



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Leonardo Issa Nicolau

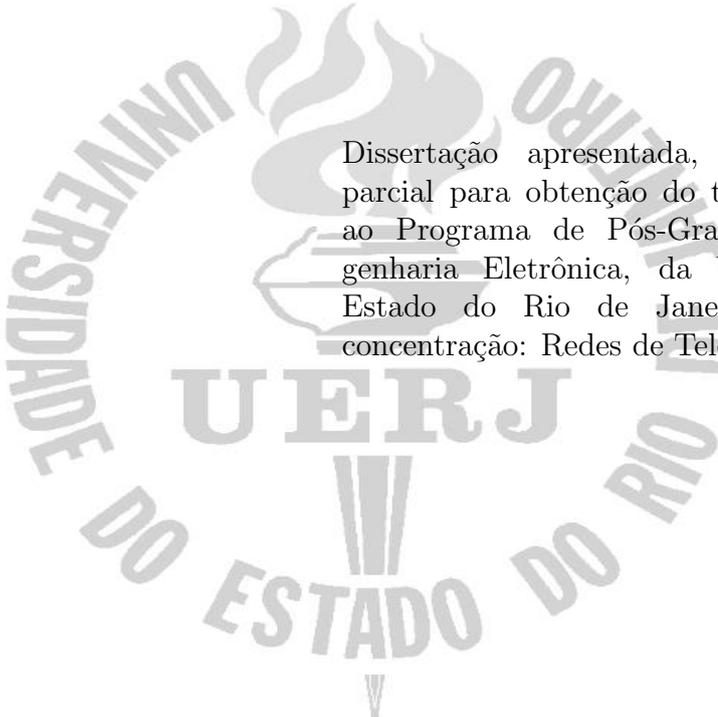
**Análise de transição entre cabos coaxiais constituída por
corrugações e desníveis angulares**

Rio de Janeiro

2011

Leonardo Issa Nicolau

**Análise de transição entre cabos coaxiais constituída por corrugações e
desníveis angulares**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Redes de Telecomunicações.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Romeiro Sapienza

Coorientador: Prof. Dr. José Ricardo Bergmann

Rio de Janeiro

2011

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

N639 Nicolau, Leonardo Issa
Análise de transição entre cabos coaxiais constituída por
corrugações e desníveis angulares / Leonardo Issa Nicolau. – 2011.
124f.

Orientador: Antonio Romeiro Sapienza.
Coorientador: José Ricardo Bergman.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Faculdade de Engenharia.

I. Método dos elementos finitos. 2. Galerkin, Métodos de. 3.
Equação da onda. 4. Engenharia Eletrônica. I. Sapienza, Antonio
Romeiro. II. Bergman, José Ricardo. III. Universidade do Estado do Rio
de Janeiro. III. Título.

CDU 621.38:519.63

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese,
desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Leonardo Issa Nicolau

**Análise de transição entre cabos coaxiais constituída por corrugações e
desníveis angulares**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Redes de Telecomunicações.

Aprovado em: 1 de Julho de 2011.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antonio Romeiro Sapienza (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Antonio José da Silva Neto

Instituto Politécnico (IPRJ) - UERJ

Prof. Dr. Humberto Lima Soriano

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. José Rodolfo Souza

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. José Ricardo Bergmann (Coorientador)

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO

Centro de Estudos em Telecomunicações

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Faculdade de Engenharia Elétrica e da Computação

Rio de Janeiro

2011

DEDICATÓRIA

Aos meus avós, Nicolau Soares Issa e Ely de Mello Issa, pelo apoio incondicional no início da minha vida estudantil, por terem sempre acreditado em mim, pela generosidade e humildade ao compartilharem valiosos ensinamentos de vida e pela imensa saudade deixada.

AGRADECIMENTO

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, Abrahão Nicolau e Angela Maria Issa Nicolau, por serem uma referência na minha vida, meus amigos em todos os momentos, e por transmitirem, sempre, importantes ensinamentos, através de atos e palavras, fundamentais para a constituição dos meus valores como ser humano, dentre os quais destaco a ética, o caráter, a gratidão, a humildade e a solidariedade.

À minha esposa, Flávia, companheira, amiga e uma fonte inesgotável de força e estímulo, não permitindo que eu esmorecesse nos momentos mais difíceis.

Aos meus filhos, Arthur e Heitor, que ao nascerem me proporcionaram uma felicidade inédita que mudou a minha forma de ver o mundo, me nutrindo de forças até então desconhecidas para vencer a todos os desafios.

À minha irmã Lauana e ao meu irmão Lauander que, pela luta diária, me mostram o quanto devemos ser firmes em nossos propósitos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Romeiro Sapienza, por ter sido um exemplo de competência, dedicação, didática, sabedoria e amizade durante todo caminho percorrido.

Ao, Prof. Dr. José Ricardo Bergmann, por ter aceito ser o meu co-orientador e compartilhar da sua simplicidade, experiência, interesse, apoio e sabedoria tão importantes para o desenvolvimento dessa dissertação.

Ao Prof. Dr. José Rodolfo Souza, pela seriedade, disciplina e dedicação na transmissão de importantes ensinamentos durante o curso de mestrado.

Ao Prof. Dr. Antonio José da Silva Neto, ao Prof. Dr. Humberto Lima Soriano, ao Prof. Dr. José Ricardo Bergmann e ao Prof. Dr. Hugo E. Hernández Figueroa, pela disponibilidade de aceitar o convite para participar da banca examinadora.

Aos colegas de mestrado, Marcello Lopes, Valdenor Andrade, Pedro Arlindo, Rafael Saraiva e, em especial, Alexsandro Nogueira, pelo companheirismo, amizade, incentivo e apoio em muitos momentos.

E a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram e me auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho.

E verifiquei que nada há de melhor para o homem do que alegrar-se com o fruto de seus trabalhos. Esta é a parte que lhe toca. Pois, quem lhe dará a conhecer o que acontecerá com o volver dos anos?

(Eclesiastes 3,22)

RESUMO

NICOLAU, Leonardo Issa. *Análise de transição entre cabos coaxiais constituída por corrugações e desníveis angulares*. 2011. 124 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica), Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

Esta dissertação apresenta um formalismo baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), adequado à análise de descontinuidades coaxiais com simetria axial, entre duas linhas coaxiais quaisquer, incluindo corrugações nos tubos internos e externos. Pelo método de Galerkin-Budnov deduz-se um operador integral bi-linear, aplicado ao campo magnético, expandido em todo o domínio da estrutura, coaxial-descontinuidade-coaxial. As portas de entrada e saída da estrutura são posicionadas distantes da descontinuidade, de forma que nelas só haja o modo Transversal Eletromagnético (TEM). O campo magnético procurado é obtido pelo MEF. Os resultados encontrados; perdas de retorno, comportamento do campo magnético e as equi-fases nas portas de entrada e saída da estrutura, foram calculados e confrontados com as do Método de Casamento de Modos (MCM), com um alto grau de concordância.

Palavras-chave: Modo TEM. Modo ($TM_{(0,m)}$). Cabo coaxial. Método dos Elementos Finitos. Critério de Galerkin-Budnov. Equação da Onda.

ABSTRACT

This paper presents a formalism based on the Finite Element Method (FEM), suitable for analysis of discontinuities with axial symmetry, between any two coaxial lines, including corrugations. The method of Galerkin-Budnov follows a bi-linear integral operator, applied to the magnetic field, expanded in the whole area of the structure, coaxial-discontinuity-coaxial. The input and output ports of the structure are far from of the discontinuity, so that therein there is only the TEM mode. The magnetic field sought is obtained by MEF. The values for the return loss, and the magnetic fields at both ports were calculated and compared with those yielded by Modes Matching Technique, showing good agreement.

Keywords: TEM Mode. $TM_{(n=0,m)}$ Mode. Cabel coaxial. Finite Element Method. Criterion Budnov-Galerkin. Wave Equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Estrutura tridimensional. Regiões: I - cabo coaxial (a_1, b_1); II - não-uniforme (descontínua); III - cabo coaxial (a_2, b_2).	20
Figura 2	Domínio aberto da estrutura $\Omega = \bar{\Omega}$	26
Figura 3	Algumas das Funções de base (N_i, N_j, N_{ρ}) da expansão do campo magnético (Funções de forma dos elementos finitos) e a estrutura bidimensional	34
Figura 4	Percurso da integral de linha referente à integral de área que contorna a estrutura.	40
Figura 5	Elementos finitos, fronteiroço entre duas regiões distintas.	41
Figura 6	Vêem-se os nós referentes à porta de entrada da estrutura, subsídios para o cálculo do vetor de carga (B_{n_s}).	51
Figura 7	Triângulo de Pascal referente aos polinômios completos até a ordem - 3.	57
Figura 8	A transformada geométrica, que relaciona o elemento de referência aos elementos globais.	58
Figura 9	Homotetia da função de interpolação, $n = 2$, no espaço das funções de área (L_1, L_2, L_3).	61
Figura 10	Representação do triângulo com os respectivos nós de interpolação quadrática completa em ambos os espaços.	62
Figura 11	Representação do triângulo com os respectivos nós de interpolação cúbica completa em ambos os espaços.	64
Figura 12	Representação do triângulo homotético de ordem-3 com os respectivos nós de interpolação cúbica completa em ambos os espaços.	65
Figura 13	As respectivas portas de entrada e saída da estrutura e as fronteiras relacionadas às integrais de linha, da formulação.	83
Figura 14	Transformação geométrica da fronteira (1-6-3) do elemento de referência aos elementos globais.	84

Figura 15 O acesso de entrada da estrutura, e os respectivos “nós - (1, 6, 3)” relacionados ao vetor de carga.	88
Figura 16 Estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.	102
Figura 17 Resultados da perda de retorno utilizando o MCM e o MEF, para a estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.	102
Figura 18 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.	103
Figura 19 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.	103
Figura 20 Estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.	104
Figura 21 Resultados da perda de retorno utilizando o MCM e o MEF, para a estrutura de L.T. com corrugação modificada no condutor interno e externo.	104
Figura 22 Estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.	105
Figura 23 Resultados da perda de retorno utilizando o MCM e o MEF, para a estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.	105
Figura 24 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.	106
Figura 25 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.	106
Figura 26 Estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.	107
Figura 27 Resultados da perda de retorno na porta de saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.	107
Figura 28 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.	108
Figura 29 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.	108
Figura 30 Estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível angular no condutor interno para o intervalo de $0 < \theta < 4,7636^\circ$	109

Figura 31 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $0,5^\circ$ no ângulo interno.	109
Figura 32 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,0^\circ$ no ângulo interno.	110
Figura 33 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,5^\circ$ no ângulo interno.	110
Figura 34 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,5^\circ$ no ângulo interno.	111
Figura 35 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,5^\circ$ no ângulo interno.	111
Figura 36 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $2,0^\circ$ no ângulo interno.	112
Figura 37 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $2,5^\circ$ no ângulo interno.	112
Figura 38 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $4,7636^\circ$ no ângulo interno.	113
Figura 39 Estrutura de L.T. com corrugação e sem desnível angular.	113
Figura 40 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação e sem desnível.	114
Figura 41 Estrutura de L.T. com corrugação, sob a variação angular de 2° no ângulo do condutor interno e variações angulares no condutor externo até o limite de 15°	114
Figura 42 Estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e sem desnível no externo.	115
Figura 43 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e sem desnível no externo.	115
Figura 44 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $0,5^\circ$ no externo.	116

Figura 45 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de 1,0° no externo.	116
Figura 46 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de 2,0° no externo.	117
Figura 47 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de 5,0° no externo.	117
Figura 48 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de 10,0° no externo.	118
Figura 49 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de 15,0° no externo.	118
Figura 50 Triângulo no espaço de Referência.	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Equações de Maxwell adaptadas à formulação do Modo TEM.....	23
Tabela 2	Representação dos nós nos espaço real, de referência e das funções de forma.	63
Tabela 3	Interpolação quadrática no espaço homotético e no de referência.....	63
Tabela 4	Coordenadas da interpolação cúbica no espaço global e de referência.	65
Tabela 5	Representação dos nós nos espaço real, de referência e das funções de forma.	66
Tabela 6	Interpolação cúbica no espaço homotético e no de referência.	67

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	ANÁLISE DOS MODOS TEM EM CABOS COAXIAIS	20
1.1	Introdução	20
1.2	Modo Fundamental em Cabos-Coaxiais [1]	20
1.2.1	<u>Cálculo das equações de Maxwell reduzidas [1]</u>	21
1.3	Formulação da Propagação do Modo TEM pela Eletrostática	22
1.3.1	<u>Cálculo dos campos eletromagnéticos do modo TEM</u>	27
1.3.2	<u>Equação da onda da linha coaxial</u>	28
2	FORMULAÇÃO DA DESCONTINUIDADE COM CORRUGAÇÕES ENTRE CABOS COAXIAIS	30
2.1	Introdução	30
2.2	Equação de Helmholtz Escalar	30
2.3	Formulação Eletromagnética Básica da Descontinuidade com Corrugações entre Cabos Coaxiais	32
2.4	Formulação na Forma-Forte $(H_0^{(2)}(\Omega))$	36
2.4.1	<u>Método de Galerkin sob o critério de Budnov (MGB)</u>	36
2.5	Formulação Fraca $(H_0^{(1)}(\Omega))$	37
2.5.1	<u>Formulação Forte $(H_0^{(2)}(\Omega))$, eq.(10), em notação de produto escalar</u>	37
2.5.2	<u>Transformando a análise tridimensional em bidimensional</u>	39
2.5.3	<u>Condição de fronteira no espaço de Hilbert enfraquecido $(H_0^{(1)}(\Omega))$</u>	45
2.5.4	<u>Análise do Termo $T = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_{\theta}) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_{\rho}^*) \right] r dr dz$</u>	51
3	ELEMENTOS FINITOS ESPECIAIS	56
3.1	Introdução	56
3.2	Funções de Interpolações de Lagrange Lineares Completas	57
3.3	Funções de Interpolações Completas de Ordem $n \geq 2$	60

3.4	Funções de Interpolação de Lagrange Quadrática Completa.....	62
3.5	Funções de Interpolação de Lagrange Cúbica Completa	63
4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO QUE REGE A DESCONTINUIDADE ENTRE DOIS CABOS COAXIAIS	68
4.1	Introdução	68
4.2	Formulação da Análise.....	68
4.2.1	<u>Análise da matriz de rigidez</u>	70
4.2.2	<u>Análise das integrais de linha nos acessos da estrutura</u>	83
4.2.2.1	Cálculo da integral de linha na fronteira (1-6-3).....	83
4.2.3	<u>Cálculo do vetor de carga</u>	87
5	RESULTADOS SELECIONADOS: PERDA DE RETORNO E POTÊNCIA TRANSMITIDA NA ESTRUTURA	90
5.1	Introdução	90
5.2	Perda de Retorno	90
5.2.1	<u>Cálculo da perda de retorno.....</u>	90
5.3	Potência Transmitida pela Estrutura.....	98
5.4	Balanceamento da Energia.....	100
6	VALIDAÇÃO DO MÉTODO	101
6.1	Introdução	101
6.1.1	<u>Estruturas analisadas.....</u>	101
6.1.1.1	Estrutura 01: Estrutura de Linha de Transmissão (L. T.) com corrugação e sem desnível	101
6.1.1.2	Estrutura 02: L. T. com um anel dielétrico, sem corrugação e sem desnível	104
6.1.1.3	Estrutura 03: L. T. sem corrugação e com desnível angular do condutor interno	106
6.1.1.4	Estrutura 04: L. T. com corrugação, com desnível fixo no ângulo do con- dutor interno e variável no ângulo do condutor externo	113
7	CONCLUSÃO	119

REFERÊNCIAS.....	120
APÊNDICE A - Cálculo da integral $\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} L_1^a L_2^b L_3^c d\eta d\xi$ no espaço de referência.....	122

INTRODUÇÃO

Seções de guias não uniformes, cornetas retangulares ou cilíndricas e cabos-coaxiais, são, frequentemente, utilizados como adaptadores entre transmissor ou receptor e a antena.

Nas operações, em banda larga de frequência, em que a estrutura alimentadora da antena deve apresentar alto desempenho, é imprescindível que se faça uma análise rigorosa do desempenho da seção não uniforme, a fim de se otimizar os sistemas, nos enlaces.

Neste trabalho serão aplicados os Métodos de Galerkin-Budnov e dos elementos finitos para efetuar a modelagem numérica dos campos eletromagnéticos no interior de estruturas coaxiais, interligadas por elemento, também coaxial, descontínuo, veja Figura 1.

A análise de estruturas coaxiais, não uniformes, suportando o modo TEM, foi efetuada por diversos autores [2-7]. Na literatura, há três diferentes abordagens, úteis na análise destas estruturas, que se fundamentam na equação da onda, aplicada ao campo magnético azimutal do modo TEM.

Na primeira abordagem, a solução é procurada no sistema de coordenadas circulares, onde a equação da onda tem um de seus termos indeterminados, pelo fator $\left(\frac{1}{r}\right)$. Para levantar esta indeterminação [4] aplicou um mapeamento $\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ na função procurada (H_θ), ou seja $H_\theta = \sqrt{r}H'_\theta$. A solução passa a ser investigada por um novo operador de Helmholtz, função de (H'_θ). Esta técnica é a adotada neste trabalho.

Um outro procedimento, muito mais simples que o primeiro, que, também, se relaciona ao MEF, formula a análise, pelo método de Galerkin-Budnov, no espaço de Hilbert tridimensional, cujo produto escalar se refere ao elemento de volume $dv = r d\theta dr dz$. Devido a simetria angular da estrutura, a análise passa a ser bi-dimensional, e o produto escalar, condizente ao elemento de área $ds = r dr dz$, suprime, automaticamente, a indeterminação do termo da formulação [5], sem nenhum esforço.

Finalmente, a terceira técnica apresentada em [6] centraliza a análise no cálculo da matriz espalhamento da função entre as duas linhas coaxiais. As equações são resolvidas

usando o MEF.

A análise é aplicada numa estrutura tridimensional, vide Figura 1 no capítulo-1, mas, devido a simetria angular da estrutura, a análise é adaptada bidimensionalmente, vide Figura 4 e Figura 6 no capítulo-2.

Este trabalho é composto por 6 capítulos e um apêndice.

No capítulo-1: faz-se um estudo aprofundado dos modos TEM que se propagam em cabos coaxiais. Será mostrado que, embora o modo fundamental, nos cabos-coaxiais, tenha por suporte correntes fluindo nas superfícies dos tubos, interno e externo, da estrutura, a análise é efetuada no domínio aberto, região sem fontes, adaptando-se às fronteiras suprimidas, às adequadas condições que o campo magnético tem que satisfazer. A análise passa a ser a de um problema de valores de contorno em regiões sem fontes.

No capítulo-2: é desenvolvida a formulação da descontinuidade (cabo coaxial \rightarrow descontinuidade coaxial \rightarrow cabo coaxial). Com base no critério de Galerkin-Budnov, e com o auxílio do mapeamento seguido por [4], para se levantar a indeterminação inerente desta abordagem, obtém-se um formalismo adaptável ao método dos elementos finitos.

Capítulo-3: neste capítulo é feito um estudo do método dos elementos finitos, que será aplicado na solução do formalismo apresentado no capítulo-2. São desenvolvidas; a transformada geométrica e as funções quadráticas da interpolação de Lagrange, que definem os elementos finitos sub-paramétricos triangulares utilizados na análise deste trabalho.

Capítulo-4: aplica-se o método dos elementos finitos na solução do formalismo da descontinuidade entre linhas coaxiais, apresentado no capítulo-2. Serão calculadas as respectivas integrais de área e de linha, próprias de cada termo da matriz de rigidez. Assim como, o vetor de carga, condição de Dirichlet do problema, relacionado à potência injetada na estrutura, pela porta de entrada.

Capítulo-5: deduzem-se os parâmetros de interesse da análise: perda de retorno, na porta de entrada da estrutura e a potência que flui pela porta de saída da mesma.

Capítulo-6: são analisadas diversas estruturas relacionadas às descontinuidades: cabo coaxial \rightarrow descontinuidade coaxial \rightarrow cabo coaxial, pelo formalismo desenvolvido, neste

trabalho.

Apêndice-A: para completar o desenvolvimento da análise é desenvolvida a integral, no elemento de referência $\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} L_1^a L_2^b L_3^c d\eta d\xi = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!}$ imprescindível na elaboração dos resultados.

1 ANÁLISE DOS MODOS TEM EM CABOS COAXIAIS

1.1 Introdução

Neste trabalho serão analisadas descontinuidades, com simetria axial, entre quaisquer linhas de transmissão coaxial, como mostra a Figura 1.

As linhas coaxiais têm extensão, ao longo do eixo da estrutura “z”, suficiente para que os modos excitados, nas portas de entrada (S_1) e saída (S_2), sejam somente o TEM.

Portanto, é imprescindível que se faça um estudo dos modos TEM que se propagam em cabos-coaxiais. Assunto pertinente deste capítulo.

1.2 Modo Fundamental em Cabos-Coaxiais [1]

É bem sabido que o modo fundamental excitado nos cabos-coaxiais, vide Figura 1, é o modo TEM. Este modo não tem frequência de corte, inicia-se na frequência zero e acima de alguns GHz é atenuado, dando lugar aos modos superiores: TE e TM.

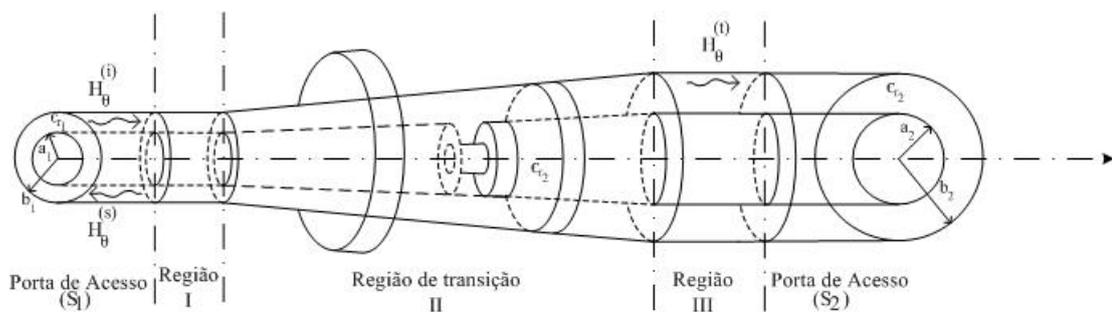


Figura 1 Estrutura tridimensional. Regiões: I - cabo coaxial (a_1, b_1); II - não-uniforme (descontínua); III - cabo coaxial (a_2, b_2).

Na Figura 1:

- $H_\theta^{(i)}$: Campo incidente na porta de entrada da estrutura;
- $H_\theta^{(s)}$: Campo refletido, pela seção de transição na região I;
- $H_\theta^{(t)}$: Campo transmitido, pela seção, na região III, saída da estrutura;

Um dos procedimentos de se estudar os modos que se propagam em estruturas condutoras de ondas eletromagnéticas, é pelas equações reduzidas (em componentes: longitudinal e transversal) de Maxwell [1].

Sejam as equações de Maxwell, excitação $e^{+j\omega t}$:

$$\begin{aligned}
 \nabla \wedge \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} + J_z\vec{z} && \text{(Equação de Ampères)} \\
 \nabla \wedge \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} && \text{(Equação de Faraday)} \\
 \nabla \cdot \vec{D} &= \rho && \text{(Equação de Gauss)} \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 && \text{(Equação da Densidade de Fluxo-Magnético)}
 \end{aligned} \tag{1}$$

1.2.1 Cálculo das equações de Maxwell reduzidas [1]

Os campos (\vec{E}, \vec{H}) e o operador nabla são expressos pelos componentes transversais e longitudinais.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(x, y, z) &= \vec{E}_t(x, y, z) + E_z(x, y, z)\vec{z} && ; && \vec{E}_t = E_x(x, y, z)\vec{x} + E_y(x, y, z)\vec{y} \\
 \vec{H}(x, y, z) &= \vec{H}_t(x, y, z) + H_z(x, y, z)\vec{z} && ; && \vec{H}_t = H_x(x, y, z)\vec{x} + H_y(x, y, z)\vec{y} \\
 \nabla &= \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z} && ; && \nabla_t = \frac{\partial}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo (2) na equação de Ampères (1) e igualando as componentes longitudinais e transversais de ambos os membros:

$$\nabla_t \wedge \vec{H}_t = (j\omega\epsilon E_z + J_z)\vec{z} \tag{3a}$$

$$\vec{z} \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} + \nabla_t \wedge H_z\vec{z} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}_t \tag{3b}$$

Aplicando o mesmo raciocínio na equação de Faraday ou o teorema da dualidade nas eqs.(3), têm-se:

$$\nabla_t \wedge \vec{E}_t = -j\omega\mu H_z\vec{z} \quad ; \quad \text{Pois,} \quad M_z = 0 \tag{4a}$$

$$\vec{z} \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} + \nabla_t \wedge E_z \vec{z} = -j\omega\mu_0\mu_r \vec{H}_t \quad ; \quad \mu_r = 1 \quad (4b)$$

Com auxílio de (2) reduzem-se as equações:

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad : \quad (\text{Gauss}) \quad (5a)$$

$$\nabla_t \cdot \vec{H}_t = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \quad : \quad (\text{Fluxo Magnético}) \quad (5b)$$

As equações reduzidas de Maxwell, (3), (4) e (5), são inerentes a qualquer modo: TEM, TE_{nm} , TM_{nm} e o híbrido HEM_{nm} , desde a frequência DC até o ultra-violeta, quando o comprimento de onda torna-se compatível ao das dimensões moleculares ou atômica da estrutura, impondo, portanto, conceitos quânticos à formulação que não são considerados neste trabalho.

Para os modos (TE_{nm} , TM_{nm} e HEM_{nm}) caracterizados pelas componentes longitudinais (E_z ou/e H_z) os campos (\vec{E} e \vec{H}) estão acoplados como mostram as equações (3), (4) e (5). Já para o modo TEM ($E_z = 0$ e $H_z = 0$) os campos (\vec{E} e \vec{H}) se deslocam, o que possibilita formular a propagação, deste modo, por um dos dois ramos distintos do eletromagnetismo: eletrostática ou magnetostática, como será evidenciado, a seguir.

1.3 Formulação da Propagação do Modo TEM pela Eletrostática

O modo TEM é caracterizado por ondas que se propagam, por exemplo ao longo do eixo “z”, com $E_z = 0$ e $H_z = 0$.

Substituindo estas condições nas equações reduzidas de Maxwell (3), (4) e (5), percebem-se que os campos elétrico e magnético são desacoplados e a propagação pode ser, indiferentemente, formulada ou pela eletrostática ou pela magnetostática, seja:

Formulação pela Eletrostática

A identidade vetorial $\nabla \wedge \vec{A} = 0 \rightarrow \vec{A} = \pm \nabla \varphi$, eq.(4a), implica: $\nabla_t \wedge \vec{E}'_t = 0 \rightarrow \vec{E}'_t = -\nabla_t \varphi'$.

Pela eq.(5a): $\nabla_t \cdot \vec{E}'_t = \frac{\rho'}{\epsilon} \rightarrow \nabla_t^2 \varphi' = -\frac{\rho'}{\epsilon}$.

Portanto, a formulação pela eletrostática se baseia em:

Tabela 1 Equações de Maxwell adaptadas à formulação do Modo TEM.

Eletrostática		Magnetostática	
(4a)	$\nabla_t \wedge \vec{E}_t = 0$	(3a)	$\nabla_t \wedge \vec{H}_t = J_z \vec{z}$
(5a)	$\nabla_t \cdot \vec{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon}$	(5b)	$\nabla_t \cdot \vec{H}_t = 0$
Os campos transversais continuam acoplados:			
(3b)	$\vec{z} \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \vec{E}_t$	(dualidade)	
(4b)	$\vec{z} \wedge \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu_0 \vec{H}_t$		

$\vec{E}'_t(x, y, z) = -\nabla_t \varphi'(x, y, z) \quad \rightarrow \quad \varphi' \rightarrow \text{Potencial escalar elétrico}$ $\nabla_t^2 \varphi'(x, y, z) = -\frac{\rho'(x, y, z)}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \text{Equação de Poisson}$	(6)
--	-----

Parte-se da equação de Faraday reduzida, eq.(4b):

$$\vec{z} \wedge \left(\vec{z} \wedge \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} \right) = -j\omega\mu_0 \left(\vec{z} \wedge \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial z} \right) \quad (7)$$

Substitui-se a eq.(3b) em (7):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2} + k^2 \vec{E}_t = 0 \quad (8)$$

A eq.(8) mostra que o campo elétrico do modo TEM pode ser separado em

$$\vec{E}_t(x, y, z) = \vec{e}(x, y) Z_e(z) \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8) tem-se $Z_e(z)$, portanto:

$$\vec{E}_t(x, y, z) = \vec{e}(x, y) (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{+jkz}) \quad (10)$$

onde

- $\vec{e}(x, y)$ - vetor modal elétrico.
- $Z_e(z)$ - componente longitudinal elétrica.

Parte-se da equação de Ampères reduzida, eq.(4b), com o mesmo raciocínio feito

para o campo elétrico, obtém-se

$$\vec{H}_t(x, y, z) = \vec{h}(x, y) (H^+ e^{-jkz} + H^- e^{+jkz}) \quad (11)$$

onde

- $\vec{h}(x, y)$ - vetor modal magnético.
- $Z_h(z)$ - componente longitudinal do campo magnético.

Os campos elétrico \vec{E}_t , eq.(10), e magnético \vec{H}_t , eq.(11), estão acoplados.

Substituindo as eq.(10) e (11) em (4b), tem-se uma relação entre (\vec{H}_t e \vec{E}_t):

$$\vec{H}_t = + \frac{jk}{j\omega\mu_0} (\vec{z} \wedge \vec{e}) [E^+ e^{-jkz} - E^- e^{+jkz}] \quad (12)$$

Levando a eq.(11) em (12), obtém-se o vetor modal magnético em função do elétrico:

$$Z_h(z) = E^+ e^{-jkz} - E^- e^{+jkz} \quad (13)$$

$$\vec{e} = -\eta (\vec{z} \wedge \vec{h}) \quad (14)$$

ou

$$\vec{h} = \frac{1}{\eta} (\vec{z} \wedge \vec{e}) \quad (15)$$

onde

- $\eta = \frac{\omega\mu_0}{k} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon r}}$
- $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon r}} = 120\pi$
- η - Impedância de onda do modo TEM ou impedância intrínseca do meio.

Substituindo a eq.(13) em $\vec{E}'_t(x, y, z) = -\nabla_t \varphi'(x, y, z)$, eq.(6), deduz-se que: $\varphi'(x, y, z) = \varphi(x, y) (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{+jkz})$, e a equação de Poisson se restringe à seção transversal da linha:

$$\nabla_t^2 \varphi(x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{\epsilon_r} \quad (16)$$

Pois $\rho'(x, y, z) = \rho(x, y) (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{+jkz})$.

A formulação, ainda não concluída, se fundamenta na equação de Poisson do potencial escalar transversal, ou seja:

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 \varphi(x, y) &= -\frac{\rho(x, y)}{\epsilon_r} \\ \vec{e}(x, y) &= -\nabla_t \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, y, z) &= -\nabla_t \varphi(x, y) (E^+ e^{-jkz} + E^- e^{+jkz}) \\ \vec{H}_t(x, y, z) &= \left[\vec{Z} \wedge (-\nabla_t \varphi(x, y)) \right] \left(\frac{E^+}{\eta} e^{-jkz} - \frac{E^-}{\eta} e^{+jkz} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

As eqs.(18) podem ser expressas, também, em função dos coeficientes do campo magnético

$$H^+ = \frac{E^+}{\eta} \quad ; \quad H^- = -\frac{E^-}{\eta}$$

Então:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, y, z) &= \eta (-\nabla_t \varphi(x, y)) (H^+ e^{-jkz} - H^- e^{+jkz}) \\ \vec{H}_t(x, y, z) &= \left[\vec{Z} \wedge (-\nabla_t \varphi(x, y)) \right] (H^+ e^{-jkz} - H^- e^{+jkz}) \end{aligned} \quad (19)$$

A formulação é estabelecida, transformando o problema de Poisson, definido no domínio fechado da estrutura $\Omega = (\overline{\Omega} + \Gamma)$, veja Figura 2, no problema de Laplace, delimitado na região aberta da mesma, $\Omega = \overline{\Omega}$.

Assim, vide Figura 2, o problema passa a ser caracterizado pelo seguinte formalismo de Laplace

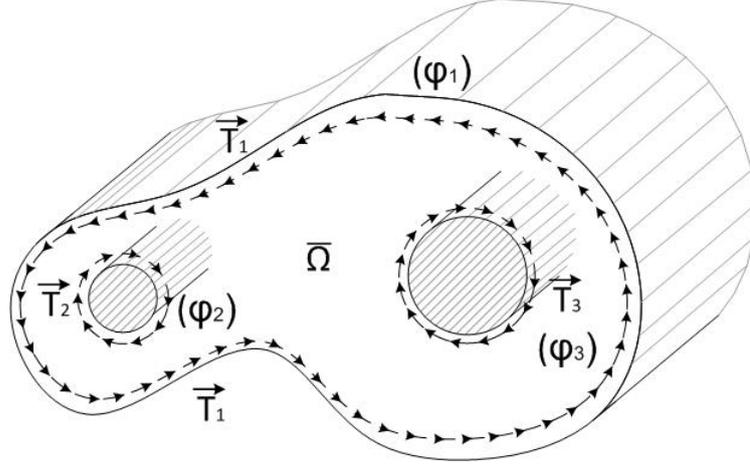


Figura 2 Domínio aberto da estrutura $\Omega = \bar{\Omega}$.

No aberto $\Omega = \bar{\Omega}$	Nas fronteiras (r_1, r_2, \dots, r_n)	
$\nabla_t^2(x, y, z) = 0$	$\varphi(r_1) = \varphi_1$	
	$\varphi(r_2) = \varphi_2$	
	\vdots	
	$\varphi(r_n) = \varphi_n$	(20a)

$$\vec{e} = -\nabla_t \varphi(x, y) \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \eta \vec{e} (H^+ e^{-jkz} - H^- e^{+jkz}) \\ \vec{H}_t &= (\vec{Z} \wedge \vec{e}) (H^+ e^{-jkz} + H^- e^{+jkz}) \end{aligned} \quad (21)$$

As fontes não foram suprimidas da análise. Elas são obtidas pelas condições de fronteira entre dielétricos e condutores, ou seja, vide Figura 2:

$$\begin{aligned} \vec{n} \wedge \vec{H} \Big|_{r=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} &= J_Z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \vec{Z} \\ \vec{n} \cdot \vec{E} \Big|_{r=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} &= \rho \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \vec{Z} \end{aligned} \quad (22)$$

1.3.1 Cálculo dos campos eletromagnéticos do modo TEM

Neste item, serão calculados os campos eletromagnéticos do modo fundamental (TEM) de cabos-coaxiais.

A linha coaxial é mostrada na Figura 2. O condutor interno tem raio “a” e o externo “b”. O meio é caracterizado por um dielétrico: $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$.

Devido a geometria da estrutura e as condições do potencial serem impostas em fronteiras circulares $\varphi(r = a) = V_0$ e $\varphi(r = b) = 0$, a equação de Laplace é aplicada no sistema de coordenadas circulares, independente da variável angular. Portanto; $\vec{H}_t(r, z)$, $\vec{E}_t(r, z)$ e $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

$$\text{Equação de Laplace } \nabla_t^2 \varphi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Pela Figura 2:

$$\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (23)$$

Aplicando as condições de Fronteira

$$\begin{array}{lll} r = a & \varphi(r = a) = V_0 & V_0 = C_1 \ln a + C_2 \\ r = b & \varphi(r = b) = 0 & 0 = C_1 \ln b + C_2 \end{array} \quad (24)$$

Resolvendo a eq.(24) têm-se:

$$C_1 = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad e \quad C_2 = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln b \quad (25)$$

Substituindo eq.(25) em (23), deduz-se o potencial escalar, numa seção do cabo coaxial:

$$\varphi(r) = -\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{b}{r}\right) \quad (26)$$

O vetor modal elétrico é calculado por (20a)

$$\begin{aligned} \vec{e} &= -\nabla_t \varphi(x, y) \\ \vec{e}(r) &= +\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\vec{a}_r}{r} \end{aligned} \quad (27)$$

O vetor modal magnético: $\vec{h} = (\vec{Z} \wedge \vec{e})$ será:

$$\vec{h}(r) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\vec{a}_\theta}{r} \quad (28)$$

Levando as eqs.(27) e (28) em (21), deduzem-se os campos eletromagnéticos, das linhas coaxiais, utilizados no capítulo-2, para se analisar a estrutura, coaxial-descontinuidade-coaxial, vide Figura 1, proposta neste trabalho:

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(r, z) &= \left(\frac{\eta V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) \frac{1}{r} (H^+ e^{-jkz} - H^- e^{+jkz}) \vec{a}_r \\ \vec{H}_t(r, z) &= \left(\frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right) \frac{1}{r} (H^+ e^{-jkz} + H^- e^{+jkz}) \vec{a}_\theta \end{aligned} \quad (29)$$

Na análise realizada no capítulo-2, a diferença de potencial entre os dois condutores, $r = (a, b)$, será considerada unitária, $V_0 = 1$ volt, vide eq.(29).

1.3.2 Equação da onda da linha coaxial

O critério, do item anterior, que possibilitou o problema de Poisson (definido no domínio fechado da estrutura) ser solucionado pelo de valores de fronteira de Laplace (definido no aberto da respectiva estrutura) será, novamente, empregado para se obter a equação da onda (Helmholtz) pertinente à análise da descontinuidade entre linhas coaxiais.

No domínio aberto da estrutura, veja Figura 2, as equações de Maxwell se relacionam às regiões livres de fontes, satisfazendo as condições dos campos elétrico e magnético nas respectivas fronteiras das regiões, portanto:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{H}_\theta &= j\omega\epsilon_0\epsilon_r \vec{E} \\ -\nabla \wedge \vec{E} &= j\omega\mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Aplicando o rotacional na equação de Ampères, eq.(30). Substituindo na equação resultante a equação de Faraday e a equação de Gauss, eq.(31), obtém-se a equação da onda que será utilizada no capítulo-2.

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H} \right) - k_0^2 \vec{H} = 0 \quad (32)$$

2 FORMULAÇÃO DA DESCONTINUIDADE COM CORRUGAÇÕES ENTRE CABOS COAXIAIS

2.1 Introdução

A estrutura bidimensional, que será analisada neste trabalho, vide Figura 3, se refere à descontinuidade com corrugações entre dois cabos coaxiais. A estrutura, na realidade, é tridimensional, vide Figura 1, mas devido aos modos procurados serem independentes da variável angular, $n=0$, característica do modo TEM, a análise torna-se função, somente, das variáveis radial e longitudinal e o problema bidimensional.

Na análise proposta considera-se que uma onda TEM, conhecida, incida na porta de acesso ($S_{\rho=1}$), no cabo coaxial de entrada da estrutura, região-I, Figura 3. A descontinuidade, região-II, Figura 3, reflete na região-I e transmite na região-III parcelas desta onda incidente, como também gera modos superiores ($TM_{(0,m)}$). Nos dois cabos coaxiais, regiões-(II e III), vide Figura 3, os modos superiores se encontram abaixo de suas frequências de corte, enquanto que na região de transição podem ou não ser evanescentes.

As portas de acesso da estrutura ($S_{\rho=1}$, $S_{\rho=2}$) são colocadas suficientemente afastadas da transição, de modo que nelas só haja o modo TEM.

O campo magnético (componente azimutal) procurado é obtido com auxílio do Método dos Elementos Finitos (MEF), sob condição de fronteira de Dirichlet, ao se obrigar a potência da onda incidente, na porta de acesso ($S_{\rho=1}$), ser unitária. O MEF é usado para solucionar a equação de Helmholtz escalar do campo magnético, que será deduzida neste capítulo. Conseqüentemente, com o conhecimento do campo magnético calculam-se o coeficiente de reflexão na porta de entrada ($S_{\rho=1}$) e o de transmissão em ($S_{\rho=2}$).

2.2 Equação de Helmholtz Escalar

Como a porta de entrada da estrutura ($S_{\rho=1}$) é excitada pelo modo TEM com potência unitária, os únicos modos superiores que se acoplam ao TEM são os modos $TM_{(n=0,m)}$, sem variação angular.

Estes modos são caracterizados por:

$$\vec{E}(r, z) = E_r(r, z)\vec{a}_r + E_z(r, z)\vec{z}$$

$$\vec{H}_\theta(r, z) = H_\theta(r, z)\vec{a}_\theta \quad (H_z = 0)$$

Enquanto que o TEM:

$$\vec{E}_r = E_r(r, z)\vec{a}_r$$

$$\vec{H}_\theta = H_\theta(r, z)\vec{a}_\theta \quad (H_z = 0)$$

Os campos magnéticos dos modos $TM_{(0,m)}$ e TEM são casados nas portas de acesso ($S_{\rho=1}$, $S_{\rho=2}$), ($H_r = H_z = 0$) e os respectivos modos se acoplam, já que $\vec{H}(r, z)$ do modo (TEM) dos cabos coaxiais nas portas de entrada e de saída entre a região de descontinuidade se adaptam aos modos ($TM_{(0,m)}$) da região de descontinuidade.

Considere a excitação harmônica ($e^{+j\omega t}$).

As equações de Maxwell em regiões livres de fontes, veja ítem-(1.3.2) capítulo 1, são:

$$\nabla \wedge \vec{H}_\theta = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \quad (\text{Equação de Ampères})$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = j\omega\mu_0\vec{H}_\theta \quad (\text{Equação de Faraday})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_\theta = 0$$

Aplique o rotacional na equação de Ampères, após dividi-la pela permissividade relativa (ϵ_r):

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) = j\omega\epsilon_0(\nabla \wedge \vec{E}) \quad (1)$$

Substituindo a equação de Faraday na eq.(1) tem-se a equação de Helmholtz vetorial que rege a análise eletromagnética da estrutura:

$$\nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) - k_0^2 \vec{H}_\theta = 0 \quad (2)$$

onde k_0 é o número de onda no ar.

A eq.(2) é função exclusiva da componente azimutal do campo magnético ($\vec{H}_\theta = H_\theta \vec{a}_\theta$), portanto, pode-se antecipar que a equação vetorial (2) se reduz a uma equação escalar em (H_θ), como é mostrado no item seguinte.

O campo elétrico é obtido, sem dificuldades, substituindo-se (\vec{H}_θ) na equação de Ampères.

2.3 Formulação Eletromagnética Básica da Descontinuidade com Corrugações entre Cabos Coaxiais

Neste item será resolvida a equação de Helmholtz, eq.(2), que rege o comportamento eletromagnético de descontinuidades simétricas com corrugações entre cabos coaxiais, excitados pelo modo TEM (modo fundamental do cabo coaxial), veja Figura 1 e Figura 3.

A estrutura é excitada pelo modo TEM (porta de acesso-(1), vide Figura 3). Os únicos modos superiores, evanescentes, gerados pelas descontinuidades serão os $TM_{(n=0, m)}$, já que são os que se acoplam ao TEM. A análise, portanto, é estendida, somente, aos modos (TEM, $TM_{(0, m)}$), àqueles que não apresentam variação angular ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$).

A equação de Helmholtz, eq.(2), será solucionada pelos Métodos de Galerkin-Budnov (MGB) e dos Elementos Finitos (MEF).

O operador que compõe a equação de Helmholtz, eq.(2), é auto-adjunto. Portanto, a eq.(2) pode ser, também, solucionada pelo método variacional (MV) no lugar do (MGB). Optou-se pelo (MGB), por ser mais simples de ser manuseado.

O equacionamento do problema de valores de fronteira pelo (MGB) subentende os seguintes passos:

a) A função procurada (função tentativa) é expandida num espaço de base, cujas funções satisfaçam às condições de derivação “fraca” do operador e as de fronteira no domínio da estrutura.

$$\vec{H}_\theta(r, z) = \sum_{\rho=1}^{N_G} q_\rho \vec{\varphi}_\rho(r, z) \quad \vec{\varphi}_\rho(r, z) = N_\rho(r, z) \vec{a}_\theta \quad (3)$$

onde:

- $\{\vec{\varphi}_\rho(r, z); \rho = 1, 2 \cdots N_G\}$: são as funções de base do espaço de Hilbert $(H_0^{(1)}(\Omega))$ “enfraquecido”. As funções $\{\vec{\varphi}_\rho(r, z) = N_\rho(r, z)\vec{a}_\theta\}$ são as funções de forma ou de interpolação dos elementos finitos.

- $\{q_\rho\}$: As coordenadas das respectivas funções de base $\{\vec{\varphi}_\rho(r, z)\}$.

- $\{1, 2 \cdots N_G\}$: são os nós de interpolação dos elementos finitos, onde “ N_G ” corresponde ao nó de numeração máxima.

- A condição de fronteira, desta análise, é fixada pela imposição do campo magnético, no cabo coaxial $(\vec{H}_\theta^{(i)}(S_{\rho=1}))$, incidir na porta de entrada da estrutura, porta de acesso ($S_\rho = 1$), vide Figura 1 e Figura 3, com potência unitária.

Forma “fraca” ou espaço de Hilbert “enfraquecido” $(H_0^{(1)}(\Omega))$ significa que as exigências impostas pelo operador às funções de base $\{\vec{\varphi}_\rho(r, z); \rho = 1, 2 \cdots N_G\}$, inicialmente em $(H_0^{(2)}(\Omega))$, serão atenuadas diminuindo-se o grau de derivação da respectiva base. O método de “enfraquecimento” de uma formulação consiste em transferir a imposição de derivação sobre o espaço de base a um outro espaço; o das funções de ponderação.

O enfraquecimento do (MGB), usado neste trabalho, consiste, portanto, em se expandir o domínio da função tentativa transferindo as imposições de derivação do espaço das funções de base $(H_0^{(2)}(\Omega))$ ao outro espaço, o espaço das funções de ponderação, que inicialmente se encontra em $(H_0^{(1)}(\Omega))$.

A formulação enfraquecida, sobre operadores de ordem par, que são auto-adjuntos, é aquela em que as imposições de derivação são idênticas em ambos os espaços. Neste trabalho, a imposição é de ordem 2, vide eq.(2), portanto o enfraquecimento se verifica em $(H_0^{(1)}(\Omega))$.

Quando o espaço de ponderação for o mesmo das funções de base $\{\vec{\varphi}_\rho(r, z); \rho = 1, 2 \cdots N_G\}$, o método de Galerkin é classificado como sendo o de Budnov (MGB). Se ambos os espaços forem diferentes, o método é referenciado como o de Petrov. Neste trabalho será utilizado o de Galerkin-Budnov.

Algumas das funções de Forma (funções de interpolação dos elementos finitos triangulares) são visualizadas na Figura 3.

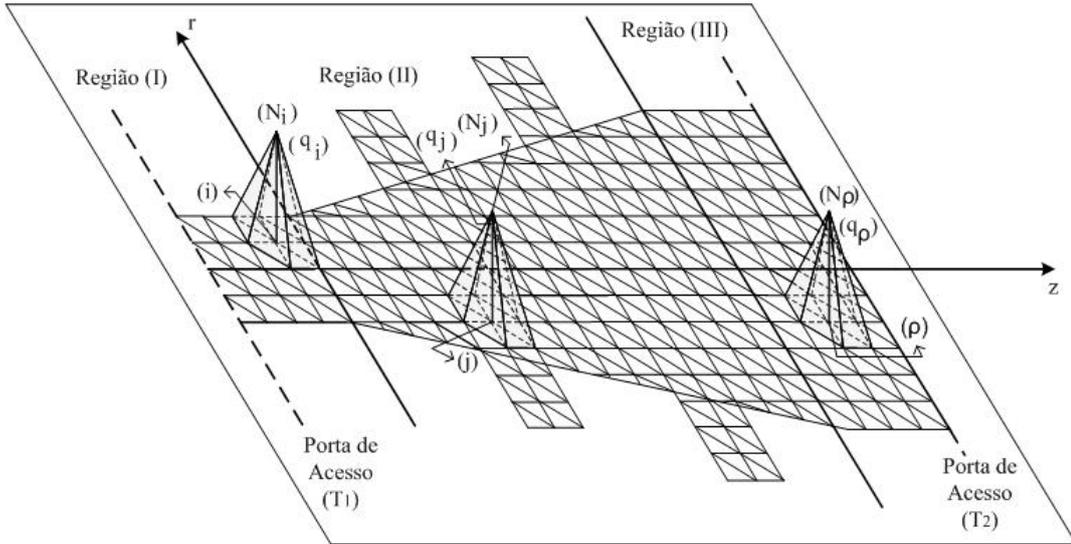


Figura 3 Algumas das Funções de base (N_i, N_j, N_ρ) da expansão do campo magnético (Funções de forma dos elementos finitos) e a estrutura bidimensional

b) O domínio espacial da estrutura será discretizado em elementos finitos triangulares, vide Figura 3. Pode-se discretizar, também, em elementos quadrangulares. Entretanto, neste trabalho serão utilizados, unicamente, os elementos triangulares.

c) As funções de base em que se expande a função “tentativa”, que soluciona o problema, vide eq.(3), $\{\vec{\varphi}_\rho(r, z) = (N_\rho(r, z)\vec{a}_\theta); \rho = 1, 2 \dots N_G\}$ são as funções de interpolação dos elementos finitos, conhecidas por funções de Forma dos (EF), vide Figura 3.

d) Projeta-se a equação diferencial, eq.(2), expandida pelas funções de interpolação dos elementos finitos (funções de base), eq.(3), no espaço dos vetores de ponderação pelo critério de Budnov, ou seja:

$\{\vec{\varphi}_\rho(r, z) = (N_\rho(r, z)\vec{a}_\theta); \rho = 1, 2, 3 \dots N_G\} \rightarrow$ Espaço dos vetores de base idêntica ao de ponderação.

$$\vec{H}_\theta(r, z) = \sum_{\rho=1}^{N_G} q_\rho (N_\rho(r, z)\vec{a}_\theta)$$

A formulação é colocada em linguagem de operador. Pelas eqs.(2) e (3):

$$L(\vec{H}_\theta) = \nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) - k_0^2 \vec{H}_\theta \quad (4)$$

O operador da eq.(4) está expresso na forma-forte, no espaço de Hilbert $(H_0^{(2)}(\Omega))$. Isto é, os (2)-graus de derivação estão impostos na função tentativa (\vec{H}_θ) .

O problema é solucionado projetando o operador, eq.(4), em cada um dos vetores que formam a base do espaço de ponderação:

$$\{\vec{\varphi}_\rho(r, z) = (N_\rho(r, z)\vec{a}_\theta); \rho = 1, 2 \dots N_G\} \rightarrow \text{Espaço de ponderação.}$$

$$\langle L(\vec{H}_\theta), \vec{\varphi}_\rho \rangle = 0 \quad (\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma) \quad (5)$$

A eq.(5) caracteriza o produto escalar no espaço de Hilbert $(H_0^{(2)}(\Omega))$, definida por:

$$\langle L(\vec{H}_\theta), \vec{\varphi}_\rho \rangle = \iiint_V (L(\vec{H}_\theta) \cdot \vec{\varphi}_\rho^*) dV \quad (6)$$

onde o sinal de * caracteriza conjugação.

Substituindo as eqs.(4) e (3) em (6):

$$\rho = 1, 2, 3 \dots N_G$$

$$\langle L(\vec{H}_\theta), \vec{\varphi}_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{N_G} q_i \iiint_V [L(N_i(r, z)\vec{a}_\theta) \cdot (N_\rho(r, z)\vec{a}_\theta)^*] dV \quad (7)$$

Ao aplicar o método de Galerkin para solucionar o problema de valores de fronteira (eq.(2)) e as condições que a função tem que satisfazer nas fronteiras do domínio, a formulação diferencial passa a ser uma formulação integral, cuja solução é a equação diferencial inicial, conhecida por equação de Euler, satisfazendo as condições de contorno (Dirichlet). A formulação integral discretizada pelo (MEF) origina uma matriz de $[(N_G)$ equações e (N_G) incógnitas] como mostra a eq.(8).

Trata-se de um problema matricial de N_G sistemas de equações com N_G incógnitas, ou seja:

$$[A]\{q\} = \{B\} \quad (8)$$

onde:

$[A] \rightarrow$ matriz esparsa quadrada de dimensão $(N_G \times N_G)$.

$\{q\} \rightarrow$ as coordenadas que são as incógnitas procuradas.

$\{B\} \rightarrow$ Vetor de carga de dimensão (N_G). Consequência das projeções das fronteiras de Dirichlet nos eixos do espaço de ponderação .

A solução da eq.(8) pode ser obtida pelo método de Gauss-Seidel.

O vetor de carga $\{B\}$, condizente com a condição de fronteira de Dirichlet do problema, é estudado no ítem (2.6).

2.4 Formulação na Forma-Forte $(H_0^{(2)}(\Omega))$

Parte-se da função tentativa, eq.(3), a função procurada, expandida no espaço de funções de base (funções de interpolação nos elementos finitos que discretizam o domínio (Ω)):

$$\vec{H}_\theta(r, z) = \sum_{i=1}^{N_G} q_i \vec{\varphi}_i(r, z) \quad (9)$$

onde:

$$\vec{\varphi}_i(r, z) = N_i(r, z) \vec{a}_\theta.$$

$\vec{\varphi}_i(r, z) \rightarrow$ são as funções de base.

$\{q_i\} \rightarrow$ as coordenadas das funções de base no domínio (Ω) do problema.

$\{N_i(r, z)\} \rightarrow$ As funções de forma dos elementos finitos, funções de base do espaço $(H_0^{(1)}(\Omega))$.

O passo inicial para se obter a formulação do problema é aplicar o método de Galerkin na eq.(7).

2.4.1 Método de Galerkin sob o critério de Budnov (MGB)

Substitui-se a eq.(9) em (5):

$$\sum_{i=1}^{N_G} q_i \iiint_V (L(\vec{\varphi}_i) \cdot \vec{\varphi}_\rho^*) dV = 0 \quad (10)$$

onde:

$i = 1, 2 \dots N_G$ (referem-se às colunas da formulação matricial).

$\rho = 1, 2 \dots N_G$ (correspondem às linhas da formulação matricial).

De acordo com a eq.(4), a formulação expressa pela eq.(10) encontra-se na forma forte $(H_0^{(2)}(\Omega))$.

No espaço das funções de base $\{\vec{\varphi}_i(r, z); i = 1, 2 \dots N_G\}$, sob forte restrição em $(H_0^{(2)}(\Omega))$, as funções e suas primeiras derivadas tem que ser contínuas em todo domínio (Ω) .

Devido a forte restrição imposta ao operador à convergência da função tentativa, eq.(9), a solução do problema se encontra comprometida. O impasse é superado aumentando-se as funções admissíveis ao domínio do operador, eq.(4), pelo enfraquecimento das restrições impostas ao campo $(H_\theta(r, z))$.

A formulação, no domínio majorado de funções admissíveis, é conhecida por formulação fraca do problema.

2.5 Formulação Fraca $(H_0^{(1)}(\Omega))$

A formulação fraca se situa em $H_0^{(1)}(\Omega)$; espaço de Hilbert, em que a única restrição, imposta sobre as funções de base, exige que elas sejam contínuas no domínio fechado $(\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma)$ da estrutura. Ao contrário da formulação forte, na forma enfraquecida não há necessidade de continuidade da primeira derivada, estendendo-se, portanto, o domínio das funções admissíveis à solução exata do problema.

A formulação forte, eq.(10), é enfraquecida com auxílio dos seguintes passos:

2.5.1 Formulação Forte $(H_0^{(2)}(\Omega))$, eq.(10), em notação de produto escalar

$$\rho = 1, 2, 3 \dots N_G \quad (\rho \rightarrow \text{linhas da notação matricial}).$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N_G \quad (i \rightarrow \text{colunas da notação matricial}).$$

Seja:

$$\langle \nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right), \vec{\varphi}_\rho \rangle - k_0^2 \langle \vec{H}_\theta, \vec{\varphi}_\rho \rangle = 0 \quad (11)$$

onde:

$$\vec{\varphi}_\rho(r, z) = (N_\rho(r, z) \vec{a}_\theta). \quad \{\vec{\varphi}_\rho\} \rightarrow \text{Espaço de ponderação.}$$

$$\vec{H}_\theta \rightarrow \text{é dado pela eq.(9).}$$

$\{\vec{\varphi}_i\} \rightarrow$ Espaço de base.

Como o critério é o de Budnov $\{\vec{\varphi}_\rho\} = \{\vec{\varphi}_i\}$.

Aplica-se, na eq.(11), a identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \wedge \vec{B})$$

com as seguintes considerações:

$$\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \quad e \quad \vec{B} = \vec{\varphi}_\rho^*(r, z)$$

onde o sinal de * significa conjugação.

Portanto

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] = \vec{\varphi}_\rho^* \cdot \nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) - \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^*)$$

Transferindo o termo negativo do lado direito ao esquerdo:

$$\left[\nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \right] \cdot \vec{\varphi}_\rho^* = \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^*) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \quad (12)$$

Integra-se a eq.(12) no volume da estrutura:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \cdot \vec{\varphi}_\rho^* \right] dV &= \iiint_V \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^*) \right] dV \\ &+ \iiint_V \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] dV \quad (13) \end{aligned}$$

O termo do lado esquerdo da eq.(13) é escrito:

$$\langle \nabla \wedge \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta \right), \vec{\varphi}_\rho^* \rangle = \langle \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta, \nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \rangle + \iint_{S_\Omega + S_{EL}} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n} dS \quad (14)$$

Na integral de área da eq.(14) utilizou-se o teorema da divergência. O vetor \vec{n} é o unitário normal às fronteiras, dirigido para fora das regiões: S_Ω (área envolvendo a estrutura) e S_{EL} (área circundando cada elemento finito).

O termo da esquerda, da eq.(14), se encontra em $H_0^{(2)}(\Omega)$ e os da direita em $H_0^{(1)}(\Omega)$.

Substituindo a eq.(14) em (11), a formulação se enfraquece e o espaço em que se coloca a análise é o $H_0^{(1)}(\Omega)$, seja:

$$\left\langle \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \wedge \vec{H}_\theta, \nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho \right\rangle - k_0^2 \left\langle \vec{H}_\theta, \vec{\varphi}_\rho \right\rangle + \iint_S \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n} d_S = 0 \quad (15)$$

Na eq.(15) a restrição máxima de derivação sobre as funções de base é a de ordem (1), exigindo que a continuidade seja imposta somente nas respectivas funções, não em suas derivadas.

2.5.2 Transformando a análise tridimensional em bidimensional

A eq.(15) se refere à análise da estrutura, num espaço tridimensional, como mostra a Figura 1. Mas, como a estrutura apresenta simetria de revolução em torno do eixo longitudinal “z”, a análise pode ser feita bidimensionalmente, de acordo com a Figura 3.

Aplicam-se os produtos escalares na eq.(15):

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a}^b \int_{z=t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta \cdot \nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^*) - k_0^2 (\vec{H}_\theta \cdot \vec{\varphi}_\rho^*) \right] r d_\theta dr dz + (I_{S_{t_1}} + I_{S_{t_2}} + I_S) = 0 \quad (16)$$

onde:

$I_{S_{t_1}}$ → Integral de área na porta de entrada da estrutura, acesso S_{t_1} , $z = t_1$, vide Figura 3 e Figura 4.

$$I_{S_{t_1}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a_1}^{b_1} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_1}} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n} r d_\theta dr, \quad (\vec{n} = -\vec{z})$$

Como $(\vec{H}_\theta$ e $\vec{\varphi}_\rho)$ independem da variável “ θ ”:

$$I_{S_{t_1}} = 2\pi \int_{r=a_1}^{b_1} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_1}} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot (-\vec{z}) r dr \quad (17)$$

onde:

ϵ_{r_1} – permissividade do cabo coaxial, no acesso S_{t_1} .

(a_1, b_1) – raios interno e externo do respectivo cabo.

$I_{S_{t_2}}$ – integral de área na porta de saída da estrutura, acesso S_{t_2} , $z = t_2$, veja Figura 3 e Figura 4.

$$I_{S_{t_2}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a_2}^{b_2} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n} r d\theta dr \quad (\vec{n} = +\vec{z})$$

Com o mesmo argumento anterior, tem-se:

$$I_{S_{t_2}} = 2\pi \int_{r=a_2}^{b_2} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot (+\vec{z}) r dr \quad (18)$$

onde:

ϵ_{r_2} – permissividade do cabo coaxial, no acesso S_{t_2} .

(a_2, b_2) – raios interno e externo do respectivo cabo.

I_S – Integrais de área nas paredes condutoras elétricas e entre os elementos, nas regiões I, II e III, vide Figura 3 e Figura 4, estas integrais são nulas. Portanto, não contribuem na análise do problema, conforme comprovação a seguir:

Considere a integral nas superfícies condutoras elétricas que envolvem a estrutura, pela Figura 5 $\sigma = \infty$, os respectivos condutores são perfeitos.

$$I_{\sigma=\infty} = 2\pi \int_{(l_1+l_2)} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n} r dz \quad (19)$$

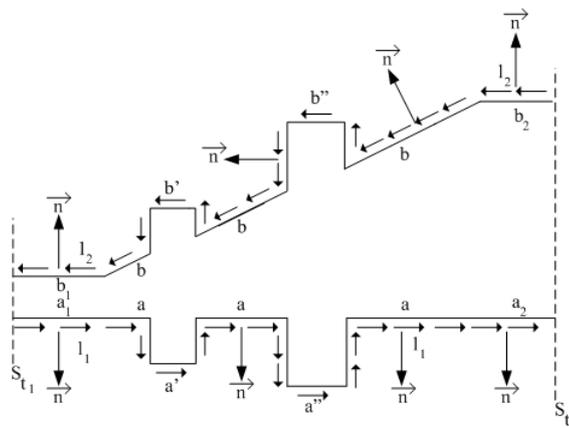


Figura 4 Percurso da integral de linha referente à integral de área que contorna a estrutura.

Pela equação de Ampères $\nabla \wedge \vec{H}_\theta = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$, a eq.(19) se escreve:

$$I_{\sigma=\infty} = j\omega\epsilon_0 2\pi \int_{(l_1+l_2)} \left(\vec{E} \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right) \cdot \vec{n} r dz$$

Com auxílio da propriedade do produto escalar triplo:

$$I_{\sigma=\infty} = j\omega\epsilon_0 2\pi \int_{(l_1+l_2)} \vec{\varphi}_\rho^* \cdot \left(\vec{n} \wedge \vec{E} \right) r dz \quad (20)$$

A componente tangencial do campo elétrico em condutores elétricos perfeitos é nula:

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = 0 \text{ (sobre condutores perfeitos)}$$

Portanto, a integral de superfície $I_{\sigma=\infty} \approx 0$.

Seja, agora, a integral sobre a superfície entre dois elementos finitos. Veja Figura 5:

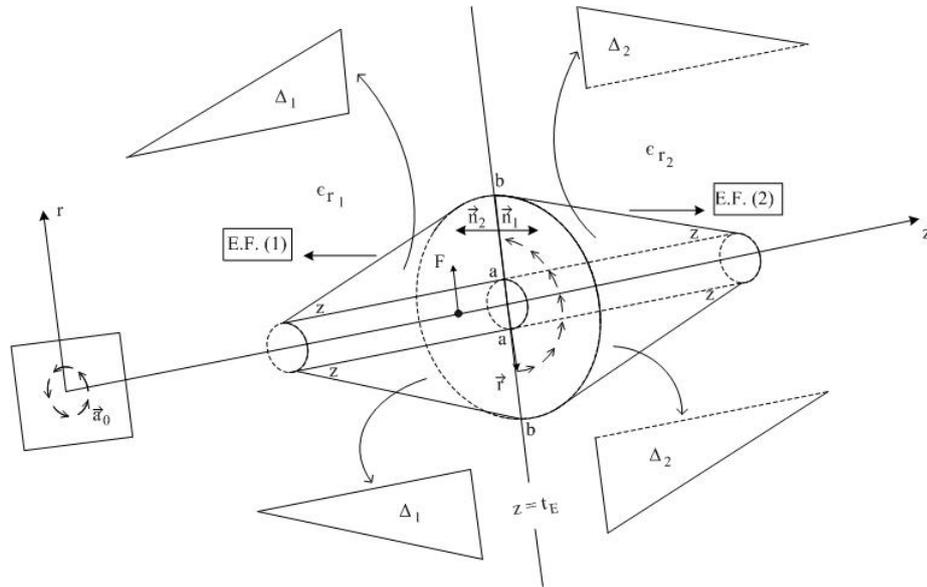


Figura 5 Elementos finitos, fronteiroço entre duas regiões distintas.

I_{S_E} – Integral de área na fronteira entre dois elementos finitos em regiões distintas, $z = t_E$.

$$I_{S_E} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a}^b \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon_{r_1}} \left(\nabla \wedge \vec{H}_{\theta_1} \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n}_1 + \left[\frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\nabla \wedge \vec{H}_{\theta_2} \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{n}_2 \right\} r d\theta dr$$

onde:

$$\nabla \wedge \vec{H}_{\theta_1} = j\omega\epsilon_0\epsilon_{r_1}\vec{E}_1$$

$$\nabla \wedge \vec{H}_{\theta_2} = j\omega\epsilon_0\epsilon_{r_2}\vec{E}_2$$

Então

$$I_{S_E} = 2\pi j\omega\epsilon_0 \int_{r=a}^b \left[\left(\vec{E}_1 \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right) \cdot \vec{n}_1 + \left(\vec{E}_2 \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right) \cdot \vec{n}_2 \right] r dr$$

Aplicando a Lei do produto escalar triplo:

$$I_{S_E} = j\omega_0 2\pi \int_{r=a}^b \vec{\varphi}_\rho^* \cdot \left[\vec{n}_1 \wedge \vec{E}_1 + \vec{n}_2 \wedge \vec{E}_2 \right] r dr \quad (21)$$

Chamemos $\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$.

A eq.(21) se escreve:

$$I_{S_E} = j\omega_0 2\pi \int_{r=a}^b \vec{\varphi}_\rho^* \left[\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \right] dr \quad (22)$$

Pela condição clássica de fronteira:

As componentes tangenciais do campo elétrico, na fronteira entre dois dielétricos distintos, são idênticas, portanto:

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

A integral de área referente às regiões distintas não contribui à análise da estrutura.

A eq.(22) é identicamente nula.

Substituindo (I_{S_1} , I_{S_2} e I_S) eqs.((17), (18) e (22)) na eq.(16) tem-se:

$$2\pi \left\{ \int_{r=a}^b \int_{z=t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \cdot \left(\nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right) - k_0^2 \left(\vec{H}_\theta \cdot \vec{\varphi}_\rho^* \right) \right] r dr dz \right. \\ \left. - \int_{r=a_1}^{b_1} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_1}} \left(\nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right]_{S_{t_1}} \cdot \vec{z} r dr \right. \\ \left. + \int_{r=a_2}^{b_2} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\nabla \wedge \vec{H}_\theta \right) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right]_{S_{t_2}} \cdot \vec{z} r dr \right\} = 0$$

A análise passa a ser bidimensional, veja Figura 3, regida por:

$$\begin{aligned} \int_{r=a}^b \int_{z=t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^*) \right] r dr dz - k_0^2 \int_{r=a}^b \int_{z=t_1}^{t_2} (\vec{H}_\theta \cdot \vec{\varphi}_\rho^*) r dr dz \\ - \int_{r_1(a_1, b_1)} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_1}} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{z} r dr \\ + \int_{r_2(a_2, b_2)} \left[\frac{1}{\epsilon_{r_2}} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{z} r dr = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

As integrais de linha, sobre as portas de acesso (1 e 2), eq.(23), são, a seguir, avaliadas mais convenientemente, visando a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Pela lei de Ampères:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{H}_{\theta_1} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_{\Gamma_1}\vec{E}_1 \quad (\text{sobre } \Gamma_1) \\ \nabla \wedge \vec{H}_{\theta_2} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_{\Gamma_2}\vec{E}_2 \quad (\text{sobre } \Gamma_2) \end{aligned} \quad (24)$$

Substituindo a eq.(24) nas integrais de linha da eq.(23):

$$I_{\Gamma_{\binom{1}{2}}} = \int_{\Gamma_{\binom{1}{2}}} j\omega\epsilon_0 \left[\vec{E}_{\binom{1}{2}} \wedge \vec{\varphi}_\rho^* \right] \cdot \vec{z} r dr = j\omega\epsilon_0 \int_{\Gamma_{\binom{1}{2}}} \vec{\varphi}_\rho^* \left(\vec{z} \wedge \vec{E}_{\binom{1}{2}} \right) r dr$$

Para aliviar a notação, os indicativos das regiões, $\binom{1}{2}$, serão omitidos.

O campo elétrico em ambos os acessos será $(E = E_r\vec{r} + E_z\vec{z})$ para o modo TEM, $E_z = 0$.

Substituindo a eq.(24) em (23), tem-se:

$$I = j\omega\epsilon_0 \int_{\Gamma} [(\varphi_\rho^* \vec{a}_\theta) \cdot (E_r \vec{a}_\theta)] r dr = j\omega\epsilon_0 \int_{\Gamma} (\varphi_\rho^* E_r) r dr \quad (25)$$

Pela lei de Ampères obtém-se a eq.(25) em função de $H_\theta(r, z)$, seja:

$$\nabla \wedge \vec{H}_\theta = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \vec{E}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \wedge \vec{H}_\theta = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial z} \right) \vec{a}_r + \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \right) (r\vec{a}_\theta) + \left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \vec{z} \right]$$

Os respectivos componentes dos campos elétricos são:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z) &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \left[-\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} \vec{z} \right] \\ \vec{E}_r(r, z) &= \frac{-1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \vec{a}_r \end{aligned} \quad (26)$$

Levando a eq.(26) em (25) as integrais de linhas nos acessos (1) e (2) são expressas em função de $\frac{\partial H_\theta}{\partial z}$:

$$I_{(2)} = - \int_{\Gamma_{(2)}} \frac{1}{\epsilon_r} \left(\vec{\varphi}_\rho \cdot \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right) r dr \quad (27)$$

$$K_{(2)} = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \quad (\pm \vec{z} \wedge \vec{a}_r) = \pm \vec{a}_\theta$$

Substituindo a eq.(27) em (23), a análise da estrutura, regida pelo formalismo bidimensional, torna-se, unicamente, função de $H_\theta(r, z)$:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_\theta) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_\rho^*) \right] r dr dz - k_0^2 \iint_{\Omega} (\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \vec{H}_\theta) r dr dz + \\ \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\epsilon_{r_1}} \left(\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right) r dr - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right) r dr = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

onde :

$\Omega(r, z) \rightarrow$ indica o domínio aberto da estrutura, vide Figura 3.

$\Gamma_1 \rightarrow$ fronteira da porta de acesso $z = t_1$, cabo coaxial de dimensões (a_1, b_1) .

$\Gamma_2 \rightarrow$ fronteira da porta de acesso $z = t_2$, cabo coaxial de dimensões (a_2, b_2) .

A eq.(28), embora apropriada à análise da estrutura que este trabalho propõe a realizar, veja Figura 3 e Figura 4, ela ainda não se encontra na forma adequada à solução do problema, uma vez que não há nenhuma indicação sobre as condições que o campo magnético tem que satisfazer nas fronteiras da estrutura, condições de Dirichlet. Na falta

destas especificações, a solução recai num sistema matricial inconsistente da forma:

$$[A]\{q\} = o$$

No próximo item será encontrada a condição de fronteira que, aplicada a eq.(28), resulta num formalismo consistente. Isto é, no sistema de equações, cuja solução é facilmente obtida pelo Método de Gauss [S], ou outro semelhante:

$$[A]_{(N_G \times N_G)} \{q\}_{(N_G)} = \{B\}_{(N_G)}$$

onde :

$[A]_{(N_G \times N_G)} \rightarrow$ Matriz de Rigidez.

$\{q\}_{(N_G)} \rightarrow$ Vetor das coordenadas dos vetores de base. São as incógnitas do problema.

$\{B\}_{(N_G)} \rightarrow$ Vetor de carga. Função das condições de fronteira do problema.

2.5.3 Condição de fronteira no espaço de Hilbert enfraquecido($H_0^{(1)}(\Omega)$)

O formalismo apresentado pela eq.(28) está mal colocado, pois, expressa um sistema matricial sem consistência. Para que ele se torne um sistema “bem definido” é necessário caracterizar a condição de fronteira, a de Dirichlet, em algum de seus termos.

Os campos elétrico e magnético, modo TEM, num cabo coaxial de parâmetros (μ_0 , ϵ_1) e raios (a_1 , b_1 ; $b_1 > a_1$), veja eq.(29), capítulo-1, são:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(r, z) &= \frac{z_1}{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \frac{\vec{a}_r}{r} (H^{(+)}e^{-jk_1z} - H^{(-)}e^{+jk_1z}) \\ \vec{H}_\theta(r, z) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \frac{\vec{a}_\theta}{r} (H^{(+)}e^{-jk_1z} + H^{(-)}e^{+jk_1z}) = H_\theta^{(i)}(r, z) + H_\theta^{(s)}(r, z) \end{aligned} \quad (29)$$

Onde:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \quad \text{impedância intrínseca do meio.}$$

$$Z_1 = \frac{E_r^{(+)}(r, z)}{H_\theta^{(+)}(r, z)} = -\frac{E_r^{(-)}(r, z)}{H_\theta^{(-)}(r, z)} \quad \text{ou impedância de onda do modo TEM.}$$

Os subscritos ((+), (-)) significam componentes das ondas; diretas e reversas, respectivamente.

O objetivo deste ítem é expressar a integral de linha, na entrada da estrutura, em função do campo incidente $(H_\theta^{(i)}(r, z))$. Pois é esta componente que se relaciona com a condição de fronteira, necessária à estabilização da formulação.

O termo da eq.(28) responsável pela componente do campo incidente é:

$$I_1 = \int_{r_1} \frac{1}{\epsilon_{r_1}} \left(\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right) r dr \quad (30)$$

Pela eq.(29), $t_1 = 0$, $\vec{H}_\theta(r) = (H_\theta^{(i)}(r) + H_\theta^{(s)}(r))$. A integral de fronteira, eq.(30), é expressa pelas componentes; incidente $H_\theta^{(i)}(r, z = 0)$ e espalhada $H_\theta^{(s)}(r, z = 0)$ do campo do cabo coaxial, conectado à porta de entrada da estrutura ($z = t_1$, $t_1 = 0$, vide Figura 5).

Pela eq.(29), $t_1 \approx 0$, tem-se

$$\left. \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right|_{t_1=0} = -jk_1 (H_\theta^{(i)}(r) - H_\theta^{(s)}(r)) \quad (31)$$

A equação eq.(31) é conhecida por condição absorvente [6, 7] da formulação.

Portanto, na porta de acesso da estrutura ($z = t_1$, $t_1 = 0$) a integral de linha, eq.(30), passa a ser função do campo incidente. Substituindo a eq.(31) em (30);

$$I_1 = -\frac{jk_1}{\epsilon_{r_1}} \int_{r_1} \vec{\varphi}_\rho^* \cdot (\vec{H}_\theta^{(i)}(r) - \vec{H}_\theta^{(s)}(r)) r dr \quad (32)$$

Substituindo em eq.(32); $k_1 = k_0\sqrt{\epsilon_{r_1}}$ e a eq.(29) $H_\theta^{(s)}(r) = (H_\theta^{(i)}(r) - \vec{H}_\theta(r))$, tem-se:

$$I_1 = \int_{r_1} \frac{1}{\epsilon_{r_1}} \left(\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right) r dr = -\frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \int_{r_1} \vec{\varphi}_\rho(r) \cdot (2\vec{H}_\theta^{(i)}(r) - \vec{H}_\theta(r)) r dr \quad (33)$$

Para que a eq.(33) seja expressa em função, somente, do raio (r) da seção, em ($z = t_1$), é

necessário que se considere $\Gamma_1 = t_1 = 0$.

Na eq.(33), a componente $(H_\theta^{(i)}(r))$ é a responsável pela condição de fronteira de Dirichlet do problema.

Empregando o mesmo raciocínio na porta de saída da estrutura, acesso $z = t_2$, tem-se a seguinte condição absorvente:

$$\left. \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right|_{z=t_2} = -jk_2 H_\theta^{(t)}(r, z = t_2) \quad (34)$$

Pelo fato do cabo coaxial, conectado à porta de saída, ser semi-finito, neste acesso, só haverá a onda direta, que é a onda transmitida;

$$\vec{H}_\theta^{(t)}(r, z = t_2) = \vec{H}_\theta(r, z = t_2) \quad (35)$$

Portanto, em $z = t_2$

$$\left. \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right|_{z=t_2} = -jk_2 \vec{H}_\theta(r, z = t_2) \quad (36)$$

Substituindo a eq.(36) em (28), tem-se o termo de fronteira na saída da estrutura, expresso corretamente:

$$\int_{r_2} \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \frac{\partial \vec{H}_\theta}{\partial z} \right) r dr = -\frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \int_{r_2} \frac{1}{\epsilon_{r_2}} \left(\vec{\varphi}_\rho^* \cdot \vec{H}_\theta \right) r dr \quad (37)$$

Levando as eqs.(33) e (37) em (28) obtem-se a formulação, expressa de forma consistente, ou seja

$$\rho = 1, 2, 3 \dots N_G$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\nabla \wedge \vec{H}_{\theta} \right) \cdot \left(\nabla \wedge \vec{\varphi}_{\rho}^* \right) \right] r dr dz - k_0^2 \iint_{\Omega} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta} \right) r dr dz \\
+ \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \int_{a_1(r_1)}^{b_1} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta} \right) r dr + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r_2}}} \int_{a_2(r_2)}^{b_2} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta} \right) r dr \\
= \frac{j2k_0}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}} \int_{a_1(r_1)}^{b_1} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta}^{(i)} \right) r dr \quad (38)
\end{aligned}$$

Na formulação apresentada pela eq.(38) houve a imposição de que nas portas de entrada e de saída da estrutura só existisse o modo TEM, portanto estas portas devem ser fixadas ($z = t_1$ e $z = t_2$) suficientemente afastadas da região da descontinuidade, região II, veja Figura 6, para que os modos evanescentes $TM_{(0,m)}$ não as alcancem.

Finalmente, para resolver a eq.(38) é necessário estabelecer as condições de Dirichlet que definem os valores do campo incidente $\left(H_{\theta}^{(i)}(r) \right)$ na porta de entrada da estrutura, $z = t_1$. Esta condição é aleatória. Pois, como os resultados procurados, que são : $|S_{11}|^2$ – Coeficiente de reflexão de potência na porta de entrada e $|S_{21}|^2$ – Coeficiente de transmissão de potência na porta de saída, são definidos por relações entre a potência refletida e a transmitida, referenciada à potência incidente, a condição pode ser escolhida aleatoriamente que os resultados não serão alterados dos esperados.

Para simplificar, a condição de fronteira, neste trabalho, será condicionada à injeção de potência unitária na estrutura.

Neste item será calculado o valor do campo magnético incidente $(H_{\theta}^{(i)}(r, z = t_1))$, termo do vetor de carga da eq.(38), sob a condição de que a potência injetada na estrutura seja unitária.

Pela eq.(39), tem-se os campos incidentes na porta de entrada da estrutura, veja eq.(29) capítulo-1, que é a onda direta no cabo coaxial na porta de acesso ($z = t_1$). Figura 3 e Figura 1.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r^{(+)}(r, z = t_1) &= \frac{z_1}{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \frac{H_0^{(+)}}{r} e^{-jk_1 t_1} \vec{a}_r \\
\vec{H}_{\theta}^{(i)}(r, z = t_1) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \frac{H_0^{(+)}}{r} e^{-jk_1 t_1} \vec{a}_{\theta}
\end{aligned} \quad (39)$$

onde $Z_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}$.

Cálculo da potência, incidente na porta de entrada

$$P^{(+)} = \text{Real} \left[\frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a_1}^{b_1} \left(\vec{E}_r^{(+)}(r) \wedge \vec{H}_\theta^{(i)*}(r) \right) \cdot \vec{Z} r d\theta dr \right]$$

Portanto:

$$P^{(+)} = \frac{Z_1}{2} 2\pi \int_{r=a_1}^{b_1} \left| \vec{H}_\theta^{(i)}(r) \right|^2 r dr \quad (40)$$

Substituindo a eq.(39) em (40):

$$P^{(+)} = \frac{Z_1 \pi}{\ln^2 \left(\frac{b_1}{a_1} \right)} \left| H_0^{(+)} \right|^2 \int_{r=a_1}^{b_1} \frac{r dr}{r^2}$$

Tem-se:

$$P^{(+)} = \frac{\pi Z_1}{\ln \left(\frac{b_1}{a_1} \right)} \left| H_0^{(+)} \right|^2 \quad (41)$$

A condição imposta é a de potência unitária injetada na estrutura:

$$P^{(+)} = 1 \text{ w}$$

Levando em conta, esta condição, na eq.(41), obtém-se o módulo do campo incidente:

$$\left| H_0^{(+)} \right| = \sqrt{\frac{\ln \left(\frac{b_1}{a_1} \right)}{\pi Z_1}} \quad (42)$$

A eq.(42) fornece, apenas, o módulo da amplitude complexa da onda incidente, que não é suficiente para se conhecer a onda que incide na porta de entrada da estrutura:

$$H_0^{(+)} = \left| H_0^{(+)} \right| e^{j\Psi^+} \quad (43a)$$

Sem perda de generalidade, considera-se que a onda direta do cabo coaxial tenha a fase adaptada à porta de acesso,

$$\Psi = 0 \quad \text{em } (z = t_1)$$

Pela eq.(43a):

$$H_0^+ = |H_0^+| \quad (43b)$$

Substituindo a eq.(42) em (43b) obtem-se a amplitude da onda incidente:

$$H_0^+ = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}{\pi Z_1}} \quad (44)$$

A onda magnética incidente, na porta de entrada da estrutura, $z = t_1$, sob a condição da potência injetada ser unitária, é encontrada substituindo a eq.(44) em (39).

$$\vec{H}_\theta^{(i)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi Z_1 \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} \frac{e^{-jK_1 t_1}}{r} \vec{a}_\theta \quad (45a)$$

onde:

$$Z_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \quad k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}$$

Chamando $H_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi Z_1 \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{120 \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}}$, a eq.(45a) se resume em:

$$\vec{H}_\theta^{(i)}(r) = H_0 \frac{e^{-jK_1 t_1}}{r} \vec{a}_\theta \quad (45b)$$

A eq.(45a) passa a ser a condição de Dirichlet não homogênea, imposta sobre a fronteira $r_1(a_1, b_1)$, da estrutura analisada.

O vetor de carga, lado direito da eq.(38) é, portanto, prontamente calculado, vide Figura 6, ao substituir $(H_\theta^{(i)}(r, t_1 = 0))$, veja eq.(45a), na eq.(38).

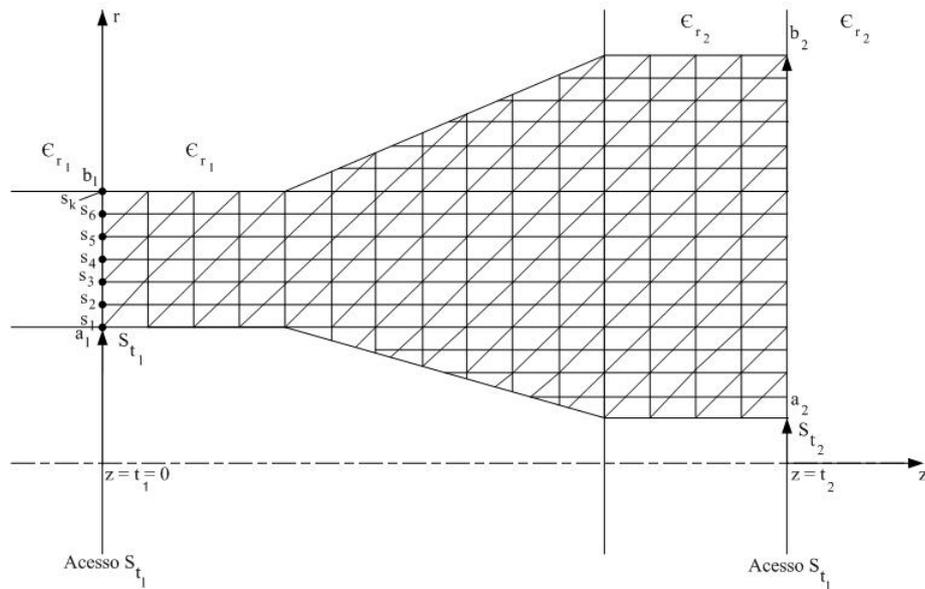


Figura 6 Vêm-se os nós referentes à porta de entrada da estrutura, subsídios para o cálculo do vetor de carga (B_{ns}).

2.5.4 Análise do Termo $T = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \wedge \vec{H}_{\theta}) \cdot (\nabla \wedge \vec{\varphi}_{\rho}^*) \right] r dr dz$

O termo (T) da eq.(38), se refere ao operador rotacional, que será examinado neste item, carece de uma análise meticulosa. Pois, em coordenadas cilíndricas, ele encerra uma parcela, cuja singularidade compromete a aplicação do método dos elementos finitos.

Pela eq.(9):

$$\vec{\varphi}_i(r, z) = N_i(r, z) \vec{a}_{\theta} \quad i = 1, 2 \dots N_G \quad (46)$$

$$\vec{H}_{\theta}(r, z) = \sum_{i=1}^{N_G} (q_i N_i(r, z)) \vec{a}_{\theta} \quad H_{\theta_i}(r, z) = q_i N_i(r, z)$$

Os operadores rotacionais, em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \wedge \vec{H}_{\theta} = -\frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{\theta})}{\partial r} \vec{a}_z$$

$$\nabla \wedge \vec{\varphi}_{\rho}^* = -\frac{\partial \vec{\varphi}_{\rho}^*}{\partial z} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \vec{\varphi}_{\rho}^*)}{\partial r} \vec{a}_z$$

Para aliviar a escritura será omitida a sinalização de conjugação (*) das funções de ponderação ($\vec{\varphi}_{\rho}^*$).

O integrando de termo (T) se escreve:

$$T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[\left(-\frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_{\theta})}{\partial r} \vec{a}_z \right) \cdot \left(-\frac{\partial \vec{\varphi}_{\rho}^*}{\partial z} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\vec{\varphi}_{\rho}^*)}{\partial r} \vec{a}_z \right) \right] r dr dz$$

Fazendo o produto escalar

$$T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[\left(\frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(rH_{\theta})}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r\varphi_{\rho})}{\partial z} \right) \right] r dr dz$$

Onde

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(rH_{\theta})}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r\varphi_{\rho})}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(H_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \varphi_{\rho} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} H_{\theta} \varphi_{\rho}$$

Portanto

$$T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[\left(\frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(H_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \varphi_{\rho} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} H_{\theta} \varphi_{\rho} \right] r dr dz$$

O termo será:

$$T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[r \left(\frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial z} \right) + \left(H_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \varphi_{\rho} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} H_{\theta} \varphi_{\rho} \right] dr dz \quad (47)$$

onde $\Omega(r, z)$ é o domínio aberto da seção bidimensional da estrutura, vide Figura 3.

Na prática do método dos elementos finitos, em problemas de valores de fronteira, expande-se, localmente, a função procurada, eq.(9), em cada elemento triangular, por meio de polinômios conhecidos por polinômios de interpolação de Lagrange. Entretanto, esta aproximação falha ao ser aplicada à eq.(47), devido à presença, no integrando, da parcela $(\frac{1}{r})$. A integral não é expressa em termos universais, válidos para qualquer elemento triangular. Assim, uma alternativa seria lançar mão de integração numérica por meio de alguma quadratura, que mesmo não incluindo o eixo de simetria, para garantir exatidão da integração, pode, algumas vezes, necessitar de valores perto deste. Felizmente, a dificuldade é contornada pela seguinte estratégia [8]:

- Faz-se uma mudança de variável nas funções concernentes ao problema.

Considere na eq.(47) as funções $(H'_\theta, \varphi'_\rho)$ no lugar de (H_θ, φ_ρ) , A estratégia consiste em substituir, na eq.(47)

$$\begin{aligned} H_{\theta_i} &= \sqrt{r} H'_{\theta_i} & i &= 1, 2 \cdots N_G \\ \varphi_\rho &= \sqrt{r} \varphi'_\rho & \rho &= 1, 2 \cdots N_G \end{aligned} \quad (48)$$

O estratagema, referente à eq.(48), equivale à redefinição de um novo produto interno no espaço de Hilbert $(H_0^{(1)}(\Omega))$, com função de peso $W(r) = r$ [9]:

$$\langle u, v \rangle = \iint_{\Omega} r u v d\Omega.$$

A dificuldade na integração da eq.(47) é, portanto, contornada pela estratégia resumida na eq.(48), com o seguinte procedimento:

Substitui-se a eq.(48) na (47):

$$\begin{aligned} T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[r \left(\frac{\partial(\sqrt{r}H'_\theta)}{\partial r} \frac{\partial(\sqrt{r}\varphi'_\rho)}{\partial r} + r \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \frac{\partial \varphi'_\rho}{\partial z} \right) + \sqrt{r} \left(H_\theta \frac{\partial(\sqrt{r}\varphi'_\rho)}{\partial r} + \varphi'_\rho \frac{\partial(\sqrt{r}H_\theta)}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + H'_\theta \varphi'_\rho \right] dr dz \end{aligned} \quad (49)$$

Para abreviar a notação as funções $(H'_\theta, \varphi'_\rho)$ serão redigidas por (H_θ, φ_ρ) , lado esquerdo da eq.(50).

Onde:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sqrt{r}H'_\theta)}{\partial r} = \left(\frac{H_\theta}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial(\sqrt{r}\varphi'_\rho)}{\partial r} = \left(\frac{\varphi_\rho}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (50)$$

Substituindo a eq.(50) nos respectivos termos da eq.(49):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial(\sqrt{r}H_\theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial(\sqrt{r}\varphi_\rho)}{\partial r} \right) = r \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\varphi_\rho \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + H_\theta \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} \right) + \frac{1}{4r} H_\theta \varphi_\rho \\ \left(H_\theta \frac{\partial(\sqrt{r}\varphi_\rho)}{\partial r} + \varphi_\rho \frac{\partial(\sqrt{r}H_\theta)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} \varphi_\rho H_\theta + \sqrt{r} \left(\varphi_\rho \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + H_\theta \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (51)$$

Observe que $\vec{H}_\theta = (H_\theta^{(i)} + H_\theta^{(s)})$, veja eq.(29).

Levando as eqs.(51) em (49), tem-se

$$T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left\{ r^2 \left(\frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial z} \right) + \left[\varphi_{\rho} \frac{H_{\theta}}{4} + \frac{3r}{2} \left(\varphi_{\rho} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} + H_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} \right) + H_{\theta} \varphi_{\rho} \right] + H_{\theta} \varphi_{\rho} \right\} dr dz$$

Reconhecendo $\left(\frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \frac{\partial H_{\theta}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial z} \right) = \nabla H_{\theta} \cdot \nabla \varphi_{\rho}$, obtém-se

$$T = \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[r^2 (\nabla H_{\theta} \cdot \nabla \varphi_{\rho}) + \frac{3r}{2} \left(H_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \varphi_{\rho} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{9}{4} H_{\theta} \varphi_{\rho} \right] dr dz \quad (52)$$

Não há na eq.(52) qualquer termo em que o denominador seja função das coordenadas espaciais.

A formulação se fundamenta, agora, na seguinte expressão. Substituindo a eq.(52) na eq.(38):

$$\rho = 1, 2, 3 \cdots N_G \quad (\text{Linhas de formulação matricial})$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} \left[r^2 (\nabla H_{\theta} \cdot \nabla \varphi_{\rho}) + \frac{3r}{2} \left(H_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\rho}}{\partial r} + \varphi_{\rho} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{9}{4} H_{\theta} \varphi_{\rho} \right] dr dz \\ & - k_0^2 \iint_{\Omega} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta} \right) r^2 dr dz + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{r_1(a_1, b_1)} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta} \right) r^2 dr + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \int_{r_2(a_2, b_2)} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta} \right) r^2 dr \\ & = \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{r_1(a_1, b_1)} \sqrt{r} \left(\vec{\varphi}_{\rho}^* \cdot \vec{H}_{\theta}^{(i)} \right) r dr \end{aligned} \quad (53)$$

Na eq.(53), os vetores $\left(\vec{\varphi}_{\rho}, \vec{H}_{\theta} \right)$ se referem aos vetores no espaço mapeado $\left(\vec{H}'_{\theta}, \vec{\varphi}'_{\rho} \right)$, vide eq.(48).

Pela condição de potência injetada na estrutura ser unitária, $\left(\vec{H}_{\theta}^{(i)} \right)$ na eq.(53) será:

$$H_{\theta}^{(i)}(r, z = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi Z_1 \ln \left(\frac{b_1}{a_1} \right)}} \frac{\vec{a}_{\theta}}{r}$$

A eq.(53) é reescrita na notação dos elementos finitos:

Função de ponderação: $\vec{\varphi}_{\rho}^* = N_{\rho}(r, z) \vec{a}_{\theta}$, ($\rho = 1, 2 \cdots N_G$) indicativo da $\rho^{\text{ésima}}$ linha da matriz relacionada à solução discretizada do problema.

$$\text{Função tentativa } \vec{H}_{\theta}(r, z) = \sum_{i=1}^{N_G} q_i \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) = \sum_{i=1}^{N_G} (q_i \cdot N_i(r, z)) \vec{a}_{\theta}$$

i : se refere a $i^{\text{ésima}}$ coluna da matriz.

q_i : coordenada da $i^{\text{ésimo}}$ função de base ($N_i(r, z)$) em que se expandiu a função tentativa. São os parâmetros investigados, os que solucionam a análise.

$$\rho = 1, 2, 3 \dots N_G$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_G} q_i \cdot \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\epsilon_r} \left[r^2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_\rho}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_\rho}{\partial z} \right) + \frac{3r}{2} \left(N_i \frac{\partial N_\rho}{\partial r} + N_\rho \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) + \frac{9}{4} N_i N_\rho \right] - \right. \\ & k_0^2 r^2 (N_i N_\rho) \left. \right\} dr dz + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{r_1(a_1, b_1)} r^2 (N_i N_\rho) dr + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \int_{r_2(a_2, b_2)} r^2 (N_i N_\rho) dr = \quad (54) \\ & \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{r_1(a_1, b_1)} \sqrt{r} \left(N_\rho H_\theta^{(i)}(r) \right) r dr \end{aligned}$$

O formalismo usado neste trabalho, para se analisar a descontinuidade com corrugações entre cabo coaxiais, é:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_\theta(r, z) = \sum_{\rho=1}^{N_G} q_\rho N_\rho(r, z) & : \quad n = (1, 2 \dots N_G) - \text{colunas da matriz resultante} \\ \varphi_\rho(r, z) = N_\rho(r, z) & : \quad \rho = (1, 2 \dots N_G) - \text{linhas da matriz resultante} \\ N_m(r, z) \rightarrow m = (\rho \text{ ou } n) & : \quad \text{Funções de Forma referente ao } m^{\text{ésimo}} \text{ nó de} \\ & \text{interpolação dos elementos finitos.} \\ \Omega & : \quad \text{domínio } (r, z) \text{ da estrutura analisada.} \end{array} \right.$$

A solução é função de “ K_0 ”. Para cada valor deste parâmetro calculam-se as coordenadas ($\{q_x\}, \{q_y\}$), que são as incógnitas procuradas.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_G} q_n \cdot \int_r \int_{z(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\epsilon_r} \left[r^2 \left(\frac{\partial N_\rho}{\partial r} \frac{\partial N_n}{\partial r} + \frac{\partial N_\rho}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) + \frac{3r}{2} \left(N_\rho \frac{\partial N_n}{\partial r} + N_n \frac{\partial N_\rho}{\partial r} \right) + \frac{9}{4} N_\rho N_n \right] - \right. \\ & k_0^2 r^2 (N_\rho N_n) \left. \right\} dr dz + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} q_n \cdot \int_{r=a_1}^{b_1} r^2 (N_\rho N_n) dr + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} q_n \int_{r=a_2}^{b_2} r^2 (N_\rho N_n) dr = \\ & \frac{2k_0 j}{\sqrt{\pi Z_1 \epsilon_{r1} \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} \int_{r=a_1}^{b_1} \sqrt{r} N_\rho(r) dr \quad (55) \end{aligned}$$

Na eq.(55), a porta de entrada da estrutura foi considerada a origem do eixo longitudinal $z=t_1=0$, onde: $Z_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$

3 ELEMENTOS FINITOS ESPECIAIS

3.1 Introdução

A análise de estruturas constituídas por; cabo coaxial → descontinuidade → cabo coaxial, proposta, neste trabalho, é formulada pela eq.(55).

Este sistema de equações foi solucionado pelo MEF, discretizado pelos elementos triangulares retilíneos, definidos (vide Figura 3, capítulo-2); pelas funções de Lagrange lineares referentes à transformada geométrica, e pelas de Lagrange quadráticas relacionadas à interpolação do campo magnético, incógnita do problema, veja eq.(46).

Neste capítulo, serão estudadas as funções de Lagrange nos elementos triangulares retilíneos, com as seguintes observações:

- As funções de interpolação linear, conhecidas por funções de área (L_1, L_2, L_3) tem por base um polinômio completo de ordem-1. As de ordem superior, $n \geq 2$, conhecidas por função de forma [$N_1(L_1, L_2, L_3), N_2(L_1, L_2, L_3) \dots N_d(L_1, L_2, L_3)$] são obtidas por homotetias no espaço das funções de área [8]. A vantagem de se expressar as funções de Lagrange de ordem superior pelas funções de área é a facilidade de se efetuar as integrais nos respectivos triângulos, vide apêndice-A:

$$\iint_{S_{\Delta}} L_1^a L_2^b L_3^c dS_{\Delta} = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} (S_{\Delta})$$

onde:

- S_{Δ} - área do triângulo.

$$d = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left\{ \begin{array}{l} n - \text{ordem de interpolações.} \\ d - \text{número de nós dos triângulos relacionados ao poli-} \\ \text{nômio completo de grau-n.} \end{array} \right.$$

- Todos os desenvolvimentos serão efetuados no espaço de coordenadas (x, y), visando compatibilidade com a nomenclatura dos desenvolvimentos clássicos.

Neste trabalho o sistema de coordenadas (x, y) é consistente com o (z, r), vide

As funções de interpolação gozam da propriedade seguinte:

$$L_j(x_\rho, y_\rho) = \begin{cases} 1 & \rho = j \\ 0 & \rho \neq j \end{cases} \quad L_j(\xi_\rho, \eta_\rho) = \begin{cases} 1 & \rho = j & j = (1, 2, 3 \dots N_G) \text{ são os nós de} \\ & & \text{interpolação no triângulo, neste} \\ 0 & \rho \neq j & \text{caso } N_G = 3. \end{cases}$$

Sejam os dois espaços de coordenadas

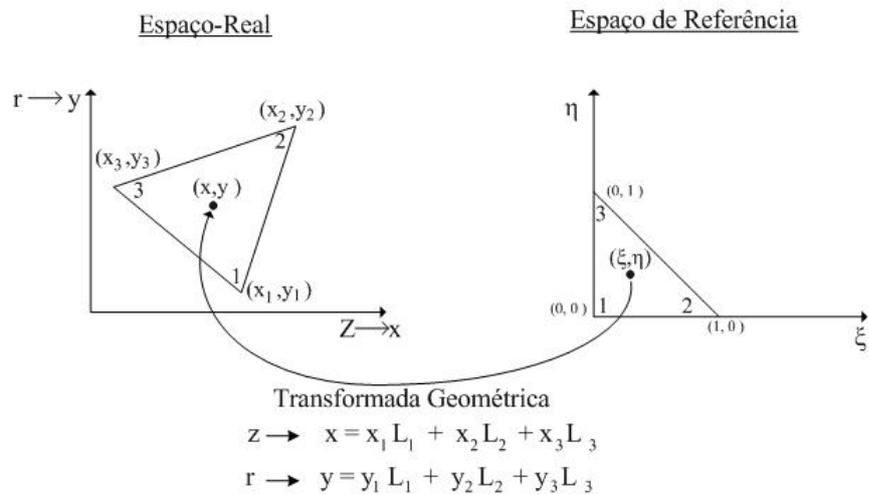


Figura 8 A transformada geométrica, que relaciona o elemento de referência aos elementos globais.

Igualam-se, nos dois espaços as funções nodais e as gerais, em cada nó de interpolação.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\{q_j\} = [A]\{a_j\}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\{q_j\} = [A_R]\{a_j\}$$

$[A]$ - Matriz-nodal no espaço de coordenadas reais.

$[A_R]$ - Matriz-nodal no espaço de coordenadas de referência.

Os parâmetros gerais são expressos em função dos nodais

$$\{a_j\} = [A]^{-1}\{q_j\} \qquad \{a_j\} = [A_R]^{-1}\{q_j\}$$

onde:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2S_\Delta} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

Denominando:

$$\begin{aligned} (x_{(j+1)}y_{(j+2)} - x_{(j+2)}y_{(j+1)}) &= a_j \\ (y_{(j+1)} - y_{(j+2)}) &= b_j \\ -(x_{(j+1)} - x_{(j+2)}) &= c_j \end{aligned} \tag{1}$$

Tem-se o inverso da Matriz-Nodal

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2S_\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad [A_R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{vide eq.(1)})$$

A função de interpolação-nodal é obtida pela função de interpolação-geral:

$$P(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \{a\} \qquad P(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \{a\}$$

Logo

$$P(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} [[A]^{-1}\{q\}] \qquad P(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} [[A_R]^{-1}\{q\}]$$

Substituindo as respectivas inversas da matriz-nodal

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_1x + c_1y) q_1 + (a_2 + b_2x + c_2y) q_2 + (a_3 + b_3x + c_3y) q_3] \\ P'(x, y) &= \langle L_1 \ L_2 \ L_3 \rangle \{q\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta)q_1 + \xi q_2 + \eta q_3 \\ P(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta)q_1 + \xi q_2 + \eta q_3 \\ P'(\xi, \eta) &= \langle L_1 \ L_2 \ L_3 \rangle \{q\} \end{aligned}$$

Igualando $P(x, y) = P'(x, y)$ e $P(\xi, \eta) = P'(\xi, \eta)$ tem-se as respectivas funções de área em ambos os espaços:

Elemento-real	Elemento de referência	
$L_1(x, y) = \frac{1}{2S_\Delta} (a_1x + b_1x + c_1y)$	$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$	(2)
$L_2(x, y) = \frac{1}{2S_\Delta} (a_2x + b_2x + c_2y)$	$L_2(\xi, \eta) = \xi$	
$L_3(x, y) = \frac{1}{2S_\Delta} (a_3x + b_3x + c_3y)$	$L_3(\xi, \eta) = \eta$	

onde (a_j, b_j, c_j) são dados na eq.(1).

$S_\Delta \rightarrow$ área do triângulo

$$2S_\Delta = (y_2 - y_3)x_1 + (y_3 - y_1)x_2 + (y_1 - y_2)x_3 \quad (3)$$

Neste trabalho, as coordenadas do espaço (x, y, z) se identificam às coordenadas do espaço (z, r, θ) por:

$$x \rightarrow z$$

$$y \rightarrow r$$

$$z \rightarrow \theta$$

3.3 Funções de Interpolações Completas de Ordem $n \geq 2$

A técnica para se obter as funções de interpolações de Lagrange de ordem $n \geq 2$, em função das de área (L_1, L_2, L_3) , se baseia numa homotetia, no espaço das funções de área, relacionada à ordem hierárquica da interpolação de Lagrange [8].

Seja o número de ordem $n \geq 2$.

O número de nós de interpolação referente ao polinômio completo de grau- n :

$$d = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{nós de interpolação} \quad (4)$$

No espaço das funções de área esta interpolação é caracterizada pelas coordenadas (p, q, k) de cada um dos “ n ” nós, relativos aos respectivos nós de interpolação. As

coordenadas (p, q, k) tem a seguinte propriedade

$$p + q + k = n \quad (5)$$

Por exemplo, a interpolação de ordem-2 é representada pela seguinte homotetia, no espaço das funções de área.

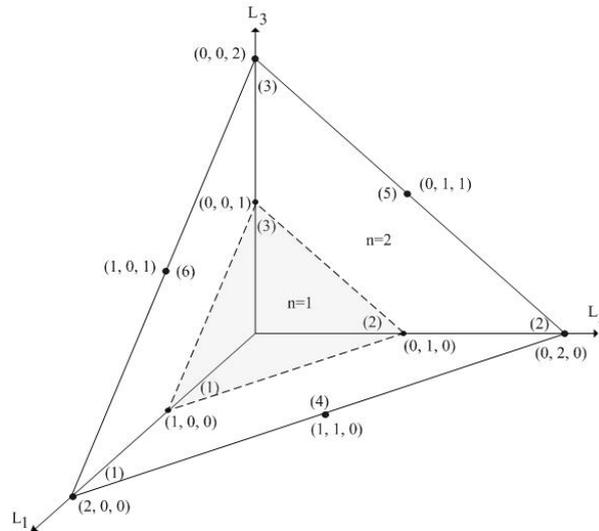


Figura 9 Homotetia da função de interpolação, $n = 2$, no espaço das funções de área (L_1, L_2, L_3) .

As funções de forma, isto é, as funções de Lagrange de ordem superior, $n \geq 2$, são obtidas pelos produtos decrescentes de $(n L_j)$ em cada nó (p, q, k) do triângulo homotético de ordem- n . Definidas por

$$N^n_{(p,q,k)} = (nL_1)^p (nL_2)^q (nL_3)^k \quad (6a)$$

onde:

$$(nL_j)^l = \frac{1}{l!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j - l)!} = \frac{1}{l!} \prod_{r=0}^{l-1} (nL_j - r) \quad (6b)$$

$j = (1, 2, 3) \rightarrow$ Relacionam-se às funções de área (L_j) .

l é uma das coordenadas (p, q, r) , veja Figura 9, para a interpolação quadrática. Entenda:

$$l = p \quad \rightarrow \quad L_1$$

$$l = q \quad \rightarrow \quad L_2$$

$$l = k \quad \rightarrow \quad L_3$$

A soma das funções de forma tem a seguinte propriedade

$$\sum_{n=1}^d N^n = 1$$

3.4 Funções de Interpolação de Lagrange Quadrática Completa

Para as funções quadráticas, completas, pois, podem-se criar interpolações de Lagrange com polinômios incompletos (interpolações-especiais), há necessidade de 6 nós de interpolação, vide eq.(4).

Os triângulos são representados com $d = 6$ nós internos:

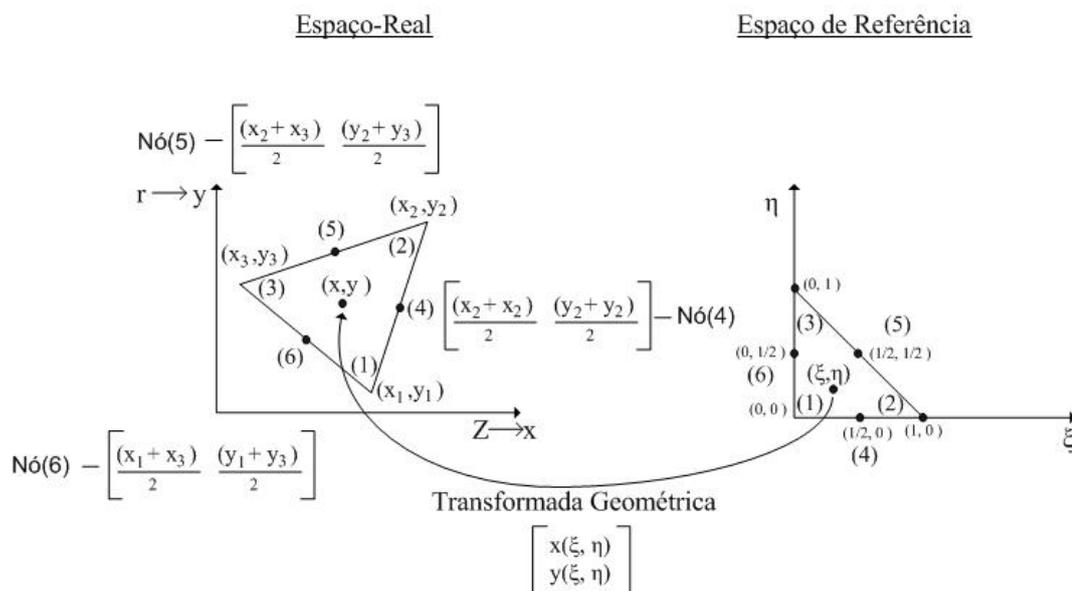


Figura 10 Representação do triângulo com os respectivos nós de interpolação quadrática completa em ambos os espaços.

A representação deste triângulo no espaço real e de referência é mostrada na Figura 10.

Na Figura 9 vê-se o triângulo, de interpolação quadrática, no espaço das funções de área, assim como, as coordenadas de área dos respectivos nós de interpolação.

Com auxílio das eqs. (6a) e (6b), relacionadas à técnica da homotetia, obtém-se as funções de forma da interpolação apresentadas na Tabela 2 e Tabela 3.

Tabela 2 Representação dos nós no espaço real, de referência e das funções de forma.

Espaço	Real	Espaços das Funções de área	Homotetia (Funções de Forma)
	Referência		
(1)	(x_1, y_1)	$(2, 0, 0)$	$N_1 = \frac{(2L_1)^2}{2!} \frac{(2L_2)^0}{0!} \frac{(2L_3)^0}{0!} = L_1(2L_1 - 1)$
	$(0, 0)$		
(2)	(x_2, y_2)	$(0, 2, 0)$	$N_2 = \frac{(2L_1)^0}{0!} \frac{(2L_2)^2}{2!} \frac{(2L_3)^0}{0!} = L_2(2L_2 - 1)$
	$(1, 0)$		
(3)	(x_3, y_3)	$(0, 0, 2)$	$N_3 = \frac{(2L_1)^2}{2!} \frac{(2L_2)^0}{0!} \frac{(2L_3)^0}{0!} = L_3(2L_3 - 1)$
	$(0, 1)$		
(4)	$\left[\frac{(x_1+x_2)}{2}\right], \left[\frac{(y_1+y_2)}{2}\right]$	$(1, 1, 0)$	$N_4 = \frac{(2L_1)^1}{1!} \frac{(2L_2)^1}{1!} \frac{(2L_3)^0}{0!} = \frac{(2L_1)(2L_2)}{1 \cdot 1} = 4L_1L_2$
	$(1/2, 0)$		
(5)	$\left[\frac{(x_2+x_3)}{2}\right], \left[\frac{(y_2+y_3)}{2}\right]$	$(0, 1, 1)$	$N_5 = \frac{(2L_1)^0}{0!} \frac{(2L_2)^1}{1!} \frac{(2L_3)^0}{0!} = \frac{1}{2!} \frac{(2L_2)(2L_3)}{1 \cdot 1} = 4L_2L_3$
	$(1/2, 1/2)$		
(6)	$\left[\frac{(x_1+x_2)}{2}\right], \left[\frac{(y_1+y_2)}{2}\right]$	$(1, 0, 1)$	$N_6 = \frac{(2L_1)^1}{1!} \frac{(2L_2)^0}{0!} \frac{(2L_3)^0}{0!} = \frac{(2L_1)(2L_3)}{1 \cdot 1} = 4L_1L_3$
	$(0, 1/2)$		

Tabela 3 Interpolação quadrática no espaço homotético e no de referência.

(L_1, L_2, L_3)	(ξ, η)
$N_1(L_1, L_2, L_3) = L_1(2L_1 - 1)$	$N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)[1 - 2(\xi + \eta)]$ $N_2(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$ $N_3(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$
$N_2(L_1, L_2, L_3) = L_2(2L_2 - 1)$	
$N_3(L_1, L_2, L_3) = L_3(2L_3 - 1)$	
$N_4(L_1, L_2, L_3) = 4L_1L_2$	$N_4(\xi, \eta) = 4(1 - \xi - \eta)\xi$ $N_5(\xi, \eta) = 4(\xi\eta)$ $N_6(\xi, \eta) = 4(1 - \xi - \eta)\eta$
$N_5(L_1, L_2, L_3) = 4L_2L_3$	
$N_6(L_1, L_2, L_3) = 4L_1L_3$	

As funções de área no elemento real e de referência, que compõem as respectivas funções de forma, são apresentadas pela eq.(2).

3.5 Funções de Interpolação de Lagrange Cúbica Completa

Embora a eq.(55) seja solucionada pelas funções de interpolação quadrática de Lagrange, neste ítem serão apresentadas as funções cúbicas, para que nenhuma dúvida

persista na aplicação da técnica da Homotetia, ao se calcular as funções hierárquicas de Lagrange.

Para se interpolar funções cúbicas completas em elementos triangulares há necessidade de se alocar 10 nós de interpolação de acordo com a solução:

$$n = 3 \quad d = \frac{(n-1)(n+2)}{2} = 10 \text{ nós de interpolação}$$

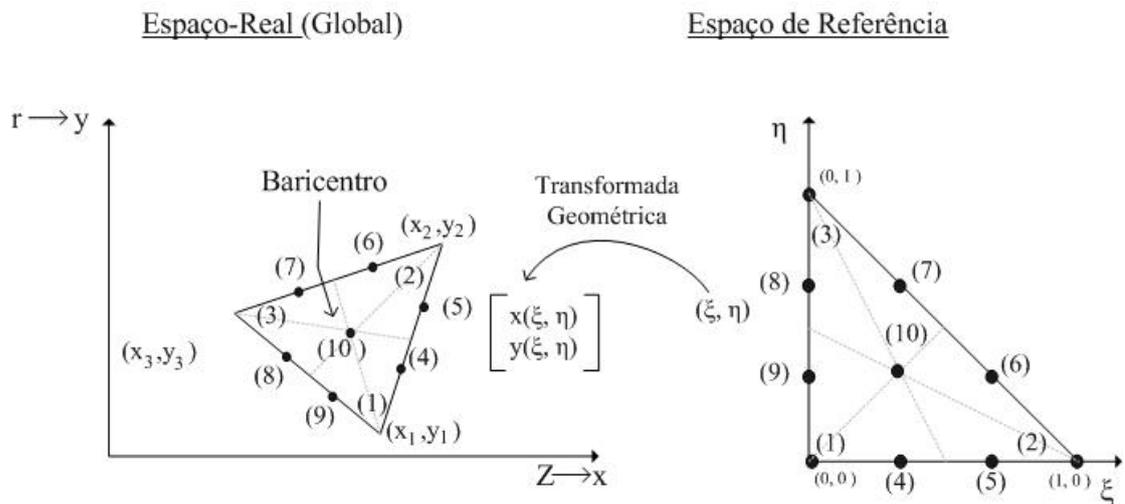


Figura 11 Representação do triângulo com os respectivos nós de interpolação cúbica completa em ambos os espaços.

No espaço das funções de área, a Figura 12 representa o triângulo homotético de ordem-3, no qual o baricentro é o vértice-10 $[(1, 1, 1)]$.

As coordenadas dos respectivos nós da interpolação cúbica são mostradas na Tabela 4.

Com o mesmo raciocínio efetuado no item anterior, para as funções quadráticas, obtém-se, com auxílio das eqs.(6a) e (6b), as funções de forma de interpolação cúbica vistas na Tabela 5 e Tabela 6.

Tabela 4 Coordenadas da interpolação cúbica no espaço global e de referência.

(G \rightarrow Global)	(R \rightarrow Referência)
(1) _G \rightarrow (x ₁ , y ₁)	(1) _R \rightarrow (0, 0)
(2) _G \rightarrow (x ₂ , y ₂)	(2) _R \rightarrow (1, 0)
(3) _G \rightarrow (x ₃ , y ₃)	(3) _R \rightarrow (0, 1)
(4) _G \rightarrow $\left[\frac{(x_2+x_1)}{3}, \frac{(y_2+y_1)}{3} \right]$	(4) _R \rightarrow $\left(\frac{1}{3}, 0 \right)$
(7) _G \rightarrow $\left[\frac{(x_3+x_2)}{3}, \frac{(y_3+y_2)}{3} \right]$	(7) _R \rightarrow $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$
(8) _G \rightarrow $\left[\frac{(x_3+x_1)}{3}, \frac{(y_3+y_1)}{3} \right]$	(8) _R \rightarrow $\left(0, \frac{2}{3} \right)$
(5) _G \rightarrow $\left[\frac{2(x_2+x_1)}{3}, \frac{2(y_2+y_1)}{3} \right]$	(5) _R \rightarrow $\left(\frac{2}{3}, 0 \right)$
(6) _G \rightarrow $\left[\frac{2(x_3+x_2)}{3}, \frac{2(y_3+y_2)}{3} \right]$	(6) _R \rightarrow $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$
(9) _G \rightarrow $\left[\frac{2(x_3+x_1)}{3}, \frac{2(y_3+y_1)}{3} \right]$	(9) _R \rightarrow $\left(0, \frac{1}{3} \right)$
(10) _G \rightarrow $\left[\frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(y_1+x_2+y_3)}{3} \right]$	(10) _R \rightarrow $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$

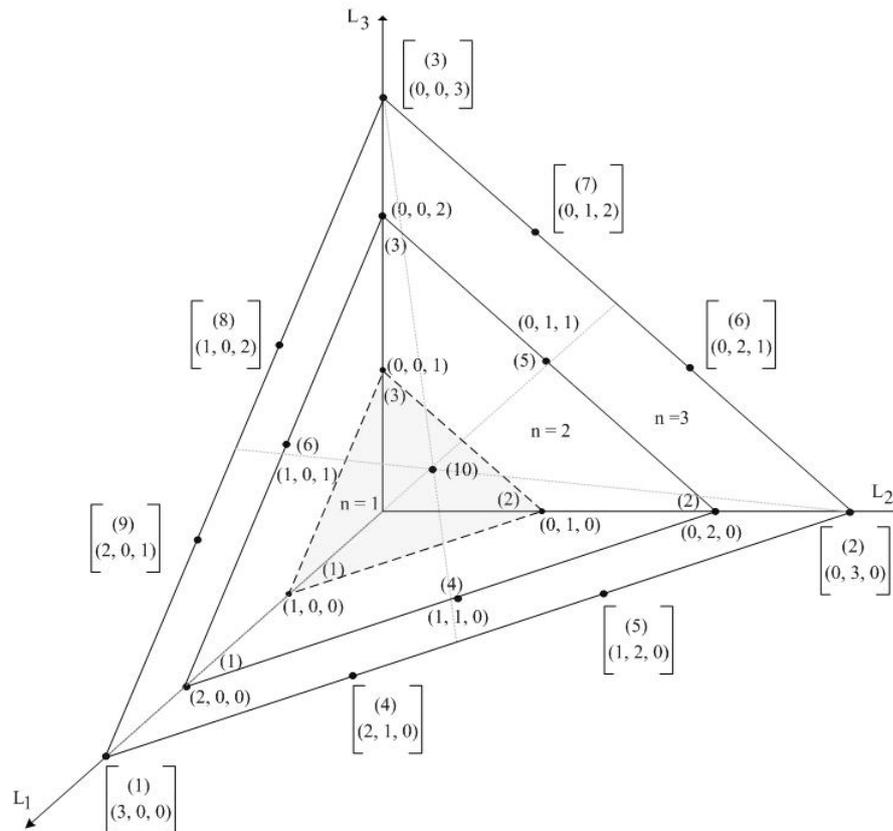


Figura 12 Representação do triângulo homotético de ordem-3 com os respectivos nós de interpolação cúbica completa em ambos os espaços.

Tabela 5 Representação dos nós nos espaço real, de referência e das funções de forma.

Espaço	Real Referência	Espaços das Funções de área	Homotetia (Funções de Forma)
(1)	(1) _G (1) _R	(3, 0, 0)	$N_1 = \frac{(3L_1)^3}{3!} \frac{(3L_2)^0}{0!} \frac{(3L_3)^0}{0!}$ $N_1 = \frac{1}{3}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$ $N_1 = \frac{1}{2}(L_1)(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$
(2)	(2) _G (2) _R	(0, 3, 0)	$N_2 = \frac{(3L_1)^0}{0!} \frac{(3L_2)^3}{3!} \frac{(3L_3)^0}{0!} =$ $\frac{1}{3!} 3L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$ $N_2 = \frac{(1)}{2} L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$
(3)	(3) _G (3) _R	(0, 0, 3)	$N_3 = \frac{(3L_1)^0}{0!} \frac{(3L_2)^0}{0!} \frac{(3L_3)^3}{3!} =$ $\frac{1}{3!} 3L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$ $N_3 = \frac{(1)}{2} L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2)$
(4)	(4) _G (4) _R	(2, 1, 0)	$N_4 = \frac{(3L_1)^2}{2!} \frac{(3L_2)^1}{1!} \frac{(3L_3)^0}{0!} =$ $\left[\frac{3L_1(3L_1-1)}{2} \right] [3L_2]$ $N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1)$
(5)	(5) _G (5) _R	(1, 2, 0)	$N_5 = \frac{(3L_1)^1}{1!} \frac{(3L_2)^2}{2!} \frac{(3L_3)^0}{0!} =$ $[3L_1] \left[\frac{3L_2(3L_2-1)}{2} \right]$ $N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1)$
(6)	(6) _G (6) _R	(0, 2, 1)	$N_6 = \frac{(3L_1)^0}{0!} \frac{(3L_2)^2}{2!} \frac{(3L_3)^1}{1!} =$ $\left[\frac{3L_2(3L_2-1)}{2!} \right] [3L_3]$ $N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1)$
(7)	(7) _G (7) _R	(0, 1, 2)	$N_7 = \frac{(3L_1)^0}{0!} \frac{(3L_2)^1}{1!} \frac{(3L_3)^2}{2!} =$ $[3L_2] \left[\frac{3L_3(3L_3-1)}{2!} \right]$ $N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1)$
(8)	(8) _G (8) _R	(1, 0, 2)	$N_8 = \frac{(3L_1)^1}{1!} \frac{(3L_2)^0}{0!} \frac{(3L_3)^2}{2!} =$ $[3L_1] \left[\frac{3L_3(3L_3-1)}{2!} \right]$ $N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_3 - 1)$
(9)	(9) _G (9) _R	(2, 0, 1)	$N_9 = \frac{(3L_1)^2}{2!} \frac{(3L_2)^0}{0!} \frac{(3L_3)^1}{1!} =$ $\left[\frac{3L_1(3L_1-1)}{2!} \right] [3L_3]$ $N_9 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_1 - 1)$
(10)	(10) _G (10) _R	(1, 1, 1)	$N_{10} = \frac{(3L_1)^1}{1!} \frac{(3L_2)^1}{1!} \frac{(3L_3)^1}{1!} =$ $27L_1 L_2 L_3$ $N_{10} = 27L_1 L_2 L_3$

Tabela 6 Interpolação cúbica no espaço homotético e no de referência.

(L_1, L_2, L_3)	(ξ, η)
$N_1(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2}(L_1)(3L_1 - 1)$ $(3L_1 - 2)$	$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)[2 - 3(\xi + \eta)]$ $[1 - 3(\xi + \eta)]$
$N_2(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2}(L_2)(3L_2 - 1)$ $(3L_2 - 2)$	$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi(2 - 3\xi)(1 - 3\xi)$
$N_3(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2}(L_3)(3L_3 - 1)$ $(3L_3 - 2)$	$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta(2 - 3\eta)(1 - 3\eta)$
$N_4(L_1, L_2, L_3) = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$	$N_4(\xi, \eta) = \frac{9}{2}(1 - \xi - \eta) \xi[2 - 3(\xi + \eta)]$
$N_5(L_1, L_2, L_3) = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1)$	$N_5(\xi, \eta) = \frac{9}{2}(1 - \xi - \eta) \xi(3\xi - 1)$
$N_6(L_1, L_2, L_3) = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1)$	$N_6(\xi, \eta) = \frac{9}{2} \xi\eta(3\xi - 1)$
$N_7(L_1, L_2, L_3) = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1)$	$N_7(\xi, \eta) = \frac{9}{2} \xi\eta(3\eta - 1)$
$N_8(L_1, L_2, L_3) = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1)$	$N_8(\xi, \eta) = \frac{9}{2}(1 - \xi - \eta) \eta(3\eta - 1)$
$N_9(L_1, L_2, L_3) = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_1 - 1)$	$N_9(\xi, \eta) = \frac{9}{2}(1 - \xi - \eta) \eta[2 - 3(\xi + \eta)]$
$N_{10}(L_1, L_2, L_3) = 27L_1L_2L_3$	$N_{10}(\xi, \eta) = 27(1 - \xi - \eta) \xi\eta$

4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO QUE REGE A DESCONTINUIDADE ENTRE DOIS CABOS COAXIAIS

4.1 Introdução

Neste capítulo, a equação que rege a descontinuidade com corrugações, entre dois cabos coaxiais, será solucionada pelo MEF, interpolado pelas funções quadráticas de Lagrange.

4.2 Formulação da Análise

A formulação da análise sobre descontinuidade com corrugações entre cabos coaxiais foi apresentada no capítulo-2, eq.(55), e será solucionada pelo MEF, discretizado por elementos triangulares, interpolados pelas funções quadráticas de Lagrange.

Cada elemento triangular (e) apresenta 6 graus de liberdade, isto é 6 nós de interpolação.

O domínio discretizado é visto nas Figura 4 e Figura 6, onde $S^{(e)} = (z, r)$ é o sub-domínio referente a cada elemento (e).

O campo magnético procurado, expandido pelas funções de interpolação em cada elemento é $H_{\theta}^{(e)}(Z, R) = \sum_{n=1}^6 q_n N_n(Z, R)$ onde $\{q_n\}$ é o coeficiente, incógnita, relacionado ao nó de interpolação “n”, do respectivo elemento.

Por conveniência, a formulação referente à cada elemento da malha, eq.(55), é reescrita, a seguir.

Para $e = 1, 2, \dots, NT$; NT - número total de triângulos que compõem a malha.

$p = 1, 2, 3, \dots, 6$ (linhas da matriz resultante).

$n = 1, 2, 3, \dots, 6$ (colunas da matriz resultante).

Para cada elemento e, $p = 1, 2, 3, \dots, 6$, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^6 \left(q_n \int_{R(S_e)} \int_z \left\{ \frac{1}{\epsilon_r} \left[R^2 \left(\frac{\partial N_p}{\partial R} \frac{\partial N_n}{\partial R} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) + \frac{3R}{2} \left(N_p \frac{\partial N_n}{\partial R} + N_n \frac{\partial N_p}{\partial R} \right) + \frac{9}{4} N_p N_n \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. k_0^2 R^2 (N_p N_n) \right\} dR dz + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} q_n \int_{a_1}^{b_1} R^2 N_p(R) N_n(R) dR + \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} q_n \int_{a_1}^{b_1} R^2 N_p(R) N_n(R) dR \right) = \\
& \frac{jk_0}{\pi \sqrt{120 \sqrt{\epsilon_{r1}} \ln \left(\frac{b_1}{a_1} \right)}} \int_{a_1}^{b_1} R N_p(R) dR
\end{aligned} \tag{1}$$

Os termos da eq.(1), que serão calculados pelas funções quadráticas de Lagrange, neste capítulo, caracterizam a matriz e os seguintes vetores:

1- Matriz de Rigidez (Stiffness Matrix)

A matriz de rigidez, de cada elemento, é constituída pelas seguintes parcelas, definidas no aberto, $S^{(e)}(Z, R)$, de cada elemento.

$$1.1- K_{ZR}^{(e)}(p, n) = \int_R \int_z \frac{1}{\epsilon_r} R^2 \left(\frac{\partial N_p}{\partial R} \frac{\partial N_n}{\partial R} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) dR dz$$

$$1.2- K_R^{(e)}(p, n) = \frac{3}{2} \int_R \int_z \frac{1}{\epsilon_r} R \left(N_p \frac{\partial N_n}{\partial R} + N_n \frac{\partial N_p}{\partial R} \right) dR dz$$

$$1.3- K_M^{(e)}(p, n) = \frac{9}{4} \int_R \int_z \frac{1}{\epsilon_r} N_p N_n dR dz$$

$$1.4- K_{RM}^{(e)}(p, n) = k_0^2 \int_R \int_z R^2 N_p N_n dR dz$$

2- Integrais de Linha nos acessos da estrutura

$$2.1- \text{Acesso na entrada } I_{l_1}(p, n) = \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{R=a_1}^{b_1} R^2 N_p(R) N_n(R) dR$$

$$2.2- \text{Acesso na saída } I_{l_2}(p, n) = \frac{jk_0}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \int_{R=a_2}^{b_2} R^2 N_p(R) N_n(R) dR$$

3- Vetor de Carga na entrada da estrutura (Condição de Dirichlet, para o problema)

$$f(p) = j \frac{2k_0}{\pi \sqrt{120 \sqrt{\epsilon_{r1}} \ln \left(\frac{b_1}{a_1} \right)}} \int_{R=a_1}^{b_1} R N_p(R) dR$$

4.2.1 Análise da matriz de rigidez

Cada parcela que compõe a matriz de rigidez será, a seguir, calculada, nos respectivos elementos da malha, $e = (i, 2, 3, \dots NT)$, NT - número total de triângulos.

Os cálculos são efetuados no elemento de referência, que se relaciona aos elementos da malha pela transformada geométrica, vide Figura 8.

Transformada-Geométrica

A transformada geométrica é definida pelas funções lineares de Lagrange:

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta) &= R_1 L_1(\xi, \eta) + R_2 L_2(\xi, \eta) + R_3 L_3(\xi, \eta) \\ Z(\xi, \eta) &= Z_1 L_1(\xi, \eta) + Z_2 L_2(\xi, \eta) + Z_3 L_3(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

$j = (1, 2, 3)$; (Z_j, R_j) é a coordenada do vértice “j” do elemento triangular (e).

Substituindo as funções de área (L_1, L_2, L_3) do elemento de referência, eq.(2) do capítulo-3, em (2) tem-se

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta) &= R_1 + (R_2 - R_1)\xi + (R_3 - R_1)\eta \\ Z(\xi, \eta) &= Z_1 + (Z_2 - Z_1)\xi + (Z_3 - Z_1)\eta \end{aligned} \quad (3)$$

Para cada elemento triangular da malha tem-se, veja eq.(2) do capítulo-3

Espaço-Global (Real)

$$L_j(Z, R) = \frac{1}{2S}(a_j + b_j Z + c_j R)$$

Espaço de Referência

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$L_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$L_3(\xi, \eta) = \eta$$

onde $j = 1, 2, 3$ (cíclico)

$$a_j = (Z_{j+1}R_{j+2} - Z_{j+2}R_{j+1})$$

$$b_j = (R_{j+1} - R_{j+2})$$

$$c_j = -(Z_{j+1} - Z_{j+2})$$

$$S_2 = Z_1(R_2 - R_3) + Z_2(R_3 - R_1) + Z_3(R_1 - R_2) = (2S)$$

(S_2) duas vezes a área do elemento triangular.

(4)

As eqs.(2) e (3), ambas do capítulo-3, no espaço (x, y) identificam a eq.(4) no espaço (R, Z) pelas relações:

$$x \rightarrow Z$$

$$y \rightarrow R$$

1.1- **Cálculo das parcelas** $K_{ZR}^{(e)}(p, n) = \int \int_{R, z} \frac{1}{\epsilon_r} R^2 \left(\frac{\partial N_p}{\partial R} \frac{\partial N_n}{\partial R} + \frac{\partial N_p}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) dR dz$

As funções de forma da interpolação quadrática de Lagrange foram calculadas no capítulo-3, Tabela 3, expressas pelas funções de área, ou seja

$$N_j = N_j(L_1(Z, R), L_2(Z, R), L_3(Z, R)) \quad j = (1, 2, 3, \dots, 6)$$

Uma forma generalizada de se referenciar à parcela $K_{ZR}^{(e)}(p, n)$ é [10].

$$K_{ZR}^{(e)}(p, n) = \int \int_{R, z} \frac{1}{\epsilon_r} R^2 (\nabla N_p \cdot \nabla N_n) dR dz \quad (5)$$

O operador nabla é definido por: $\nabla() = \frac{\partial}{\partial z} \vec{z} + \frac{\partial}{\partial R} \vec{R}$

Portanto,

$$\nabla N(L_1, L_2, L_3) = \frac{\partial N}{\partial z} \vec{z} + \frac{\partial N}{\partial R} \vec{R} \quad (6)$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla N_p(L_1, L_2, L_3) = & \left(\frac{\partial N_p}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial z} + \frac{\partial N_p}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial z} + \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial z} \right) \vec{z} + \left(\frac{\partial N_p}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial R} + \frac{\partial N_p}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial R} + \right. \\ & \left. \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial R} \right) \vec{R} \end{aligned} \quad (7)$$

A eq.(7) é resumida em:

$$\nabla N_p = \frac{\partial N_p}{\partial L_1} \left(\frac{\partial L_1}{\partial z} \vec{z} + \frac{\partial L_1}{\partial R} \vec{R} \right) + \frac{\partial N_p}{\partial L_2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial z} \vec{z} + \frac{\partial L_2}{\partial R} \vec{R} \right) + \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \left(\frac{\partial L_3}{\partial z} \vec{z} + \frac{\partial L_3}{\partial R} \vec{R} \right) \quad (8)$$

Identificando o operador nabla, eq.(6), em (8), tem-se:

$$\nabla N_p = \nabla L_1 \frac{\partial N_p}{\partial L_1} + \nabla L_2 \frac{\partial N_p}{\partial L_2} + \nabla L_3 \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \quad (9)$$

Substituindo a eq.(9) no núcleo da eq.(5), este é expresso matricialmente por:

$$\nabla N_p \cdot \nabla N_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial L_1} & \frac{\partial N_p}{\partial L_2} & \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \nabla L_1 \cdot \nabla L_1 & \nabla L_1 \cdot \nabla L_2 & \nabla L_1 \cdot \nabla L_3 \\ \nabla L_2 \cdot \nabla L_1 & \nabla L_2 \cdot \nabla L_2 & \nabla L_2 \cdot \nabla L_3 \\ \nabla L_3 \cdot \nabla L_1 & \nabla L_3 \cdot \nabla L_2 & \nabla L_3 \cdot \nabla L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_n}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_n}{\partial L_3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Os termos da matriz $[\nabla L_i \cdot \nabla L_j]$ (i, j) = 1, 2, 3 são calculados, pela eq.(4):

$$\begin{array}{l} \nabla L_1 \cdot \nabla L_1 = \frac{1}{(2S)^2} (b_1^2 + c_1^2) \\ \nabla L_1 \cdot \nabla L_2 = \frac{1}{(2S)^2} (b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ \nabla L_1 \cdot \nabla L_3 = \frac{1}{(2S)^2} (b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ \hline \nabla L_2 \cdot \nabla L_2 = \frac{1}{(2S)^2} (b_2^2 + c_2^2) \\ \nabla L_2 \cdot \nabla L_3 = \frac{1}{(2S)^2} (b_2 b_3 + c_2 c_3) \\ \hline \nabla L_3 \cdot \nabla L_3 = \frac{1}{(2S)^2} (b_3^2 + c_3^2) \end{array} \quad (11)$$

Os termos $(b_j, c_j, 2S)$ são obtidos, também, pela eq.(4).

Finalmente os vetores $\left\{ \frac{\partial N_p}{\partial L_j}, \frac{\partial N_n}{\partial L_j} \right\}$, j = (1, 2, 3) e (p, n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6) são determinados, vide Tabela 3, capítulo-3, pelas funções de interpolação quadrática de Lagrange, sejam:

$$\begin{array}{l} N_1(L_1, L_2, L_3) = L_1 (2L_1 - 1) \\ N_2(L_1, L_2, L_3) = L_2 (2L_2 - 1) \\ N_3(L_1, L_2, L_3) = L_3 (2L_3 - 1) \\ \hline N_4(L_1, L_2, L_3) = 4L_1 L_2 \\ N_5(L_1, L_2, L_3) = 4L_2 L_3 \\ N_6(L_1, L_2, L_3) = 4L_1 L_3 \end{array} \quad (12)$$

Os respectivos vetores $\langle \frac{\partial N_p}{\partial L_1} \frac{\partial N_p}{\partial L_2} \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \rangle$ $p = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ são calculados, com auxílio de (12):

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$\frac{\partial N_1}{\partial L_j}$	$4L_1 - 1$	0	0
$\frac{\partial N_2}{\partial L_j}$	0	$4L_2 - 1$	0
$\frac{\partial N_3}{\partial L_j}$	0	0	$4L_3 - 1$
$\frac{\partial N_4}{\partial L_j}$	$4L_2$	$4L_1$	0
$\frac{\partial N_5}{\partial L_j}$	0	$4L_3$	$4L_2$
$\frac{\partial N_6}{\partial L_j}$	$4L_3$	0	$4L_1$

(13)

Os respectivos produtos escalares $(\nabla N_p \cdot \nabla N_n)$ $(p, n) = 1, 2, 3 \dots 6$, núcleo da parcela $K_{ZR}^{(e)}(p, n)$ referente à matriz de rigidez, são determinados substituindo as eqs.(13) e (11) em (10).

Para deixar bem claro o uso da técnica apresentada, o termo $(\nabla N_4 \cdot \nabla N_5)$ será avaliado:

$$\nabla N_4 \cdot \nabla N_5 = (4L_2 \ 4L_1 \ 0) \begin{bmatrix} \nabla L_1 \cdot \nabla L_1 & \nabla L_1 \cdot \nabla L_2 & \nabla L_1 \cdot \nabla L_3 \\ \nabla L_2 \cdot \nabla L_1 & \nabla L_2 \cdot \nabla L_2 & \nabla L_2 \cdot \nabla L_3 \\ \nabla L_3 \cdot \nabla L_1 & \nabla L_3 \cdot \nabla L_2 & \nabla L_3 \cdot \nabla L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4L_2 \\ 4L_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando o vetor linha pela matriz, tem-se um vetor linha com três colunas:

$$\nabla N_4 \cdot \nabla N_5 = \begin{bmatrix} 4L_2(\nabla L_1 \cdot \nabla L_1) + 4L_1(\nabla L_2 \cdot \nabla L_1) \\ 4L_2(\nabla L_1 \cdot \nabla L_2) + 4L_1(\nabla L_2 \cdot \nabla L_2) \\ 4L_2(\nabla L_1 \cdot \nabla L_3) + 4L_1(\nabla L_2 \cdot \nabla L_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 4L_2 \\ 4L_3 \end{bmatrix}$$

vetor linha (1,3) vetor coluna (3,1)

(14)

O produto do vetor linha (1, 3) pelo vetor coluna (3, 1) em (14) determina o termo $(\nabla N_4 \cdot \nabla N_5)$:

$$\begin{aligned} \nabla N_4 \cdot \nabla N_5 = & [4L_2(\nabla L_1 \cdot \nabla L_2) + 4L_1(\nabla L_2 \cdot \nabla L_2)] 4L_3 + [4L_2(\nabla L_1 \cdot \nabla L_3) \\ & + 4L_1(\nabla L_2 \cdot \nabla L_3)] 4L_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo em (15) os correspondentes termos de (11), conclui-se:

$$\begin{aligned} \nabla N_4 \cdot \nabla N_5 = & \left\{ 4L_2 \left[\frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{(2S)^2} \right] + 4L_1 \left[\frac{b_2^2 + c_2^2}{(2S)^2} \right] \right\} 4L_3 + \left\{ 4L_2 \left[\frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{(2S)^2} \right] + \right. \\ & \left. 4L_1 \left[\frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{(2S)^2} \right] \right\} 4L_2 \end{aligned}$$

Com este mesmo raciocínio calculam-se os demais termos, do núcleo da integral:

$$\begin{aligned}
\nabla N_1 \cdot \nabla N_1 &= \frac{(b_1^2+c_1^2)}{(2S)^2} (16L_1^2 - 8L_1 + 1) \\
\nabla N_1 \cdot \nabla N_2 &= \frac{(b_1b_2+c_1c_2)}{(2S)^2} [16L_1L_2 - 4(L_1 + L_2)] \\
\nabla N_1 \cdot \nabla N_3 &= \frac{(b_1b_3+c_1c_3)}{(2S)^2} [16L_1L_3 - 4(L_1 + L_3)] \\
\nabla N_1 \cdot \nabla N_4 &= \frac{(b_1^2+c_1^2)}{(2S)^2} (16L_1L_2 - 4L_2) + \frac{(b_1b_2+c_1c_2)}{(2S)^2} (16L_1^2 - 4L_1) \\
\nabla N_1 \cdot \nabla N_5 &= \frac{(b_1b_2+c_1c_2)}{(2S)^2} (16L_1L_3 - 4L_3) + \frac{(b_1b_3+c_1c_3)}{(2S)^2} (16L_1L_2 - 4L_2) \\
\nabla N_1 \cdot \nabla N_6 &= \frac{(b_1^2+c_1^2)}{(2S)^2} (16L_1L_3 - 4L_3) + \frac{(b_1b_3+c_1c_3)}{(2S)^2} (16L_1^2 - 4L_1) \\
\hline
\nabla N_2 \cdot \nabla N_2 &= \frac{(b_2^2+c_2^2)}{(2S)^2} (16L_2^2 - 8L_2 + 1) \\
\nabla N_2 \cdot \nabla N_3 &= \frac{(b_2b_3+c_2c_3)}{(2S)^2} [16L_2L_3 - 4(L_2 + L_3) + 1] \\
\nabla N_2 \cdot \nabla N_4 &= \frac{(b_2^2+c_2^2)}{(2S)^2} (16L_2L_1 - 4L_1) + \frac{(b_2b_1+c_2c_1)}{(2S)^2} (16L_2^2 - 4L_2) \\
\nabla N_2 \cdot \nabla N_5 &= \frac{(b_2^2+c_2^2)}{(2S)^2} (16L_2L_3 - 4L_3) + \frac{(b_2b_3+c_2c_3)}{(2S)^2} (16L_2^2 - 4L_2) \\
\nabla N_2 \cdot \nabla N_6 &= \frac{(b_2b_3+c_2c_3)}{(2S)^2} (16L_2L_1 - 4L_1) + \frac{(b_2b_1+c_2c_1)}{(2S)^2} (16L_2L_1 - 4L_3) \\
\hline
\nabla N_3 \cdot \nabla N_3 &= \frac{(b_3^2+c_3^2)}{(2S)^2} (16L_3^2 - 8L_3 + 1) \\
\nabla N_3 \cdot \nabla N_4 &= \frac{(b_3b_2+c_3c_2)}{(2S)^2} (16L_3L_1 - 4L_1) + \frac{(b_3b_1+c_3c_1)}{(2S)^2} (16L_3L_2 - 4L_2) \\
\nabla N_3 \cdot \nabla N_5 &= \frac{(b_3^2+c_3^2)}{(2S)^2} (16L_3L_2 - 4L_2) + \frac{(b_3b_2+c_3c_2)}{(2S)^2} (16L_3^2 - 4L_3) \\
\nabla N_3 \cdot \nabla N_6 &= \frac{(b_3^2+c_3^2)}{(2S)^2} (16L_3L_1 - 4L_1) + \frac{(b_3b_1+c_3c_1)}{(2S)^2} (16L_3^2 - 4L_3) \\
\hline
\nabla N_4 \cdot \nabla N_4 &= 16 \left\{ \left[\frac{b_1^2+c_1^2}{(2S)^2} \right] L_2^2 + \left[\frac{b_2^2+c_2^2}{(2S)^2} \right] L_1^2 + 2 \left[\frac{b_1b_2+c_1c_2}{(2S)^2} \right] L_1L_2 \right\} \\
\nabla N_4 \cdot \nabla N_5 &= 16 \left\{ \left[\frac{b_1b_2+c_1c_2}{(2S)^2} \right] L_2^2 + \left[\frac{b_2^2+c_2^2}{(2S)^2} \right] L_1L_2 + \left[\frac{b_1b_3+c_1c_3}{(2S)^2} \right] L_2L_3 + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{b_2b_3+c_2c_3}{(2S)^2} \right] L_1L_3 \right\} \\
\nabla N_4 \cdot \nabla N_6 &= 16 \left\{ \left[\frac{b_3b_2+c_3c_2}{(2S)^2} \right] L_1^2 + \left[\frac{b_1^2+c_1^2}{(2S)^2} \right] L_2L_3 + \left[\frac{b_1b_3+c_1c_3}{(2S)^2} \right] L_2L_1 + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{b_2b_1+c_2c_1}{(2S)^2} \right] L_1L_3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla N_5 \cdot \nabla N_5 &= 16 \left\{ \left[\frac{b_2^2+c_2^2}{(2S)^2} \right] L_3^2 + \left[\frac{b_3^2+c_3^2}{(2S)^2} \right] L_2^2 + 2 \left[\frac{b_2b_3+c_2c_3}{(2S)^2} \right] L_2L_3 \right\} \\
\nabla N_5 \cdot \nabla N_6 &= 16 \left\{ \left[\frac{b_1b_2+c_1c_2}{(2S)^2} \right] L_3^2 + \left[\frac{b_3b_1+c_3c_1}{(2S)^2} \right] L_2L_3 + \left[\frac{b_3^2+c_3^2}{(2S)^2} \right] L_1L_2 + \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{b_2b_3+c_2c_3}{(2S)^2} \right] L_1L_3 \right\} \\
\hline
\nabla N_6 \cdot \nabla N_6 &= 16 \left\{ \left[\frac{b_1^2+c_1^2}{(2S)^2} \right] L_3^2 + \left[\frac{b_3^2+c_3^2}{(2S)^2} \right] L_1^2 + 2 \left[\frac{b_1b_3+c_1c_3}{(2S)^2} \right] L_1L_3 \right\}
\end{aligned}$$

(16)

Cálculo das parcelas $K_{ZR}^{(e)}(p, n)$

As parcelas do termo da matriz de rigidez:

$$K_{ZR}^{(e)}(p, n) = \int_R \int_z \frac{1}{\epsilon_r} R^2 (\nabla N_p \cdot \nabla N_n) dRdZ \quad (17)$$

são calculadas no elemento de referência, já que, neste elemento, a integral é determinada facilmente, por um produto de fatoriais, vide apêndice-A, eq.(12).

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} L_1^a L_2^b L_3^c d\eta d\xi = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \quad (18)$$

Portanto, a integral, eq.(17), é mapeada ao elemento de referência, com auxílio do jacobiano da transformação:

$$dRdZ = (2S^{(e)}) d\eta d\xi \quad (19)$$

A transformada geométrica entre os elementos global e de referência define o coeficiente “ R^2 ”.

Transformada geométrica: $R = R_1L_1 + R_2L_2 + R_3L_3$.

Então:

$$R^2 = (R_1^2L_1^2 + R_2^2L_2^2 + R_3^2L_3^2) + 2(R_1R_2L_1L_2 + R_1R_3L_1L_3 + R_2R_3L_2L_3) \quad (20)$$

As parcelas $K_{ZR}^{(e)}(p, n)$ são obtidas substituindo-se os respectivos produtos escalares $(\nabla N_p \cdot \nabla N_n)$, eq.(16), assim como o coeficiente “ R^2 ”, eq.(20) e o jacobiano, eq.(19) na integral, eq.(17), que é solucionada pela eq.(18).

$$\begin{aligned}
K_{ZR}^{(e)}(1, 1) &= \frac{(c_1^2+b_1^2)}{180\epsilon_r S^2} [15R_1(R_2 + R_3) + 7(R_2^2 + R_2R_3 + R_3^2) + 39R_1^2] \\
K_{ZR}^{(e)}(1, 2) &= -\frac{(c_1c_2+b_1b_2)}{180\epsilon_r S^2} [(R_3^2 + R_1R_2) + 5R_3(R_1 + R_2) + 9(R_1^2 + R_2^2)] \\
K_{ZR}^{(e)}(1, 3) &= -\frac{(c_1c_3+b_1b_3)}{180\epsilon_r S^2} [(R_2^2 + R_1R_3) + 5R_2(R_1 + R_3) + 9(R_1^2 + R_3^2)] \\
K_{ZR}^{(e)}(1, 4) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_1^2 + b_1^2) [2R_2(R_1 - R_3) + 3(R_1^2 - R_2^2) + R_3(R_1 - R_3)] + \\
&\quad (c_1c_2 + b_1b_2) [6R_1(R_2 + R_3) + (R_3^2 + R_2R_3 + R_2^2) + 15R_1^2]\} \\
K_{ZR}^{(e)}(1, 5) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_1c_2 + b_1b_2) [2R_3(R_1 - R_2) + 3(R_1^2 - R_3^2) + R_2(R_1 - R_2)] + \\
&\quad (c_1c_3 + b_1b_3) [2R_2(R_1 - R_3) + 3(R_1^2 - R_2^2) + R_3(R_1 - R_3)]\} \\
K_{ZR}^{(e)}(1, 6) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_1^2 + b_1^2) [2R_3(R_1 - R_2) + 3(R_1^2 - R_3^2) + R_2(R_1 - R_2)] + \\
&\quad (c_1c_3 + b_1b_3) [6R_1(R_2 + R_3) + (R_2^2 + R_2R_3 + R_3^2) + 15R_1^2]\} \\
\hline
K_{ZR}^{(e)}(2, 2) &= \frac{(c_2^2+b_2^2)}{180\epsilon_r S^2} [15R_2(R_1 + R_3) + 7(R_1^2 + R_1R_3 + R_3^2) + 39R_2^2] \\
K_{ZR}^{(e)}(2, 3) &= -\frac{(c_2c_3+b_2b_3)}{180\epsilon_r S^2} [5R_1(R_2 + R_3) + 9(R_3^2 + R_2^2) + (R_1^2 + R_2R_3)] \\
K_{ZR}^{(e)}(2, 4) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_2c_1 + b_2b_1) [6R_2(R_1 + R_3) + (R_1^2 + R_1R_3 + R_3^2) + 15R_2^2] + \\
&\quad (c_2^2 + b_2^2) [2R_1(R_2 - R_3) + 3(R_2^2 - R_1^2) + R_3(R_2 - R_3)]\} \\
K_{ZR}^{(e)}(2, 5) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_2^2 + b_2^2) [2R_3(R_2 - R_1) + 3(R_2^2 - R_3^2) + R_1(R_2 - R_1)] + \\
&\quad (c_2c_3 + b_2b_3) [6R_2(R_1 + R_3) + (R_1^2 + R_1R_3 + R_3^2) + 15R_2^2]\} \\
K_{ZR}^{(e)}(2, 6) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_2c_1 + b_2b_1) [2R_3(R_2 - R_1) + 3(R_2^2 - R_3^2) + R_1(R_2 - R_1)] + \\
&\quad (c_2c_3 + b_2b_3) [2R_1(R_2 - R_3) + 3(R_2^2 - R_1^2) + R_3(R_2 - R_3)]\} \\
\hline
K_{ZR}^{(e)}(3, 3) &= \frac{(c_3^2+b_3^2)}{180\epsilon_r S^2} [15R_3(R_1 + R_2) + 7(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) + 39R_3^2] \\
K_{ZR}^{(e)}(3, 4) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_3c_1 + b_3b_1) [2R_2(R_3 - R_1) + 3(R_3^2 - R_2^2) + R_1(R_3 - R_1)] + \\
&\quad (c_3c_2 + b_3b_2) [2R_1(R_3 - R_2) + 3(R_3^2 - R_1^2) + R_2(R_3 - R_2)]\} \\
K_{ZR}^{(e)}(3, 5) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_3c_2 + b_3b_2) [6R_3(R_1 + R_2) + (R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) + 15R_3^2] + \\
&\quad (c_3^2 + b_3^2) [2R_2(R_3 - R_1) + 3(R_3^2 - R_2^2) + R_1(R_3 - R_1)]\} \\
K_{ZR}^{(e)}(3, 6) &= \frac{1}{45\epsilon_r S^2} \{(c_3c_1 + b_3b_1) [6R_3(R_1 + R_2) + (R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) + 15R_3^2] + \\
&\quad (c_3^2 + b_3^2) [2R_1(R_3 - R_2) + 3(R_3^2 - R_1^2) + R_2(R_3 - R_2)]\} \\
\hline
K_{ZR}^{(e)}(4, 4) &= \frac{4}{45\epsilon_r S^2} \{(c_1^2 + b_1^2) [3R_2(R_1 + R_3) + (R_1^2 + R_1R_3 + R_3^2) + 6R_2^2] + \\
&\quad (c_2c_1 + b_2b_1) [2R_3(R_1 + R_2) + 3(R_1^2 + R_2^2) + (R_3^2 + 4R_1R_2)] + (c_2^2 + b_2^2) \\
&\quad [3R_1(R_2 + R_3) + (R_2^2 + R_2R_3 + R_3^2) + 6R_1^2]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K^{(e)}(4, 5) &= \frac{2}{45\epsilon_r S^2} \{ (c_1 c_2 + b_1 b_2) [2R_1(R_2 + R_3) + 3(R_2^2 + R_3^2) + (R_1^2 + 4R_2 R_3)] + \\
& (c_2^2 + b_2^2) [2R_2(R_1 + R_3) + 3(R_1^2 + R_3^2) + (R_2^2 + 4R_1 R_3)] + 2(c_1 c_3 + b_1 b_3) \\
& [3R_2(R_1 + R_3)(R_3^2 + R_1 R_3 + R_1^2) + 6R_2^2] + (c_2 c_3 + b_2 b_3) [2R_3(R_1 + R_2) + \\
& 3(R_1^2 + R_2^2) + (R_3^2 + 4R_1 R_2)] \} \\
K^{(e)}(4, 6) &= \frac{2}{45\epsilon_r S^2} \{ (c_1^2 + b_1^2) [2R_1(R_2 + R_3) + 3(R_2^2 + R_3^2) + (R_1^2 + 4R_2 R_3)] + \\
& (c_2 c_1 + b_2 b_1) [2R_2(R_1 + R_3) + 3(R_1^2 + R_3^2) + (R_2^2 + 4R_1 R_3)] + (c_1 c_3 + b_1 b_3) \\
& [2R_3(R_1 + R_2) + 3(R_1^2 + R_2^2) + (R_3^2 + 4R_1 R_2)] + 2(c_2 c_3 + b_2 b_3) [3R_1(R_2 + R_3) \\
& + (R_2^2 + R_2 R_3 + R_3^2) + 6R_1^2] \} \\
K^{(e)}(5, 5) &= \frac{4}{45\epsilon_r S^2} \{ (c_2^2 + b_2^2) [3R_3(R_1 + R_2) + (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) + 6R_3^2] + \\
& (c_2 b_3 + c_3 b_2) [2R_1(R_2 + R_3) + 3(R_1^2 + R_2^2) + (R_1^2 + 4R_2 R_3)] + (c_3^2 + b_3^2) \\
& [3R_2(R_1 + R_3) + (R_1^2 + R_1 R_3 + R_3^2) + 6R_2^2] \} \\
K^{(e)}(5, 6) &= \frac{2}{45\epsilon_r S^2} \{ 2(c_1 c_2 + b_1 b_2) [3R_3(R_1 + R_2) + (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) + 6R_3^2] + \\
& (c_1 c_3 + b_1 b_3) [2R_1(R_2 + R_3) + 3(R_2^2 + R_3^2) + (R_1^2 + 4R_2 R_3)] + (c_2 c_3 + b_2 b_3) \\
& [2R_2(R_1 + R_3) + 3(R_1^2 + R_3^2) + (R_2^2 + 4R_1 R_3)] + (c_3^2 + b_3^2) [2R_3(R_1 + R_2) + \\
& 3(R_2^2 + R_1^2) + (R_3^2 + 4R_1 R_2)] \} \\
K^{(e)}(6, 6) &= \frac{4}{45\epsilon_r S^2} \{ (c_1^2 + b_1^2) [3R_3(R_1 + R_2) + (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) + 6R_3^2] + \\
& (c_1 c_3 + b_1 b_3) [2R_2(R_1 + R_3) + 3(R_1^2 + R_3^2) + (R_2^2 + 4R_1 R_3)] + (c_3^2 + b_3^2) \\
& [3R_1(R_2 + R_3) + (R_2^2 + R_2 R_3 + R_3^2) + 6R_1^2] \}
\end{aligned}$$

(21)

As parcelas $K_{ZR}^{(e)}(n, p) = K_{ZR}^{(e)}(p, n)$ são simétricas.

S2 - 2 vezes a área do triângulo, vide eq.(4).

Os parâmetros R_j ; $j=(1, 2, 3)$, são os raios dos respectivos vértices (j) do triângulo, conhecidos, definidos pela discretização do domínio.

Os parâmetros (c_j, b_j) ; $j=(1, 2, 3)$, são funções dos vértices do triângulo, vide eq.(4), portanto, também, valores conhecidos .

1.2- Cálculo das parcelas $K_R^{(e)}(p, n) = \frac{3}{2} \int_R \int_z \frac{1}{\epsilon_r} R \left(N_p \frac{\partial N_n}{\partial R} + N_n \frac{\partial N_p}{\partial R} \right) dR dz$

Determinando $\left(\frac{\partial N_n}{\partial R}, \frac{\partial N_p}{\partial R} \right)$

O diferencial de $N_n(L_1, L_2, L_3)$:

$$dN_n(L_1, L_2, L_3) = \frac{\partial N_n}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial N_n}{\partial L_2} dL_2 + \frac{\partial N_n}{\partial L_3} dL_3$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{\partial N_n}{\partial R} = \frac{\partial N_n}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial R} + \frac{\partial N_n}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial R} + \frac{\partial N_n}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial R}} \quad (22)$$

Pela eq.(4)

$$\boxed{\frac{\partial L_j}{\partial R} = c_j} \quad \boxed{j= 1, 2, 3} \quad (23)$$

Expressando a parcela $K_R^{(e)}(p, n)$ mais adequadamente

Substituindo-se as eq.(23) e (22) em $K_R^{(e)}(p, n)$, tem-se:

$$K_R^{(e)}(p, n) = \frac{3}{2} \int_z \int_R \frac{1}{c_r} R \left[\left(N_p \frac{\partial N_n}{\partial L_1} + N_n \frac{\partial N_p}{\partial L_1} \right) c_1 + \left(N_p \frac{\partial N_n}{\partial L_2} + N_n \frac{\partial N_p}{\partial L_2} \right) c_2 + \left(N_p \frac{\partial N_n}{\partial L_3} + N_n \frac{\partial N_p}{\partial L_3} \right) c_3 \right] dz dR \quad (24)$$

Mapeia-se a integral, eq.(24), do elemento real para o elemento de referência, pelo jacobiano da transformação, eq.(19).

Os termos $\frac{\partial N_n}{\partial L_j}$; $n = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$; $j = (1, 2, 3)$ são dependentes das funções de área, veja eq.(13).

A transformada geométrica é caracterizada por $R = R_1 L_1 + R_2 L_2 + R_3 L_3$.

Substituindo-se estes parâmetros na eq.(24) tem-se a integral, no elemento de referência, função, unicamente, de (L_1, L_2, L_3) . Pelo apêndice-A, eq.(12), as parcelas $K_R^{(e)}(p, n)$ são determinadas:

$$\begin{aligned}
K_R^{(e)}(1, 1) &= \frac{3c_1}{20\epsilon_r} [R_1 + \frac{1}{6}(R_2 + R_3)] \\
K_R^{(e)}(1, 2) &= -\frac{3}{720\epsilon_r} [c_1 (5R_1 + 6R_2 + R_3) + c_2 (6R_1 + 5R_2 + R_3)] \\
K_R^{(e)}(1, 3) &= -\frac{3}{720\epsilon_r} [c_1 (5R_1 + 6R_3 + R_2) + c_3 (6R_1 + 5R_3 + R_2)] \\
K_R^{(e)}(1, 4) &= \frac{1}{10\epsilon_r} [(c_1 + c_2) R_1] \\
K_R^{(e)}(1, 5) &= -\frac{3}{180\epsilon_r} \{c_1 [2(R_2 + R_3) - R_1] + c_2 (R_2 + 2R_3) + c_3 (R_3 + 2R_2)\} \\
K_R^{(e)}(1, 6) &= \frac{1}{10\epsilon_r} [(c_1 + c_3) R_3] \\
\hline
K_R^{(e)}(2, 2) &= \frac{3c_2}{20\epsilon_r} [R_2 + \frac{1}{6}(R_1 + R_3)] \\
K_R^{(e)}(2, 3) &= -\frac{3}{720\epsilon_r} [c_2 (5R_2 + 6R_3 + R_1) + c_3 (6R_2 + 5R_3 + R_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_R^{(e)}(2, 4) &= \frac{1}{10\epsilon_r} [(c_1 + c_2) R_2] \\
K_R^{(e)}(2, 5) &= \frac{1}{10\epsilon_r} [(c_2 + c_3) R_2] \\
K_R^{(e)}(2, 6) &= -\frac{3}{180\epsilon_r} \{c_2 [2(R_1 + R_3) - R_2] + c_1 (R_1 + 2R_3) + c_3 (R_3 + 2R_1)\} \\
\hline
K_R^{(e)}(3, 3) &= \frac{3c_3}{20\epsilon_r} [R_3 + \frac{1}{6}(R_1 + R_2)] \\
K_R^{(e)}(3, 4) &= -\frac{3}{180\epsilon_r} \{c_3 [2(R_1 + R_2) - R_3] + c_1 (R_1 + 2R_2) + c_2 (R_2 + 2R_1)\} \\
K_R^{(e)}(3, 5) &= \frac{1}{10\epsilon_r} [(c_3 + c_2) R_3] \\
K_R^{(e)}(3, 6) &= \frac{1}{10\epsilon_r} [(c_3 + c_1) R_3] \\
\hline
K_R^{(e)}(4, 4) &= \frac{6}{45\epsilon_r} [c_1 (2R_1 + 3R_2 + R_3) + c_2 (3R_1 + 2R_2 + R_3)] \\
K_R^{(e)}(4, 5) &= \frac{3}{45\epsilon_r} [c_1 (R_1 + 3R_2 + R_3) + 2c_2 (R_1 + R_2 + R_3) + c_3 (2R_1 + 3R_2 + R_3)] \\
K_R^{(e)}(4, 6) &= \frac{3}{45\epsilon_r} [2c_1 (R_1 + R_2 + R_3) + c_2 (3R_1 + R_2 + 2R_3) + c_3 (3R_1 + 2R_2 + R_3)] \\
\hline
K_R^{(e)}(5, 5) &= \frac{6}{45\epsilon_r} [c_2 (R_1 + 2R_2 + 3R_3) + c_3 (R_1 + 3R_2 + 2R_3)] \\
K_R^{(e)}(5, 6) &= \frac{3}{45\epsilon_r} [c_1 (R_1 + 2R_2 + 3R_3) + c_2 (2R_1 + R_2 + 3R_3) + 2c_3 (R_1 + R_2 + R_3)] \\
\hline
K_R^{(e)}(6, 6) &= \frac{6}{45\epsilon_r} [c_1 (2R_1 + R_2 + 3R_3) + c_3 (3R_1 + R_2 + 2R_3)]
\end{aligned}$$

(25)

Os termos $K_R^{(e)}(n, p) = K_R^{(e)}(p, n)$ são simétricas.

1.3- Cálculo das parcelas $K_M^{(e)}(p, n) = \frac{9}{4} \int_R \int_z \frac{1}{\epsilon_r} N_p N_n dR dZ$

As funções de forma $N_n(L_1, L_2, L_3)$; $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, são calculadas pela eq.(12).

Mapeia-se a referida integral do elemento real para o de referência, pelo jacobiano,

eq.(19).

No elemento de referência a integral é expressa pelas funções (L_1, L_2, L_3) . Pelo apêndice-A, eq.(12) calculam-se as parcelas $K_M^{(e)}(p, n)$, que são expressas na forma matricial:

$$\left[k_M^{(e)} \right] = \frac{9(S2)}{60\epsilon_r} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Pela representação matricial (26) os termos $K_R^{(e)}(n, p) = K_R^{(e)}(p, n)$ são simétricos.

1.4- **Cálculo dos termos** $K_{RM}^{(e)}(p, n) = K_0^2 \int \int_{Rz} R^2 N_p N_n dR dZ$

As funções de forma $N_n(L_1, L_2, L_3)$; $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, são, também, calculadas pela eq.(12).

O parâmetro “ R^2 ” é visto na eq.(20).

As integrais relacionadas aos termos $K_{RM}^{(e)}(p, n)$ são calculadas no elemento de referência, sejam:

$K_{RM}^{(e)}(1, 1) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [(12R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) + 3R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3]$	
$K_{RM}^{(e)}(1, 2) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} \left(\frac{1}{2}\right) [3(R_1^2 + R_2^2) + 2R_1R_2 - R_3^2]$	
$K_{RM}^{(e)}(1, 3) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} \left(\frac{1}{2}\right) [3(R_1^2 + R_3^2) + 2R_1R_3 - R_2^2]$	
$K_{RM}^{(e)}(1, 4) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6R_1^2 - 3R_2^2 - R_3^2 - 2R_2R_3]$	
$K_{RM}^{(e)}(1, 5) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} [2R_1(R_2 + R_3) + 4R_2R_3 + 3(R_2^2 + R_3^2)]$	
$K_{RM}^{(e)}(1, 6) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} [R_2^2 + 3R_3^2 + 2R_2R_3 - 6R_1^2]$	
$K_{RM}^{(e)}(2, 2) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [(12R_2^2 + R_1^2 + R_3^2) + 3R_2(R_1 + R_3) + R_1R_3]$	
$K_{RM}^{(e)}(2, 3) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) [3(R_2^2 + R_3^2) + 2R_2R_3 - R_1^2]$	
$K_{RM}^{(e)}(2, 4) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6R_2^2 - 3R_1^2 - R_3^2 - 2R_2R_3]$	
$K_{RM}^{(e)}(2, 5) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} [R_1^2 + 3R_3^2 - 6R_2^2 + 2R_1R_3]$	
$K_{RM}^{(e)}(2, 6) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} [2R_2(R_1 + R_3) + 4R_1R_3 + 3(R_1^2 + R_3^2)]$	(27)
$K_{RM}^{(e)}(3, 3) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [(12R_3^2 + R_1^2 + R_2^2) + 3R_3(R_1 + R_2) + R_1R_2]$	
$K_{RM}^{(e)}(3, 4) = -\frac{k_0^2(S2)}{1260} [3(R_1^2 + R_2^2) + 2R_3(R_1 + R_2) + 4R_1R_2]$	
$K_{RM}^{(e)}(3, 5) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6R_3^2 - 3R_2^2 - R_1^2 - 2R_2R_1]$	
$K_{RM}^{(e)}(3, 6) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6R_3^2 - 3R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2]$	
$K_{RM}^{(e)}(4, 4) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [24(R_1^2 + R_2^2) + 4R_3^2 + 12R_3(R_1 + R_2) + 36R_1R_2]$	
$K_{RM}^{(e)}(4, 5) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6(R_1^2 + R_3^2) + 8R_1R_3 + 12R_2(R_1 + R_2 + R_3)]$	
$K_{RM}^{(e)}(4, 6) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6(R_2^2 + R_3^2) + 8R_2R_3 + 12R_1(R_1 + R_2 + R_3)]$	
$K_{RM}^{(e)}(5, 5) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [24(R_3^2 + R_2^2) + 4R_1^2 + 12R_1(R_3 + R_2) + 36R_3R_2]$	
$K_{RM}^{(e)}(5, 6) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [6(R_1^2 + R_2^2) + 8R_1R_3 + 12R_3(R_1 + R_2 + R_3)]$	
$K_{RM}^{(e)}(6, 6) = \frac{k_0^2(S2)}{1260} [24(R_3^2 + R_1^2) + 4R_2^2 + 12R_2(R_3 + R_1) + 36R_3R_1]$	

Os termos desta parcela são também simétricos $K_{RM}^{(e)}(n, p) = K_{RM}^{(e)}(p, n)$.

Como as quatro parcelas, eqs.(21), (25), (26) e (27), responsáveis pela parte real da matriz global, são simétricas, pode-se afirmar que a matriz de rigidez [A], resultante do sistema de equações que caracteriza a análise: $[A]\{q\} = \{v\}$, tem a parte real de seus termos simétricos. O mesmo ocorre com suas partes imaginárias, que se relacionam com os termos da formulação, eq.(1), referentes às integrais de linha nos acessos da estrutura.

4.2.2 Análise das integrais de linha nos acessos da estrutura

As integrais de linha que contribuem na formulação do problema, se referem às portas de entrada e de saída da estrutura, vide Figura 3 e Figura 6.

A discretização do domínio em elementos finitos triangulares, vide Figura 13, adotada neste trabalho, reduzem as integrais de linha, de ambas as portas, às fronteiras (1-6-3) nos respectivos elementos fronteiros aos limites da estrutura.

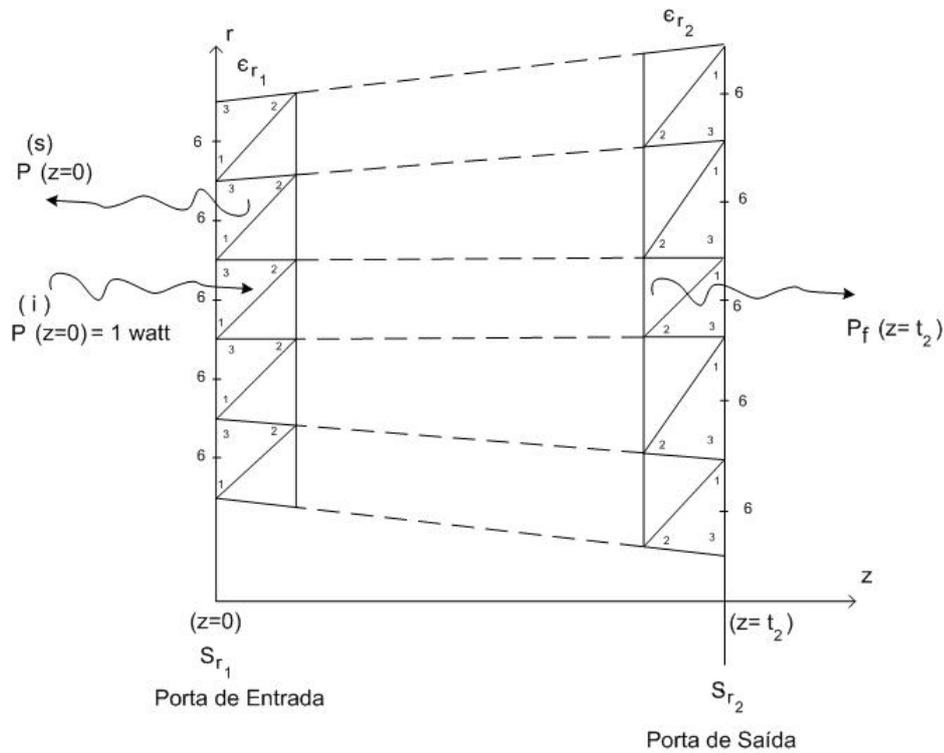


Figura 13 As respectivas portas de entrada e saída da estrutura e as fronteiras relacionadas às integrais de linha, da formulação.

4.2.2.1 Cálculo da integral de linha na fronteira (1-6-3)

Na Figura 14 é visto o mapeamento da fronteira (1-3-6) do elemento de referência ao elemento real, em ambas as portas.

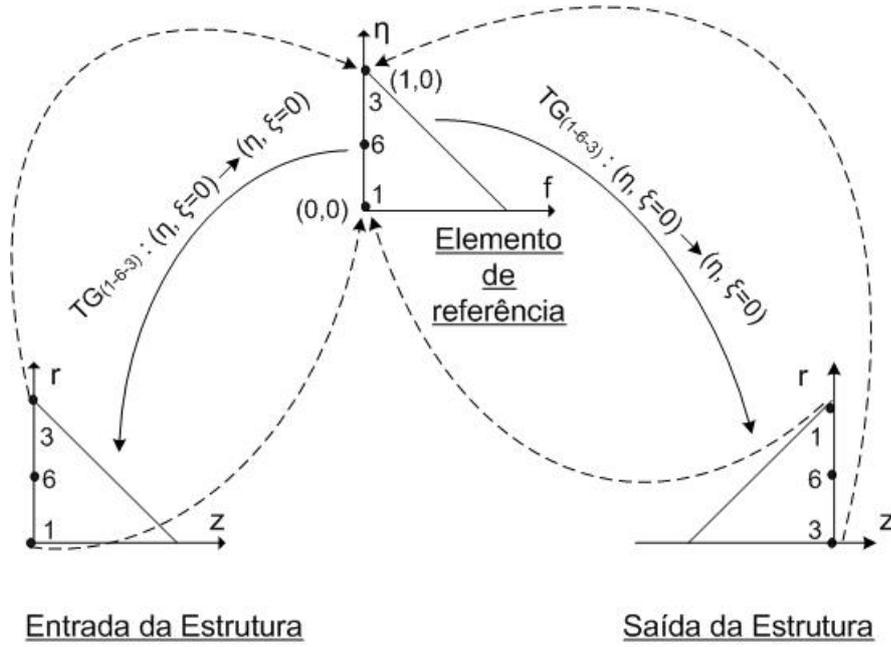


Figura 14 Transformação geométrica da fronteira (1-6-3) do elemento de referência aos elementos globais.

A transformada geométrica da respectiva fronteira é definida por:

$$TG : R(\eta) = R_1 L_1(\eta) + R_3 L_3(\eta) \quad (28)$$

onde $(0 \leq \eta \leq 1)$:

$$\begin{array}{l} L_1 = 1 - \eta \\ L_3 = \eta \end{array} \quad (29)$$

Substituindo a eq.(29) em (28)

$$R(\eta) = R_1 + (R_3 - R_1) \eta \quad (30)$$

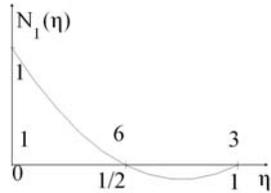
onde:

Entrada da estrutura:

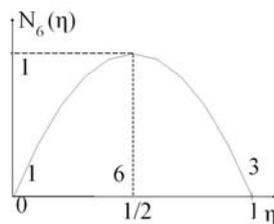
$$R_3 > R_1 \quad R(\eta) = R_1 + |R_3 - R_1| \eta \quad (31)$$

Saída da estrutura:

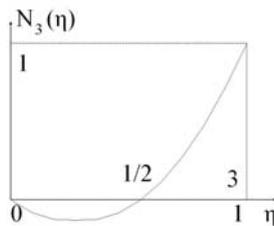
$$R_3 < R_1 \quad R(\eta) = R_1 - |R_3 - R_1|\eta \quad (32)$$



$$N_1(\eta) = 2L_1^2(\eta) - L_1(\eta)$$



$$N_6(\eta) = 4L_1(\eta) L_3(\eta) \quad (33)$$



$$N_3(\eta) = 2L_3^2(\eta) - L_3(\eta)$$

onde (N_1, N_6, N_3) são apresentadas na eq.(29).

Pelo jacobiano da transformação, eqs.(31) e (32), tem-se

$$\boxed{dr = \pm |R_3 - R_1| d\eta} \quad (34)$$

(+) Porta de entrada da estrutura; (-) Porta de saída da estrutura;

As integrais de linha, de interesse, na entrada e na saída da estrutura, são iguais, como é mostrado:

Para $(p, n) = (1, 6, 3)$, veja Figura 15, as respectivas integrais são:

Entrada da Estrutura:

Elemento Real

→

Elemento de Referência

$$I_E = \int_{r=(1)}^{(3)} R^2 N_p N_n dr$$

$$\boxed{dr = |R_3 - R_1| d\eta}$$

$$I_E = \int_{\eta=0}^1 R^2(\eta) N_p(\eta) N_n(\eta)$$

$$|R_3 - R_1| d\eta$$

(35)

Saída da Estrutura:

Elemento Real	→	Elemento de Referência
$I_S = \int_{r=(1)}^{(3)} R^2 N_p N_n dr$	$dr = - R_3 - R_1 d\eta$	$I_S = \int_{\eta=1}^0 R^2(\eta) N_p(\eta) N_n(\eta) (- R_3 - R_1 d\eta)$
		Portanto
		$I_S = \int_{\eta=0}^1 R^2(\eta) N_p(\eta) N_n(\eta) R_3 - R_1 d\eta$
		(36)

A eq.(36) é igual a (35),

logo

$$\boxed{I_E = I_S}$$

Assim sendo, as integrais de linha na entrada e na saída da estrutura, se escrevem, veja eq.(1) e Figura 3, Figura 6 e Figura 13, para $(p, n) = (1, 6, 3)$:

$$l_e(p, n) = \frac{jk_0 q_n}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \int_{a_1}^{b_1} R^2 N_p N_n dR \quad (\text{entrada da estrutura})$$

$$l_s(p, n) = \frac{jk_0 q_n}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \int_{a_2}^{b_2} R^2 N_p N_n dR \quad (\text{saída da estrutura})$$

Em ambas integrais, eqs.(35) e (36), é suficiente calcular os termos:

$$\boxed{l(p, n) = |R_3 - R_1| \int_{\eta=0}^1 R^2(\eta) N_p(\eta) N_n(\eta) d\eta} \quad (37)$$

$$l(p, n) = |R_3 - R_1| \bar{l}(p, n) \quad (38)$$

onde:

$$R(\eta) = R_1 L_1(\eta) + R_3 L_3(\eta) = R_1 + (R_3 - R_1)\eta$$

$$R(\eta)^2 = R_1 L_1^2 + 2R_1 R_3 L_1 L_3 + R_3^2 L_3^2 \quad (39)$$

$$\boxed{\bar{l}(1, 1) = \int_{\eta=0}^1 R^2(\eta) N_1^2(\eta) d\eta}$$

Pela eq.(33) e (39)

$$\bar{l}(1, 1) = \int_{\eta=0}^1 R^2(\eta) (2L_1^2(\eta) - L_1(\eta))^2 d\eta$$

$$\bar{l}(1, 1) = \frac{1}{210}(R_3 - R_1)^2 + \frac{R_1}{30}(R_3 - R_1) + \frac{2}{15}R_1^2 = \frac{11}{105}R_1^2 + \frac{1}{42}R_1R_3 + \frac{1}{210}R_3^2$$

Com o mesmo raciocínio usado no cálculo de $\bar{l}(1, 1)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{l}(1, 6) &= \frac{1}{15}R_1^2 - \frac{1}{105}(R_3 - R_1)^2 = \frac{2}{35}R_1^2 - \frac{2}{105}R_1R_3 - \frac{1}{105}R_3^2 \\ \bar{l}(1, 3) &= - \left[\frac{1}{84}(R_3 - R_1)^2 + \frac{1}{30}R_1(R_3 - R_1) + \frac{R_1^2}{30} \right] = - \left[\frac{1}{84}(R_1^2 + R_3^2) + \frac{R_1R_3}{105} \right] \\ \bar{l}(6, 6) &= \frac{16}{105}(R_3 - R_1)^2 + \frac{8}{15}R_1(R_3 - R_1) + \frac{8}{15}R_1^2 = \frac{16}{105}(R_1^2 + R_3^2) + \frac{8}{35}R_1R_3 \\ \bar{l}(6, 3) &= \frac{2}{35}(R_3 - R_1)^2 + \frac{2}{15}R_1(R_3 - R_1) + \frac{R_1^2}{15} = \frac{R_1}{105}(2R_3 - R_1) + \frac{2}{35}R_1^2 \\ \bar{l}(3, 3) &= \frac{11}{105}(R_3 - R_1)^2 + \frac{7}{30}R_1(R_3 - R_1) + \frac{2}{15}R_1^2 = \frac{11}{105}R_3^2 + \frac{1}{42}R_1R_3 + \frac{R_1^2}{210} \end{aligned} \quad (40)$$

Substituindo (39) em (38) tem-se as integrais na entrada e na saída da estrutura, responsáveis pela parte imaginária da matriz de rigidez da formulação eq.(1).

4.2.3 Cálculo do vetor de carga

O problema do “contínuo” é transformado, pelo MEF, a um problema matricial, vide eq.(55), capítulo-2:

$$[A]\{q\} = \{V\} \quad (41)$$

O vetor $\{V\}$, do lado direito do sistema matricial eq.(40), o vetor de carga da formulação, o responsável pela solução não-trivial desse sistema, é a condição de Dirichlet do problema, aplicada à porta de entrada da estrutura. Esta condição se refere a imposição da potência incidente na estrutura ser unitária.

Portanto, o vetor de carga é calculado no acesso de entrada da estrutura, sob a condição de potência incidente unitária, pelo termo, vide eq.(55), capítulo-2.

Para cada elemento (e), veja Figura 15, fronteiroço à entrada da estrutura, tem-se:

$$p = 1, 2, 3 \quad V^{(e)}(p) = \frac{j2k_0}{\sqrt{\pi z_1 \epsilon_{r1} \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} \int_{r=a_1}^{b_1} \sqrt{r} N_p(r) dr \quad (42)$$

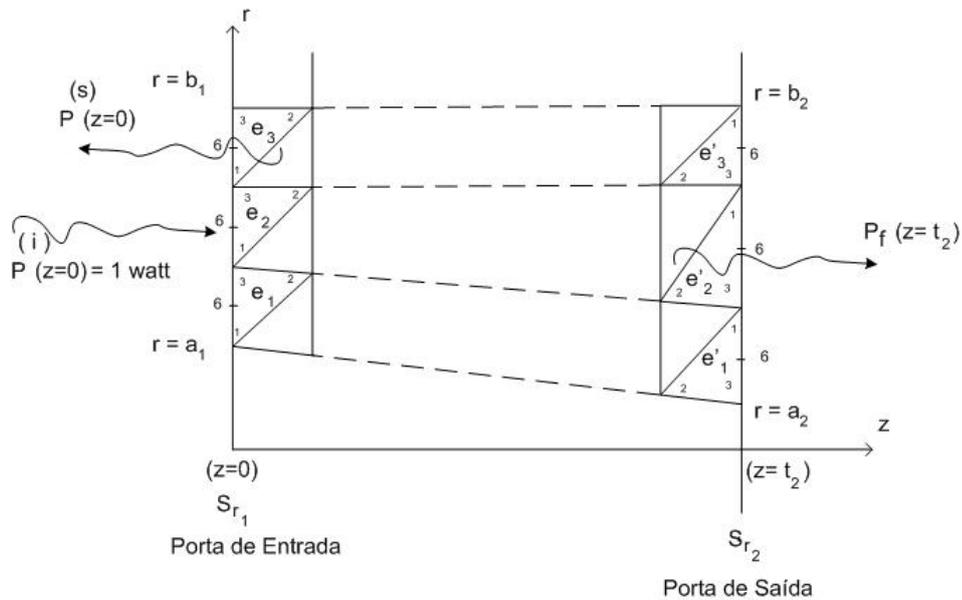


Figura 15 O acesso de entrada da estrutura, e os respectivos “nós - (1, 6, 3)” relacionados ao vetor de carga.

Em cada elemento há 3 “nós” que contribuem ao vetor de carga, são os de índices (1-6-3), vide Figura 15.

No elemento de referência tem-se:

$$V^{(e)}(p = j) = \frac{j2k_0}{\sqrt{\pi z_1 \epsilon_{r1} \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} v^{(e)}(j) \quad j = (1, 6, 3)$$

onde:

$$v^{(e)}(j) = |R_3 - R_1| \int_{\eta=0}^1 \sqrt{r(\eta)} N_j(\eta) d\eta$$

$$\boxed{\begin{matrix} L_1(\eta) = 1 - \eta \\ L_3(\eta) = \eta \end{matrix}} \quad (43)$$

$$\boxed{r(\eta) = R_1 L_1(\eta) + R_3 L_3(\eta)}$$

$$\begin{aligned}
N_1(\eta) &= 2L_1^2(\eta) - L_1(\eta) \\
N_6(\eta) &= 4L_1(\eta)L_3(\eta) \\
N_3(\eta) &= 2L_3^2(\eta) - L_3(\eta)
\end{aligned}$$

As integrais $v^{(e)}(j) = |R_3 - R_1| \int_{\eta=0}^1 \sqrt{r(\eta)} N_j(\eta) d\eta$ foram calculadas pelo programa Maple-14.

Os respectivos vetores de carga, em cada elemento (e), são:

$$A_0 = \frac{2k_0}{\sqrt{\pi z_1 \epsilon_{r_1} \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}}$$

$$V^{(e)}(p = 1) = jA_0 \left(\frac{2}{105}\right) \left[\frac{(2R_3^3 + 14R_1R_3^2)\sqrt{R_3} - (9R_1^3 - 28R_3R_1^2 + 35R_3^2R_1)\sqrt{R_1}}{(R_1 - R_3)^2} \right]$$

$$V^{(e)}(p = 6) = jA_0 \left(\frac{16}{105}\right) \left[\frac{(3R_3^3 - 7R_1R_3^2)\sqrt{R_3} - (3R_3^3 - 7R_3R_1^2)\sqrt{R_1}}{(R_1 - R_3)^2} \right]$$

$$V^{(e)}(p = 3) = -jA_0 \left(\frac{2}{105}\right) \left[\frac{(2R_1^3 + 14R_3R_1^2)\sqrt{R_1} - (9R_3^3 - 28R_1R_3^2 + 35R_1^2R_3)\sqrt{R_3}}{(R_1 - R_3)^2} \right]$$

5 RESULTADOS SELECIONADOS: PERDA DE RETORNO E POTÊNCIA TRANSMITIDA NA ESTRUTURA

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, os passos necessários à aplicação do MEF, na modelagem de descontinuidades entre cabo coaxial, descontinuidade-coaxial e cabo coaxial, foram desenvolvidas minuciosamente.

Neste capítulo serão apresentados os requisitos que compõem a análise empreendida. Estes, as respostas da análise, são: a perda de retorno e a potência transmitida na estrutura.

5.2 Perda de Retorno

A perda de retorno da estrutura é definida:

$$\boxed{|S_{11}|^2 = \frac{P_s}{P_i}} \quad (1)$$

onde:

P_s - Potência espalhada, ou melhor, refletida na entrada da estrutura.

P_i - Potência incidente, na porta de entrada, por hipótese é unitária; $P_i = 1$ w.

S_{11} - Coeficiente de reflexão na porta-1, com a porta-2 casada, condição satisfeita na análise.

5.2.1 Cálculo da perda de retorno

Os campos eletromagnéticos no cabo coaxial, na entrada da estrutura, veja Figura 1 e eq.(29), capítulo-1:

$$\begin{aligned} \vec{H}_\theta(r, z) &= \left[H_\theta^{(i)}(R)e^{-jk_1z} + H_\theta^{(s)}(R)e^{+jk_1z} \right] \vec{a}_\theta \\ \vec{E}_r(r, z) &= Z_1 \left[H_\theta^{(i)}(R)e^{-jk_1z} - H_\theta^{(s)}(R)e^{+jk_1z} \right] \vec{a}_r \end{aligned} \quad (2)$$

onde, sob a condição de potência incidente na porta de entrada, pela eq.(45a), capítulo-2:

$$H_{\theta}^{(i)}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi Z_1 \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} \frac{1}{R} \quad (3)$$

- $H_{\theta}^{(i)}(r)$: Campo magnético incidente na porta de entrada $z = 0$, (onda direta).
- $H_{\theta}^{(s)}(r)$: Campo magnético espalhado, no cabo coaxial na entrada da estrutura, (onda retrógrada).
- $Z_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$: Impedância de onda do modo TEM ou impedância intrínseca do meio-1, (entrada da estrutura).
- a_1 : raio do condutor interno.
- b_1 : raio do condutor externo.

Na entrada da estrutura, $z=0$, pela eq.(2) e (3):

$$H_{\theta}(r) = H_{\theta}^{(i)}(R) + H_{\theta}^{(s)}(R) \quad (4)$$

Pela eq.(4) tem-se o campo espalhado $\left(H_{\theta}^{(s)}(r)\right)$ em função de $H_{\theta}(R)$ calculado pelo MEF e $H_{\theta}^{(i)}(R)$ conhecido, vide eq.(3):

$$H_{\theta}^{(s)}(R) = H_{\theta}(R) - H_{\theta}^{(i)}(R) \quad (5)$$

O objetivo é calcular a perda de retorno, na porta de entrada, que se relaciona às componentes elétrica e magnética espalhadas nesta porta:

$$\delta^{(s)}(r, z = 0) = \frac{1}{2} \text{Real} \left\{ E_r^{(s)}(R) H_{\theta}^{(s)}(R) [(\vec{a}_r \wedge \vec{a}_{\theta}) \cdot (-\vec{z})] \right\} \quad (6)$$

De acordo com a Figura 1, a potência espalhada flui na direção $(-\vec{z})$.

Cálculo do campo elétrico espalhado $\left(E_r^{(s)}(r)\right)$.

Parte-se da equação de Ampères, região sem fontes, veja eq.(20b), item-(1.3), capítulo-1:

Porta de entrada ($z=0$)

$$\nabla \wedge \vec{H}_\theta(R) = j\omega\epsilon_1 \vec{E}(R)$$

Portanto

$$j\omega\epsilon_1 \vec{E}(R) = -\frac{\partial H_\theta}{\partial z} \vec{r} + \frac{1}{R} \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial \theta} \vec{z} \quad (7)$$

Na eq.(7), a componente longitudinal do campo elétrico é nula, pois o campo magnético não depende da variável angular.

$$\text{Então } \frac{\partial(rH_\theta(R))}{\partial \theta} = 0.$$

Pela eq.(7)

$$\vec{E}(R) = \frac{-1}{j\omega\epsilon_1} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \vec{r}$$

Pela eq.(2)

$$\vec{E}(R) = \frac{k_1}{\omega\epsilon_1} \left[H_\theta^{(i)}(R) - H_\theta^{(s)}(R) \right] \vec{r} = \left[E^{(i)}(R) - E^{(s)}(R) \right] \vec{r} \quad (8)$$

A eq.(2) é confirmada pela eq.(8) onde $\frac{k_1}{\omega\epsilon_1} = Z_1$.

Pela eq.(8) tem-se o campo elétrico espalhado na porta de entrada da estrutura, $z = 0$.

$$\vec{E}^{(s)}(R) = -Z_1 H_\theta^{(s)}(R) \vec{r} \quad (9)$$

Substituindo a eq.(5) em (9), tem-se o campo elétrico espalhado em função das grandezas conhecidas $\left(H_\theta(r) \text{ e } H_\theta^{(i)}(r) \right)$:

$$\vec{E}^{(s)}(R) = -Z_1 \left[H_\theta(R) - H_\theta^{(i)}(R) \right] \vec{r} \quad (10)$$

Substituindo as eq.(10) e (5) em (6) obtém-se o vetor de Poynting espalhado na

porta de entrada da estrutura, $z = 0$:

$$\delta^{(s)}(R, z = 0) = \frac{Z_1}{2} \text{Real} [E^{(s)}(R) \cdot H^{(s)*}(R)]$$

Portanto

$$\delta^{(s)}(R, z = 0) = \frac{Z_1}{2} \text{Real} \left[\left(H_\theta(R) - H_\theta^{(i)}(R) \right) \cdot \left(H_\theta^*(r) - H_\theta^{(i)*}(r) \right) \right] \quad (11)$$

Cálculo da potência espalhada no acesso de entrada da estrutura

Pela expressão do vetor de Poynting na porta de entrada da estrutura, eq.(11), tem-se a potência espalhada na referida porta, vide Figura 6, capítulo-2:

$$P_s = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{R=a_1}^{b_1} \delta^{(s)}(R, z = 0) R dR d\theta \quad (12)$$

A eq.(12) é função, somente, da variável radial.

$$P_s = 2\pi \text{Real} \left\{ \frac{Z_1}{2} \int_{R=a_1}^{b_1} \left[\left(H_\theta(R) - H_\theta^{(i)}(R) \right) \cdot \left(H_\theta(R) - H_\theta^{(i)}(R) \right)^* \right] R dR \right\} \quad (13)$$

Desenvolvendo eq.(13)

$$P_s = 2\pi \text{Real} \left\{ \int_{R=a_1}^{b_1} \frac{Z_1}{2} \left[\left(|H_\theta(R)|^2 + |H_\theta^{(i)}(R)|^2 \right) - \left(H_\theta(R) H_\theta^{(i)*}(R) + H_\theta^*(R) H_\theta^{(i)}(R) \right) \right] R dR \right\} \quad (14)$$

Pela identidade dos números complexos $(A + A^*) = 2 \text{Real} (A)$, a eq.(14) se escreve:

$$P_s = 2\pi \frac{Z_1}{2} \left\{ \int_{R=a_1}^{b_1} \left| H_\theta^{(i)}(R) \right|^2 R dR + \text{Real} \left[\int_{R=a_1}^{b_1} |H_\theta(R)|^2 R dR \right] - 2 \text{Real} \left[\int_{R=a_1}^{b_1} H_\theta(R) H_\theta^{(i)*}(R) R dR \right] \right\} \quad (15)$$

Cálculo dos termos que compõem a eq.(15)

1 - O termo $I_1 = 2\pi \int_{R=a_1}^{b_1} \frac{Z_1}{2} \left| H_\theta^{(i)}(R) \right|^2 R dR$

O campo incidente, sob condição unitária de potência, eq.(3):

$$H_\theta^{(i)}(R, z = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi Z_1 \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} \frac{1}{R} \quad (16)$$

Portanto

$$I_1 = Z_1 \pi \int_{r=a_1}^{b_1} \left(H_\theta^{(i)}(R) \cdot H_\theta^{(i)*}(R) \right) r dr = \frac{1}{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)} \int_{R=a_1}^{b_1} \frac{dR}{R} = 1$$

Logo

$$I_1 = 2\pi \int_{R=a_1}^{b_1} \frac{Z_1}{2} \left| H_\theta^{(i)}(R) \right|^2 dR = \pi Z_1 \int_{R=a_1}^{b_1} \left| H_\theta^{(i)} \right|^2 dR = 1 \quad (17)$$

A eq.(17) confirma que a potência injetada na entrada da estrutura é unitária.

Hipótese inicial de análise.

2 - Seja o termo $I_2^{(e)} = -4\pi \text{Real} \left[\int_{R=a_1}^{b_1} \frac{Z_1}{2} \left(H_\theta(R) \cdot H_\theta^{(i)*}(R) \right) R dR \right]$

O termo $I_2^{(e)}$ será calculado no elemento (e) fronteiro ao acesso de entrada da estrutura. Portanto, se refere aos “nós” $p = (1, 6, 3)$ da interpolação quadrática em que se expandiu o campo magnético, no respectivo elemento. Veja Figura 6, capítulo-2.

Seja o elemento (e) e $p = (1, 6, 3)$

$$H_\theta^{(e)}(R) = \sum_{p=(1,6,3)} \bar{q}_p N_p(r) \quad (18)$$

O coeficiente (\bar{q}_p) da expansão do campo magnético no espaço real, se relaciona ao coeficiente (q_p) no espaço mapeado, vide a eq.(48), capítulo-2, por:

$$\bar{q}_p = \sqrt{R_p} q_p \quad (19)$$

O coeficiente (q_p) na eq.(19) é o auto-valor da matriz obtida pela aplicação do MEF, na formulação da análise, eq.(1), capítulo-4.

Assim, o campo magnético na porta de entrada da estrutura é expresso pela

seguinte equação:

$$H_{\theta}^{(e)}(R) = \sum_{p=(1,6,3)} \left(\sqrt{R_p} q_p \right) N_p(R) \quad (20)$$

Substituindo a eq.(20) e (16) em $I_2^{(e)}$, tem-se:

$$I_2^{(e)} = -4\pi \sum_{p=(1,6,3)} \sqrt{R_p} \text{Real}(q_p) \int_{R=a_1}^{b_1} \frac{Z_1}{2\sqrt{\pi Z_1 \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} N_p(R) dR \quad (21)$$

As integrais na eq.(21) são calculadas no elemento de referência:

	Elemento-Real	Elemento de Referência	Resultados
$p = 1$	$\int_{R_1}^{R_3} N_1(R) dR$	$ R_3 - R_1 \int_{\eta=0}^1 N_1(\eta) d\eta$	$\frac{1}{6} R_3 - R_1 $
$p = 6$	$\int_{R_1}^{R_3} N_6(R) dR$	$ R_3 - R_1 \int_{\eta=0}^1 N_6(\eta) d\eta$	$\frac{2}{3} R_3 - R_1 $
$p = 3$	$\int_{R_1}^{R_3} N_3(R) dR$	$ R_3 - R_1 \int_{\eta=0}^1 N_3(\eta) d\eta$	$\frac{1}{6} R_3 - R_1 $

onde:

$$L_1(\eta) = 1 - \eta$$

$$L_3(\eta) = \eta$$

$$R(\eta) = R_1 L_1(\eta) + R_3 L_3(\eta) = R_1 + (R_3 - R_1) \eta$$

$$N_1(\eta) = 2L_1^2(\eta) - L_1(\eta)$$

$$N_6(\eta) = 4L_1(\eta) \cdot L_3(\eta)$$

$$N_3(\eta) = 2L_3^2(\eta) - L_3(\eta)$$

(23)

Pelas eqs.(22) tem-se o termo da potência espalhada referente a $I_2^{(e)}$:

$$I_2^{(e)} = \frac{-2\pi}{3} \sqrt{\frac{30}{\sqrt{\epsilon_r} \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} |R_3 - R_1| \left[\sqrt{R_1} \text{Real}\left(q_1^{(e)}\right) + 4\sqrt{R_6} \text{Real}\left(q_6^{(e)}\right) + \sqrt{3} \text{Real}\left(q_3^{(e)}\right) \right] \quad (24)$$

$$3 - \underline{\underline{\text{Cálculo do termo}}} I_3^{(e)} = 2\pi \text{Real} \left[\int_{R=R_1}^{R_3} \frac{Z_1}{2} \left| H_{\theta}^{(e)}(R) \right|^2 R dR \right]$$

O campo magnético na entrada da estrutura é expandido pelas funções de forma, de acordo com a eq.(20):

$$\begin{aligned} H_\theta^{(e)}(R) &= \sum_{p=(1,6,3)} (\sqrt{R_p} q_p) N_p(R) \\ H_\theta^{(e)*}(R) &= \sum_{S=(1,6,3)} (\sqrt{R_S} q_S^*) N_S(R) \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo as eqs.(25) em $I_3^{(e)}$:

$$I_3^{(e)} = \pi \sum_p \sum_S \sqrt{R_p R_S} \text{Real}(q_p q_S^*) \int_{R=R_1}^{R_3} Z_1 N_p(R) N_S(R) R dR \quad (26)$$

Para cada elemento triangular (e) fronteiroço com a porta de entrada da estrutura, a eq.(26), é escrita:

$$\begin{aligned} I_3^{(e)} &= (\pi Z_1) \left\{ R_1 |q_1|^2 \int_{R_1}^{R_3} N_1(R) N_1(R) R dR + \sqrt{R_1 R_6} [q_1 q_6^* + q_1^* q_6] \int_{R_1}^{R_3} N_1(R) N_6(R) R dR \right. \\ &+ \sqrt{R_1 R_3} [q_1 q_3^* + q_1^* q_3] \int_{R_1}^{R_3} N_1(R) N_3(R) R dR + R_3 |q_3|^2 \int_{R_1}^{R_3} N_3(R) N_3(R) R dR \\ &\left. + \sqrt{R_3 R_6} [q_3 q_6^* + q_3^* q_6] \int_{R_1}^{R_3} N_3(R) N_6(R) R dR + R_6 |q_6|^2 \int_{R_1}^{R_3} N_6(R) N_6(R) R dR \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

Aplicando a identidade dos números complexos $(A + A^*) = 2 \text{Real}(A)$ na eq.(27), tem-se:

$$\begin{aligned} I_3^{(e)} &= \pi Z_1 \left\{ R_1 |q_1|^2 \int_{R_1}^{R_3} N_1^2(R) R dR + R_6 |q_6|^2 \int_{R_1}^{R_3} N_6^2(R) R dR + R_3 |q_3|^2 \int_{R_1}^{R_3} N_3^2(R) R dR \right. \\ &+ 2 \left[\sqrt{R_1 R_6} \text{Real}(q_1 q_6^*) \int_{R_1}^{R_3} N_1(R) N_6(R) R dR + \sqrt{R_1 R_3} \text{Real}(q_1 q_3^*) \int_{R_1}^{R_3} N_1(R) N_3(R) R dR \right. \\ &\left. \left. + \sqrt{R_3 R_6} \text{Real}(q_3 q_6^*) \int_{R_1}^{R_3} N_3(R) N_6(R) R dR \right] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

As integrais da eq.(28) são calculadas no elemento de referência, com auxílio das eqs.(23):

$$\begin{array}{l}
\int N_1(R)N_1(R)RdR = \frac{|R_3-R_1|}{60} (7R_1 + R_3) \\
\int N_6(R)N_6(R)RdR = \frac{4|R_3-R_1|}{15} (R_1 + R_3) \\
\int N_3(R)N_3(R)RdR = \frac{|R_3-R_1|}{60} (7R_3 + R_1) \\
\hline
\int N_1(R)N_3(R)RdR = -\frac{|R_3-R_1|}{60} (R_1 + R_3) \\
\int N_1(R)N_6(R)RdR = \frac{|R_3-R_1|}{15} R_1 \\
\int N_3(R)N_6(R)RdR = \frac{|R_3-R_1|}{15} R_3
\end{array} \quad (29)$$

Substituindo as integrais das eqs.(29) em (28) tem-se o termo $I_3^{(e)}$, da potência espalhada, referente ao elemento triangular (e), fronteiro à porta de entrada da estrutura:

$$\begin{aligned}
I_3^{(e)} = \pi Z_1 |R_3 - R_1| & \left\{ \frac{R_1 |q_1^{(e)}|^2}{60} (7R_1 + R_3) + \frac{4R_6 |q_6^{(e)}|^2}{15} (R_1 + R_3) + \frac{R_3 |q_3^{(e)}|^2}{60} (7R_3 + R_1) \right. \\
& \left. + 2 \left[\frac{\sqrt{R_1 R_6} \operatorname{Real}(q_1 q_6^*)^{(e)}}{15} \cdot R_1 - \frac{\sqrt{R_1 R_3} \operatorname{Real}(q_1 q_3^*)^{(e)}}{60} \cdot (R_1 + R_3) + \frac{\sqrt{R_3 R_6} \operatorname{Real}(q_3 q_6^*)^{(e)}}{15} \cdot R_3 \right] \right\} \quad (30)
\end{aligned}$$

Como era esperado, os termos que compõem a potência espalhada $(I_1^{(e)}, I_2^{(e)}, I_3^{(e)})$ são todos reais.

A potência espalhada pela porta de entrada da estrutura é o somatório das potências de todos os elementos triangulares (e) que compõem a respectiva fronteira.

Pelas Figura 6, capítulo-2, ou Figura 15, capítulo-4. Considere $e = 1, 2, 3 \dots N_e$.

Então, a potência espalhada pela respectiva porta será:

$$\begin{aligned}
P_S = 1 + \sum_{e=1,2}^{N_e} |R_3 - R_1|_{(e)} & \left\{ \frac{-2\pi}{3} \sqrt{\frac{30}{\sqrt{\epsilon_r} \ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}} \left[\sqrt{R_1} \operatorname{Real}\left(q_1^{(e)}\right) + 4\sqrt{R_6} \operatorname{Real}\left(q_6^{(e)}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{3} \operatorname{Real}\left(q_3^{(e)}\right) \right] + \frac{\pi^2 120}{\sqrt{\epsilon_r}} \left[\frac{R_1 |q_1^{(e)}|^2}{60} (7R_1 + R_3) + \frac{4R_6 |q_6^{(e)}|^2}{15} (R_1 + R_3) + \frac{R_3 |q_3^{(e)}|^2}{60} (7R_3 + R_1) \right] \right. \\
& \left. + 2 \left[\frac{\sqrt{R_1 R_6} \operatorname{Real}(q_1 q_6^*)^{(e)}}{15} \cdot R_1 + \frac{\sqrt{R_3 R_6} \operatorname{Real}(q_3 q_6^*)^{(e)}}{15} \cdot R_3 - \frac{\sqrt{R_1 R_3} \operatorname{Real}(q_1 q_3^*)^{(e)}}{60} \cdot (R_1 + R_3) \right] \right\} \quad (31)
\end{aligned}$$

Pela definição de perda de retorno:

$$|S_{11}|^2 = \frac{P_S}{P_i}$$

Como potência incidente na estrutura é unitária, $P_i = 1$ w, a perda de retorno procurada, $|S_{11}|^2 = P_S$, é a potência espalhada pelo acesso de entrada da estrutura, ou seja, a potência calculada pela eq.(31).

5.3 Potência Transmitida pela Estrutura

Em cada elemento (e) fronteiroço à saída da estrutura ($z = t_2$), veja Figura 6, capítulo-2, e Figura 15, capítulo-4, o campo magnético nos respectivos “nós” $p = (1, 6, 3)$ do elemento, se escreve:

$$\vec{H}_\theta^{(e)}(r, z = t_2) = \sum_{p=(1,6,3)} \bar{q}_p N_p(r) e^{-jk_2 t_2} \vec{a}_\theta \quad (32)$$

Observe que devido ao cabo coaxial, na saída da estrutura, estar casado, a onda eletromagnética, nesta seção, é uma onda direta, não há onda reversa.

Os coeficientes (\bar{q}_p) da expansão do campo magnético, pelas funções de forma, no espaço real, se relacionam aos do espaço mapeado, veja eq.(48) capítulo-2, por:

$$\bar{q}_p = \sqrt{R_p} q_p \quad (33)$$

Os coeficientes (q_p) no espaço mapeados são os calculados pelo MEF.

Os campos elétricos nos respectivos “nós” $p = (1, 6, 3)$, do elemento em questão, são obtidos com o mesmo raciocínio do ítem anterior, considerando na eq.(8), somente, a onda direta:

$$\vec{E}_r^{(e)}(R, z = t_2) = \frac{k_2}{\omega \epsilon_2} H_\theta^{(e)}(R, z = t_2) \vec{a}_r$$

Assim, levando a eq.(33) em (32):

$$\begin{aligned} \vec{E}_r^{(e)}(R, z = t_2) &= Z_2 \sum_{p=(1,6,3)} \sqrt{R_p} N_p(R) e^{-jk_2 t_2} \vec{a}_r \\ e \\ \vec{H}_\theta^{(e)}(R, z = t_2) &= \sum_{S=(1,6,3)} \sqrt{R_S} N_S(R) e^{-jk_2 t_2} \vec{a}_\theta \end{aligned} \quad (34)$$

Onde $Z_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}$.

A contribuição de cada elemento (e), fronteiroço à saída da estrutura, é função do vetor de Poynting que flui pela respectiva fronteira, ou seja

$$\delta^{(e)}(R, z = t_2) = \text{Real} \left[\frac{1}{2} \left(\vec{E}_r(R, z = t_2) \wedge \vec{H}_\theta^*(R, z = t_2) \right) \cdot \vec{Z} \right] \quad (35)$$

Perceba que a onda direta, veja Figura 15 capítulo-4, flui na direção $(+\vec{z})$.

Substituindo as eq.(34) em (35), tem-se o vetor de Poynting relacionado ao elemento fronteiroço (e):

$$\delta_f^{(e)}(R, z = t_2) = \frac{Z_2}{2} \sum_{p=(1,6,3)} \sum_{S=(1,6,3)} \sqrt{R_p R_s} \text{Real} (q_p q_S^*) N_p(R) N_S(R) \quad (36)$$

A contribuição de cada elemento na potência que flui pela saída da estrutura será

$$P_f^{(e)} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{R=R_3}^{R_1} \delta_f^{(e)}(R, z = t_2) R d\theta dR \quad (37)$$

Substituindo as eq.(36) em (37):

$$P_f^{(e)} = 2\pi \sum_{p=(1,6,3)} \sum_{S=(1,6,3)} \sqrt{R_p R_s} \text{Real} (q_p q_S^*) \int_{R_3}^{R_1} \frac{Z_2}{2} N_p(R) N_S(R) R dR \quad (38)$$

A eq.(38) é a mesma da eq.(26), referenciada na entrada da estrutura.

Enfatizando; as integrais de ambas as equações, isto é, a integral da eq.(38) em P_f e da eq.(26) em $I_3^{(e)}$, são idênticas, como foi demonstrado no ítem (4.2.2.1) - “Cálculo da integral de linha na fronteira (1, 6, 3)”, no capítulo-4.

Portanto, pela eq.(29), isto é, pelo termo $I_3^{(e)}$, tem-se a solução da eq.(38), $P_f^{(e)}$, a contribuição, da potência que flui pela saída da estrutura, de cada elemento fronteiroço à respectiva fronteira.

$P_f^{(e)} \rightarrow$ basta substituir na eq.(30), $Z_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$, da entrada da estrutura, por, $Z_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}$, da saída, assim como, referenciar os parâmetros: (R_1, q_1) , (R_6, q_6) e (R_3, q_3) aos da saída da estrutura.

A potência que flui pela saída de uma estrutura, constituída por N_e elementos fronteiroços será:

$$P_f = \sum_{e=1,2}^{N_e} P_f^{(e)}$$

5.4 Balanceamento da Energia

O balanceamento da energia é um parâmetro adequado à verificação dos resultados encontrados.

O balanceamento da energia é definido por:

$$P_i = P^{(s)} + P_f$$

Como a análise foi desenvolvida sob a hipótese de que $P_i = 1$ w, então, a condição que as grandezas calculadas devem satisfazer é

$$1 = P^{(s)} + P_f$$

onde:

$P^{(s)}$ - Potência espalhada pela porta de entrada ($z = 0$).

P_f - Potência que flui pela porta de saída da estrutura ($z = t_2$).

$P_i = 1$ w - Potência injetada na estrutura, pela porta de entrada ($z = 0$).

6 VALIDAÇÃO DO MÉTODO

6.1 Introdução

Utilizando-se o formalismo desenvolvido nesta dissertação, diversas estruturas relacionadas às descontinuidades, cabo coaxial→descontinuidade coaxial→cabo coaxial, foram analisadas no que diz respeito ao comportamento da sua perda de retorno, para a faixa de 1 a 20 GHz, ora sob a influência de corrugações, ora sob a influência de variação angular nos condutores interno e externo, e, por fim, ora sob a influência de ambos, como veremos a seguir.

Deve-se frisar que devido aos computadores utilizados na colheita dos resultados não apresentarem uma potencialidade que permitisse a utilização de uma rede densa, os gráficos obtidos, como era de se esperar, oscilaram em torno daqueles de convergência absoluta.

Entretanto, como o objetivo era desenvolver um método que permitisse analisar as respectivas descontinuidades no cabo coaxial, esses resultados demonstraram que o método é confiável, com um alto grau de convergência em malhas densas.

6.1.1 Estruturas analisadas

6.1.1.1 Estrutura 01: Estrutura de Linha de Transmissão (L. T.) com corrugação e sem desnível

Foi analisado uma estrutura com uma corrugação mostrada na Figura 16.

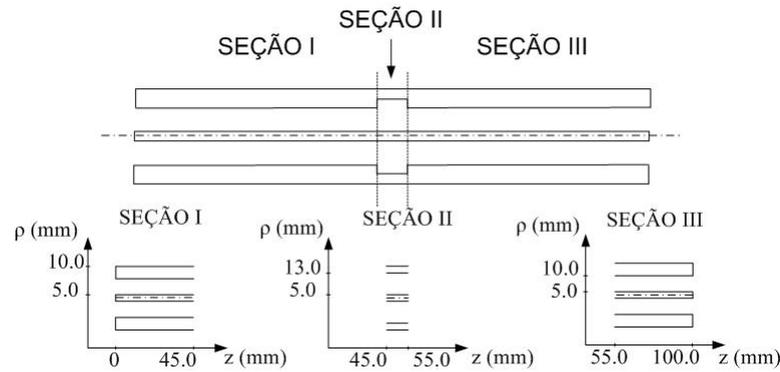


Figura 16 Estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.

Com o objetivo de validar o método desenvolvido neste trabalho, comparou-se o comportamento da perda de retorno para a faixa de 1 a 20 GHz com os resultados obtidos pelo Método do Casamento Modal (MCM)[7], vide Figura 17. Percebe-se o alto grau de concordância entre ambos os métodos.

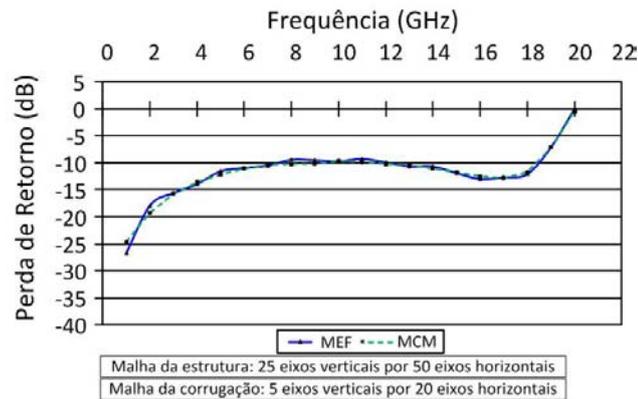


Figura 17 Resultados da perda de retorno utilizando o MCM e o MEF, para a estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.

Na Figura 18 é mostrada a fase e na Figura 19 o valor de $[r H(r)]$, ambos para as portas de entrada e de saída da estrutura. Por meio destas figuras constata-se o alto grau de concordância dos resultados obtidos pelo formalismo elaborado neste trabalho, pois sabe-se que para o modo TEM as frentes de onda são superfícies equi-fases e o campo magnético varia inversamente proporcional ao raio, fato esse mostrado pela Figura 19 por meio do produto do raio pelo campo magnético no respectivo ponto, o qual é constante. Esses resultados confirmam que os modos existentes, nas portas de entrada e saída da

estrutura, são realmente o TEM.

Isto ocorre devido às respectivas portas estarem suficientemente afastadas da seção de transição, não possibilitando a presença dos modos evanescentes originados na descontinuidade da seção II.

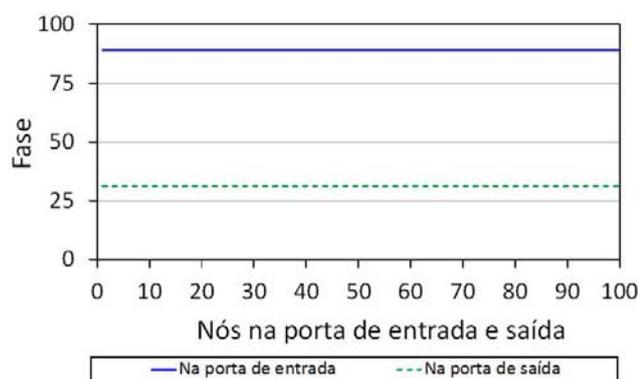


Figura 18 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.

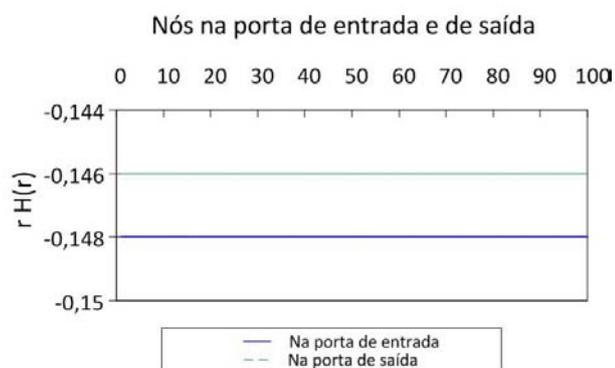


Figura 19 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.

A seguir, considerou-se a estrutura da Figura 16 com a seguinte modificação: a altura das corrugações passou de 3.0 mm para 1.0 mm, vide Figura 20.

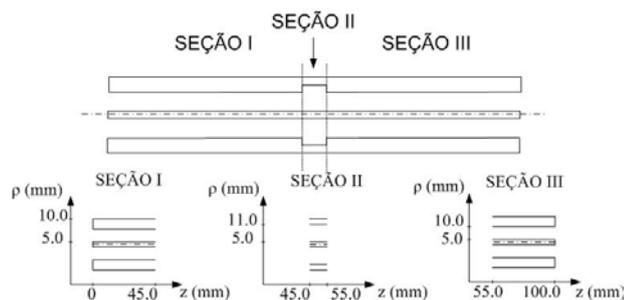


Figura 20 Estrutura de L.T. com corrugação no condutor interno e externo.

A perda de retorno calculada pelo método deste trabalho foi comparada, também, com os resultados do MCM [7] mostrados na Figura 21.

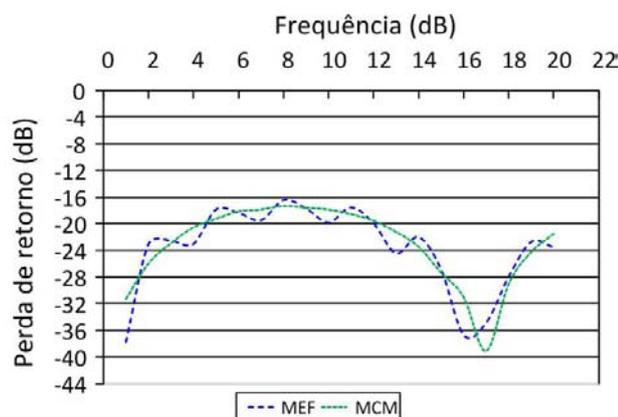


Figura 21 Resultados da perda de retorno utilizando o MCM e o MEF, para a estrutura de L.T. com corrugação modificada no condutor interno e externo.

Como mostra a Figura 21, os resultados, encontrados com 25 eixos verticais e 30 horizontais e a malha na corrugação com 5 verticais e 20 horizontais, oscilaram em torno daqueles considerados exatos, obtidos pelo MCM.

Verifica-se, prontamente, que o método apresentado neste trabalho fornece, portanto, resultados confiáveis.

6.1.1.2 Estrutura 02: L. T. com um anel dielétrico, sem corrugação e sem desnível

A mesma análise foi realizada para uma estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico, mostrado na Figura 22.

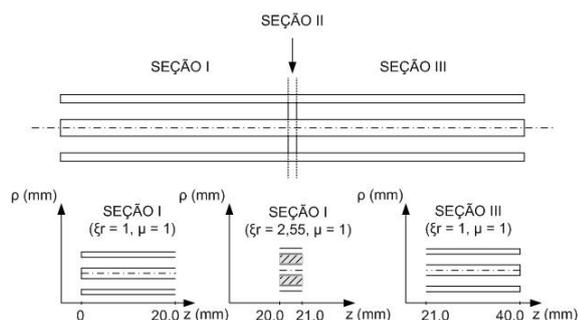


Figura 22 Estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.

Com o objetivo de comprovar a exatidão do método desenvolvido, confrontou-se o comportamento da perda de retorno para a faixa de 1 a 20 GHz com os resultados obtidos pelo Método do Casamento Modal (MCM).

Novamente, os resultados encontrados por este trabalho demonstraram boa concordância com o Método do Casamento Modal.

A pequena discordância observada na Figura 23 foi devido à limitação do recurso computacional à disposição, o qual, por meio da capacidade de memória útil, limitou a análise a uma rede composta por 38 eixos verticais e 40 eixos horizontais.

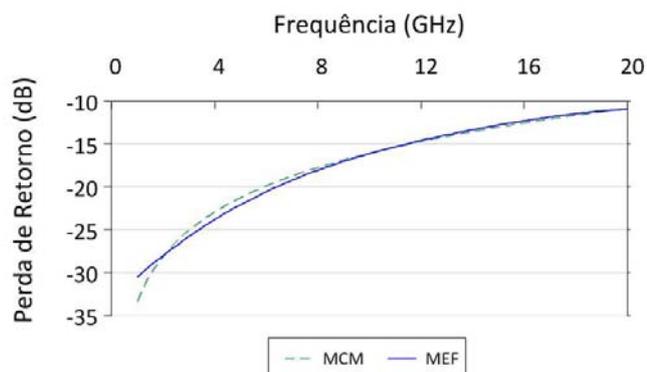


Figura 23 Resultados da perda de retorno utilizando o MCM e o MEF, para a estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.

As Figura 24 e Figura 25, relacionadas às equi-fases e ao $[r H(r)]$, confirmam as propriedades fundamentais do modo TEM.

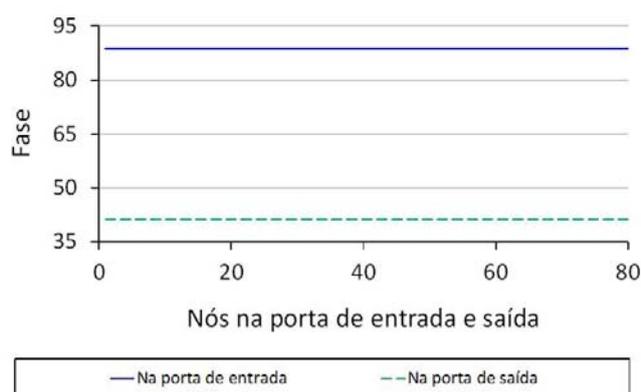


Figura 24 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.

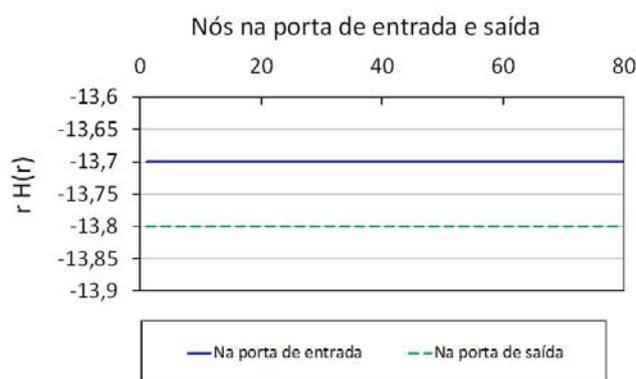


Figura 25 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. lisa, sem desnível e com um anel dielétrico.

6.1.1.3 Estrutura 03: L. T. sem corrugação e com desnível angular do condutor interno

Neste ítem serão analisados dois cabos coaxiais, interligados por uma estrutura que sofrerá variação angular no seu condutor interno. Esta variação será efetuada no intervalo angular de 0° até o ângulo crítico, quando, então, o condutor interno se encontra ao externo.

Na Figura 26 vê-se a estrutura sem variação angular. Ela é constituída por 3 seções. As seções I e II têm um comprimento suficiente para que na porta de entrada e de saída da estrutura haja somente o modo TEM puro, e são, respectivamente, de 10 mm

e 30 mm. A seção correspondente à descontinuidade é a seção II, cujo comprimento é de 60 mm.

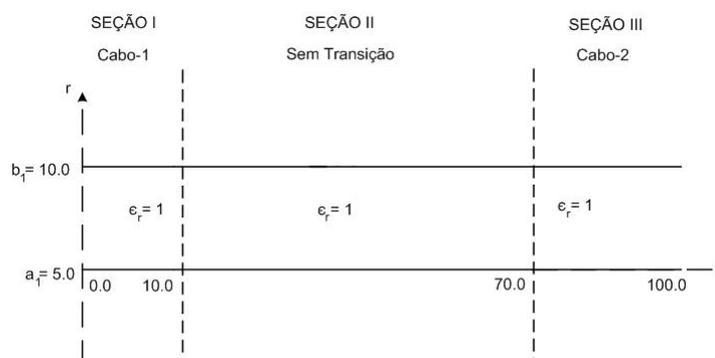


Figura 26 Estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.

A análise da perda de retorno com a frequência, da estrutura sem desnível, é mostrada na Figura 27. A perda de -35 dB foi obtida com uma malha limitada em 40 eixos verticais e 40 horizontais, à capacidade computacional máxima. Para malhas de alta densidade, os resultados da perda de retorno, Figura 27, apresentaria valores mais condizentes com os esperados. Entretanto, com os recursos disponíveis, o programa mostrou-se ser suficientemente confiável.

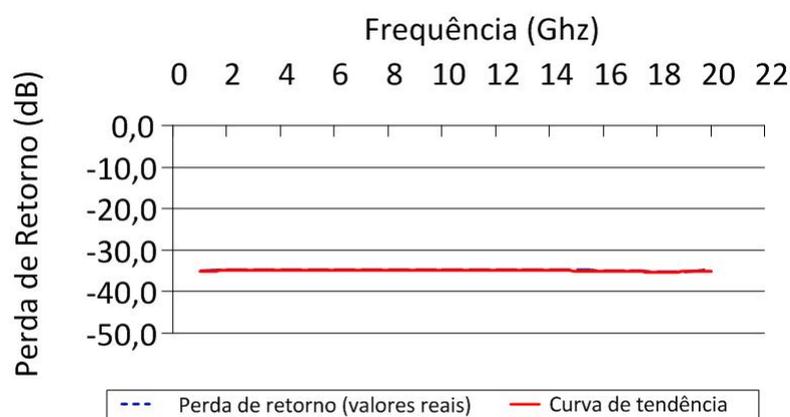


Figura 27 Resultados da perda de retorno na porta de saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.

Nas Figura 28 e Figura 29 são vistos, respectivamente, a fase e o comportamento $[r H(r)]$ na entrada e na saída da estrutura. Evidenciando a presença única do modo TEM.

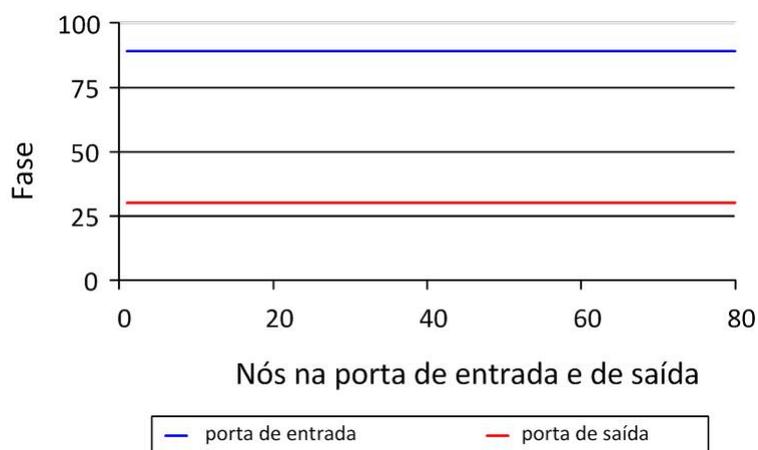


Figura 28 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.

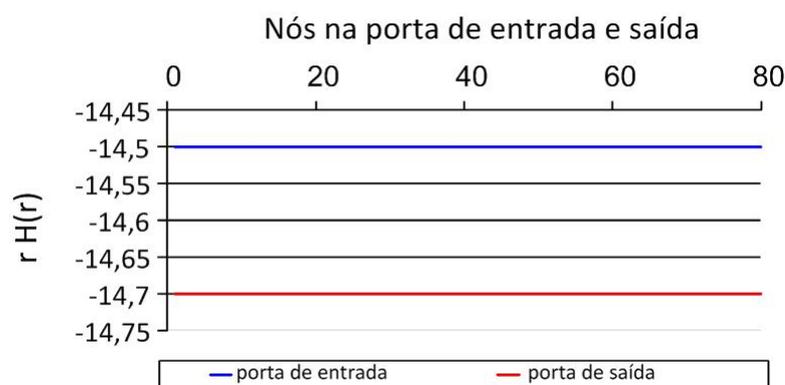


Figura 29 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e sem desnível.

A seguir, a estrutura mostrada na Figura 26 terá a seção II modificada por um desnível angular do condutor interno no intervalo de $0 < \theta < 4,7636^\circ$, vide Figura 30. O ângulo $4,7636^\circ$ corresponde ao desnível em que o condutor interno encontra o externo, conseqüentemente, transformando a saída da estrutura em uma descontinuidade em curto-circuito. Nesta condição é esperada uma perda de retorno de 0 dB, vide Figura 38.

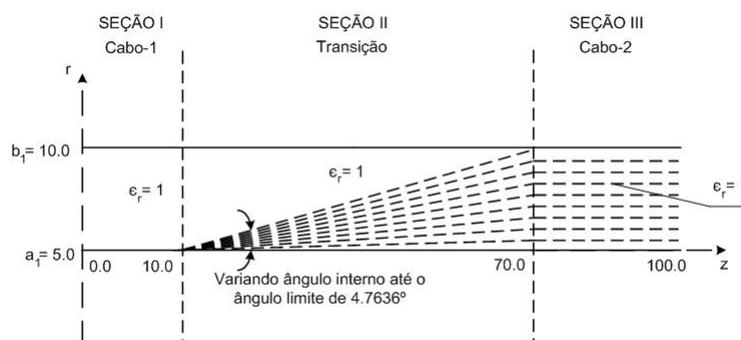


Figura 30 Estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível angular no condutor interno para o intervalo de $0 < \theta < 4,7636^\circ$.

- Desnível de $0,5^\circ$ no condutor interno:

Na Figura 31 percebe-se o comportamento da perda de retorno com um desnível de $0,5^\circ$ no condutor interno. Comparando-a com a Figura 27 do guia liso verifica-se uma degradação no comportamento da estrutura, como era de se esperar.

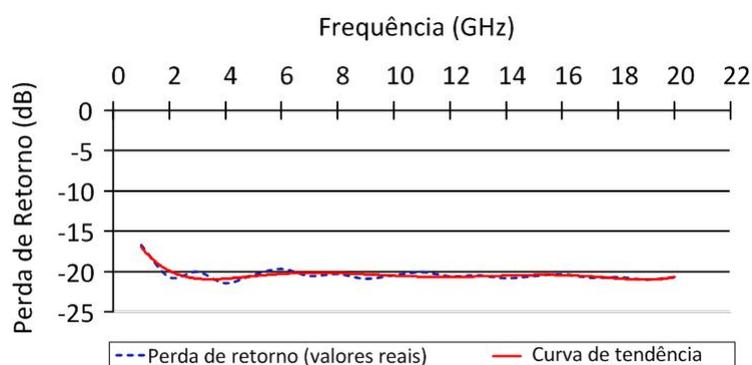


Figura 31 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $0,5^\circ$ no ângulo interno.

- Desnível de $1,0^\circ$ no condutor interno:

Alterando o desnível, agora para $1,0^\circ$, a degradação da perda de retorno acentua, como visto na Figura 32.

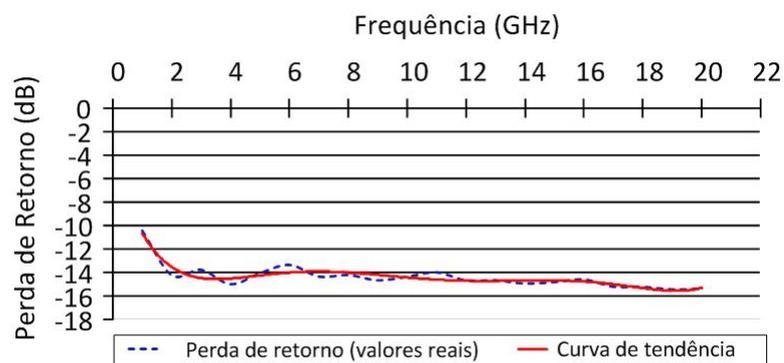


Figura 32 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,0^\circ$ no ângulo interno.

- Desnível de $1,5^\circ$ no condutor interno:

Com $1,5^\circ$, a degradação acentua-se nas frequências inferiores, permanecendo quase inalterada nas superiores, embora em toda a faixa a perda seja menor do que 15 dB.

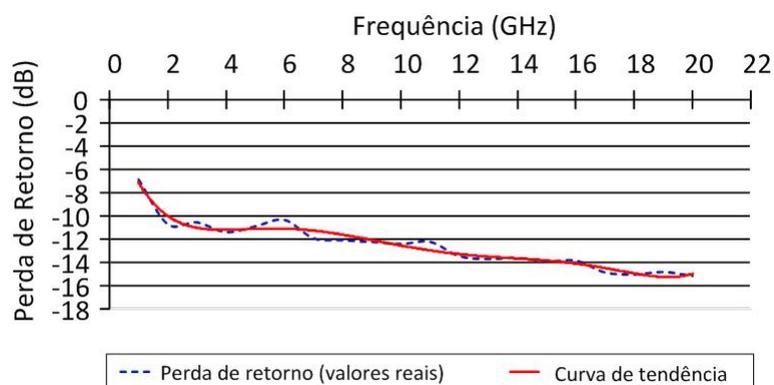


Figura 33 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,5^\circ$ no ângulo interno.

Analisou-se, também, o comportamento da fase e o valor $[r H(r)]$ nas portas de entrada e de saída da estrutura, como mostram a Figura 34 e a Figura 35, o qual confirma a presença de um único modo TEM em ambas as portas.



Figura 34 Resultados da fase nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,5^\circ$ no ângulo interno.

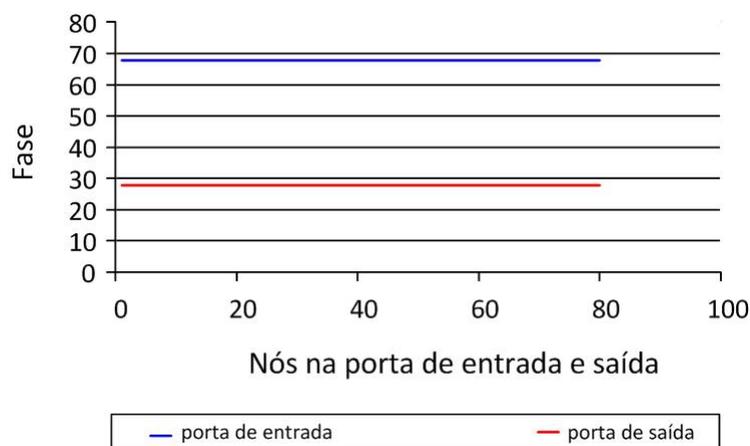


Figura 35 Resultados do comportamento $[r H(r)]$ nas portas de entrada e saída, para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $1,5^\circ$ no ângulo interno.

- Desnível de $2,0^\circ$ no condutor interno:

Com o desnível de $2,0^\circ$ a perda de retorno continua extremamente alta, apresentando uma banda entre 07 e 11 GHz com o valor em torno de - 15 dB, vide Figura 36.

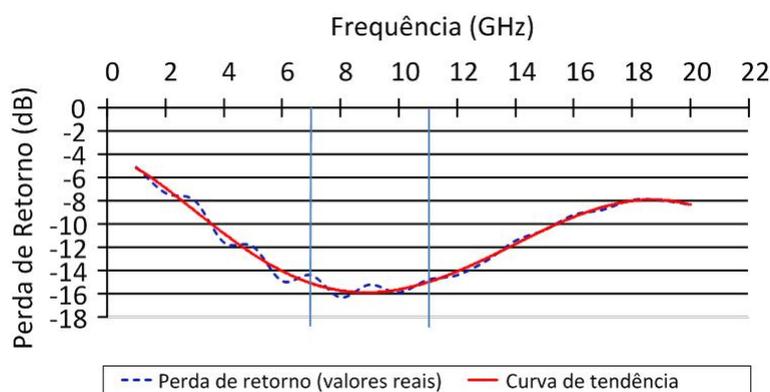


Figura 36 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $2,0^\circ$ no ângulo interno.

- Desnível de $2,5^\circ$ no condutor interno:

Com esse desnível a perda de retorno, mostrada na Figura 37, aumenta e a faixa em que seu valor é menor se desloca para um valor entre 9 e 14 GHz, em torno de 11,5 GHz.

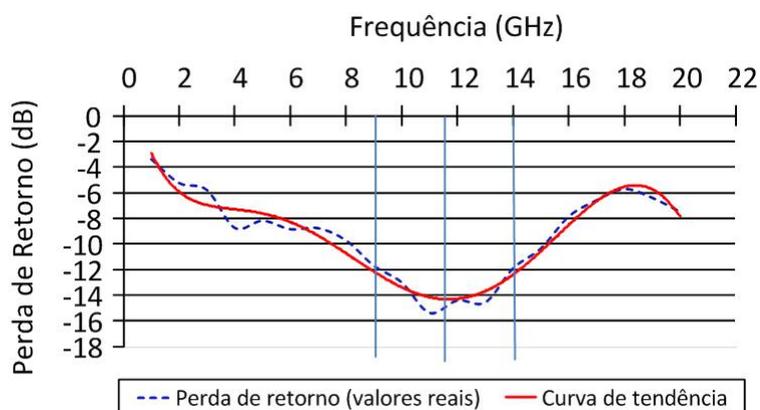


Figura 37 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $2,5^\circ$ no ângulo interno.

- Desnível de $4,7636^\circ$ no condutor interno:

Com esse desnível de $4,7636^\circ$ o condutor interno entra em contato com o externo, configurando uma descontinuidade em curto-circuito. A perda de retorno, como esperado, é total, conforme mostrado na Figura 38.

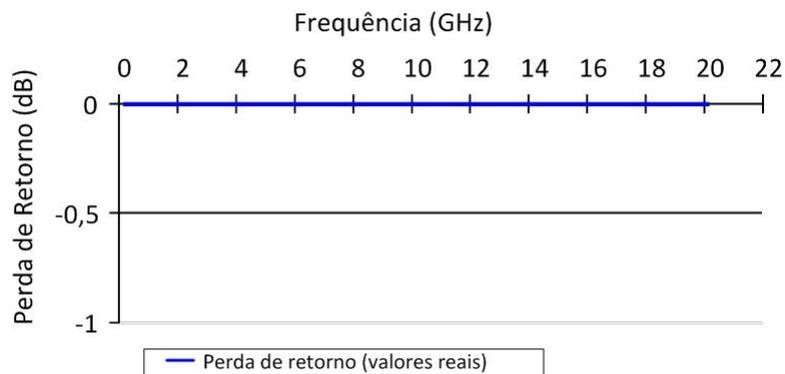


Figura 38 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. sem corrugação e com desnível de $4,7636^\circ$ no ângulo interno.

6.1.1.4 Estrutura 04: L. T. com corrugação, com desnível fixo no ângulo do condutor interno e variável no ângulo do condutor externo

Esta análise foi realizada com uma malha de 4500 nós referenciados à 30 eixos horizontais e 36 verticais na estrutura, enquanto que a corrugação foi discretizada com 3 eixos verticais e 4 horizontais.

Na Figura 39 vê-se a estrutura de L.T. com corrugação e sem desnível angular, cujo resultado da perda de retorno é mostrado na Figura 40.

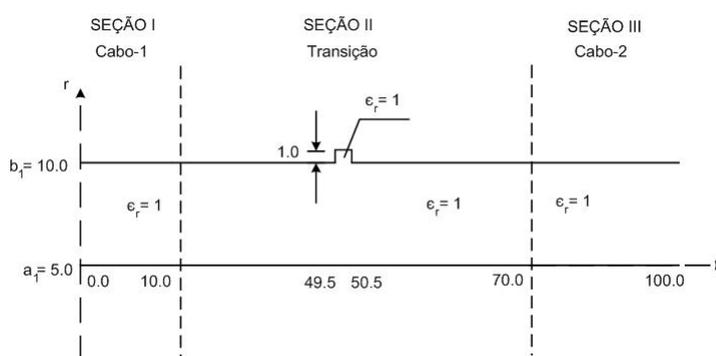


Figura 39 Estrutura de L.T. com corrugação e sem desnível angular.

Percebe-se que os resultados encontrados são muito semelhantes ao da Figura 27, referente à estrutura de L.T. lisa e sem desnível. Esta semelhança, que não deveria ocorrer, pois a estrutura da Figura 39 é corrugada e a da Figura 26 é lisa, deve-se à fraca discretização em torno da corrugação, a qual é negligenciada na análise.

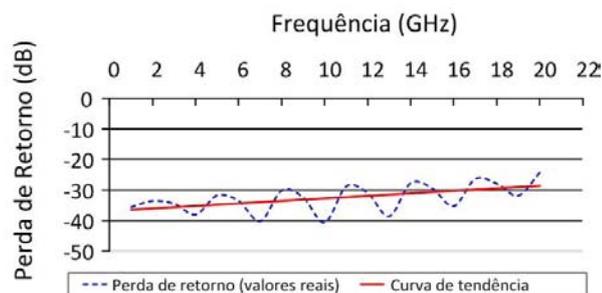


Figura 40 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação e sem desnível.

A seguir será analisada uma transição, com a corrugação mostrada na Figura 39, sob a variação angular de 2° no ângulo do condutor interno e variações angulares no condutor externo até o limite de 15° , como mostra a Figura 41.

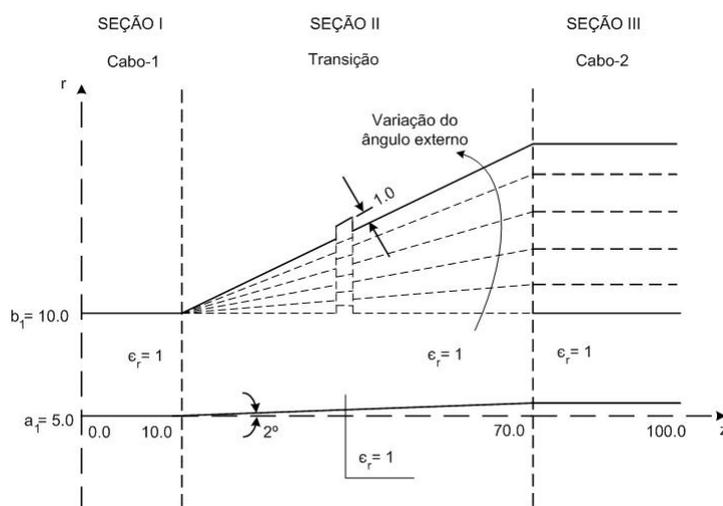


Figura 41 Estrutura de L.T. com corrugação, sob a variação angular de 2° no ângulo do condutor interno e variações angulares no condutor externo até o limite de 15° .

Os resultados da perda de retorno das estruturas analisadas, a seguir, apresentam comportamento oscilatório que foi suavizado por intermédio de uma interpolação de polinômio de grau 6, vista pela linha cheia nos gráficos. A linha pontilhada se refere aos resultados obtidos. Esta oscilação decorre da impossibilidade de se aplicar uma discretização superior a 5000 pontos, que é extremamente limitada para o objetivo pretendido.

- Desnível de $2,0^\circ$ no condutor interno e sem desnível no externo:

Essa estrutura, mostrada na Figura 42, é a base das análises subsequentes que serão efetuadas variando-se o ângulo do condutor externo.

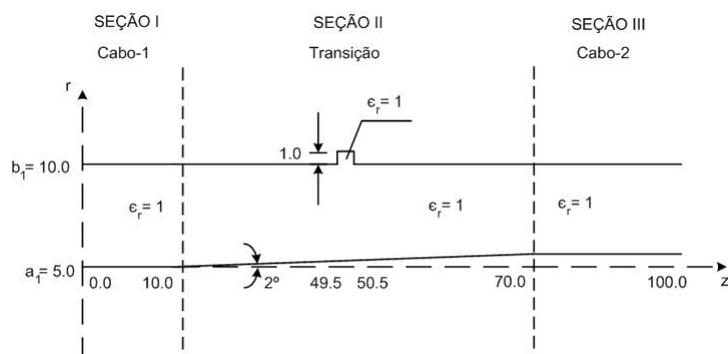


Figura 42 Estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e sem desnível no externo.

Com relação à perda de retorno da estrutura sem desnível, vide Figura 40, percebe-se que tal desnível no condutor interno, embora seja de $2,0^\circ$, provoca uma perda de retorno não desprezível.

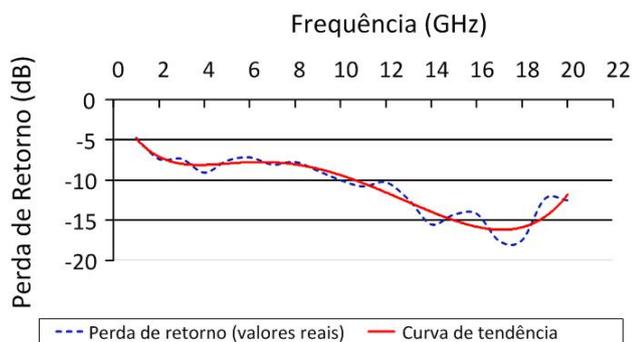


Figura 43 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e sem desnível no externo.

Comparando com a Figura 36, referente a uma estrutura idêntica a da Figura 42, porém sem corrugação, nota-se uma semelhança entre as respectivas perdas de retorno.

Este fato comprova que a fraca discretização em torno da corrugação, de 03 eixos verticais e 04 eixos horizontais, está muito aquém da discretização exigida para que o resultado levasse em conta a referida corrugação.

As três análises, a seguir, mostram um comportamento inusitado da perda de retorno com o desnível angular tendendo ao paralelismo entre os respectivos condutores.

O que se verificou é que na medida em que os condutores vão se tornando paralelos, a perda de retorno tende a diminuir até o limite de $2,0^\circ$ em cada condutor, quando ocorre o paralelismo. A partir desse valor a perda volta a se deteriorar, como visto nas figuras a seguir:

- Desnível de $2,0^\circ$ no condutor interno e de $0,5^\circ$ no externo:

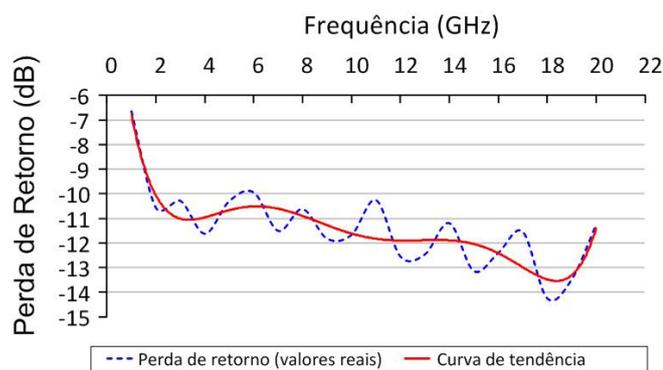


Figura 44 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $0,5^\circ$ no externo.

- Desnível de $2,0^\circ$ no condutor interno e de $1,0^\circ$ no externo:

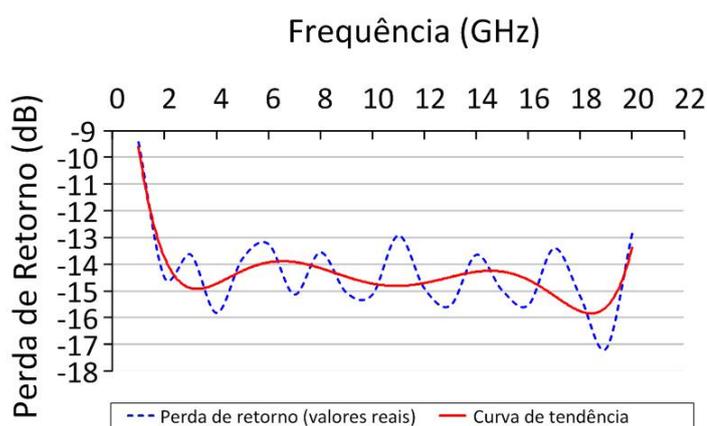


Figura 45 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $1,0^\circ$ no externo.

- Desnível de $2,0^\circ$ no condutor interno e de $2,0^\circ$ no externo:

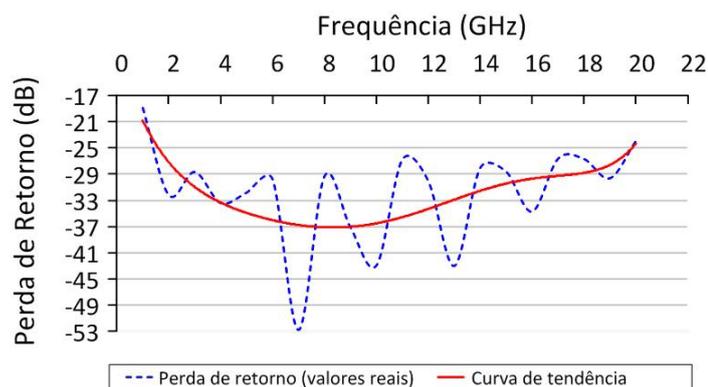


Figura 46 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $2,0^{\circ}$ no externo.

Constata-se na Figura 46 (paralelismo entre os dois condutores) uma melhoria da perda de retorno com relação aos desníveis contínuos, apresentados nas Figuras 43, 44 e 45.

Desnível de $2,0^{\circ}$ no condutor interno e desníveis superiores a $2,0^{\circ}$ no externo:

- Desnível de $2,0^{\circ}$ no condutor interno e de $5,0^{\circ}$ no externo:

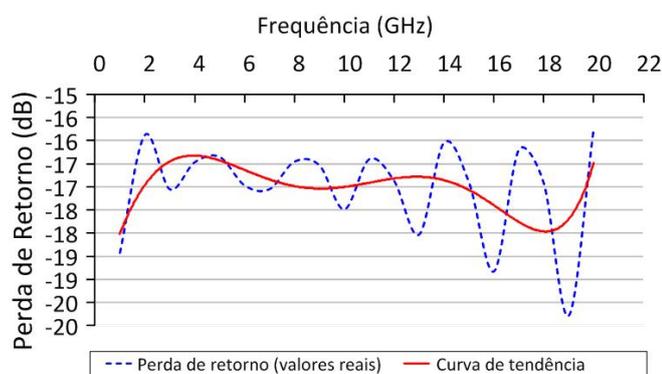


Figura 47 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $5,0^{\circ}$ no externo.

- Desnível de $2,0^{\circ}$ no condutor interno e de $10,0^{\circ}$ no externo:

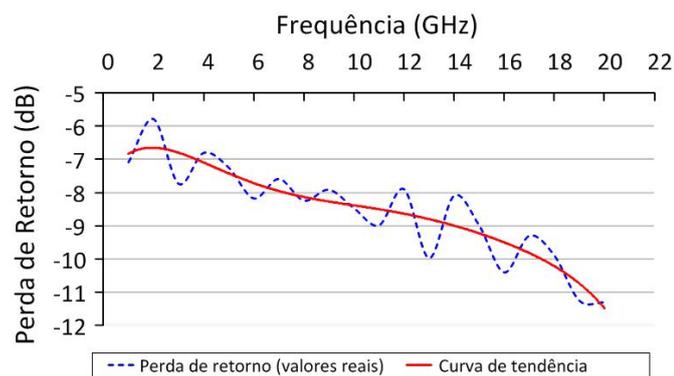


Figura 48 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $10,0^{\circ}$ no externo.

- Desnível de $2,0^{\circ}$ no condutor interno e de $15,0^{\circ}$ no externo:

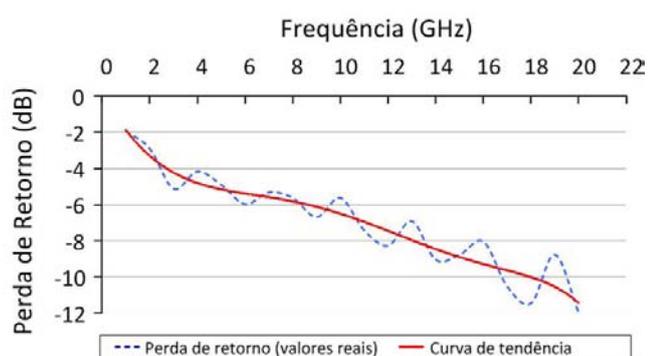


Figura 49 Resultados da perda de retorno para a estrutura de L.T. com corrugação, com desnível de 2° no condutor interno e de $15,0^{\circ}$ no externo.

As perdas de retorno, mostradas nas Figuras 47, 48 e 49, com desnível no condutor externo superior a $2,0^{\circ}$, respectivamente com $5,0^{\circ}$, $10,0^{\circ}$ e $15,0^{\circ}$, suscitaram a degradação destas em função da redução do paralelismo entre os condutores.

7 CONCLUSÃO

Na execução desta dissertação verificou-se que, dentre os métodos reconhecidos no formalismo da análise empreendida, aquele que apresenta o maior grau de dificuldade foi o adotado. Para essa análise recomenda-se a metodologia referenciada em [5], em que a equação de Helmholtz é usada diretamente para formular o problema sem necessidade das transformações exigidas pelo método adotado neste trabalho.

A análise destas descontinuidades exige uma robusta malha de discretização da estrutura em elementos finitos, o que implica num refinamento na armazenagem dos elementos da matriz resultante. Este refinamento na armazenagem é obtido pela técnica da matriz banda, uma vez que o Método dos Elementos Finitos é condizente a matrizes desta natureza. Este critério não foi adotado neste trabalho, o que limitou a capacidade de discretização da estrutura em elementos finitos. Foi utilizada matriz plena que exige uma elevada quantidade de memória de armazenamento. Os computadores disponíveis na execução do trabalho não permitiram um armazenamento superior a 5700 nós, o que forneceu resultados aproximados em torno dos esperados.

Apesar das dificuldades apontadas, o método se mostrou perfeitamente confiável, fornecendo para muitas estruturas resultados com um alto grau de concordância com aqueles já validados pelo Método de Casamento de Modos.

REFERÊNCIAS

- [1] R. E. Collin, “Engenharia de Microondas”. Mack Grand Hill, 1973.
- [2] J. R. Bergmann, F.J.V. Harselmann e M.G.C. Branco, “A Single-Reflector Design for Omnidirectional Coverage” - *Microwave and Optical Tecnology Letters*, New York, v. 24, pp. 426–429, nº 6, 2004.
- [3] H. B. Abdullah, “A Prototype Q-band Antenna for Mobile Communication Systems” *In Proc. ICAP-10th Int. Conf. Antennas and Propagation*, v. 1, pp. 452–455, 1997.
- [4] A. Konrad e P. Silvester, “Triangular Finite Elements for the Generalized Bessel Equation of Order m ” - *International Journal for Numerical Methods in Enginnering*, v. 7, pp. 43–55, 1973.
- [5] E. R. M. Cosme, V. F. Rodríguez - Esquerre, A. M. F. Frasson e H. E. Hernandez Figueroa, “Novel FEM Approach for the Analysis of Cylindrically Symmetric Photonic Devices” - *Journal of Lightwave Technology*, v. 27, nº 21. November 1 2009.
- [6] E. Marouby, M. Aubourg e P. Guillon, “Application of the Finite Element Method to the Design os Transitions Between Coaxial Lines” - *IEE Proceeding*, v. 137, Pt.H, nº 4, August 1990.
- [7] F. D. Alves e J. R. Bergmann, “Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise e Projetos de Estruturas Coaxiais” - *Dissertação de Mestrado*, PUC/RIO, 2006.
- [8] L. I. Nicolau, J. R. Bergmann e A. R. Sapienza, “Duas Técnicas Adequadas ao Cálculo das Funções de Forma em Elementos Finitos Triangulares” - *MOMAG-2010*, Vila Velha - ES, Brasil 2010.
- [9] L. I. Nicolau, J. R. Bergmann e A. R. Sapienza, “Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Descontinuidades entre Cabos Coaxiais” - *SBrT'11*, Curitiba - PR, Brasil 2011.

- [10] C. W. Steele, “ Numerical Computation of Electric and Magnetic Fields ” - *Van Nostrand Reinhold Company* - 1987.

APÊNDICE A - Cálculo da integral $\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} L_1^a L_2^b L_3^c d\eta d\xi$ no espaço de referência

A integral no espaço das coordenadas baricêntricas é efetuada no triângulo, mostrado na Figura 50:

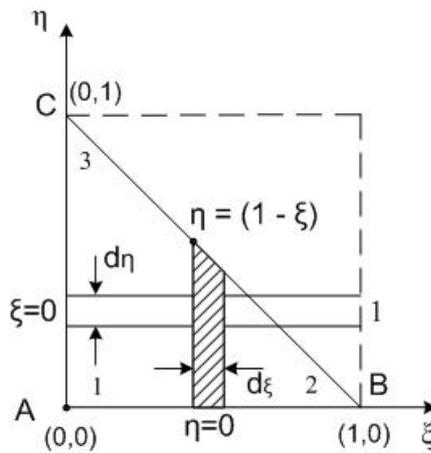


Figura 50 Triângulo no espaço de Referência.

De acordo com as funções de Lagrange, no espaço de referência, ou melhor, as funções das coordenadas baricêntricas:

$$\begin{aligned} L_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ L_2(\xi, \eta) &= \xi \\ L_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad (1)$$

Portanto, o lado (3-2) do triângulo (A-B-C) tem por coordenada baricêntrica $L_1(\xi, \eta) = 0$. Assim, a hipotenusa (B-C) do referido triângulo é a reta:

$$\boxed{\eta = (1 - \xi)} \quad \text{pois } L_1(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) = 0$$

A integral de área se escreve:

$$I = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} L_1^a(\xi, \eta) L_2^b(\xi, \eta) L_3^c(\xi, \eta) d\eta d\xi \quad (2)$$

Substituindo as eqs.(1) em (2)

$$I = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} (1 - \xi - \eta)^a \xi^b \eta^c d\eta d\xi \quad (3)$$

Para se transformar a integral eq.(3) nas funções gama ($\beta(p, q)$), utiliza-se a seguinte transformação:

Para, $\xi = \text{const}$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= (1 - \xi) t \\ d\eta &= (1 - \xi) dt \end{aligned}} \quad (4)$$

Os limites da integral em (η) agora são:

$$\begin{aligned} \eta = 0 &\rightarrow t = 0 \\ \eta = (1 - \xi) &\rightarrow t = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo as eqs.(4) e (5) na integral (3)

$$I = \int_{\xi=0}^1 \int_{t=0}^1 [(1 - \xi) - \eta]^a \xi^b [(1 - \xi) t]^c (1 - \xi) dt d\xi$$

onde $[(1 - \xi) - \eta]^a = [(1 - \xi) - (1 - \xi) t]^a = [(1 - \xi) (1 - t)]^a$

Então

$$I = \int_{\xi=0}^1 \int_{t=0}^1 (1 - \xi)^a (1 - t)^a \xi^b (1 - \xi)^c t^c (1 - \xi) dt d\xi \quad (6)$$

A integral (6) é simplificada em:

$$I = \int_{\xi=0}^1 \int_{t=0}^1 [(1 - \xi)^{a+c+1} \xi^b] [(1 - t)^a t^c] dt d\xi$$

Logo

$$I = \left(\int_{\xi=0}^1 \xi^b (1 - \xi)^{a+c+1} d\xi \right) \left(\int_{t=0}^1 t^a (1 - t)^c dt \right) \quad (7)$$

A integral (I), eq.(7), ficou reduzida a dois termos, relacionados à função de Euler

de 1ª espécie, também conhecida por função beta, ou seja

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad ; p > 0 \text{ e } q > 0$$

A função beta se relaciona à função gama:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

E a função gama é definida:

$$\Gamma(p) = (p-1)!$$

$$\Gamma(q) = (q-1)!$$

$$\Gamma(p+q) = (p+q-1)!$$

Portanto

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad (8)$$

Substituindo a eq.(8) em (7) tem-se

1ª) Parcela

$$\int_{\xi=0}^1 \xi^b (1-\xi)^{a+c+1} d\xi \rightarrow \int_0^1 \xi^{p-1} (1-\xi)^{q-1} dt = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

As duas integrais se relacionam por:

$p - 1 = b$
$q - 1 = a + c + 1$
$p + q - 2 = a + b + c + 1$
Logo : $p + q - 1 = a + b + c + 2$

Então

$$\int_{\xi=0}^1 \xi^b (1-\xi)^{a+c+1} d\xi = \frac{b!(a+c+1)!}{(a+b+c+2)!} \quad (9)$$

2ª) Parcela

$$\int_{t=0}^1 t^a (1-t)^c dt \rightarrow \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

As duas integrais se relacionam por:

$p - 1 = a$
$q - 1 = c$
$p + q - 2 = a + c$
Logo : $p + q - 1 = a + c + 1$

Então

$$\int_{t=0}^1 t^a (1-t)^c dt = \frac{a!c!}{(a+c+1)!} \quad (10)$$

A integral procurada é a eq.(7)

$$I = \left(\int_{\xi=0}^1 \xi^b (1-\xi)^{a+c+1} d\xi \right) \left(\int_{t=0}^1 t^a (1-t)^c dt \right)$$

Substituindo as eqs.(9) e (10) em (7)

$$I = \left(\frac{b!(a+c+1)!}{(a+b+c+2)!} \right) \left(\frac{a!c!}{(a+c+1)!} \right) \quad (11)$$

Simplificando a eq.(11) tem-se o valor da integral:

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{(1-\xi)} L_1^a L_2^b L_3^c d\eta d\xi = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \quad (12)$$