, D_{out} \geq 0$ . Sem perda de generalidade, considera-se o problema de busca pelo máximo, tal que o valor de  $\theta$  que maximiza  $y$  é denotado por  $\theta^*$ . Por simplicidade, assume-se que o mapeamento não-linear é quadrático:

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (21)$$

onde além das constantes  $\theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$  serem desconhecidas, o escalar  $H < 0$  é a Hessiana desconhecida do mapa estático. Substituindo-se (21) em (20), obtém-se o *mapa quadrático e estático com atraso* de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D) - \theta^*)^2. \quad (22)$$

## 2.1 Sinais do Sistema

Seja  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta^*$  e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (23)$$

o *erro de estimativa*. Da Figura 6, a *dinâmica do erro* pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = U(t - D). \quad (24)$$

Além disso, tem-se que

$$G(t) = M(t)y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (25)$$

onde os sinais de perturbação são redefinidos por

$$S(t) = a \operatorname{sen}(\omega(t + D)), \quad M(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t), \quad (26)$$

com a amplitude  $a > 0$  e a frequência  $\omega > 0$ . O sinal

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad (27)$$

é aplicado para se obter uma estimativa da Hessiana  $H$  desconhecida, onde o sinal de demodulação  $N(t)$  é dado por

$$N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (28)$$

Em [34], foi provado que

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (29)$$

se um mapa quadrático como em (21) é considerado. Em outras palavras, a versão média de  $\hat{H}(t)$  é dada por  $\hat{H}_{\text{av}} = (Ny)_{\text{av}} = H$ .

## 2.2 Realimentação por Preditor com Estimativa da Hessiana

Utilizando-se a análise média (*averaging analysis*) pode-se verificar que a versão média do sinal  $G(t)$  em (25) é dada por

$$G_{\text{av}}(t) = H\tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D). \quad (30)$$

De (24), os seguintes modelos médios podem ser obtidos

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t - D) = U_{\text{av}}(t - D), \quad (31)$$

$$\dot{G}_{\text{av}}(t) = HU_{\text{av}}(t - D), \quad (32)$$

onde  $U_{\text{av}} \in \mathbb{R}$  é o controle médio resultante para  $U \in \mathbb{R}$ .

No sentido de motivar o projeto de controle por preditor, a ideia aqui é compensar o atraso pela realimentação do estado futuro  $G(t + D)$ , ou  $G_{\text{av}}(t + D)$  no sistema médio equivalente. Dado qualquer ganho de estabilização  $k > 0$  para o sistema não atrasado, deseja-se ter uma lei de controle tal que

$$U_{\text{av}}(t) = kG_{\text{av}}(t + D), \quad \forall t \geq 0, \quad (33)$$

o que parece ser não implementável já que ela requer valores futuros do estado. No entanto, aplicando a fórmula da variação das constantes para (32) pode-se expressar o estado futuro como

$$G_{\text{av}}(t + D) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D}^t U_{\text{av}}(\sigma) d\sigma, \quad (34)$$

que fornece o estado futuro  $G_{\text{av}}(t + D)$  em termos do sinal de controle médio  $U_{\text{av}}(\sigma)$  na

janela causal de tempo  $[t - D, t]$ . Isto produz a lei de realimentação:

$$U_{\text{av}}(t) = k \left[ G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D}^t U_{\text{av}}(\sigma) d\sigma \right]. \quad (35)$$

Portanto, de (34) e (35), a lei de realimentação média (33) pode ser obtida de fato como desejada. Consequentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t) = kG_{\text{av}}(t + D), \quad \forall t \geq 0. \quad (36)$$

Dessa forma, a partir de (30), tem-se

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)}{dt} = kH\tilde{\theta}_{\text{av}}(t), \quad \forall t \geq D, \quad (37)$$

com um equilíbrio  $\tilde{\theta}_{\text{av}}^e = 0$  exponencialmente atrativo, uma vez que  $k > 0$  no projeto do controlador e  $H < 0$  por hipótese.

O desempenho do controle pode ser melhorado aplicando-se o conceito de otimalidade inversa, tema que será discutido no próximo capítulo, onde um filtro passa-baixas é inserido no controlador baseado em preditor. Neste caso, propõe-se a seguinte versão filtrada do preditor de dimensão infinita para a compensação do atraso [28]. Ou seja a realimentação por preditor com a Hessiana baseada em perturbação e *averaging* obedece a equação:

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (38)$$

onde  $c > 0$  é suficientemente grande. A versão média do sinal (38) é um sinal filtrado de (35). Esta filtragem passa-baixa é também particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas [41, 42] é invocado, uma vez que não existe resultados de Teorema da média para sistemas com atrasos na saída/entrada. Assim, manipulamos matematicamente o sistema, inserindo o filtro e transformando atrasos de saída em atrasos distribuídos no estado, assim como a variável de controle  $U(t)$  passa a ser vista como uma variável de estado do sistema em malha fechada.

### 2.3 Análise de Estabilidade

O Teorema a seguir é um caso particular do Teorema 1 presente em [10].

**Teorema 1.** *Considere o sistema em malha fechada da Figura 6, com saída atrasada (22). Então, existe  $c^* > 0$  tal que,  $\forall c \geq c^*$ ,  $\exists \omega^*(c) > 0$  tal que,  $\forall \omega > \omega^*$ , o sistema atrasado em malha fechada (24) e (38), com  $G(t)$  em (25),  $\hat{H}(t)$  em (27) e estado  $\tilde{\theta}(t-D)$ ,  $U(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t-D, t]$ , tem uma única solução periódica exponencialmente estável em  $t$  de período  $\Pi = 2\pi/\omega$ , denotada por  $\tilde{\theta}^\Pi(t-D)$ ,  $U^\Pi(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t-D, t]$ , satisfazendo,  $\forall t \geq 0$ :*

$$\left( \left| \tilde{\theta}^\Pi(t-D) \right|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega) \quad (39)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (40)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (41)$$

**Prova:** A demonstração segue os passos 1 a 8 abaixo.

**Passo1:** *EDP para Representação do Atraso*

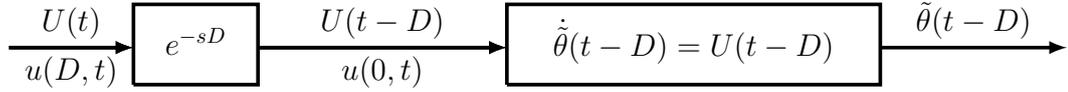


Figura 7 - Sistema  $\dot{\theta}(t-D) = U(t-D)$  com atuador de atraso em  $D$  unidades de tempo.

De acordo com [2], o atraso em (24) pode ser representado usando uma EDP de transporte conforme a Figura 7, sendo

$$\dot{\theta}(t-D) = u(0,t), \quad (42)$$

$$u_t(x,t) = u_x(x,t), \quad x \in [0, D], \quad (43)$$

$$u(D,t) = U(t), \quad (44)$$

onde a solução de (43)–(44) é

$$u(x,t) = U(t+x-D). \quad (45)$$

**Passo 2: Equações em Malha Fechada**

Primeiramente, substituindo-se  $S(t)$  de (26) em  $\theta(t)$  na equação (25), obtém-se

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\omega(t + D)). \quad (46)$$

Agora, colocando-se (23) e (46) em (22) tal que a saída seja dada em termos de  $\tilde{\theta}$ , tem-se:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\omega t))^2. \quad (47)$$

Substituindo-se  $M(t)$  definido por (26) em  $G(t)$  dado por (25), além disso (28) em (27) e representando o integrando em (38) usando o estado da EDP de transporte, obtém-se

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (48)$$

$$G(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t) y(t), \quad (49)$$

$$\hat{H}(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) y(t). \quad (50)$$

Posteriormente, substituindo-se (47) em (49) e (50) e, então depois o resultado de (49) e (50) em (48), assim como extraindo o fator comum  $y$  na versão resultante de (48), tem-se

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2}(\tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\omega t))^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Expandindo-se o binômio em (51), obtém-se

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t - D) + H a \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Finalmente, substituindo (52) em (44), pode-se reescrever (42)–(44) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = u(0, t), \quad (53)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (54)$$

$$\begin{aligned} u(D, t) &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t-D) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. H a \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t-D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t-D) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2H \sin^2(\omega t) \tilde{\theta}(t-D) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8H}{a} \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t-D) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + aH \sin^3(\omega t) - 4H \sin^2(\omega t) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t-D) \sin(\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t-D) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + H \tilde{\theta}(t-D) - H \cos(2\omega t) \tilde{\theta}(t-D) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4H}{a} [\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)] \tilde{\theta}(t-D) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3aH}{4} \sin(\omega t) - \frac{aH}{4} \sin(3\omega t) - 2H \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [H + H \cos(4\omega t)] \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (55) \end{aligned}$$

### Passo 3: Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) := \tilde{\theta}(t - D), \quad (56)$$

a versão média do sistema (53)–(55) é:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = u_{\text{av}}(0, t), \quad (57)$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x, t) = \partial_x u_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (58)$$

$$\frac{d}{dt} u_{\text{av}}(D, t) = -c u_{\text{av}}(D, t) + ckH \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (59)$$

onde na última linha simplesmente foram zeradas todas as funções seno e cosseno de  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  e  $4\omega$  com média zero. Além do mais, o filtro  $c/(s+c)$  também foi representado na forma em espaço de estado. A solução da EDP de transporte (58)–(59) é dada por

$$u_{\text{av}}(x, t) = U_{\text{av}}(t + x - D). \quad (60)$$

**Passo 4:** *Transformação backstepping, sua inversa e o sistema alvo*

Considere a transformação *backstepping* de dimensão infinita do estado atrasado

$$w(x, t) = u_{\text{av}}(x, t) - kH \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (61)$$

que mapeia o sistema (57)–(59) no sistema alvo:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = kH \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + w(0, t), \quad (62)$$

$$w_t(x, t) = w_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (63)$$

$$w(D, t) = -\frac{1}{c} \partial_t u_{\text{av}}(D, t). \quad (64)$$

Utilizando-se (61) para  $x = D$  e o fato de que  $u_{\text{av}}(D, t) = U_{\text{av}}(t)$ , a partir de (64) obtém-se (59), ou seja,

$$U_{\text{av}}(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ kH \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (65)$$

Considere agora o sinal  $w(D, t)$ . É fácil mostrar que

$$w_t(D, t) = \partial_t u_{\text{av}}(D, t) - kH u_{\text{av}}(D, t), \quad (66)$$

onde  $\partial_t u_{\text{av}}(D, t) = \dot{U}_{\text{av}}(t)$ . A inversa de (61) é dada por

$$u_{\text{av}}(x, t) = w(x, t) + kH \left[ e^{kHx} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x e^{kH(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (67)$$

Substituindo-se (64) e (67) em (66), obtém-se

$$w_t(D, t) = -cw(D, t) - kHw(D, t) - (kH)^2 \left[ e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (68)$$

**Passo 5:** *Funcional de Lyapunov-Krasovskii*

Considere o seguinte funcional de Lyapunov

$$V(t) = \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2} + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D (1+x)w^2(x, t)dx + \frac{1}{2}w^2(D, t), \quad (69)$$

onde o parâmetro  $\bar{a} > 0$  será escolhido mais adiante. Tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= kH\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0, t) \\ &\quad + \bar{a} \int_0^D (1+x)w(x, t)w_x(x, t)dx + w(D, t)w_t(D, t) \\ &= kH\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0, t) + \frac{\bar{a}(1+D)}{2}w^2(D, t) \\ &\quad - \frac{\bar{a}}{2}w^2(0, t) - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &\quad + w(D, t)w_t(D, t) \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} &\leq kH\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)}{2\bar{a}} - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &\quad + w(D, t) \left[ w_t(D, t) + \frac{\bar{a}(1+D)}{2}w(D, t) \right]. \end{aligned} \quad (71)$$

Lembrando-se que  $k > 0$  e  $H < 0$ , escolhe-se

$$\bar{a} = -\frac{1}{kH}. \quad (72)$$

Então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \frac{kH}{2}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{1}{2kH} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &\quad + w(D, t) \left[ w_t(D, t) - \frac{(1+D)}{2kH}w(D, t) \right] \\ &= -\frac{1}{2\bar{a}}\tilde{\vartheta}_{av}^2(t) - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx \\ &\quad + w(D, t) \left[ w_t(D, t) + \frac{\bar{a}(1+D)}{2}w(D, t) \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Agora, considera-se (73) juntamente com (68). Completando-se os quadrados, obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{4\bar{a}}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{\bar{a}}{4} \int_0^D w^2(x,t)dx \\
& + \bar{a} \left| (kH)^2 e^{kHD} \right|^2 w^2(D,t) \\
& + \frac{1}{\bar{a}} \left\| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right\|^2 w^2(D,t) \\
& + \left[ \frac{\bar{a}(1+D)}{2} - kH \right] w^2(D,t) - cw^2(D,t). \tag{74}
\end{aligned}$$

Para escrevermos (74), utilizou-se das seguintes relações

$$\begin{aligned}
& - w(D,t) \left\langle (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)}, w(\sigma,t) \right\rangle \\
\leq & |w(D,t)| \left\| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right\| \|w(t)\| \\
\leq & \frac{\bar{a}}{4} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{\bar{a}} \left\| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right\|^2 w^2(D,t), \tag{75}
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é a de Cauchy-Schwartz e a segunda é a de Young. A notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno na variável espacial  $\sigma \in [0, D]$ , das quais ambas  $e^{kH(D-\sigma)}$  e  $w(\sigma, t)$  dependem deste produto e  $\| \cdot \|$  denota a norma  $L_2$  em  $\sigma$ . Então, a partir de (74), chega-se a

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{4\bar{a}}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{\bar{a}}{4(1+D)} \int_0^D (1+x)w^2(x,t)dx \\
& - (c - c^*)w^2(D,t), \tag{76}
\end{aligned}$$

onde

$$c^* = \frac{\bar{a}(1+D)}{2} - kH + \bar{a} \left| (kH)^2 e^{kHD} \right|^2 + \frac{1}{\bar{a}} \left\| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right\|^2. \tag{77}$$

A partir de (77), é claro que um limitante superior  $c^*$  pode ser obtido de limitantes inferiores e superiores da Hessiana desconhecida  $H$  e do atraso  $D$ . Portanto, de (76), se  $c$  é escolhido tal que  $c > c^*$ , obtém-se

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \tag{78}$$

para algum  $\mu > 0$ . Com isso, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido da norma completa do estado

$$\left( |\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)|^2 + \int_0^D w^2(x,t)dx + w^2(D,t) \right)^{1/2}, \tag{79}$$

ou seja, na variável transformada  $(\tilde{\vartheta}_{av}, w)$ .

**Passo 6:** *Estabilidade Exponencial (na norma  $L_2$ ) para o Sistema em Malha Fechada Médio (57)–(59)*

Para obter a estabilidade exponencial com relação à norma

$$\left( |\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D u_{av}^2(x, t) dx + u_{av}^2(D, t) \right)^{1/2}, \quad (80)$$

é preciso mostrar que existem números positivos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tal que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (81)$$

onde  $\Psi(t) := |\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + \int_0^D u_{av}^2(x, t) dx + u_{av}^2(D, t)$ , ou equivalentemente,

$$\Psi(t) := |\tilde{\theta}_{av}(t - D)|^2 + \int_{t-D}^t U_{av}^2(\tau) d\tau + U_{av}^2(t), \quad (82)$$

usando-se (56) e (60).

Isto é estabelecido diretamente a partir de (61), (67), (69) e empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e outros cálculos, como mostra-se na prova do Teorema 2.1 em [2]. Portanto, assim como (78), tem-se

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (83)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial.

**Passo 7:** Invocando o Teorema da Média

Primeiramente, note que o sistema em malha fechada (24) e (38) pode ser escrito como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = U(t - D), \quad (84)$$

$$\dot{U}(t) = -cU(t) + c \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (85)$$

onde  $z(t) = [\tilde{\theta}(t - D), U(t)]^T$  é o vetor de estado. Além disso, a partir de  $G(t)$  em (25) e  $\hat{H}(t)$  em (27), obtém-se

$$\dot{z}(t) = f(\omega t, z_t), \quad (86)$$

onde  $z_t(\Theta) = z(t + \Theta)$  para  $-D \leq \Theta \leq 0$  e  $f$  é uma função contínua apropriada, de maneira que o teorema da média dado por [41] e [42] pode ser diretamente aplicado considerando  $\omega = 1/\epsilon$ .

Relembrando que de (83), a origem do sistema em malha fechada (57)–(59) com a EDP de transporte para a representação do atraso, é exponencialmente estável. Então, de acordo com o teorema da média [41, 42], para  $\omega$  suficiente grande, (53)–(55) tem uma única solução periódica exponencialmente estável ao redor de seu equilíbrio (a origem) satisfazendo (39).

**Passo 8:** Convergência Assintótica na Vizinhança do Extremo  $(\theta^*, y^*)$

Fazendo a mudança de variáveis (56) e em seguida integrando ambos os lados de (42) no intervalo de integração  $[t, \sigma + D]$ , obtém-se:

$$\tilde{\vartheta}(\sigma + D) = \tilde{\vartheta}(t) + \int_t^{\sigma+D} u(0, s) ds. \quad (87)$$

De (45), pode-se reescrever (87) em termos de  $U$ , ou seja

$$\tilde{\vartheta}(\sigma + D) = \tilde{\vartheta}(t) + \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau. \quad (88)$$

Agora, note que

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \tilde{\vartheta}(\sigma + D), \quad \forall \sigma \in [t - D, t]. \quad (89)$$

Conseqüentemente,

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \tilde{\theta}(t - D) + \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau, \quad \forall \sigma \in [t - D, t]. \quad (90)$$

Aplicando o supremo em ambos os lados de (90), obtém-se

$$\begin{aligned}
\sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(\sigma)| &= \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(t-D)| + \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(t-D)| + \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \int_{t-D}^t |U(\tau)| d\tau \\
&\leq |\tilde{\theta}(t-D)| + \int_{t-D}^t |U(\tau)| d\tau \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\
&\leq |\tilde{\theta}(t-D)| + \left( \int_{t-D}^t d\tau \right)^{1/2} \times \left( \int_{t-D}^t |U(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq |\tilde{\theta}(t-D)| + \sqrt{D} \left( \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{91}
\end{aligned}$$

Agora, é fácil verificar que

$$|\tilde{\theta}(t-D)| \leq \left( |\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \tag{92}$$

$$\left( \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \left( |\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{93}$$

Usando (92) e (93), tem-se

$$\begin{aligned}
|\tilde{\theta}(t-D)| + \sqrt{D} \left( \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} &\leq (1 + \sqrt{D}) \left( |\tilde{\theta}(t-D)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{94}
\end{aligned}$$

A partir (91), é possível concluir que

$$\sup_{t-D \leq \sigma \leq t} |\tilde{\theta}(\sigma)| \leq (1 + \sqrt{D}) \left( |\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \tag{95}$$

e, consequentemente,

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq (1 + \sqrt{D}) \left( |\tilde{\theta}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{96}$$

A desigualdade (96) pode também ser dada em termos da solução periódica  $\tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D)$ ,  $U^{\text{II}}(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in [t-D, t]$  assim como

$$\begin{aligned}
|\tilde{\theta}(t)| &\leq (1 + \sqrt{D}) \left( |\tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D) + \tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_{t-D}^t [U(\tau) - U^{\text{II}}(\tau) + U^{\text{II}}(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \tag{97}
\end{aligned}$$

Aplicando-se a desigualdade de Young e métodos algébricos, o lado direito de (97) e  $|\tilde{\theta}(t)|$  podem ser majorados por

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(t)| \leq & \sqrt{2} (1 + \sqrt{D}) \left( \left| \tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^{\Pi}(t-D) \right|^2 + \left| \tilde{\theta}^{\Pi}(t-D) \right|^2 \right. \\ & \left. + \int_{t-D}^t [U(\tau) - U^{\Pi}(\tau)]^2 d\tau + \int_{t-D}^t [U^{\Pi}(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (98)$$

De acordo com o Teorema da Média [41, 42], tem-se que  $\tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^{\Pi}(t-D) \rightarrow 0$  e  $\int_{t-D}^t [U(\tau) - U^{\Pi}(\tau)]^2 d\tau \rightarrow 0$ , exponencialmente. Logo,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\theta}(t)| &= \sqrt{2} (1 + \sqrt{D}) \\ &\times \left( \left| \tilde{\theta}^{\Pi}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t [U^{\Pi}(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (99)$$

De (39) e (99), pode se escrever  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega)$ . De (23) e lembrando que  $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$  com  $S(t) = a \sin(\omega(t+D))$ , pode-se reescrever

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t). \quad (100)$$

Uma vez que o primeiro termo do lado direito de (100) é em última análise da ordem  $\mathcal{O}(1/\omega)$  e o segundo termo é da ordem  $\mathcal{O}(a)$ , então

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega). \quad (101)$$

Finalmente, de (22) e (101), obtém-se (41). □

## 2.4 Simulações

A simulação a seguir demonstra a estabilidade do sistema realimentado baseado em preditor discutido neste capítulo para o controle de busca extremal com atrasos conhecidos. É importante mencionar que nestas simulações não é satisfeita a condição para otimalidade inversa, ou seja não foi utilizado o filtro passa-baixa na lei de controle (38). O mapeamento quadrático considerado foi

$$Q(\theta) = 5 - (0, 1)(\theta - 3)^2. \quad (102)$$

Diferentemente da simulação apresentada no Capítulo 1, este resultado possui um atraso de  $D = 5$  s. Conforme o mapeamento em (102), o ponto de extremo é  $(\theta^*, y^*) = (3; 5)$  e a Hessiana desse mapeamento estático é  $H = -0,2$ . Para a simulação foram utilizados os seguintes parâmetros:  $\omega = 10$  rad/s;  $k = 0,2$ ;  $\theta(0) = -5$  e  $a = 0,2$ .

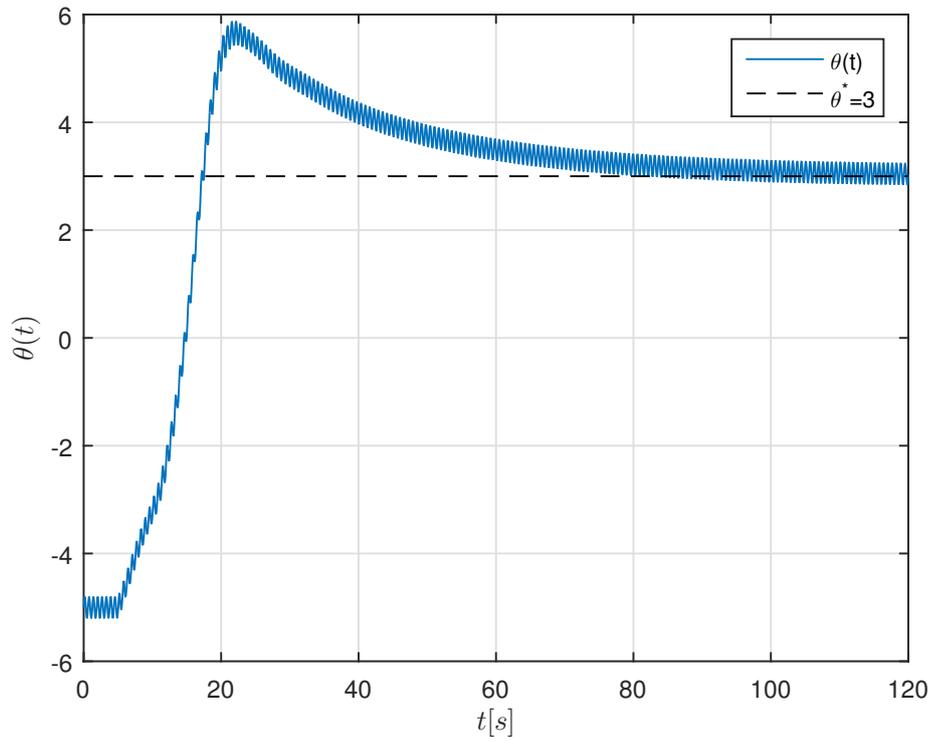


Figura 8 - Entrada  $\theta(t)$  sem o efeito da otimalidade inversa.

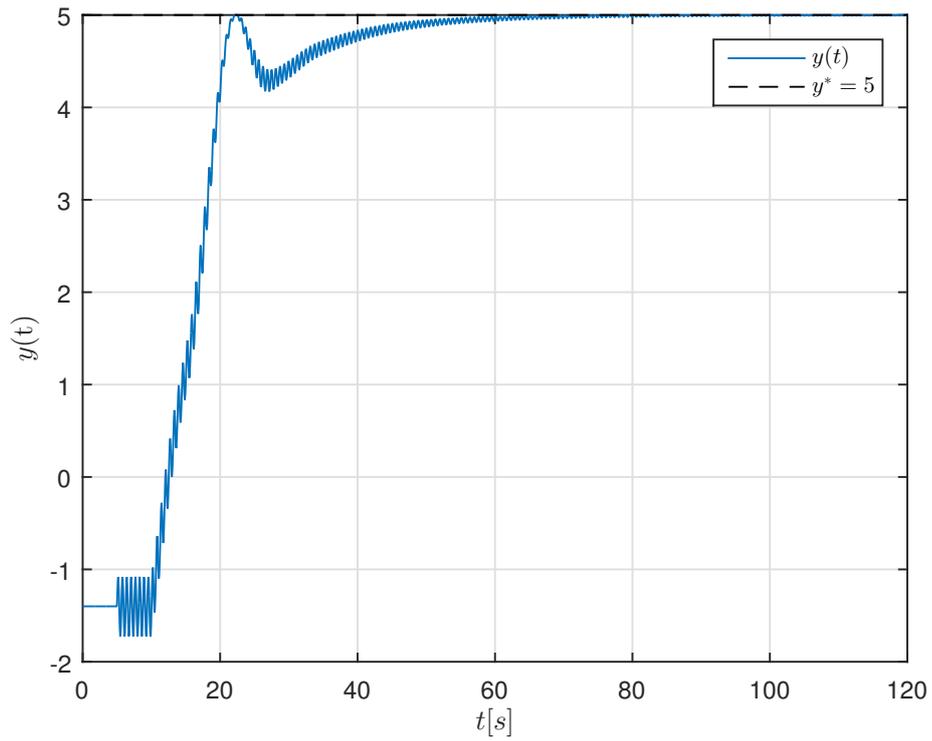


Figura 9 - Saída  $y(t)$  sem o efeito da otimalidade inversa.

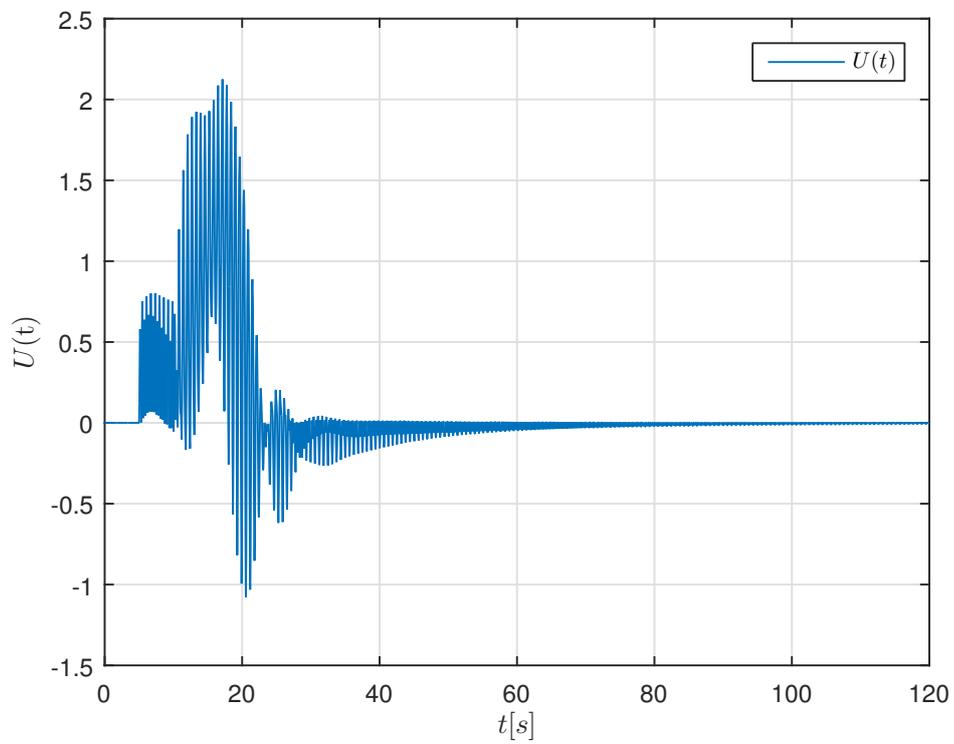


Figura 10 - Sinal de controle  $U(t)$  sem o efeito da otimalidade inversa.

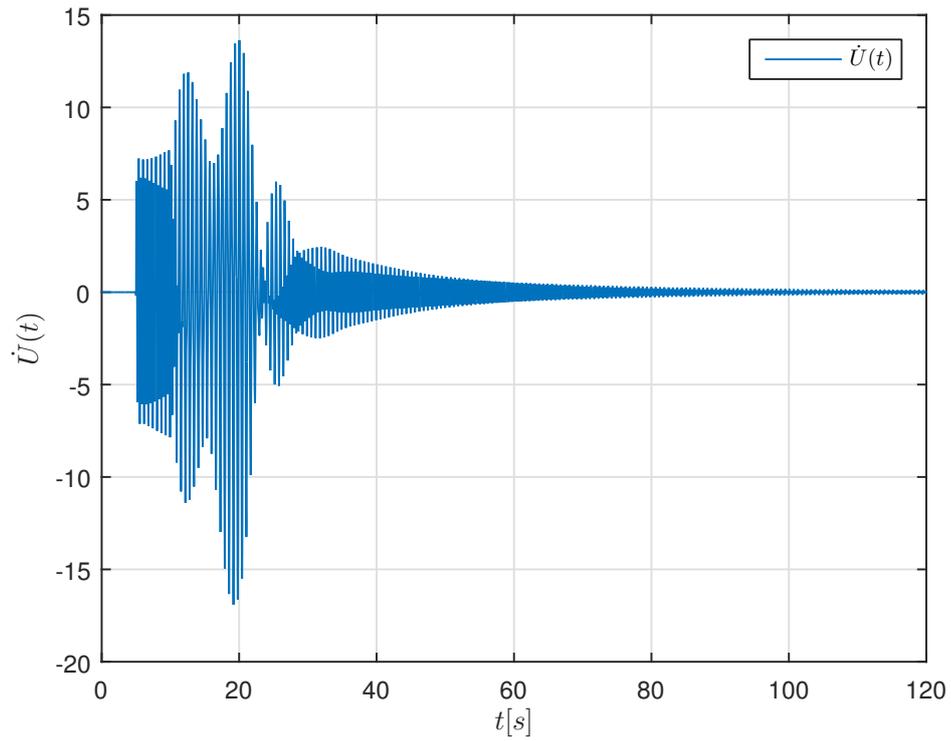


Figura 11 - Derivada do sinal controle  $U(t)$  sem o efeito da otimalidade inversa.

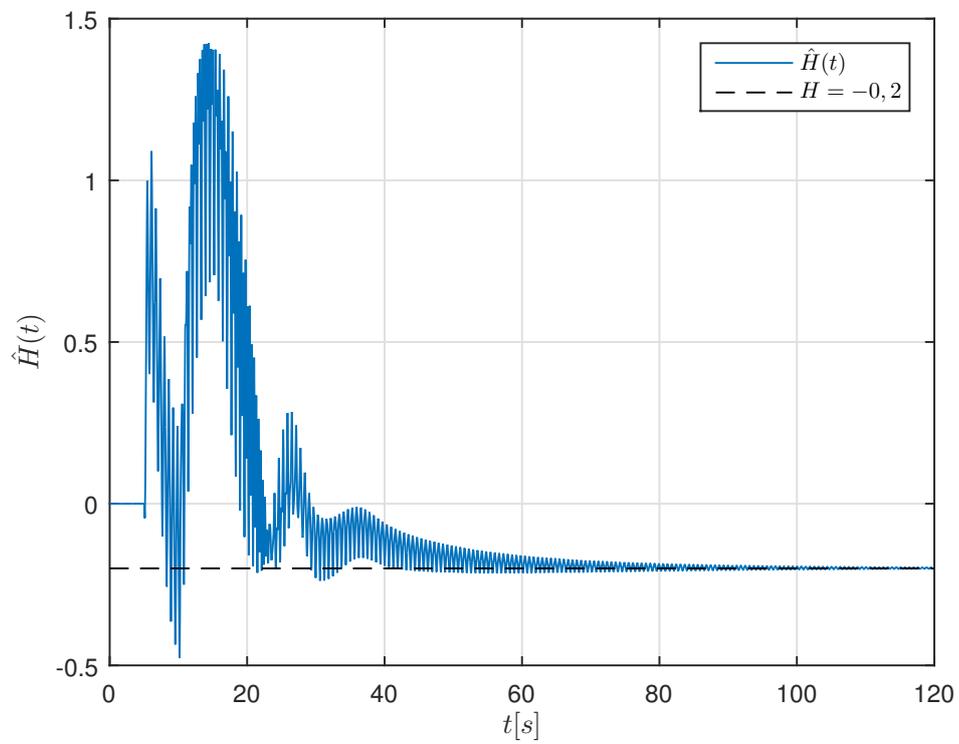


Figura 12 - Estimativa da Hessiana  $\hat{H}(t)$  sem o efeito da otimalidade inversa.

A estratégia de busca extremal via preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbação senoidal apresentada neste capítulo foi capaz de garantir ao sistema em malha fechada propriedades de estabilidade mesmo na presença de atrasos nos sensores. A estabilidade exponencial e a convergência a uma vizinhança pequena do ponto de extremo, foram alcançadas. Entretanto ainda observa-se uma grande ultrapassagem em relação ao ponto de extremo  $\theta^*$  na Figura 8 e verifica-se uma oscilação transitória forte no sinal da saída  $y(t)$  da Figura 9, além de um considerável esforço de controle na Figura 10 e Figura 11 assim como na estimativa da Hessiana da Figura 12. No próximo capítulo será introduzido a prova matemática da otimalidade inversa e a verificação de melhora de desempenho do sistema de controle proposto.

### 3 OTIMALIDADE INVERSA

Na formulação da otimalidade inversa, a variável  $\dot{U}(t)$  será considerada como entrada do sistema, enquanto que  $U(t)$  continua sendo a variável de atuação. Consequentemente, a otimalidade inversa será implementada depois do integrador, ou seja, como uma realimentação dinâmica. Tratando o sinal  $\dot{U}(t)$  como uma entrada é o mesmo que adicionar um integrador, que tendo sido observado como sendo benéfico para projeto de controle em sistemas com atraso em [45]. Resultados teóricos e simulação apresentados a seguir comprovam as vantagens de se satisfazer a otimalidade inversa, para o sistema de controle extremal em malha fechada.

#### 3.1 Otimalidade inversa em ESC com atrasos

**Teorema 2** *Existe um  $c^*$  tal que o sistema médio realimentado (32) e (38) é exponencialmente estável no sentido da norma*

$$\Psi(t) = \left( |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2 + \int_{t-D}^t U_{av}(\tau)^2 d\tau + U_{av}(t)^2 \right)^{1/2} \quad (103)$$

para todo  $c > c^*$ . Além disso, existe  $c^{**} > c^*$  tal que, para qualquer  $c \geq c^{**}$ , a lei de controle (38) minimiza a função custo

$$J = \int_0^\infty (\mathcal{L}(t) + \dot{U}_{av}(t)^2) dt, \quad (104)$$

onde  $\mathcal{L}(t)$  é um funcional de  $(\tilde{\theta}_{av}(t-D), U(\tau))$ ,  $\tau \in [t-D, t]$  tal que

$$\mathcal{L}(t) \geq \mu \Psi(t)^2 \quad (105)$$

para algum  $\mu(c) > 0$  com a propriedade que  $\mu(c) \rightarrow \infty$  à medida que  $c \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Baseando-se na prova do Teorema 6 em [38] e no Teorema 2.8 em [39], no qual

escolhe-se  $c^{**} = 4c^*$  e  $c = 2c^*$  e define-se  $\mathcal{L}(t)$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &:= -2c\dot{V}(t) + c(c - 4c^*)w^2(D, t) \\ &\geq c \left( \frac{1}{2}k\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + (c - 2c^*)w^2(D, t) \right), \end{aligned} \quad (106)$$

onde  $\vartheta_{\text{av}}(t) := \tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D)$ .

Substituindo a transformação *backstepping* (68) na derivada do funcional de Lyapunov (70), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0, t) + \frac{\bar{a}(1+D)}{2}w^2(D, t) \\ &\quad - \frac{\bar{a}}{2}w^2(0, t) - \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx - 2c^*w^2(D, t) \\ &\quad - kHw^2(D, t) - (kH)^2w(D, t)e^{kHD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \\ &\quad - (kH)^2w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)}w(\sigma, t)d\sigma. \end{aligned} \quad (107)$$

Então, substituindo (107) em (106),  $\mathcal{L}(t)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= -2ckH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - 2c\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0, t) - 2c\frac{\bar{a}(1+D)}{2}w^2(D, t) \\ &\quad + c\bar{a}w^2(0, t) + c\bar{a} \int_0^D w^2(x, t)dx + 2ckHw^2(D, t) \\ &\quad + 2c(kH)^2w(D, t)e^{kHD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \\ &\quad + 2c(kH)^2w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)}w(\sigma, t)d\sigma + c^2w^2(D, t). \end{aligned} \quad (108)$$

No entanto, substituindo-se a versão média do sistema (57) no sistema alvo em (62), obtém-se

$$u_{\text{av}}(0, t) = kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + w(0, t). \quad (109)$$

Reorganizando (109) para isolar  $w(0, t)$ , tem-se:

$$w(0, t) = u_{\text{av}}(0, t) - kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t). \quad (110)$$

Então, substituindo-se (110) em (108), e adicionando-subtraindo o termo  $\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)$

(em azul) no lado direito da equação resultante, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= c\left(\bar{a}(kH)^2\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - 2(\bar{a}kH + 1)u_{\text{av}}(0, t)\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right. \\
&\quad - \bar{a}(1 + D)w^2(D, t) - \gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + 2(kH)^2w(D, t) \\
&\quad \times \left[ e^{kHD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D e^{kH(D-\sigma)}w(\sigma, t)d\sigma \right] \\
&\quad + \bar{a}u_{\text{av}}^2(0, t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + w^2(D, t)(2c^* + 2kH) \\
&\quad \left. + c(\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + (c - 2c^*)w^2(D, t)) \right). \tag{111}
\end{aligned}$$

Sabe-se que  $\bar{a} = -\frac{1}{kH}$ , então substituindo-se  $kH$  por  $-\frac{1}{\bar{a}}$  em (111), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= c\left(\left[\frac{1}{\bar{a}} - \gamma\right]\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)(2c^* - \bar{a}(1 + D) - \frac{2}{\bar{a}})w^2(D, t) \right. \\
&\quad + \bar{a}u_{\text{av}}^2(0, t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + \frac{2}{\bar{a}^2}w(D, t) \\
&\quad \times \left[ e^{kHD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D e^{kH(D-\sigma)}w(\sigma, t)d\sigma \right] \\
&\quad \left. + c(\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + (c - 2c^*)w^2(D, t)) \right). \tag{112}
\end{aligned}$$

Após algumas manipulações matemática dos termos em (112),  $\mathcal{L}(t)$  pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}(t) = \Upsilon(D, t) + c(\gamma\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t)dx + (c - 2c^*)w^2(D, t)), \tag{113}$$

onde  $\Upsilon(D, t)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\Upsilon(D, t) &= c\left(\left[\frac{1}{\bar{a}} - \gamma\right]\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + (2c^* - \bar{a}(1 + D) - \frac{2}{\bar{a}})w^2(D, t) \right. \\
&\quad + \bar{a}u_{\text{av}}^2(0, t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(\sigma, t)d\sigma + \frac{2}{\bar{a}^2}w(D, t)e^{kHD}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \\
&\quad \left. + \frac{2}{\bar{a}^2}w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)}w(\sigma, t)d\sigma \right). \tag{114}
\end{aligned}$$

Para satisfazer a desigualdade (106), é necessário garantir  $\Upsilon(D, t) \geq 0$ . Para satisfazer essa condição, serão analisados os termos de sinais não definidos presentes em (114) de modo que assegure que estes não sejam negativos. Após adicionar e subtrair os termos  $\frac{1}{\bar{a}^2}[\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2 + w^2(D, t)]$  e  $\frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2}[w^2(D, t) + \int_0^D w^2(\sigma, t)d\sigma]$  (em azul e vermelho) em (114),

$\Upsilon(D, t)$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\Upsilon(D, t) = & c \left( \left[ \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} - \gamma \right] \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) \right. \\
& + \left( 2c^* - \bar{a}(1 + D) - \frac{2}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} - \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \right) w^2(D, t) \\
& + \bar{a}u_{\text{av}}^2(0, t) + \left[ \frac{\bar{a}}{2} - \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \right] \int_0^D w^2(\sigma, t) d\sigma \\
& + \frac{2}{\bar{a}^2} w(D, t) e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \frac{1}{\bar{a}^2} w^2(D, t) + \frac{1}{\bar{a}^2} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) \\
& + \frac{2}{\bar{a}^2} w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \\
& \left. + \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} w^2(D, t) + \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \int_0^D w^2(\sigma, t) d\sigma \right). \tag{115}
\end{aligned}$$

Empregando as desigualdades de Young e Cauchy-Schwartz, é possível verificar os limites inferiores válidos para os termos que foram adicionados e subtraídos em (115), de modo que:

$$\frac{1}{\bar{a}^2} w^2(D, t) + \frac{1}{\bar{a}^2} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) \geq \frac{2}{\bar{a}^2} \left| w(D, t) e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right|, \tag{116}$$

$$\frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \left( w^2(D, t) + \int_0^D w^2(\sigma, t) d\sigma \right) \geq \frac{2}{\bar{a}^2} \left| w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right|. \tag{117}$$

Analisando  $\Upsilon(D, t)$  pelos termos dos limites inferiores em (116) e (117), tem-se

$$\begin{aligned}
\Upsilon(D, t) \geq & c \left( \left[ \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} - \gamma \right] \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) \right. \\
& + \left( 2c^* - \bar{a}(1 + D) - \frac{2}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} - \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \right) w^2(D, t) \\
& + \bar{a}u_{\text{av}}^2(0, t) + \left[ \frac{\bar{a}}{2} - \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \right] \int_0^D w^2(\sigma, t) d\sigma \\
& + \frac{2}{\bar{a}^2} w(D, t) e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \frac{2}{\bar{a}^2} \left| w(D, t) e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right| \\
& + \frac{2}{\bar{a}^2} w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \\
& \left. + \frac{2}{\bar{a}^2} \left| w(D, t) \int_0^D e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right| \right). \tag{118}
\end{aligned}$$

Logo, para garantir  $\Upsilon(D, t) \geq 0$  é necessário satisfazer as seguintes condições:

**1° Condição:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} - \gamma &> 0 \\ \gamma &< \frac{1}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} \\ \gamma &< \frac{\bar{a} - 1}{\bar{a}^2} \end{aligned} \tag{119}$$

**2 ° Condição:**

Sabendo que  $c = 2c^*$

$$\begin{aligned} 2c^* - \bar{a}(1 + D) - \frac{2}{\bar{a}} - \frac{1}{\bar{a}^2} - \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} &> 0 \\ c &> \bar{a}(1 + D) + \frac{2}{\bar{a}} + \frac{1}{\bar{a}^2} + \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} \end{aligned} \tag{120}$$

**3 ° Condição:**

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}}{2} - \frac{2\sqrt{D}}{\bar{a}^2} &> 0 \\ \bar{a} &> \sqrt[3]{4\sqrt{D}} \end{aligned} \tag{121}$$

Portanto, considerando  $\mathcal{L}(t)$  dado em (113) e  $\Upsilon(D, t)$  dado em (114), nas condições impostas para  $\gamma$ ,  $\bar{a}$  e  $c$ , pode-se concluir que  $\Upsilon(D, t) \geq 0$  logo:

$$\mathcal{L}(t) \geq c \left( \frac{1}{2} k \tilde{\vartheta}_{av}^2(t) + \frac{\bar{a}}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx + (c - 2c^*) w^2(D, t) \right),$$

com  $\gamma = k/2$ .

Ou seja,  $\mathcal{L}(t) \geq \mu \Psi(t)^2$ , pelo mesmo motivo que (81) é válido, completando a prova da otimalidade inversa.  $\square$

**Corolário 1.** *Para o caso livre de atraso ( $D = 0$ ), um resultado equivalente da otimalidade inversa também pode ser provada para o sistema de malha fechada com a lei de controle*

$$\dot{U}(t) = -cU(t) + ckG(t), \quad (122)$$

considerando a norma

$$\bar{\Psi}(t) = \left( |\tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D)|^2 + U_{\text{av}}(t)^2 \right)^{1/2}. \quad (123)$$

Basicamente, haverá um  $c^{**} > c^* > 0$  tal que para qualquer  $c \geq c^{**}$ , a lei de controle (122) minimizará a função custo

$$\bar{J} = \int_0^\infty (\mathcal{L}(t) + \dot{U}_{\text{av}}^2(t)) dt, \quad (124)$$

onde  $\mathcal{L}(t)$  é o funcional de  $(\tilde{\theta}_{\text{av}}(t), U(t))$ , tal que

$$\mathcal{L}(t) \geq \mu \bar{\Psi}(t)^2 \quad (125)$$

para algum  $\mu(c) > 0$  com uma propriedade que  $\mu(c) \rightarrow \infty$  as  $c \rightarrow \infty$ .

A prova do resultado acima pode ser obtida diretamente do Teorema 1 com a Função de Lyapunov  $V(t) = \tilde{\theta}_{\text{av}}^2(t)/2$ .

**Observação 3.1:** A robustez da estabilidade é garantida variando o parâmetro  $c$  de algum valor grande de  $c^*$  para  $\infty$ , recuperando-se no limite o resultado básico do preditor não filtrado em (35). Essa propriedade de robustez poderia ser intuitivamente esperada de métodos de perturbação singular, embora fosse altamente improvável encontrarmos um teorema na literatura apropriado para as particularidades do sistema de dimensão infinita em questão.

**Observação 3.2:** A realimentação em (35) não garante a otimalidade inversa, mas a realimentação em (38) a garante para qualquer  $c \in [c^{**}, \infty)$ . Sua otimalidade vale para uma função custo que é limitada pela norma  $L_2[0, \infty)$  do estado  $\tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D)$  da ODE, a norma do sinal de controle  $U_{\text{av}}(t)$ , assim como a norma da derivada  $\dot{U}_{\text{av}}(t)$  (além disso  $\int_{-D}^0 U_{\text{av}}(\theta)^2 d\theta$ , é fixo, ou seja a realimentação tem influência sobre ela). O controle (38) é estabilizante quando  $c = \infty$ , ou seja, na forma nominal em (35); no entanto, visto que

$\mu(\infty) = \infty$ , não sendo ótimo com relação a um funcional que inclui uma penalidade em  $\dot{U}(t)$ .

### 3.2 Simulações

Para aferir o efeito da otimalidade inversa no sistema apresentado na Figura 6, utilizou-se como base e para comparação o mesmo mapa quadrático (102), simulado no capítulo anterior. As curvas em vermelho nas simulações adiante são dos mesmos gráficos apresentados no capítulo 2. Conforme os gráficos a seguir (Figura 13 a 17), a aplicação da otimalidade no controle de busca extremal na presença de atrasos, melhora o desempenho do sistema, observa-se que o efeito da otimalidade minimiza a sobre-elevação da curva de busca do ponto de extremo  $\theta^*$ , na Figura 13. No gráfico da Figura 14, verifica-se que a otimalidade inversa atenua a oscilação observada no transitório, deixando mais suave a curva de saída. Outra observação positiva é a diminuição do esforço no sinal de controle visto nas Figuras 15, 16 e na estimativa da Hessiana dada na Figura 17.

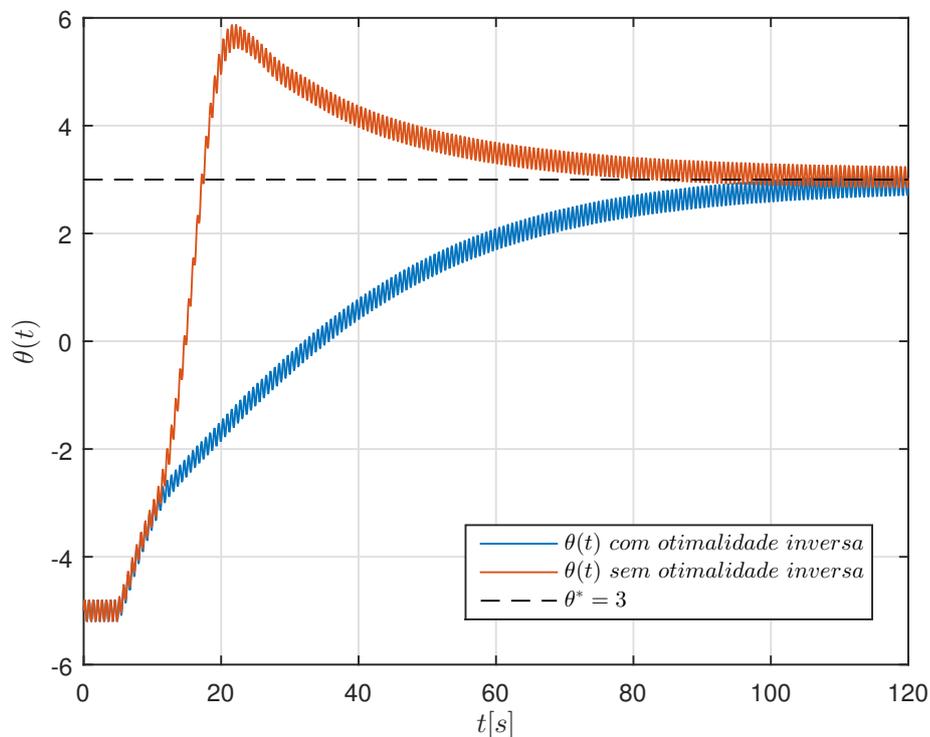


Figura 13 - Entrada  $\theta(t)$  com e sem o efeito da otimalidade inversa.

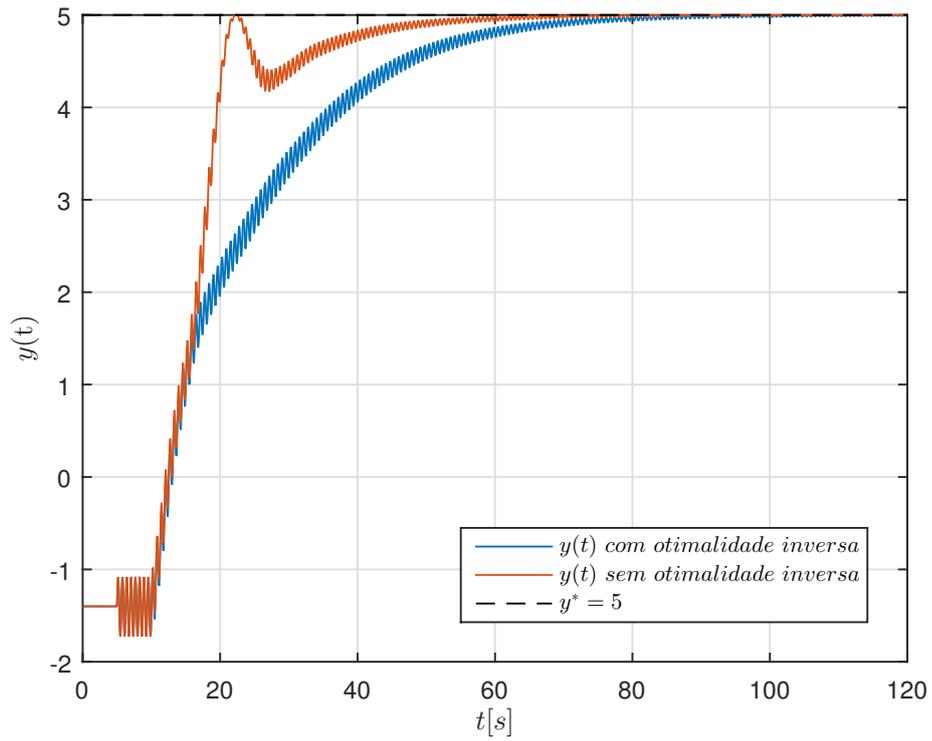


Figura 14 - Saída  $y(t)$  com e sem o efeito da otimalidade inversa.

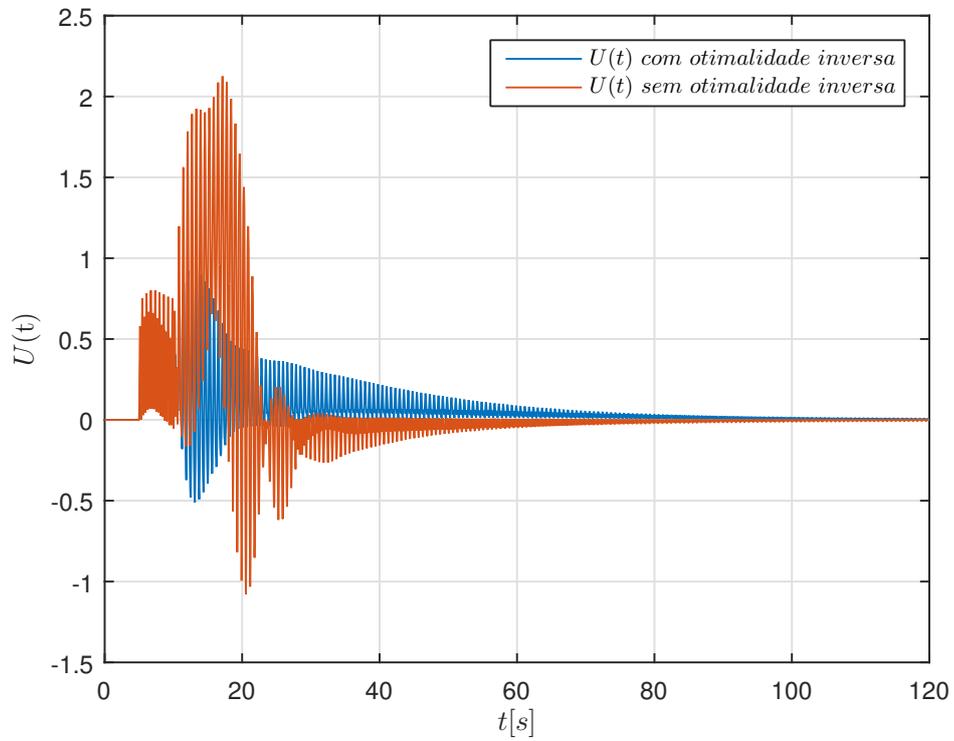


Figura 15 - Sinal de controle  $U(t)$  com e sem o efeito da otimalidade inversa.

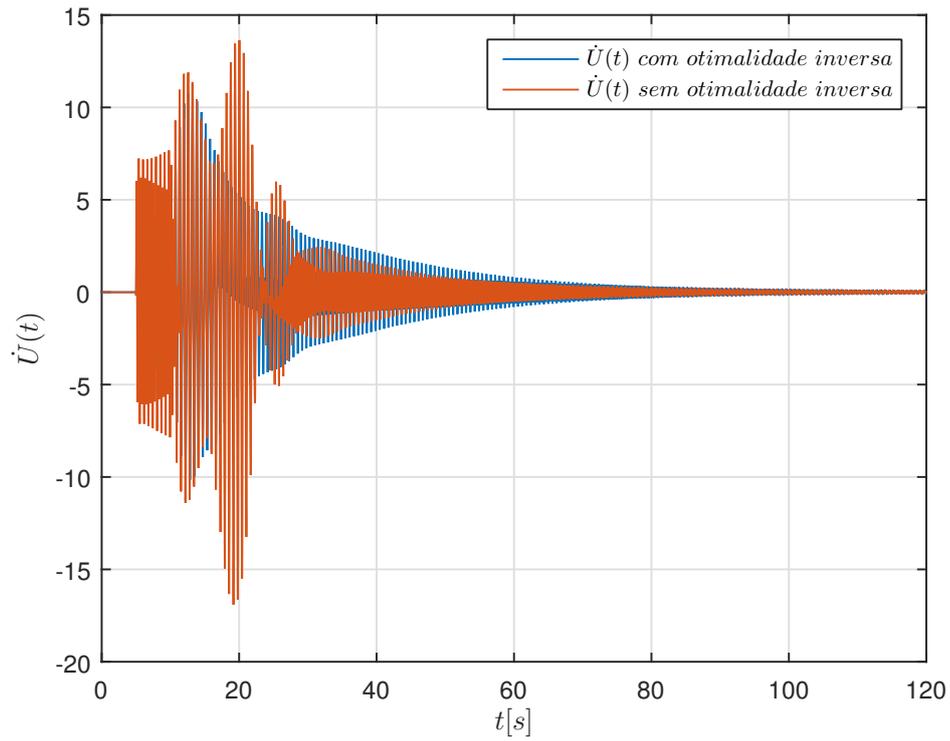


Figura 16 - Derivada do sinal de controle  $U(t)$  com e sem o efeito da otimalidade inversa.

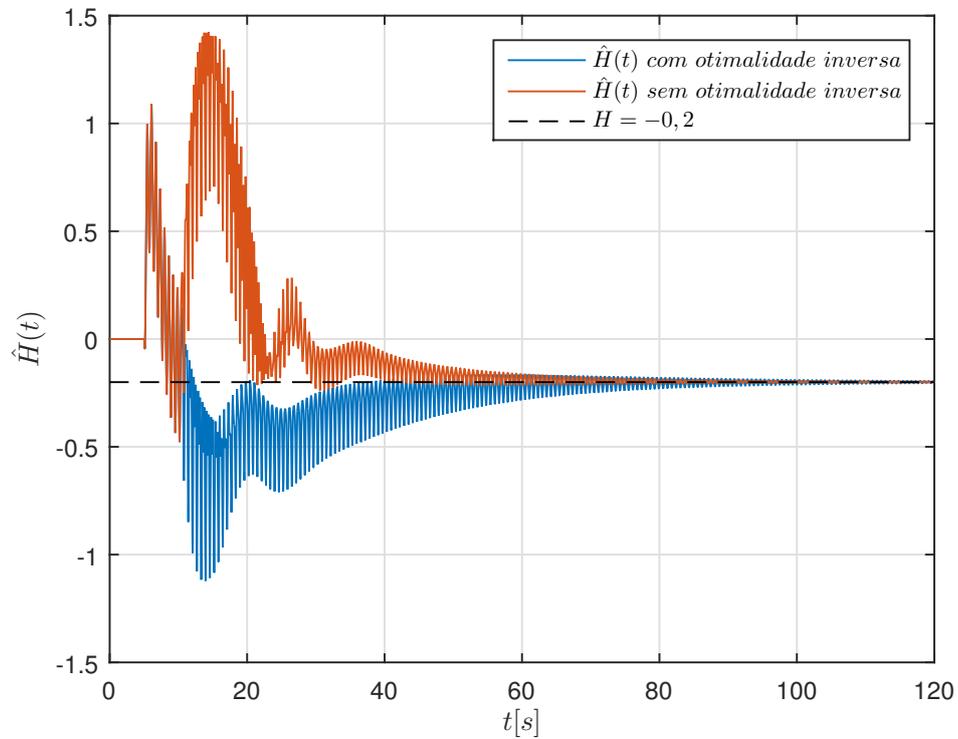


Figura 17 - Estimativa da Hessiana  $\hat{H}(t)$  com e sem o efeito da otimalidade inversa.

## CONCLUSÃO

Nesta dissertação, buscou-se apresentar a prova da otimalidade inversa e seus efeitos no controle extremal. Como pôde ser verificado na introdução deste trabalho, muitas pesquisas na área de ESC utilizam de forma heurística filtros passa-baixa entre o sinal de demodulação e o integrador, embora estes não apresentem a justificativa matemática para os mesmos.

No Capítulo 1, foi apresentado um caso simples de controle extremal para sistemas estáticos através do método Gradiente, servindo como base para o capítulo seguinte, no qual foi aplicado um atraso fixo na saída do mapeamento quadrático. Ainda no Capítulo 2, a estratégia de busca extremal via preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbação senoidal apresentada foi capaz de garantir ao sistema em malha fechada propriedades de estabilidade mesmo na presença de atrasos. As simulações ilustraram a estabilidade exponencial e a convergência ao ponto de extremo. Entretanto, quando não é utilizado o filtro passa-baixa na malha de controle, a saída apresentou oscilações no transitório e uma elevada sobre-elevação na busca do ponto de extremo  $\theta^*$ .

No Capítulo 3, a otimalidade inversa foi apresentada em ESC com atraso, demonstrando quais condições devem ser respeitadas para se projetar o filtro, presente na lei de controle (38). Quando a otimalidade inversa é garantida, os sinais  $\theta(t)$  e  $y(t)$  convergem monotonicamente, trazendo uma melhora no controle do ES. Além dos resultados teóricos, simulações ilustraram uma considerável diminuição no esforço de controle e no transitório da estimativa da Hessiana, que resultaram numa suavização da busca ao ponto de extremo e na saída do sistema. Embora o atraso tenha sido considerado ao longo dessa dissertação, a otimalidade inversa também pode ser estendida em sistemas cujas plantas não possuem atrasos.

### Trabalhos Futuros

Esse estudo focou no controle extremal na presença de atrasos constantes e conhecidos. Para trabalhos futuros, indica-se o estudo da otimalidade inversa considerando atrasos desconhecidos. Nesse tipo de prosposta os desafios serão projetar um novo tipo de preditor capaz de lidar com o atraso desconhecido e fazer a estimativa do atraso desconhe-

cido que garantam a estabilidade do sistema. Como a estimativa do atraso dependerá do tempo, deve-se considerar preditores para atrasos variantes no tempo [46]. As equações e o diagrama de controle para esse novo tipo de abordagem são dados na Figura 18:

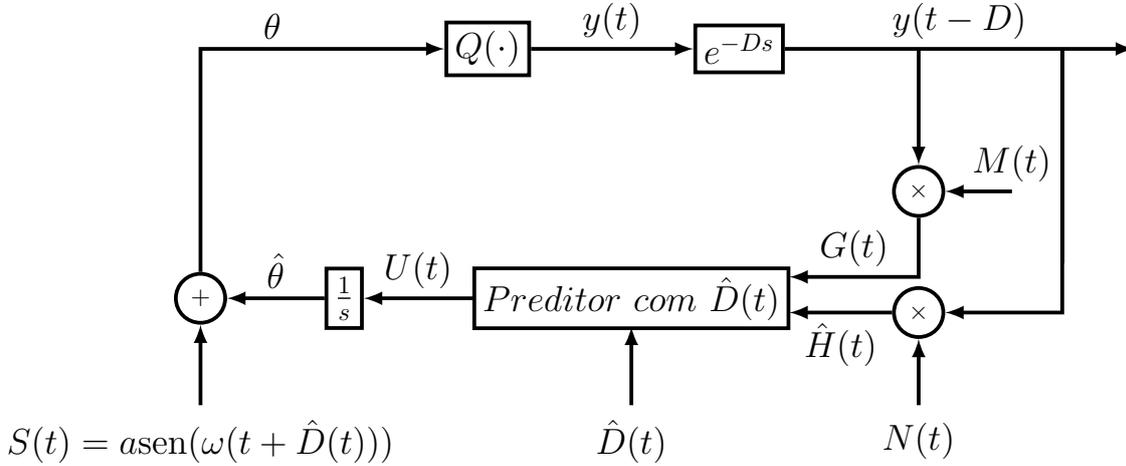


Figura 18 - Esquema de busca extremal baseado no método do Gradiente para atrasos desconhecidos.

O mapeamento quadrático  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a ser otimizado seria definido como

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad H < 0. \quad (126)$$

Analisando o diagrama de controle da Figura 18, o sinal de saída medido  $y(t)$  será dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t) - D). \quad (127)$$

Entretanto, neste caso assume que  $D > 0$  e tem o valor desconhecido. Então definindo  $\theta$  como

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \text{sen}(\omega(t + \hat{D}(t))), \quad (128)$$

$$= \hat{\theta}(t) + a \text{sen}(\omega(t + \tilde{D}(t) + D)), \quad (129)$$

onde  $\hat{D}(t)$  é a estimativa do atraso  $D$  desconhecido, sendo que  $\tilde{D}(t) = \hat{D}(t) - D$ . Então,

a média do sinal

$$y(t) \frac{8}{a^2} \text{sen}(2\omega t) \quad (130)$$

é dada por

$$\text{sen}(2\tilde{D})H. \quad (131)$$

Portando, uma nova lei de atualização para  $\hat{D}(t)$  será

$$\dot{\hat{D}}(t) = y(t) \frac{8}{a^2} \text{sen}(2\omega t), \quad (132)$$

e o sistema médio associado ao erro será

$$\dot{\tilde{D}}_{av} = \text{sen}(2\tilde{D}_{av})H, \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{D}}_{av} = 2H\tilde{D}_{av}, \quad H < 0, \quad (133)$$

apresentando infinitos pontos de equilíbrios assintoticamente estáveis em  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Uma dificuldade a ser contornada nessa proposta é que a condição inicial do atraso desconhecido deve estar limitada entre  $[0, \frac{\pi}{2})$ . Caso a estimativa  $\hat{D}(0)$  do atraso inicie fora desta condição o sistema pode se tornar instável.

## Publicação

Trabalho aceito para publicação [47] realizado durante o mestrado e que serviu de base para o desenvolvimento desta dissertação.

FERREIRA, D. C; OLIVEIRA, T. R. Otimalidade Inversa em Controle Extremal com Atrasos. XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI, 2019, Ouro Preto.

## REFERÊNCIAS

- [1] KRSTIC, M.; WANG, H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.
- [2] KRSTIĆ, M. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. [S.l.]: Birkhauser, 2009.
- [3] LEBLANC, M. *Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée*. [S.l.]: Revue Generale de l'Electricite., 1922.
- [4] DRAPER, C.; LI, Y. *Principles of optimizing control system and an application to the internal combustion engine*. [S.l.]: R. Oldenburger, 1951.
- [5] LIU, S.-J.; KRSTIC, M. *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. [S.l.]: Springer, 2012.
- [6] ARIYUR, K. B.; KRSTIĆ, M. *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons., 2003.
- [7] ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. [S.l.]: Canada: Addison-Wesley., 2005.
- [8] TAN., Y.; NEČIĆ., D.; MAREELS., I.; ASTOLFI., A. On global extremum seeking in the presence of local extrema. *Automatica*, v. 45, n. 3, p. 245–251, 2009.
- [9] POVEDA, J. I.; TEEL, A. R. A framework for a class of hybrid extremum seeking controllers with dynamic inclusions. *Automatica*, v. 76, p. 113 – 126, 2017.
- [10] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, p. 1911 – 1926, 2017.
- [11] FEILING, J.; KOGA, S.; KRSTIĆ, M.; OLIVEIRA, T. R. Gradient extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion pdes. *Automatica*, v. 95, p. 197 – 206, 2018.

- [12] LIU, S. J.; KRSTIĆ, M. *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. [S.l.]: Springer, 2012.
- [13] AMINDE, N. O. *Controle extremal via funções de monitoração e realimentação de saída*. [S.l.]: Tese de mestrado, COPPE/UFRJ, 2013.
- [14] YU, H.; OZGUNER, U. Extremum-seeking control strategy for ABS system with time delay. *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, v. 5, p. 3753–3758, 2002.
- [15] ZHANG, C.; ORDONEZ, R. *Extremum Seeking Control and Application: A Numerical Optimization-Based Approach*. [S.l.]: Springer-VerlagLondon Limited., 2012.
- [16] KILLINGSWORTH, N.; KRSTIĆ, M. Auto-tuning of PID controllers via extremum seeking. *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, p. 2251–2256, 2005.
- [17] NOGUEIRA, E. M. *Controle via Busca Extremal da Produção de Petróleo em Poços Operando com Elevação Artificial por Injeção de Gás*. [S.l.: s.n.], 2012.
- [18] HSIN-HSIUNG W.R.; KRSTICD, M. B. G. Optimizing bioreactors by extremum seeking. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, v. 13, n. 651, p. 669–1999, 199.
- [19] PETERSON, K. S.; STEFANOPOULOU, A. G. Extremum seeking control for soft landing of an eletromechanical valve actuator. *Automatica*, v. 40, p. 1063–1069, 2004.
- [20] BRUNTON., S. L.; ROWLEY., C. W.; R.KULKARNI., S.; CLARKSON., C. Maximum power point tracking for photovoltaic optimization using ripple-based extremum seeking control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 25, n. 10, p. 2531–2540., 2010.
- [21] DUGARD, L.; VERRIEST, E. *Stability and Control of Time-delay Systems*. [S.l.]: Springer, 1997.
- [22] MAHMOUD, M. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*. [S.l.]: NewYork: Control Engineering Series, 2000.
- [23] NICULESCU, S. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. [S.l.]: Springer- Verlag, London: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2001.

- [24] GU, K.; KHARITONOV, L.; CHEN, J. *Stability of time-delay systems*. [S.l.]: Control Engineering, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [25] KALMAN, R. E. When is a linear control system optimal? *ASME, J. Basic Eng.*, v. 86, p. 51–50, 1964.
- [26] THAU., F. E. On the inverse optimum control problem for a class of nonlinear autonomous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 12, p. 674–681, 1967.
- [27] CAI, X.; BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIĆ, M. Input-to-state stability and inverse optimality of linear time-varying-delay predictor feedbacks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 63, p. 233–240, 2018.
- [28] KRSTIĆ, M. Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: inverse optimality and robustness to delay mismatch. *Automatica*, v. 44, p. 2930–2935, 2008.
- [29] KRSTIĆ, M.; LI, Z. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers. *IEEE Trans Autom Control.*, v. 43, p. 336–350, 1998.
- [30] KRSTIĆ, M. Extremum seeking control. in *T. Samad and J. Baillieul, Encyclopedia of Systems and Control, Springer*, 2014.
- [31] ADETOLA, V.; GUAY, M. Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, v. 43, p. 105–110, 2007.
- [32] TAN, Y.; NESIĆ, D.; MAREELS, I. M. Y.; ASTOLFI, A. On global extremum seeking in the presence of local extrema. *Automatica*, v. 45, p. 245–251, 2009.
- [33] NESIĆ, D.; TAN, Y.; MOASE, W.; MANZIE, C. A unifying approach to extremum seeking: adaptive schemes based on the estimation of derivatives. *IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta*, p. 4625–4630, 2010.
- [34] GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NECIĆ, D. Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, p. 1759–1767, 2012.
- [35] OLIVEIRA, T. R.; HSU, L.; PEIXOTO, A. J. Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with application to extremum-seeking control. *Automatica*, p. 2029–2038, 2011.

- [36] OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes. *Journal of Franklin Institute*, v. 349, p. 1397–1415, 2012.
- [37] HSU, L.; KRSTIC, M. Stochastic averaging in continuous time and its applications to extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 10, p. 2235–2250, 2010.
- [38] SMYSHLYAEV, A.; KRSTIC, M. Closed form boundary state feedbacks for a class of 1-D partial integro-differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 12, p. 2185–2202, 2004.
- [39] KRSTIC, M.; DENG, H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*. [S.l.]: Springer, 1999.
- [40] KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Englewood Cliffs: Prentice-Hall,, 2002.
- [41] HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, v. 2, p. 463–494, 1990.
- [42] LEHMAN, B. The influence of delays when averaging slow and fast oscillating systems: overview. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 19, p. 201–215, 2002.
- [43] STANKOVIC, M. S.; STIPANOVIC, D. M. Extremum seeking under stochastic noise and applications to mobile sensors. *Automatica*, v. 46, p. 1243–1251, 2010.
- [44] MOASE, W. H.; MANZIE, C.; BREAR, M. J. Newton-like extremum-seeking for the control of thermoacoustic instability. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, v. 55, p. 2094–2105, 2010.
- [45] JANKOVIC, M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, p. 1048–1060, 2001.
- [46] BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIC, M. *Nonlinear Control Under Nonconstant Delays*. [S.l.]: SIAM, 2013.

- [47] FERREIRA D. C. OLIVEIRA, T. R. Otimalidade inversa em controle extremal com atrasos. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2019.