



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Ediwan Sousa da Silva

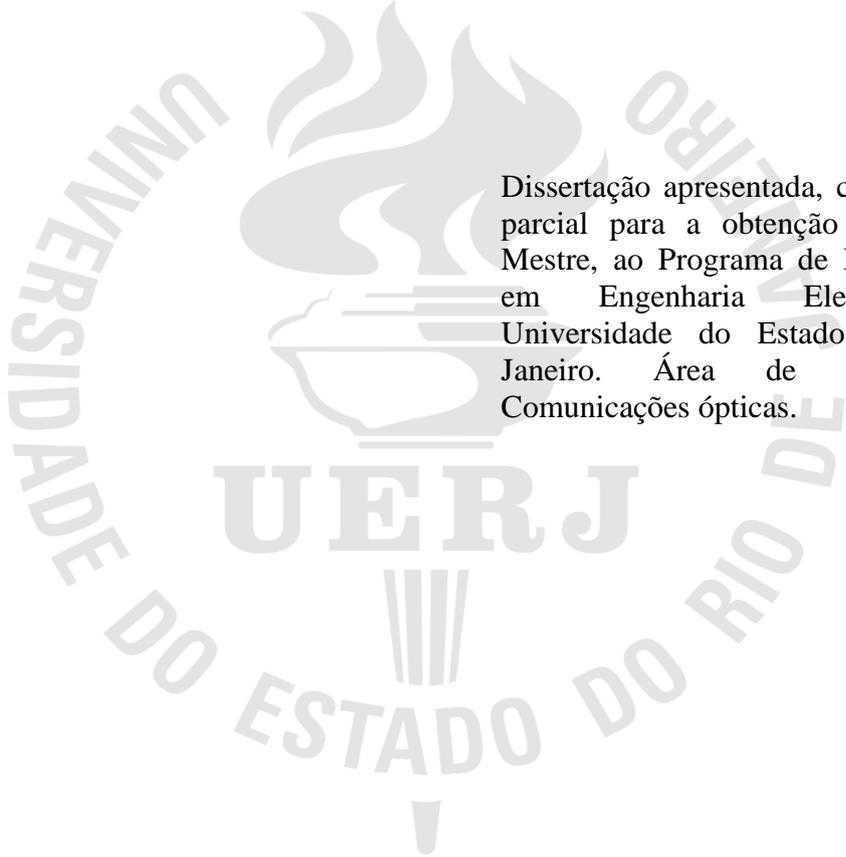
**Aplicação de Condições de Fronteira Absorvente (PML) à Análise de  
Estruturas Dielétricas por Elementos Finitos**

Rio de Janeiro

2017

Ediwan Sousa da Silva

**Aplicação de Condições de Fronteira Absorvente (PML) à Análise de Estruturas  
Dielétricas por Elementos Finitos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de Concentração: Comunicações ópticas.

Orientadores: Prof. Dr. José Rodolfo Souza

Prof. Dr. Antonio Romeiro Sapienza

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Ediwan Sousa da.  
Aplicação de condições de fronteira absorvente (PML) à análise de estruturas dielétricas por elementos finitos / Ediwan Sousa da Silva – 2017.  
219f.

Orientadores: José Rodolfo Souza e Antonio Romeiro Sapienza.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica. 2. Guias de ondas dielétricos- Dissertações. 3. Método dos elementos finitos- Dissertações. 4. Propagação de ondas- Dissertações. I. Souza, José Rodolfo. II. Sapienza, Antonio Romeiro. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. IV. Título.

CDU 621.319.2

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

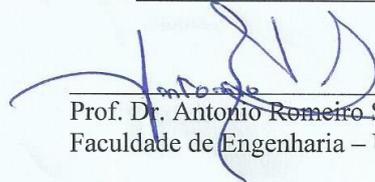
Ediwan Sousa da Silva

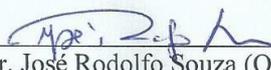
**Aplicação de Condições de Fronteira Absorvente à Análise de Estruturas  
Dielétricas por Elementos Finitos**

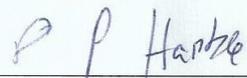
Dissertação apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de Concentração: Comunicações ópticas.

Aprovado em: 26 de maio de 2017

Banca Examinadora: \_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Antonio Romeiro Sapienza (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Rodolfo Souza (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof.ª Dr.ª Paula Brandão Harboe  
Faculdade de Engenharia – UFF

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Lisandro Lovisolo  
Faculdade de Engenharia – UERJ

Rio de Janeiro

2017

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, Palavra de Deus que veio em carne, nasceu de uma virgem, morreu na cruz por nossos pecados, ressuscitou ao terceiro dia e está assentado à destra do Pai como único mediador entre Deus e os homens.

## AGRADECIMENTOS

A Jesus, pois, sem Ele, nada posso fazer, mas n'Ele, que me fortalece, posso tudo.

À minha amada esposa Midian, mulher que muito excede em excelência qualquer tesouro terreno, a cuja felicidade quero empenhar cada segundo de nossas vidas. Obrigado pelo seu apoio incondicional. Te amo.

Ao Prof. Sapienza, pela fé e esforço empenhados nesta dissertação.

Ao Prof. Rodolfo, por acreditar neste trabalho.

Aos professores Paula Brandão Harboe e Lisandro Lovisolo, por aceitarem integrar a banca examinadora.

À minha irmã, Vívian, por me dar “apoio logístico” na confecção deste trabalho.

Aos meus chefes e superiores hierárquicos, presentes e passados, por me permitir dedicar o tempo necessário a este trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, me apoiaram na jornada.

(...)Por isso estão diante do trono de Deus e o servem de dia e de noite no Seu templo;  
e aquele que está assentado no trono os cobrirá com a Sua sombra.

Nunca mais terão fome, nunca mais terão sede; nem sol nem calma alguma cairá sobre eles, porque o Cordeiro que está no meio do trono os apascentará e lhes servirá de guia para as fontes das águas da vida; e Deus limpará de seus olhos toda lágrima.

*Apocalipse 7:15-17*

## RESUMO

SILVA, E. S. *Aplicação de condições de fronteira absorvente (PML) à análise de guias de onda dielétricos por elementos finitos*. 2017. 219f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Este trabalho desenvolve um formalismo para analisar a propagação de ondas em guias de onda dielétricos abertos, pelos métodos: Vetorial Magnético e dos Elementos Finitos. O domínio de guias abertos é infinito. A aplicação de fronteiras absorventes perfeitamente casadas (PML – *Perfectly Matched Layer*) adapta a região externa ao domínio finito, computacionalmente tratável. Na análise desenvolvida, as camadas PML foram implementadas em programa Fortran para simular a propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas dielétricas anisotrópicas. Esse programa foi formulado pelos métodos Vetorial Magnético e dos Elementos Finitos, com resultados bastante satisfatórios. Para validar o método, estudaram-se os guias: retangular anisotrópico, canal e o guia ARROW (*AntiResonant Reflecting Optical Waveguide*). As confrontações dos resultados obtidos com os da literatura foram satisfatórias.

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos; Fronteira absorvente; PML; Guia de onda dielétrico.

## ABSTRACT

SILVA, E. S. *Application of PML absorbing boundary conditions to the analysis of dielectric structures by the finite-element method.* 2017. 219f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

This dissertation develops a formalism to analyze the propagation of waves in open dielectric waveguides, using: Vectorial Magnetic Method and Finite Element Method. The domain of open waveguides is infinite. The application of perfectly matched absorbing boundaries (PML – *Perfectly Matched Layer*) adapts the external region to a finite, computationally tractable domain. In the developed analysis, the PML's were implemented in a Fortran program to simulate the propagation of electromagnetic waves in dielectric anisotropic structures. That program was formulated by: Vectorial Magnetic Method and Finite-Element Method, with very satisfying results. In order to validate the method, the rectangular anisotropic, embedded, and ARROW (*AntiResonant Reflecting Optical Waveguide*) waveguides were studied. The confrontation with the results from literature was satisfying.

Keywords: Finite Element Method; Absorbing boundary conditions; PML; Dielectric waveguide.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
1. PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS PML.....	14
1.1 Análise da propagação em meios PML.....	15
1.1.1 <u>Desenvolvimento de Berenger – Conceitos Básicos</u> .....	15
1.1.1.1 Operador Nabla dos Meios PML.....	15
1.1.1.2 Condição de Casamento de Impedância entre Região Absorvente e Dielétrico com Incidência Normal.....	16
1.1.1.3 Formulação da Propagação da Onda em Meios PML pelo Operador Nabla Modificado.....	22
1.1.2 <u>Análise da Propagação</u> .....	23
1.1.2.1 Formulação <i>Split Field</i> (Berenger).....	24
1.1.2.3 Formulação de Gedney (Anisotropia Uniaxial).....	31
1.1.2.3 Formulação de Tsuji-Koshiba.....	50
1.2 Conclusão.....	56
2. ANÁLISE DA REGIÃO ABSORVENTE (UPML).....	57
2.1 Descrição do Meio Absorvente Uniaxial.....	57
2.2 Equação de Dispersão da Região Absorvente Uniaxial.....	58
2.2.1 <u>Equação de Dispersão dos Modos <math>TE_z</math> e <math>TM_z</math> na Região Absorvente</u> .....	60
2.2.1.1 Dedução da Equação de Dispersão pelo Sistema de Coordenadas Estendidas.....	60
2.2.1.2 Adaptação da Equação de Dispersão aos Sistemas Bidimensionais.....	62
2.2.1.3 Dedução da Equação de Dispersão Bidimensional pelas Equações de Maxwell.....	63
2.3 Condições PML entre Meio Dielétrico e Região Absorvente Uniaxial.....	70
2.3.1 <u>Cálculo dos Coeficientes de Reflexão dos Modos <math>TE_z</math> e <math>TM_z</math> na Interface entre Dois Meios</u> .....	71
2.4 Conclusão.....	74
3. IMPLEMENTAÇÃO DE REGIÕES PML DISSIPATIVAS.....	76
3.1 Introdução.....	76
3.2 Definição das Regiões Usuais e PML.....	76
3.3 Formalismo Generalizado do Método dos Elementos Finitos (MEF).....	77
3.3.1 <u>Domínio Usual</u> .....	79
3.3.2 <u>Regiões PML</u> .....	79

3.3.3	<u>O Método de Galerkin</u> .....	82
3.3.3.1	Aplicação do Método de Galerkin.....	83
3.3.4	<u>Discretização do Problema Contínuo</u> .....	88
3.3.5	<u>Formalismo Generalizado do MEF à Análise de Guias de Onda Dielétricos</u> .....	91
3.3.5.1	Domínio Usual.....	91
3.3.5.2	Região PML com Dissipação em $\vec{x}$ .....	93
3.3.5.3	Região PML com Dissipação em $\vec{y}$ .....	96
3.3.5.4	Região PML – Quinas.....	99
3.4	<b>Resolução das Integrais das Formulações PML</b> .....	102
3.4.1	<u>Domínio Usual</u> .....	102
3.4.2	<u>Regiões PML</u> .....	103
3.4.2.1	Integrais de Área.....	104
3.4.2.2	Integrais de Linha.....	106
3.5	<b>Conclusão</b> .....	107
4.	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> .....	108
4.1	<b>Introdução</b> .....	108
4.2	<b>Validação do Método</b> .....	109
4.2.1	<u>Guia Retangular Anisotrópico Não-Homogêneo</u> .....	109
4.2.1.1	Cálculo de $Real(\eta_{eff})$ .....	110
4.2.1.2	Cálculo de $Imag(\eta_{eff})$ .....	111
4.2.1.3	Distribuição de Campo.....	113
4.2.2	<u>Guia Canal (Embedded)</u> .....	117
4.2.2.1	Cálculo das Curvas de Dispersão.....	119
4.2.2.2	Distribuição de Campo.....	120
4.2.2	<u>Guia ARROW</u> .....	123
4.2.2.1	Cálculo das Curvas de Dispersão.....	124
4.2.2.2	Distribuição de Campo.....	129
4.3	<b>Conclusão</b> .....	131
5.	<b>CONCLUSÃO FINAL</b> .....	133
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	135
	<b>APÊNDICE A – O Teorema da Dualidade</b> .....	137
	<b>APÊNDICE B – Análise das componentes elétricas e magnéticas dos modos <math>TE_z</math> e <math>TM_z</math> nas regiões dielétrica e absorvente (PML)</b> .....	138

<b>APÊNDICE C – O Método dos Elementos Finitos.....</b>	<b>153</b>
<b>APÊNDICE D – Condições de Meios Perfeitamente Casados.....</b>	<b>170</b>

## INTRODUÇÃO

A análise da propagação eletromagnética se faz pelas equações de Maxwell, e equação de Helmholtz, adaptadas à geometria da região estudada. Contudo, há na natureza apenas 11 sistemas de coordenadas ortogonais pela mão direita e, se a região não puder ser enquadrada em nenhum desses sistemas, não se pode modelá-la analiticamente.

O surgimento de computadores possibilitou o emprego de métodos numéricos (Método dos Elementos Finitos, das Diferenças Finitas, etc.) na modelagem de guias de onda. Há, entretanto, séria dificuldade na análise de domínios abertos, pois estes se tornam inviáveis computacionalmente. A solução proposta por diversos autores é o truncamento da referida região por camadas absorventes, as quais dissipam a energia eletromagnética, simulando, assim, o comportamento dos domínios infinitos

A região absorvente (ABC – *Absorbing Boundary Conditions*) se define como uma região anecóica. A principal preocupação é com as possíveis reflexões em suas interfaces. Inicialmente, Holand, em 1983, propôs a definição do meio absorvente pela relação[1]:

$$\frac{\sigma_e}{\varepsilon} = \frac{\sigma_m}{\mu},$$

em que  $\sigma_e$  é a condutividade elétrica,  $\sigma_m$  é a condutividade magnética,  $\varepsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  é a permeabilidade magnética. No entanto, sua abordagem não se ajusta às incidências oblíquas, limita-se, somente, às incidências normais. Mas, foi a base das publicações de Berenger sobre as regiões PML (*Perfectly Matched Layer*).

Berenger, em 1994, resolveu o problema da incidência oblíqua[2], acrescentando, na proposta de Holand, a separação dos campos longitudinais em duas componentes (*split fields*). Elaborou uma abordagem em que, além de incluir as incidências oblíquas, a reflexão entre regiões PML-adaptadas é independente dos ângulos de incidência, assim como das frequências de operação. Por ser perfeita a adaptação entre os meios, a denominação ABC atribuída anteriormente às regiões absorventes, foi substituída por - PML (Camada Perfeitamente Casada - *Perfectly Matched Layer* – PML).

Sacks, *et alii*[3], propuseram outro formalismo, com camada absorvente anisotrópica. Contudo, mantiveram a mesma linha matemática do “*split fields*” de Berenger. A inconveniência dessa formulação é o longo tempo de processamento.

Zhao[4] empregou o mesmo recurso de [3], porém sem se utilizar da decomposição dos campos. Em situações com longo tempo de processamento, verifica-se que essa abordagem apresenta erros de instabilidade numérica.

Gedney[5] propôs a análise das regiões PML, também, definida em meios anisotrópicos, porém, caracterizados por anisotropia uniaxial. Esse formalismo é eficiente e matematicamente mais simples que os dos demais.

Koshiha e Tsuji[6,7], no sistema de coordenadas estendidas, definiram um operador nabla modificado que, ajustando-o, ao do Berenger, obteve o mesmo formalismo deste.

Esta dissertação analisa as estruturas dielétricas abertas pela abordagem anisotrópica de Gedney (equivalente à de Koshiha e à de Berenger). A análise foi implementada pela generalização do programa computacional de Nogueira[8], por meio da adaptação deste para trabalhar com matrizes complexas.

Este trabalho é constituído pelos seguintes capítulos:

O primeiro capítulo apresenta as três formulações da propagação em um meio PML: de Berenger (*split field* – campo dividido); de Gedney (Anisotropia uniaxial); e Koshiha (coordenadas estendidas). As últimas duas abordagens são confrontadas com a de Berenger. Com isso, têm-se reunidas as principais formulações PML da literatura reunidas, e é demonstrada a equivalência entre as principais abordagens para implementação de regiões PML.

No segundo capítulo, pelo formalismo do primeiro, estuda-se a propagação de ondas eletromagnéticas em meios PML. Abordam-se os casamentos nas fronteiras entre a região PML e as regiões: dielétricas e PML. Conclui-se que, se a adaptação for perfeita nas fronteiras PML, não haverá reflexões, para quaisquer ângulo de incidência e frequência de operação. O detalhamento desse capítulo é pertinente ao Apêndice-D.

No capítulo três, as regiões PML são introduzidas no método dos elementos finitos, pois, pela aplicação das regiões PML, o domínio infinito é reduzido à região computacionalmente tratável.

No capítulo quatro, aplica-se o formalismo à análise dos guias: retangular anisotrópico e não homogêneo, guia em canal, e ao guia *ARROW* (AntiResonant Reflecting Optical Waveguide), analisado por diversos autores [7,8,9,10,11]. A confrontação dos resultados obtidos para os guias retangular anisotrópico e canal com os dos diferentes autores foi perfeita. Também é analisado o guia *ARROW*, para o qual, na literatura, encontra-se publicado, somente, o valor de um único ponto ( $k_0 = 5,905$ ,  $\lambda = 1,064\mu m$ ). As curvas de dispersão dos quatro primeiros modos do guia *ARROW* são levantadas.

## 1 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS PML

O presente capítulo apresenta a formulação matemática da propagação em um meio absorvente PML, derivada por diferentes métodos: o de Berenger [2]; o da Anisotropia Uniaxial[3,4,5], e por último: pela formulação de Tsuji e Koshiba[6], que, fundamentada em meio isotrópico no sistema de coordenadas estendidas, se adapta ao de Berenger com a estratégia adequada[6].A equivalência dos três formalismos fica evidente no final do capítulo.

O método de Berenger expressa os campos transversais em função dos longitudinais. Com essa abordagem, analisa-se a incidência de ondas planas, tanto nas interfaces dielétricas-PML, como entre duas regiões anisotrópicas ou isotrópicas diferentes.

Como os modos  $TE_z$  e  $TM_z$  se propagam na mesma frente de onda, e o modo Híbrido (HEM) uma combinação linear de ambos (HEM=TE+TM), este é analisável pelas suas componentes TE e TM.

Os modos  $TE_z$  e  $TM_z$ , componentes do modo Híbrido, são modos duais. O estudo de ambos é simplificado pelo teorema da dualidade, com o qual o formalismo de somente um deles é suficiente à análise.

- O Teorema da Dualidade:

Neste trabalho, a análise da região PML é desenvolvida para o modo  $TE_z$ , pois a do modo  $TM_z$  é obtida aplicando-se naquele o teorema da dualidade, vide apêndice A.

Neste Capítulo, obtêm-se as formulações apropriadas à propagação das ondas nas regiões PML. A análise desenvolvida é feita limitando-se o guia de onda por regiões PML, estas envolvidas por paredes elétricas [2]. Há três regiões PML consideradas: uma, de fronteira normal a  $\vec{x}$ , com propagação em  $\vec{x}$ ; outra, cuja fronteira é normal a  $\vec{y}$ , com propagação em  $\vec{y}$ ; finalmente, as regiões caracterizando os “cantos” do domínio estudado, onde a propagação é em  $\vec{x}$  e em  $\vec{y}$ .

## 1.1 Desenvolvimento de Berenger – Conceitos Básicos

A partir das equações de Berenger que regem a propagação no meio PML, vide Apêndice B, obtém-se a formulação do modo  $TE_z$ , e por dualidade, a do modo  $TM_z$ . Pela equação de Ampère:

$$\begin{aligned}
 & \text{Modo } TE_z [E_x, E_y, (H_{zx} + H_{zy})] & \text{Modo } TM_z [H_x, H_y, (E_{zx} + E_{zy})] \\
 \\
 & \nabla \times \vec{H}_z = j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_1}\right) \vec{E} & -\nabla \times \vec{E}_z = j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \vec{H} \\
 & \vec{x} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \vec{y} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) = j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_1}\right) \vec{E} & \vec{x} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + \vec{y} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) H_x
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Separando-se as componentes dos campos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}\right) E_x & -\frac{\partial E_{zy}}{\partial y} &= j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma_y^*}{\omega\mu_0}\right) H_x \\
 -\frac{\partial H_{zx}}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_1}\right) E_y & \frac{\partial E_{zx}}{\partial x} &= j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma_x^*}{\omega\mu_0}\right) H_x
 \end{aligned}$$

Pela equação de Faraday, com o mesmo procedimento:

$$\begin{aligned}
 -\nabla \times \vec{E} &= j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \vec{H}_z & \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_1}\right) \vec{E}_z \\
 -\vec{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) &= j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \vec{H}_z & \vec{z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) &= j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_1}\right) \vec{E}_z \\
 -\frac{\partial E_y}{\partial x} &= j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma_x^*}{\omega\mu_0}\right) H_{zx} & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_1}\right) E_{zx} \\
 \frac{\partial E_x}{\partial y} &= j\omega\mu_0 \left(1 - j\frac{\sigma_y^*}{\omega\mu_0}\right) H_{zy} & -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_1 \left(1 - j\frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}\right) E_{zy}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

### 1.1.1 Operador Nabla dos Meios PML

Pelas equações (1.1) e (1.2), define-se o operador nabla ( $\nabla$ ) com o auxílio dos termos das regiões PML:  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_x^*$  e  $S_y^*$ . As equações obtidas por esse procedimento são da forma maxwelliana. Definem-se  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_x^*$  e  $S_y^*$ :

$$S_x = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_1}\right)$$

$$S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1}\right)$$

$$S_x^* = \left(1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}\right)$$

$$S_y^* = \left(1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}\right)$$

Assim, as equações de Ampère e de Faraday, para os modos  $TE_z$  e  $TM_z$ , são escritas:

*Modo  $TE_z$*

*Modo  $TM_z$*

Equação de Ampère:

$$\frac{\partial H_{zy}}{S_y \partial y} = j\omega \varepsilon_1 E_x \quad -\frac{\partial E_{zy}}{S_y^* \partial y} = j\omega \mu_0 H_x \quad (1.3)$$

$$-\frac{\partial H_{zx}}{S_x \partial x} = j\omega \varepsilon_1 E_y \quad \frac{\partial E_{zx}}{S_x^* \partial x} = j\omega \mu_0 H_y \quad (1.4)$$

Equação de Faraday:

$$-\frac{\partial E_y}{S_x^* \partial x} = j\omega \mu_0 H_{zx} \quad \frac{\partial H_y}{S_x \partial x} = j\omega \varepsilon_1 E_{zx} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{S_y^* \partial y} = j\omega \mu_0 H_{zy} \quad -\frac{\partial H_x}{S_y \partial y} = j\omega \varepsilon_1 E_{zy} \quad (1.6)$$

### 1.1.2 Condição de Casamento de Impedância entre Região Absorvente e Dielétrico com Incidência Normal

A condição inicial sobre o casamento de impedância na fronteira entre um meio absorvente e um dielétrico apresentada em [1] se refere à incidência normal. Essa condição é desenvolvida a seguir:

Considerando, inicialmente, a incidência normal, a condição de casamento de impedância entre os meios é obtida pelas equações rotacionais de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e$$

$$-\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m$$

A propagação da incidência oblíqua da onda na fronteira se faz em  $\vec{x}$ . Portanto, os campos elétrico e magnético são caracterizados pelas componentes:

$$\vec{H} = H_x \vec{x} + H_z \vec{z}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{x} + E_z \vec{z}$$

Pela equação de Ampère, tem-se:  $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial H_x}{\partial x} \hat{y} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (1.7)$$

A equação (1.7) é escrita pelas suas componentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ -\frac{\partial H_x}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \end{aligned} \quad (1.8)$$

Semelhantemente, pela equação de Faraday:  $-\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m$ :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} = - \left( \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma^* \vec{H} \right),$$

tem-se assim as componentes:

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma^* H_x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z\end{aligned}\quad (1.9)$$

Na literatura, há duas maneiras de se referenciar a esse modo, cujas componentes são:  $H_z$ ,  $E_x$  e  $E_y$ : uma com relação à direção  $\vec{z}$  ( $TE_z$ ); e outra referente a  $\vec{x}$  (modo  $TM_x$ ). A nomenclatura usada neste trabalho será:  $TE_z$  e o dual  $TM_z$ . Eliminando as componentes nulas das equações (1.8) e (1.9), se obtém:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \quad (1.10)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z \quad (1.12)$$

Para que haja casamento na fronteira entre o meio absorvente e o dielétrico, as impedâncias características de ambos devem ser iguais. Considerando incidência normal, as equações (1.10) a (1.12) se tornam:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z$$

que, no domínio fasorial, são:

$$\begin{aligned}-jk_0 H_z &= j\omega \varepsilon_0 \eta^2 E_y + \sigma E_y \\ -jk_0 E_y &= j\omega \mu_0 H_z + \sigma^* H_z\end{aligned}\quad (1.13)$$

Dividindo as respectivas equações (1.13) tem-se a impedância da onda em  $\vec{x}$  (vide Apêndice D):

$$Z_x = \frac{E_y}{H_z}; \quad Y_x = \frac{1}{Z_x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_x} &= \left( \frac{j\omega\varepsilon_0\eta^2 + \sigma}{j\omega\mu_0 + \sigma^*} \right) Z_x \\
\left( \frac{1}{Z_x} \right)^2 &= \left( \frac{j\omega\varepsilon_0\eta^2 + \sigma}{j\omega\mu_0 + \sigma^*} \right) \\
\left( \frac{1}{Z_x} \right)^2 &= \frac{j\omega\varepsilon_0\eta^2 \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0\eta^2} \right) \right)}{j\omega\mu_0 \left( 1 + \left( \frac{\sigma^*}{j\omega\mu_0} \right) \right)} \\
\left( \frac{1}{Z_x} \right)^2 &= \frac{\varepsilon_0\eta^2 \left( 1 + \left( \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0\eta^2} \right) \right)}{\mu_0 \left( 1 + \left( \frac{\sigma^*}{j\omega\mu_0} \right) \right)} \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Os termos entre parênteses (fatores de absorção), são definidos [2].

$$\begin{aligned}
S_u &= 1 - j \frac{\sigma_u}{\omega\varepsilon_1} \\
S_u^* &= 1 - j \frac{\sigma_u^*}{\omega\mu_0} \\
u &= x, y, z
\end{aligned} \tag{1.14.1}$$

O meio dielétrico, com impedância característica  $Z_c$ , a ser adaptado ao absorvente tem a seguinte impedância característica:

$$Z_c = \frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\eta^2}} \tag{1.15}$$

Substituindo a equação (1.15) em (1.14)

$$\left( \frac{1}{Z_x} \right)^2 = \left( \frac{1}{Z_c} \right)^2 \frac{\left( 1 + \left( \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0\eta^2} \right) \right)}{\left( 1 + \left( \frac{\sigma^*}{j\omega\mu_0} \right) \right)} \tag{1.16}$$

Para haver casamento entre os dois meios, é necessário que

$$Z_x = Z_c \quad (1.17)$$

A equação (1.17) exige que, na equação (1.16),

$$\frac{1 + \left(\frac{\sigma^*}{j\omega\mu_0}\right)}{1 + \left(\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0\eta^2}\right)} = 1$$

Tem-se, portanto, a condição necessária ao casamento na fronteira entre os meios.

$$\frac{\sigma^*}{j\omega\mu_0} = \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0\eta^2}$$

Ou seja

$$\frac{\sigma^*}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\eta^2} \quad (1.18)$$

A equação (1.18) é a que rege a adaptação entre os dois meios, com incidência normal.

Em meio absorvente anisotrópico, as condutividades assumem valores diferentes para cada direção. Sejam  $S_u = 1 - j\frac{\sigma_u}{\omega\varepsilon_1}$ ,  $S_u^* = 1 - j\frac{\sigma_u^*}{\omega\mu_0}$ ,  $u = x, y, z$ , vide equação (1.14.1), os fatores de absorção referentes às condutividades elétrica e magnética [2]. Pela equação (1.18):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_1} & \rightarrow S_x = S_x^* \\ \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_1} & \rightarrow S_y = S_y^* \end{aligned}$$

As equações de Berenger para os modos  $TE_z$  e  $TM_z$  em regiões PML são expressas em função de  $S_x$  e  $S_y$ :

Equação de Ampère:

$$\begin{aligned} \text{Modo } TE_z & \qquad \qquad \qquad \text{Modo } TM_z \\ \frac{\partial H_{zy}}{S_y \partial y} = j\omega\varepsilon_1 E_x & \qquad \qquad \qquad -\frac{\partial E_{zy}}{S_y \partial y} = j\omega\mu_0 H_x \end{aligned} \quad (1.18.1)$$

$$-\frac{\partial H_{zx}}{S_x \partial x} = j\omega \varepsilon_1 E_y \qquad \frac{\partial E_{zx}}{S_x \partial x} = j\omega \mu_0 H_y$$

Equação de Faraday:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{S_x \partial x} &= j\omega \mu_0 H_{zx} & \frac{\partial H_y}{S_x \partial x} &= j\omega \varepsilon_1 E_{zx} \\ \frac{\partial E_x}{S_y \partial y} &= j\omega \mu_0 H_{zy} & -\frac{\partial H_x}{S_y \partial y} &= j\omega \varepsilon_1 E_{zy} \end{aligned} \quad (1.18.2)$$

Pelas equações (1.18.1) e (1.18.2), percebe-se que o operador nabla condizente aos meios PML ( $\nabla'$ , nabla modificado) é:

$$\nabla' = \frac{\partial}{S_x \partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{S_y \partial y} \vec{y} = \frac{\partial}{\partial x'} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \vec{y} \quad (1.19)$$

Que é definido por coordenadas modificadas ( $x', y'$ ), função de  $S_x$  e  $S_y$ :

$$\begin{aligned} x' &= S_x x \\ y' &= S_y y \end{aligned} \quad (1.20)$$

Com essa consideração, o formalismo, desenvolvido a seguir, é análogo ao de um meio dielétrico isotrópico.

### 1.1.3 Formulação da Propagação da Onda em Meios PML pelo Operador Nabla Modificado

Considere a incidência da onda plana na interface dielétrico-PML, vide Figura 1.1:

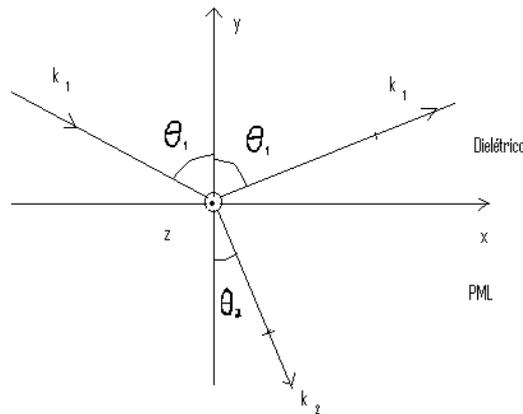


Figura 1.1: Onda plana incidindo na interface entre regiões dielétrica e PML.

### Modo $TE_z$ .

O objetivo deste item é encontrar as relações entre os campos elétricos e as respectivas componentes do campo magnético ( $H_z$ ).

A equação de Ampère, em coordenadas modificadas, é:  $\nabla' \times \vec{H}_z = j\omega\epsilon_1 \vec{E}$ .

Separando o campo magnético nas respectivas parcelas ( $H_{zx}, H_{zy}$ ):

$$\vec{x} \left( \frac{\partial H_{zy}}{\partial y'} \right) + \vec{y} \left( -\frac{\partial H_{zx}}{\partial x'} \right) = j\omega\epsilon_1 (E_x \vec{x} + E_y \vec{y})$$

$H_{zx}$  é a componente do campo magnético correspondente a  $E_x$ , e  $H_{zy}$  corresponde a  $E_y$ .

Assim, a equação de Ampère se desdobra em duas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{zy}}{\partial y'} &= j\omega\epsilon_1 E_x \\ -\frac{\partial H_{zx}}{\partial x'} &= j\omega\epsilon_1 E_y \end{aligned} \tag{1.21.1}$$

Com o mesmo raciocínio, aplicado à equação de Faraday,  $-\nabla' \times \vec{E} = j\omega\mu_0 \vec{H}_z$ ,

tem-se:

$$-\vec{z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} \right) = j\omega\mu_0 \vec{z} (H_{zx} + H_{zy})$$

Separando-se as componentes do campo elétrico, se obtém a relação:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial x'} &= j\omega\mu_0 H_{zx} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y'} &= j\omega\mu_0 H_{zy} \end{aligned} \quad (1.21.2)$$

### Modo $TM_z$

Por ser este modo dual do  $TE_z$ , vide Apêndice A, o seu formalismo é encontrado pelo teorema da dualidade, que, aplicado à equação de Ampère, gera a de Faraday:  $\nabla' \times \vec{E}_z = j\omega\mu_0 \vec{H}$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_{zy}}{\partial y'} &= j\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_{zx}}{\partial x'} &= j\omega\mu_0 H_y \end{aligned}$$

A aplicação à equação de Faraday gera a de Ampère:  $\nabla' \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_1 \vec{E}_z$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial x'} &= j\omega\varepsilon_1 E_{zx} \\ \frac{\partial H_x}{\partial y'} &= j\omega\varepsilon_1 E_{zy} \end{aligned}$$

## 1.2 Análise da Propagação

Neste item, será efetuada a análise detalhada da propagação eletromagnética dos modos  $TE_z$  e  $TM_z$ , em regiões dielétricas e PML, abordada pelos três métodos: Split Field (Berenger), UPML – Anisotropia Uniaxial (Gedney) e Campos Escalonados (Tsuji-Koshiba). Será demonstrada a equivalência entre os três métodos.

### 1.2.1 Formulação *Split Field* (Berenger [2])

Considere a interface, normal à direção  $\vec{x}$ , entre o meio dielétrico e o absorvente PML. Vide figuras 1.2.a (modo  $TE_z$ ) e 1.2.b (modo  $TM_z$ ).

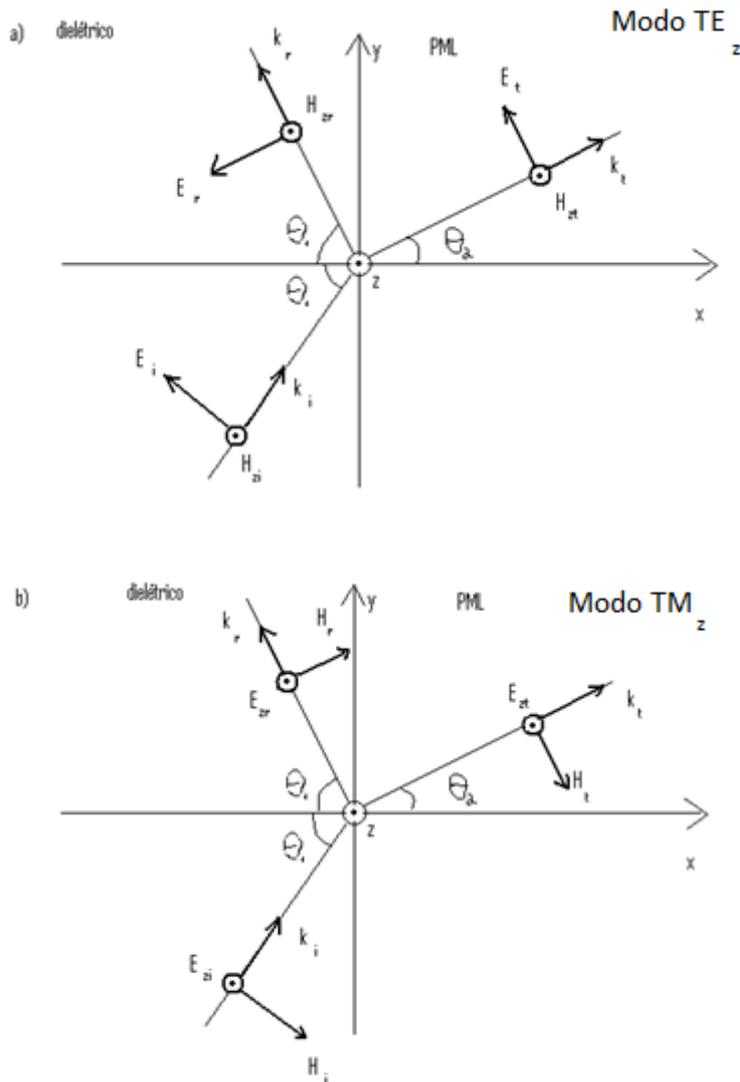


Figura 1.2: Onda plana incidindo em interface normal a entre região dielétrica e região PML.

- Propagação em meio dielétrico:

No meio dielétrico, os campos longitudinais das ondas incidente, refletida e transmitida são (vide Apêndice D):

$$\begin{aligned} \text{Modo } TE_z \\ H_{zi}(x, y) &= H_0 e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ H_{zr}(x, y) &= \Gamma_{TE_z} H_0 e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modo } TM_z \\ E_{zi}(x, y) &= E_0 e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ E_{zr}(x, y) &= \Gamma_{TM_z} E_0 e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

$$H_{zt}(x, y) = T_{TE_z} H_0 e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad E_{zt}(x, y) = T_{TM_z} E_0 e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

$$\Gamma_{TE_z} = \frac{H_{0r}}{H_0} = -\left(\frac{E_{0r}}{E_0}\right) = -\Gamma_{TM_z}$$

Os vetores números de onda incidente, refletida e transmitida, de ambos os modos são:

$$\vec{k}_i = k_1(\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) = k_1 \vec{a}_i$$

$$\vec{k}_r = k_1(-\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) = k_1 \vec{a}_r$$

$$\vec{k}_t = k_2(\cos\theta_2 \vec{x} + \sin\theta_2 \vec{y}) = k_2 \vec{a}_t$$

Com as impedâncias de onda dos respectivos modos ( $Z_1, Z_2$ ), obtêm-se os campos transversais em função dos longitudinais.

*Modo  $TE_z$*

$$\vec{E}_i = -Z_1(\vec{a}_i \times \vec{H}_{zi})$$

$$\vec{E}_r = -Z_1(\vec{a}_r \times \vec{H}_{zr})$$

$$\vec{E}_t = -Z_2(\vec{a}_t \times \vec{H}_{zt})$$

*Modo  $TM_z$*

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_1}(\vec{a}_i \times \vec{E}_{zi})$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{Z_1}(\vec{a}_r \times \vec{E}_{zr})$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_2}(\vec{a}_t \times \vec{E}_{zt})$$

Ou seja:

*Modo  $TE_z$*

$$\vec{E}_i = -Z_1 H_0 [(\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) \times \vec{z}] e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{E}_r = -Z_1 \Gamma_{TE_z} H_0 [(-\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) \times \vec{z}] e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{E}_t = -Z_2 T_{TE_z} H_0 [(\cos\theta_2 \vec{x} + \sin\theta_2 \vec{y}) \times \vec{z}] e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

*Modo  $TM_z$*

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_1} E_0 [(\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) \times \vec{z}] e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_0}{Z_1} \Gamma_{TM_z} [(-\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) \times \vec{z}] e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_0}{Z_2} T_{TM_z} [(-\cos\theta_2 \vec{x} + \sin\theta_2 \vec{y}) \times \vec{z}] e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

Em que os fatores de fase das respectivas ondas são:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_1(\vec{a}_i \cdot \vec{r}) = (k_1 \cos \theta_1) \vec{x} + (k_1 \sin \theta_1) \vec{y} = k_{x1} \vec{x} + k_{y1} \vec{y}$$

$$\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_1(\vec{a}_r \cdot \vec{r}) = (-k_1 \cos \theta_1) \vec{x} + (k_1 \sin \theta_1) \vec{y} = -k_{x1} \vec{x} + k_{y1} \vec{y}$$

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_2(\vec{a}_t \cdot \vec{r}) = (k_2 \cos \theta_2) \vec{x} + (k_2 \sin \theta_2) \vec{y} = k_{x2} \vec{x} + k_{y2} \vec{y}$$

- Cálculo das Constantes de Propagação de Ambos os Modos na Região PML

A constante de propagação  $\vec{k}$  indica a direção em que a onda se propaga, sendo perpendicular ao plano da frente de onda. Na região PML, se prova pelas equações de Ampère e Faraday que as constantes de propagação da onda plana são idênticas para os modos  $TE_z$  e  $TM_z$ . Seja  $\vec{k}_2 = \vec{k}_2 \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right)$  a constante de propagação modificada nomeio absorvente.

*Modo  $TE_z$*

$$-j \left( \vec{k}_2 \times \vec{H}_{z2} \right) = j \omega \epsilon_2 \left[ \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) E_{x2} \vec{x} + \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) E_{y2} \vec{y} \right]$$

em que

$$\vec{H}_{z2} = T_{TE_z} H_0 e^{-j \vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \vec{z}$$

$$E_{x2} = -Z_2 T_{TE_z} H_0 \sin \theta_2 e^{-j \vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

$$E_{y2} = Z_2 T_{TE_z} H_0 \cos \theta_2 e^{-j \vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

*Modo  $TM_z$*

$$j \left( \vec{k}_2 \times \vec{E}_{z2} \right) = j \omega \mu_0 \left[ \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega \mu_0}\right) H_{x2} \vec{x} + \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega \mu_0}\right) H_{y2} \vec{y} \right]$$

em que:

$$\vec{E}_{z2} = T_{TM_z} E_0 e^{-j \vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \vec{z}$$

$$H_{x2} = \frac{1}{Z_2} T_{TM_z} E_0 \text{sen} \theta_2 e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

$$H_{y2} = -\frac{1}{Z_2} T_{TM_z} E_0 \text{cos} \theta_2 e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

Devido ao sinal negativo no termo  $-j(\vec{k}_2 \times \vec{H}_{z2})$ , no modo  $TE_z$ , e ao sinal positivo em  $j(\vec{k}_2 \times \vec{E}_{z2})$ , no modo  $TM_z$ , o cálculo de  $\vec{k}_2 = \bar{k}_{2x}\vec{x} + \bar{k}_{2y}\vec{y}$  fornece o mesmo resultado em ambos os modos. Substituindo-se as expressões dos campos longitudinais e transversais na equação de Ampère e em sua dual, obtêm-se:

*Modo  $TE_z$*

$$-j(\vec{k}_2 \times \vec{z}) H_{z2} = j\omega\varepsilon_2 T_{TE_z} H_0 Z_2 \left[ -\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{sen} \theta_2 \vec{x} + \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{cos} \theta_2 \vec{y} \right] e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

Substituindo  $H_{z2} = T_{TE_z} H_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$ , se cancela a dependência de  $H_0$ .

$$\begin{aligned} -j(\vec{k}_2 \times \vec{z}) T_{TE_z} H_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \\ = j\omega\varepsilon_2 T_{TE_z} H_0 Z_2 \left[ -\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{sen} \theta_2 \vec{x} + \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{cos} \theta_2 \vec{y} \right] e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por  $jT_{TE_z} H_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$ :

$$-(\vec{k}_2 \times \vec{z}) = \omega\varepsilon_2 Z_2 \left[ -\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{sen} \theta_2 \vec{x} + \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{cos} \theta_2 \vec{y} \right]$$

pondo  $\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right)$  em evidência:

$$-(\vec{k}_2 \times \vec{z}) = \omega\varepsilon_2 Z_2 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) [-\text{sen} \theta_2 \vec{x} + \text{cos} \theta_2 \vec{y}] \quad (1.22)$$

*Modo  $TM_z$*

$$j(\vec{k}_2 \times \vec{E}_{z2}) = j\omega\mu_0 \frac{1}{Z_2} T_{TM_z} E_0 \left[ \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \text{sen}\theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \text{cos}\theta_2 \vec{y} \right] e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$$

Substituindo  $E_{z2} = T_{TM_z} E_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$ , se obtém:

$$\begin{aligned} j(\vec{k}_2 \times \vec{z}) T_{TM_z} E_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} \\ = j\omega\mu_0 \frac{1}{Z_2} T_{TM_z} E_0 \left[ \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \text{sen}\theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \text{cos}\theta_2 \vec{y} \right] e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}, \end{aligned}$$

ou, dividindo ambos os lados por  $jT_{TM_z} E_0 e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}$

$$(\vec{k}_2 \times \vec{z}) = \omega\mu_0 \frac{1}{Z_2} \left[ \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \text{sen}\theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu_0}\right) \text{cos}\theta_2 \vec{y} \right]$$

Sendo a condição de casamento de impedância  $\frac{\sigma^*}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$ , esta equação se reescreve

$$(\vec{k}_2 \times \vec{z}) = \omega\mu_0 \frac{1}{Z_2} \left[ \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{sen}\theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_2}\right) \text{cos}\theta_2 \vec{y} \right] \quad (1.23)$$

Além disto,  $Z_2 = \frac{\omega\mu_0}{k_2} = \frac{k_2}{\omega\varepsilon_2}$ , o que faz com que as expressões (1.22) e (1.23) sejam idênticas.

A igualdade das constantes de propagação está de acordo com o resultado esperado, uma vez que os modos  $TE_z$  e  $TM_z$  são componentes do modo híbrido, sendo, portanto, modos que se propagam em uma mesma frente de onda, conforme mostrado na figura 1.3:

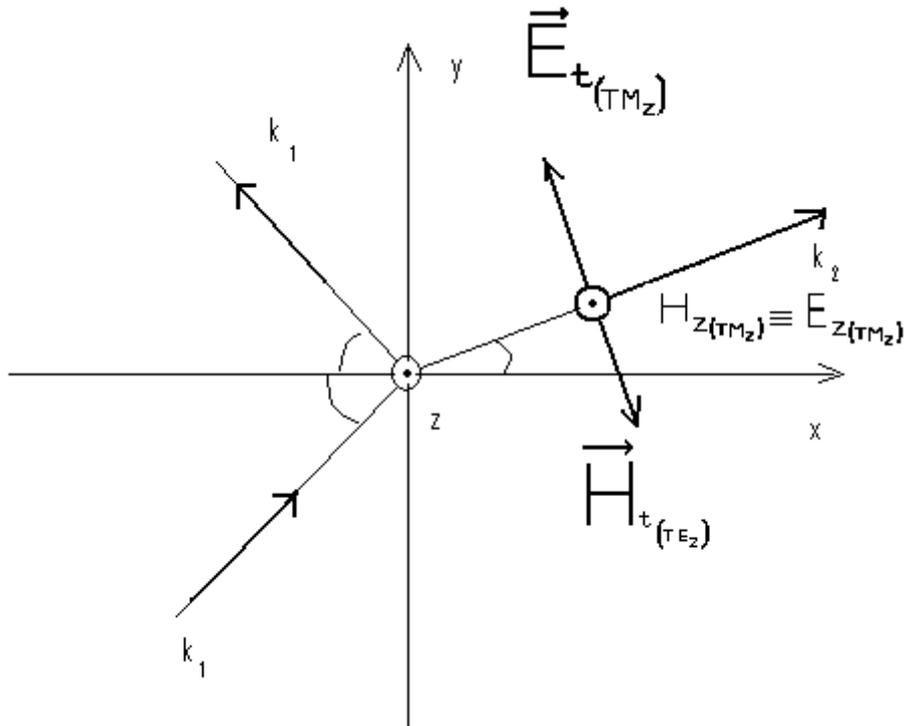


Figura 1.3: Campos na região 2 no modo híbrido

Então, as equações da constante de propagação no meio PML se reduzem em uma única equação

$$(\vec{k}_2 \times \vec{z}) = \left[ \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) k_2 \text{sen} \theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) k_2 \text{cos} \theta_2 \vec{y} \right], \quad (1.24)$$

fazendo  $\vec{k}_2 = \bar{k}_{2x} \vec{x} + \bar{k}_{2y} \vec{y}$

$$(\bar{k}_{2x} \vec{x} + \bar{k}_{2y} \vec{y}) \times \vec{z} = \left[ \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) k_2 \text{sen} \theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) k_2 \text{cos} \theta_2 \vec{y} \right].$$

Efetuando o produto vetorial do lado esquerdo da igualdade,

$$(\bar{k}_{2y} \vec{x} - \bar{k}_{2x} \vec{y}) = \left[ \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) k_2 \text{sen} \theta_2 \vec{x} - \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_2}\right) k_2 \text{cos} \theta_2 \vec{y} \right]$$

o que implica

$$\begin{aligned}\bar{k}_{2x} &= \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_2}\right) k_2 \cos \theta_2, \\ \bar{k}_{2y} &= \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_2}\right) k_2 \sin \theta_2.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Esta é a constante de propagação para as direções  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  no meio PML. Caso a condutividade  $\sigma$  seja zero, a região se comporta exatamente como um meio dielétrico.

### Cálculo do Operador Nabla nas Regiões PML

Seja  $\vec{\varphi}(x, y, z) = \vec{\varphi}_0(x, y, z)e^{-j\vec{k}_2\vec{r}}$  um campo genérico. A fim de se calcular o operador nabla, calcule-se:

$$\nabla \cdot \vec{\varphi}(x, y, z) = \nabla \cdot \vec{\varphi}_0(x, y, z)e^{-j\vec{k}_2\vec{r}}.$$

Pela regra da cadeia,  $\nabla \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\nabla\vec{A}) \cdot \vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B})$ . Então,

$$\nabla \cdot \vec{\varphi}(x, y, z) = e^{-j\vec{k}_2\vec{r}}\nabla \cdot \vec{\varphi}_0 + \vec{\varphi}_0 \nabla \cdot e^{-j\vec{k}_2\vec{r}}$$

Como  $\vec{\varphi}_0$  é um vetor constante, sua derivada é zero, o que zera a primeira parcela. Assim,

$$\nabla \cdot \vec{\varphi}(x, y, z) = \vec{\varphi}_0 \nabla \cdot e^{-j(\bar{k}_{2x}x + \bar{k}_{2y}y + \bar{k}_{2z}z)}.$$

Resolvendo-se o gradiente do lado direito da equação:

$$\nabla \cdot \vec{\varphi}(x, y, z) = -j(\bar{k}_{2x}\vec{x} + \bar{k}_{2y}\vec{y} + \bar{k}_{2z}\vec{z}) \cdot \vec{\varphi}_0 e^{-j\vec{k}_2\vec{r}}$$

substituindo  $\vec{\varphi}(x, y, z) = \vec{\varphi}_0(x, y, z)e^{-j\vec{k}_2\vec{r}}$ , se obtém:

$$\nabla \cdot \vec{\varphi} = -j(\bar{k}_{2x}\vec{x} + \bar{k}_{2y}\vec{y} + \bar{k}_{2z}\vec{z}) \cdot \vec{\varphi}$$

Dividindo ambos os lados por  $\vec{\varphi}$ , obtém-se que:

$$\nabla = -j\vec{k}_2 \quad (1.26)$$

### 1.2.2 Formulação de Gedney (Anisotropia Uniaxial)

A onda plana se propagando na região PML é caracterizada pelas suas propagações em  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ :

$$\vec{k}_2 = \bar{k}_{2x}\vec{x} + \bar{k}_{2y}\vec{y} + \bar{k}_{2z}\vec{z} \quad (1.27)$$

em que

$$\bar{k}_{2x} = k_2 \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_2} \right) \cos \varphi_x$$

$$\bar{k}_{2y} = k_2 \left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_2} \right) \cos \varphi_y$$

$$\bar{k}_{2z} = k_2 \left( 1 - j \frac{\sigma_z}{\omega \varepsilon_2} \right) \cos \varphi_z$$

$\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  e  $\varphi_z$  são os ângulos que a direção de propagação faz com os eixos  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ , respectivamente (cossenos diretores). A formulação de meios anisotrópicos se fará por meio de cálculo tensorial.

Li Zhao, *et alii*, [4] apresentam um mapeamento associando regiões isotrópicas aos meios absorventes PML. Este mapeamento se define:

$$[G]: (\vec{E}', \vec{H}') \rightarrow (\vec{E}, \vec{H}) \quad (1.28)$$

em que  $(\vec{E}', \vec{H}')$  são os campos escalonados no sistema de coordenadas estendidas modificadas  $(x', y', z')$ , e  $(\vec{E}, \vec{H})$  são os campos físicos, no sistema de coordenadas reais. Os campos escalonados e físicos se relacionam por:

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} \vec{E}' \\ \vec{H}' \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

enquanto o relacionamento entre os sistemas de coordenadas estendidas e reais é dado por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [G]^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

conforme será esclarecido nesta seção.

Nos meios PML, as equações de Maxwell são:

- Equação de Faraday:

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu_0 \left[ \left(1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega\mu_0}\right) H_x \vec{x} + \left(1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega\mu_0}\right) H_y \vec{y} + \left(1 - j \frac{\sigma_z^*}{\omega\mu_0}\right) H_z \vec{z} \right]$$

passando para a forma tensorial, tem-se

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu_0 [\Lambda] \vec{H} \quad (1.31)$$

Sendo

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \left(1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega\mu_0}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega\mu_0}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - j \frac{\sigma_z^*}{\omega\mu_0}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

- Equação de Ampère:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_2 \left[ \left(1 - j\frac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_2}\right) E_x \vec{x} + \left(1 - j\frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_2}\right) E_y \vec{y} + \left(1 - j\frac{\sigma_z}{\omega\varepsilon_2}\right) E_z \vec{z} \right]$$

Pela condição de casamento de impedância,  $\frac{\sigma_j}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_j^*}{\mu_0}$ , o que implica

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_2 [\Lambda] \vec{E}$$

- Lei de Gauss para o magnetismo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot [j\omega\mu_0(aH_x \vec{x} + bH_y \vec{y} + cH_z \vec{z})] &= 0 \end{aligned}$$

- Lei de Gauss:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= 0 & \nabla \cdot (\varepsilon_2 [\Lambda] \vec{E}) &= 0 \\ \nabla \cdot [j\omega\varepsilon_2(aE_x \vec{x} + bE_y \vec{y} + cE_z \vec{z})] &= 0 \end{aligned}$$

em que:

$$[\Lambda] = \text{diag}[a, b, c]$$

$$a = \left(1 - j\frac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_2}\right)$$

$$b = \left(1 - j\frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_2}\right)$$

$$c = \left(1 - j\frac{\sigma_z}{\omega\varepsilon_2}\right)$$

em resumo, as equações de Maxwell nas regiões absorventes são:

$$-\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu_0 [\Lambda] \vec{H} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon_2[\Lambda]\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

### Relacionando a Formulação do Meio Absorvente (PML) à da Região Isotrópica

Com base no mapeamento caracterizado pelo tensor  $[G]$ , que será calculado nesta seção, a formulação do meio absorvente será associada à da região isotrópica. Seja o mapeamento:

$$\{E\} = G\{E'\}$$

$$\{H\} = G\{H'\}$$

em que  $\{E\} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$  e  $\{H\} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$ .

Deste modo, com o mapeamento definido pelo tensor  $[G]$ , a lei de Gauss se reescreve:

$$\nabla \cdot [\varepsilon_2[\Lambda]][G]\{E'\} = 0 \quad (1.34)$$

Passando para a forma matricial:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_x & 0 & 0 \\ 0 & g_y & 0 \\ 0 & 0 & g_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = 0$$

Efetuando o produto matricial:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\} \begin{pmatrix} g_x a & 0 & 0 \\ 0 & g_y b & 0 \\ 0 & 0 & g_z c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\} \begin{pmatrix} g_x a E'_x \\ g_y b E'_y \\ g_z c E'_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (g_x a E'_x) + \frac{\partial}{\partial y} (g_y b E'_y) + \frac{\partial}{\partial z} (g_z c E'_z) = 0$$

$$g_x a \frac{\partial}{\partial x} E'_x + g_y b \frac{\partial}{\partial y} E'_y + g_z c \frac{\partial}{\partial z} E'_z = 0 \quad (1.35)$$

Dividindo-se a equação (1.35) por  $g_x a$ , se obtém:

$$\frac{\partial}{\partial x} E'_x + \frac{g_y b}{g_x a} \frac{\partial}{\partial y} E'_y + \frac{g_z c}{g_x a} \frac{\partial}{\partial z} E'_z = 0 \quad (1.36)$$

O próximo passo é encontrar os termos do tensor  $[G]$ , a fim de que o mapeamento seja consistente. Matematicamente, a condição para manter a consistência é que:

$$\frac{g_y}{g_x} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad e \quad \frac{g_z}{g_x} = \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (1.37)$$

Substituindo-se os termos das equações (1.37) na equação (1.36), se obtém:

$$\frac{\partial}{\partial x} E'_x + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ba}} \frac{\partial}{\partial y} E'_y + \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ca}} \frac{\partial}{\partial z} E'_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E'_x + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial y} E'_y + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial z} E'_z = 0 \quad (1.38)$$

Ao se multiplicar a equação (1.38) por  $\sqrt{a}$ , tem-se a expressão consistente do divergente, aplicado aos campos escalonados:

$$\varepsilon_2 \left( \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial x} E'_x + \sqrt{b} \frac{\partial}{\partial y} E'_y + \sqrt{c} \frac{\partial}{\partial z} E'_z \right) = 0 \quad (1.39)$$

Os campos escalonados  $(E', H')$  se situam no espaço das coordenadas estendidas. Consequentemente, é necessário transformar a equação (1.39) para o novo sistema de coordenadas  $(x', y', z')$ , o que é feito ao se dividir a mesma equação por  $\sqrt{abc}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{abc}} \left( \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial x} E'_x + \sqrt{b} \frac{\partial}{\partial y} E'_y + \sqrt{c} \frac{\partial}{\partial z} E'_z \right) &= 0 \\ \varepsilon_2 \left( \frac{1}{\sqrt{bc}} \frac{\partial}{\partial x} E'_x + \frac{1}{\sqrt{ac}} \frac{\partial}{\partial y} E'_y + \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{\partial}{\partial z} E'_z \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

A condição para que o sistema de coordenadas escalonadas seja equivalente ao físico é que:

$$x' = \sqrt{bc}x$$

$$y' = \sqrt{ac}y$$

$$z' = \sqrt{ab}z$$

Desta forma, a equação de Gauss (equação (1.40)) se relaciona ao meio isotrópico-PML  $(\mu_0, \varepsilon_2)$ , por:

$$\nabla' \cdot [\varepsilon_2 E'] = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = 0$$

A análise na região absorvente PML (coordenadas estendidas) se associa à região isotrópica PML (coordenadas reais) pelo operador nabla modificado, que se define:

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \vec{z}$$

em que as coordenadas estendidas modificadas se definem, conforme já dito, por:

$$\begin{aligned}
x' &= \sqrt{bc} x \\
y' &= \sqrt{ac} y \\
z' &= \sqrt{ab} z
\end{aligned}
\tag{1.41}$$

Os termos da equação (1.41) são os fatores que definem o mapeamento entre sistemas reais e o sistema de coordenadas estendidas. Como será esclarecido a seguir, estes fatores são identificados por:

$$\begin{aligned}
\sqrt{bc} &= g_x \\
\sqrt{ac} &= g_y \\
\sqrt{ab} &= g_z
\end{aligned}$$

Substituindo-se na equação (1.41), se obtém:

$$\begin{aligned}
x' &= g_x x \\
y' &= g_y y \\
z' &= g_z z
\end{aligned}
\tag{1.42}$$

Os parâmetros do mapeamento  $g_x$ ,  $g_y$  e  $g_z$  satisfazem à condição básica imposta pela equação (1.37), isto é

$$\begin{aligned}
\frac{g_y}{g_x} &= \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \\
\frac{g_z}{g_x} &= \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}
\end{aligned}$$

Além disso, pela condição de casamento de impedância entre as regiões isotrópica e PML ( $\frac{\sigma_j}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_j^*}{\mu_0}$ , com  $j = x, y, z$ ), será mostrado que o conjunto de equações (1.42) se relaciona aos parâmetros  $S_x$ ,  $S_y$  e  $S_z$  da seguinte forma:

$$\sqrt{bc} = g_x = S_x$$

$$\sqrt{ac} = g_y = S_y$$

$$\sqrt{ab} = g_z = S_z$$

em que

$$S_x = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_1}\right)$$

$$S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1}\right)$$

$$S_z = \left(1 - j \frac{\sigma_z}{\omega \varepsilon_1}\right)$$

Para incidência sobre fronteira normal a  $\vec{x}$ , o tensor  $[\Lambda_x]$  da região absorvente PML, que satisfaz a condição de casamento entre as duas regiões é

$$[\Lambda_x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix}$$

de modo que

$$g_x = \sqrt{bc} = S_x$$

$$g_y = \sqrt{ac} = 1$$

$$g_z = \sqrt{ab} = 1$$

(1.43)

Semelhantemente, para incidência em interface normal a  $\vec{y}$ , têm-se:

$$[\Lambda_y] = \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S_y \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} g_x &= \sqrt{bc} = 1 \\ g_y &= \sqrt{ac} = S_y \\ g_z &= \sqrt{ab} = 1 \end{aligned} \quad (1.44)$$

e para incidência normal a  $\vec{z}$ , o tensor  $[A_x]$  da região absorvente PML, que satisfaz a condição de casamento, é:

$$[A_z] = \begin{pmatrix} S_z & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_z} \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} g_x &= \sqrt{bc} = 1 \\ g_y &= \sqrt{ac} = 1 \\ g_z &= \sqrt{ab} = S_z \end{aligned} \quad (1.45)$$

Nas regiões de canto, que absorvem tanto as ondas incidentes em interface normal a  $\vec{x}$  quanto em interface normal a  $\vec{y}$ , o tensor  $[A_{xy}]$  é definido como

$$[A_{xy}] = [A_x][A_y] = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & S_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_y}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_x}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & S_x S_y \end{pmatrix}$$

em que, pela equação (1.42),

$$\begin{aligned}
g_x &= \sqrt{bc} = \sqrt{\frac{S_x}{S_y} (S_x S_y)} = S_x \\
g_y &= \sqrt{ac} = \sqrt{\frac{S_y}{S_x} (S_x S_y)} = S_y \\
g_z &= \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{S_y S_x}{S_x S_y}} = 1
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Concluindo, pelas equações (1.43), (1.44) e (1.46), fica demonstrado que:

$$\begin{aligned}
x' &= g_x x, & g_x &= S_x \\
y' &= g_y y, & g_y &= S_y \\
z' &= g_z z, & g_z &= S_z = 1
\end{aligned}$$

O mapeamento entre o sistema físico e o estendido é caracterizado por:

$$[G] = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix}$$

O operador nabla no sistema de coordenadas estendidas, aplicado à região isotrópica PML absorvente, será:

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \vec{z} = \frac{\partial}{S_x \partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{S_y \partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{S_z \partial z} \vec{z} \tag{1.47}$$

O operador  $\nabla'$  (equação (1.47)), age no sistema de coordenadas estendidas, em um meio considerado homogêneo ( $\mu_0, \varepsilon_2$ ).

As equações de Maxwell, na região absorvente, associada à região isotrópica ( $\mu_0, \varepsilon_2$ ) são:

$$\begin{aligned}
\nabla' \times H &= j\omega \varepsilon_2 E \\
-\nabla' \times E &= j\omega \mu_0 H \\
\nabla' \cdot (\varepsilon_2 E) &= 0 \\
\nabla' \cdot (\mu_0 H) &= 0
\end{aligned} \tag{1.48}$$

As equações (1.48) são a formulação de Berenger, no Quadro 1.1.

### Transposição da Formulação do Meio Isotrópico PML à da Região Anisotrópica Uniaxial PML (Cristal Inercial)

O desenvolvimento a seguir mostrará que a análise nas regiões absorventes PML, efetuada pela formulação do conjunto de equações (1.48) e referente à do meio isotrópico, é equivalente à formulação de Berenger ou à do meio anisotrópico uniaxial (cristal inercial). Partindo do conjunto (1.48), no sistema de coordenadas estendidas. Na primeira equação do conjunto (1.48):

$$\nabla' \times H = j\omega \varepsilon_2 E$$

Pela equação (1.47)

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} \right) \vec{x} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial H_z}{\partial x'} \right) \vec{y} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} \right) \vec{z} = j\omega \varepsilon_2 (E_x \vec{x} + E_y \vec{y} + E_z \vec{z}) \tag{1.49}$$

Os campos escalonados ( $E'_x, E'_y, E'_z$ ) se relacionam aos do sistema físico ( $E_x, E_y, E_z$ ) por:

$$\begin{aligned}
E'_j &= S_j E_j \\
H'_j &= S_j H_j \\
j' &= S_j j \\
j &= x, y, z.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Ao se substituírem os termos de (1.50) na equação (1.49), se obtém:

$$\left( \frac{S_z}{S_z S_y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{S_y}{S_y S_z} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{x} + \left( \frac{S_x}{S_x S_z} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{S_z}{S_z S_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{y} + \left( \frac{S_y}{S_y S_x} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{S_x}{S_x S_y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{z} \\ = j\omega\epsilon_2(E_x\vec{x} + E_y\vec{y} + E_z\vec{z})$$

em cada uma das direções, tem-se:

- em  $\vec{x}$ :

$$\left( \frac{S_z}{S_z S_y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{S_y}{S_y S_z} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = j\omega\epsilon_2 E_x$$

multiplicando ambos os lados por  $S_y S_z$ , vide equação (1.50):

$$\left( \frac{\partial H'_z}{\partial y} - \frac{\partial H'_y}{\partial z} \right) = j\omega\epsilon_2 \left( \frac{S_y S_z}{S_x} \right) E'_x$$

- em  $\vec{y}$ :

$$\left( \frac{S_x}{S_x S_z} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{S_z}{S_z S_x} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = j\omega\epsilon_2 E_y$$

multiplicando ambos os lados por  $S_x S_z$ ,

$$\left( \frac{\partial H'_x}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial x} \right) = j\omega\epsilon_2 \frac{S_x S_z}{S_y} E'_y$$

- em  $\vec{z}$ :

$$\left( \frac{S_y}{S_y S_x} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{S_x}{S_x S_y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = j\omega \varepsilon_2 E_z$$

multiplicando ambos os lados por  $S_x S_y$ ,

$$\left( \frac{\partial H'_y}{\partial x} - \frac{\partial H'_x}{\partial y} \right) = j\omega \varepsilon_2 \frac{S_x S_y}{S_z} E'_z$$

assim, a equação se torna:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial H'_z}{\partial y} - \frac{\partial H'_y}{\partial z} \right) \vec{x} + \left( \frac{\partial H'_x}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial x} \right) \vec{y} + \left( \frac{\partial H'_y}{\partial x} - \frac{\partial H'_x}{\partial y} \right) \vec{z} \\ = j\omega \varepsilon_2 \left( \frac{S_y S_z}{S_x} E'_x \vec{x} + \frac{S_x S_z}{S_y} E'_y \vec{y} + \frac{S_x S_y}{S_z} E'_z \vec{z} \right) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Esta equação associa a região absorvente PML isotrópica ao meio anisotrópico uniaxial (UPML – cristal inercial). Seja a equação de Ampère no meio anisotrópico uniaxial expressa por:

$$\nabla \times \vec{H}' = j\omega \varepsilon_2 [A] \vec{E}' \quad (1.52)$$

com  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ . O tensor  $[A]$  referente à anisotropia satisfaz a condição de casamento entre o meio dielétrico ( $\mu_0 \varepsilon_2$ ) e o absorvente. Em regiões com meios absorventes nas três direções, o tensor  $[A]$

$$[A] = [A_x][A_y][A_z]$$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & S_x & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_z & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{S_y S_z}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_x S_z}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_x S_y}{S_z} \end{pmatrix}$$

Assim, a equação (1.52), que se refere aos meios UPML, é idêntica à equação (1.51), ligada aos meios isotrópicos PML, o que prova a equivalência destes métodos.

### Transposição da Formulação do Meio PML Absorvente Anisotrópico (UPML) à Formulação de Berenger

As equações (1.51) e (1.52) se referem à equação de Ampère aplicada a regiões absorventes anisotrópicas (UPML). Da formulação UPML, equação (1.52), obtém-se as formulações no sistema de coordenadas estendidas (equação (1.48)) e de Berenger, vide quadro 1.1.

Quadro 1.1: Formulações UPML e no sistema de coordenadas estendidas.

Eq. (1.52): $\nabla \times \vec{H}' = j\omega\epsilon_2[A]\vec{E}'$	Eq. (1.48): $\nabla' \times H = j\omega\epsilon_2 E$
$\frac{S_x}{S_y S_z} \left( \frac{\partial H'_z}{\partial y} - \frac{\partial H'_y}{\partial z} \right) = j\omega\epsilon_2 E'_x$	$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = j\omega\epsilon_2 E_x$
$\frac{S_y}{S_x S_z} \left( \frac{\partial H'_x}{\partial z} - \frac{\partial H'_z}{\partial x} \right) = j\omega\epsilon_2 E'_y$	$\left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = j\omega\epsilon_2 E_y$
$\frac{S_z}{S_x S_y} \left( \frac{\partial H'_y}{\partial x} - \frac{\partial H'_x}{\partial y} \right) = j\omega\epsilon_2 E'_z$	$\left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = j\omega\epsilon_2 E_z$

- Componente em  $\vec{x}$ : A componente em  $\vec{x}$  da equação (1.52) é constituída por dois termos, um que se refere a uma onda que se propaga em  $\vec{y}$ , e outro a uma onda propagante em  $\vec{z}$ . Ver Quadro 1.1.

- Componente em  $\vec{y}$ : A componente em  $\vec{y}$  da equação (1.52) é constituída por dois termos, um que se refere a uma onda que se propaga em  $\vec{z}$ , e outro a uma onda propagante em  $\vec{x}$ . Ver Quadro 1.1.

- Componente em  $\vec{z}$ : A componente em  $\vec{z}$  da equação (1.52) é constituída por dois termos, um que se refere a uma onda que se propaga em  $\vec{x}$ , e outro a uma onda propagante em  $\vec{y}$ . Ver Quadro 1.1.

O quadro 1.2 esclarece a separação em duas partes da componente magnética ( $H_z = H_{zx} + H_{zy}$ ) utilizada por Berenger na formulação do modo  $TE_z$  (polarização paralela). A equação de Ampère no modo  $TE_z(E_x, E_y, H_z)$  se decompõe em

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_y} \left( \frac{\partial H_{zx}}{\partial y} \right) &= j\omega \varepsilon_2 E_x \\ \frac{1}{S_x} \left( \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} \right) &= j\omega \varepsilon_2 E_y \end{aligned} \tag{1.53}$$

em que a componente  $H_{zx}$  se refere à onda plana que se propaga na direção  $\vec{x}$ , e  $H_{zy}$ , à propagante na direção  $\vec{y}$ .

Quadro 1.2: Equivalência das formulações de UPML e de Berenger.

Eq. de Ampère no meio UPML	Eq. de Ampère em Berenger	Direção de propagação	Onda a se propagar	Componente elétrica em
$\frac{S_x}{S_y S_z} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$ $= j\omega\epsilon_2 E_x$	$\frac{1}{S_y} \frac{\partial H_{zy}}{\partial y}$ $= j\omega\epsilon_2 E_x$	$\frac{\partial H_z}{\partial y} \approx k_y$ ou $\vec{H}_z \times \vec{E}_x \approx \vec{y}$	Em $\vec{y}$ : $S_x = 1$ $S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega\epsilon_2}\right)$ $S_z = 1$	$\vec{x}$
$\frac{S_x}{S_y S_z} \left( -\frac{\partial H_y}{\partial z} \right)$ $= j\omega\epsilon_2 E_x$	$-\frac{1}{S_z} \frac{\partial H_y}{\partial z}$ $= j\omega\epsilon_2 E_x$	$\frac{\partial H_y}{\partial z} \approx k_z$ ou $-\vec{H}_z \times \vec{E}_x \approx \vec{z}$	Em $\vec{z}$ : $S_x = 1$ $S_y = 1$ $S_z = \left(1 - j \frac{\sigma_z}{\omega\epsilon_2}\right)$	
$\frac{S_y}{S_x S_z} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)$ $= j\omega\epsilon_2 E_y$	$\frac{1}{S_z} \frac{\partial H_x}{\partial z}$ $= j\omega\epsilon_2 E_y$	$\frac{\partial H_x}{\partial z} \approx k_z$ ou $\vec{H}_x \times \vec{E}_y \approx \vec{z}$	Em $\vec{y}$ : $S_x = 1$ $S_y = 1$ $S_z = \left(1 - j \frac{\sigma_z}{\omega\epsilon_2}\right)$	$\vec{y}$
$-\frac{S_y}{S_x S_z} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$ $= j\omega\epsilon_2 E_y$	$-\frac{1}{S_x} \frac{\partial H_{zx}}{\partial x}$ $= j\omega\epsilon_2 E_y$	$\frac{\partial H_z}{\partial x} \approx k_x$ ou $-\vec{H}_z \times \vec{E}_y \approx \vec{x}$	Em $\vec{y}$ : $S_x = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega\epsilon_2}\right)$ $S_y = 1$ $S_z = 1$	
$\frac{S_z}{S_x S_y} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)$ $= j\omega\epsilon_2 E_z$	$\frac{1}{S_x} \frac{\partial H_y}{\partial x}$ $= j\omega\epsilon_2 E_z$	$\frac{\partial H_y}{\partial x} \approx k_x$ ou $\vec{H}_y \times \vec{E}_z \approx \vec{x}$	Em $\vec{y}$ : $S_x = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega\epsilon_2}\right)$ $S_y = 1$ $S_z = 1$	$\vec{z}$
$-\frac{S_z}{S_x S_y} \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$ $= j\omega\epsilon_2 E_z$	$-\frac{1}{S_y} \frac{\partial H_x}{\partial y}$ $= j\omega\epsilon_2 E_z$	$\frac{\partial H_x}{\partial y} \approx k_y$ ou $-\vec{H}_x \times \vec{E}_z \approx \vec{y}$	Em $\vec{y}$ : $S_x = 1$ $S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega\epsilon_2}\right)$ $S_z = 1$	

Pelo Quadro 1.2, é evidente que a propagação de ondas planas em meios absorventes anisotrópicos (UPML) é mapeada ao meio isotrópico PML analogamente à formulação de Berenger.

Resumindo, seja o meio absorvente tridimensional. A formulação nos meios absorventes anisotrópicos (UPML) é dada por:

$$-\nabla \times \vec{E}' = j\omega\mu_0[\Lambda]\vec{H}'$$

$$\nabla \times \vec{H}' = j\omega\varepsilon_2[\Lambda]\vec{E}'$$

$$\nabla \cdot (\mu_0[\Lambda]\vec{B}') = 0$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_2[\Lambda]\vec{E}') = 0$$

$$[\Lambda] = [\Lambda_x][\Lambda_y][\Lambda_z] = \text{diag} \left[ \left( \frac{S_y S_z}{S_x} \right), \left( \frac{S_x S_z}{S_y} \right), \left( \frac{S_x S_y}{S_z} \right) \right]$$

( $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$  - Campos escalonados.)

em que o operador nabla é definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}$$

#### - Formulação pelos meios isotrópicos (PML)

A equação de Ampère no meio UPML é explicitada pela equação (1.51). Nos meios isotrópicos PML, a formulação é definida por:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon_2 \vec{E} \\ -\nabla' \times \vec{E} &= j\omega\mu_0 \vec{H} \\ \nabla' \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}) &= 0 \\ \nabla' \cdot (\mu_0 \vec{H}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  - Campos físicos)

Neste caso, o operador nabla se define:

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \vec{z} = \frac{\partial}{S_x \partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{S_y \partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{S_z \partial z} \vec{z}$$

em que  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são coordenadas estendidas modificadas. A equação de Ampère nos meios isotrópicos PML é dada por:

$$\left( \frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} \right) \vec{x} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial H_z}{\partial x'} \right) \vec{y} + \left( \frac{\partial H_z}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} \right) \vec{z} = j\omega\varepsilon_2 (E_x \vec{x} + E_y \vec{y} + E_z \vec{z}) \quad (1.55)$$

### Formulação de Berenger

A formulação de Berenger, vide quadro 1.2, é análoga à formulação anisotrópica, sendo deduzida para cada componente na direção em que a condutividade é não-nula. A lei de Ampère, neste caso, é expressa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_y} \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} &= j\omega \varepsilon_2 E_x \\ -\frac{1}{S_x} \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} &= j\omega \varepsilon_2 E_y\end{aligned}$$

### Dedução da Equação de Helmholtz nas Regiões Absorventes PML

Sejam as equações de Maxwell nos meios absorventes isotrópicos:

$$\begin{aligned}\nabla' \times \vec{H} &= j\omega \varepsilon_2 \vec{E} \\ -\nabla' \times \vec{E} &= j\omega \mu_0 \vec{H} \\ \nabla' \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}) &= 0 \\ \nabla' \cdot (\mu_0 \vec{H}) &= 0\end{aligned}$$

Aplica-se o operador rotacional na equação de Ampère escalonada:

$$\nabla' \times (\nabla' \times \vec{H}) = j\omega \varepsilon_2 (\nabla' \times \vec{E}) \quad (1.56)$$

Substituindo a equação de Faraday na equação (1.23),

$$\nabla' \times (\nabla' \times \vec{H}) = -j\omega \varepsilon_2 j\omega \mu_0 \vec{H}$$

como  $\nabla' \times (\nabla' \times \vec{H}) = \nabla'(\nabla' \cdot \vec{H}) - \nabla' \cdot (\nabla' \vec{H})$  (situação análoga à regra da cadeia, em cálculo diferencial):

$$\nabla'(\nabla' \cdot \vec{H}) - \nabla' \cdot (\nabla' \vec{H}) = -j\omega \varepsilon_2 j\omega \mu_0 \vec{H} \quad (1.57)$$

pela equação do fluxo magnético,  $\nabla' \cdot (\mu_0 \vec{H}) = 0$ , logo:

$$-\nabla' \cdot (\nabla' \vec{H}) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \vec{H}$$

Tem-se finalmente a equação de Helmholtz vetorial escalonada no meio absorvente PML:

$$\nabla' \cdot (\nabla' \vec{H}) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 \vec{H} = 0 \quad (1.58)$$

Pela equação (1.14),

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \vec{z} = \frac{\partial}{S_x \partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{S_y \partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{S_z \partial z} \vec{z} \quad (1.59)$$

Substituindo a equação (1.26) na (1.25), obtêm-se as três equações escalares de Helmholtz escalonadas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + k_2^2 H_x &= 0 \\ \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + k_2^2 H_y &= 0 \\ \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{S_z} \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + k_2^2 H_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

O sistema de equações (1.60) é utilizado para analisar as respectivas componentes nas regiões PML. Ou seja:

$$\frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial H_x}{\partial x} \right) + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{S_z} \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + k_2^2 (H_x, H_y, H_z) = 0 \quad (1.60.1)$$

### **Casamento, Pelo Método dos Elementos Finitos, das Equações de Helmholtz dos Campos Escalonados aos Físicos**

Os campos nas regiões dielétricas são regidos pela equação:

$$\left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}\right) + k_2^2(H_x, H_y, H_z) = 0$$

enquanto os campos nas regiões PML são governados pela equação (1.60.1). Esta diferença, entretanto, não interfere na aplicação do Método dos Elementos Finitos, pois na fronteira entre as duas regiões a condutividade do meio absorvente é nula, o que implica, na interface, a igualdade dos campos em ambos os meios. As condições que os campos têm que satisfazer na fronteira entre os elementos da região dielétrica e da absorvente PML, assim como entre os elementos internos de ambas as regiões são, portanto, cumpridas naturalmente, ao se aplicar o Método dos Elementos Finitos em todo o domínio.

### 1.2.3 Formulação de Tsuji-Koshiba

Y. Tsuji e M. Koshiba propuseram interessante abordagem das equações de Helmholtz nos meios absorventes PML:

- Definiram a anisotropia do meio PML pelo parâmetro  $S$ ,  $\{S: S_x, S_y, S_z\}$ , que depende se a propagação é em  $\vec{x}$  ( $S = S_x$ ) ou  $\vec{y}$  ( $S = S_y$ ). Em qualquer situação,  $S_z \equiv S$ , pois não há efeito anisotrópico em  $\vec{z}$ .

$$[A] = [S] = \text{diag}(S, S, S) = S \text{diag}(1, 1, 1)$$

(em que  $\text{diag}(a, b, c)$  é a matriz diagonal de cuja diagonal principal os elementos são  $(a, b, c)$ .)

- Os sistemas de coordenadas estendidas e físicas são mapeados pela matriz  $[G]$ . O termo  $g_z = S$  indica que não há efeito anisotrópico em  $\vec{z}$ .

$$[G] = \text{diag}(g_x, g_y, S)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Os termos de ambas as matrizes,  $[S]$  e  $[G]$  são estimados para que o novo formalismo se identifique com o de Berenger (ver Quadro 1.2). As equações de Maxwell são definidas, no sistema das coordenadas estendidas, pelos campos físicos:

$$\begin{aligned}\nabla' \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon_2[S]\vec{E} \\ -\nabla' \times \vec{E} &= j\omega\mu_0[S]\vec{H} \\ \nabla' \cdot (\varepsilon_2[S]\vec{E}) &= 0 \rightarrow \varepsilon_2[S]\nabla' \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \nabla' \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla' \cdot (\mu_0[S]\vec{H}) &= 0 \rightarrow \mu_0[S]\nabla' \cdot \vec{H} = 0 \rightarrow \nabla' \cdot \vec{H} = 0\end{aligned}$$

A fim de se obter a equação de Helmholtz, substitui-se na equação de Ampère a equação de Faraday (Equação (1.28)).

$$\nabla' \times ([S]^{-1}\nabla' \times \vec{H}) = j\omega\varepsilon_2\nabla' \times \vec{E}$$

Aplicando-se a identidade do produto vetorial triplo à equação (1.60.1):

$$([S]^{-1}\nabla')[\nabla' \cdot ([S]^{-1}\vec{H})] - ([S]^{-1}\nabla') \cdot ([S]^{-1}\nabla')\vec{H} = k_2^2\vec{H}$$

Pela equação do fluxo magnético,  $\nabla' \cdot ([S]^{-1}\vec{H}) = [S]^{-1}\nabla' \cdot \vec{H} = 0$ , a equação (1.60.1) se identifica à equação de Helmholtz vetorial:

$$-([S]^{-1}\nabla') \cdot ([S]^{-1}\nabla')\vec{H} = k_2^2\vec{H}$$

que se desdobra em três equações escalares ( $\phi = (H_x, H_y, H_z)$ ):

$$([S]^{-1}\nabla') \cdot ([S]^{-1}\nabla')\phi + k_2^2\phi = 0 \quad (1.61)$$

porém,  $[S]^{-1}\nabla' = \text{diag}\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{S}, \frac{1}{S}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x'}\vec{x}, \frac{\partial}{\partial y'}\vec{y}, \frac{\partial}{\partial z'}\vec{z}\right)$ , ou seja:

$$[S]^{-1}\nabla' = \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x'}\vec{x} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y'}\vec{y} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial z'}\vec{z} \quad (1.62)$$

Substituindo-se a equação (1.62) em (1.61):

$$\left(\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x'}\vec{x} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y'}\vec{y} + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial z'}\vec{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{S}\frac{\partial\phi}{\partial x'}\vec{x} + \frac{1}{S}\frac{\partial\phi}{\partial y'}\vec{y} + \frac{1}{S}\frac{\partial\phi}{\partial z'}\vec{z}\right) + k_2^2\phi = 0$$

que, simplificado é:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right) + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial\phi'}{\partial y'}\right) + \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial\phi'}{\partial z'}\right) + k_2^2\phi' = 0 \quad (1.63)$$

A equação (1.63) está definida no sistema de coordenadas estendidas  $(x', y', z')$ . Ela é associada ao sistema real  $(x, y, z)$  pelo mapeamento  $[G]$ :

$$[G] = \text{diag}(g_x, g_y, S)$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [G]^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

com

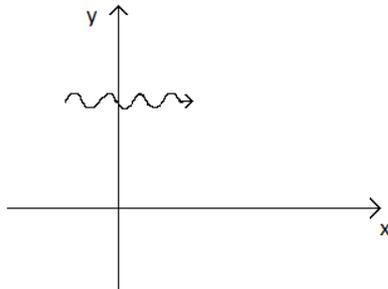
$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{g_x}x \\ y' &= \frac{1}{g_y}y \\ z' &= \frac{1}{S}z \end{aligned}$$

Substituindo-se estes parâmetros na equação (1.63), se obtém a formulação apresentada por Tsuji e Koshiba, no sistema de coordenadas físicas (reais):

$$\frac{g_x}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_x}{S}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{g_y}{S}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g_y}{S}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + k_2^2\phi = 0 \quad (1.64)$$

Para que a equação (1.64) se identifique com a formulação de Berenger, são necessárias as estimativas seguintes:

I) Propagação em  $\vec{x}$  (fronteira normal a  $\vec{x}$ ):



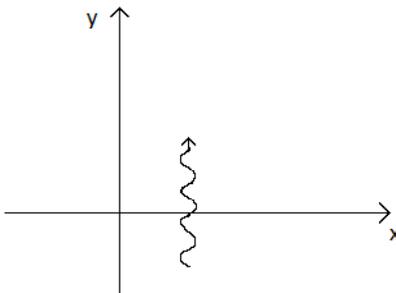
$$S = S_x$$

$$g_x = 1, \quad g_y = S, \quad g_z = S$$

$$\frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k_2^2 \phi = 0$$

Figura 1.4-a: Propagação em fronteira normal a  $\vec{x}$ .

II) Propagação em  $\vec{y}$  (fronteira normal a  $\vec{y}$ ):



$$S = S_y$$

$$g_x = S, \quad g_y = 1, \quad g_z = S$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k_2^2 \phi = 0$$

Figura 1.4-b: Propagação em fronteira normal a  $\vec{y}$ .

A análise, neste trabalho, considerada a geometria dos guias de onda, é solucionada pelo método vetorial magnético aplicado na seção transversal. Portanto, são consideradas somente as componentes  $\phi = (H_x, H_y)$ .

O Quadro 1.3 resume as estimativas da formulação de Tsuji-Koshiba.

Quadro 1.3: Mapeamento de Koshiba.

Fronteiras normais a:	Tensor [S]	Mapeamento [G]
$\vec{x}$	$S = S_x$	$g_x = 1, g_y = S, g_z = S$
$\vec{y}$	$S = S_y$	$g_x = S, g_y = 1, g_z = S$
$\vec{x}$ e $\vec{y}$	Combinação dos fatores relacionados a ambas as fronteiras	

O Quadro 1.4 mostra os formalismos de Gedney e de Tsuji-Koshiba e a equivalência deles ao formalismo de Berenger. Para visão geral do capítulo, o quadro 1.4 sintetiza as teorias desenvolvidas e as relaciona.

Quadro 1.4: Formulações PML

## Formulações - PML

Absorbing Boundary Conditions (Holland, 1983)

$$\vec{j}_e = \sigma \vec{E} \quad \vec{j}_m = \sigma^* \vec{H}$$

Condição de adaptação:  $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma^*}{\mu}$

Parâmetros equivalentes de absorção:

$$S_u = \left(1 - j \frac{\sigma_u}{\omega \varepsilon}\right) ; \quad S_u^* = \left(1 - j \frac{\sigma_u^*}{\omega \mu}\right), \quad u \in \{x, y, z\}$$

PML – Perfectly Matched Layer (Berenger, 1993)

Formulação isotrópica no sistema de coordenadas estendidas:  $x' = S_x x, \quad y' = S_y y, \quad z' = S_z z$ 

$$\nabla' = \left( \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \nabla' \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_2 \vec{E} \\ -\nabla' \times \vec{E} = j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla' \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}) = 0 \\ \nabla' \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \end{cases}$$

Gedney (1996)

Formulação anisotrópica uniaxial  $[\Lambda]$  com os campos escalonados:

$$H'_x = S_x H_x \quad H'_y = S_y H_y \quad H'_z = S_z H_z$$

$$[\Lambda] = \text{diag} \left( \frac{S_y S_z}{S_x}, \frac{S_x S_z}{S_y}, \frac{S_x S_y}{S_z} \right)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}' = j\omega \varepsilon_2 [\Lambda] \vec{E}' \\ -\nabla \times \vec{E}' = j\omega \mu [\Lambda] \vec{H}' \\ \nabla \cdot (\varepsilon_2 [\Lambda] \vec{E}') = 0 \\ \nabla \cdot (\mu [\Lambda] \vec{H}') = 0 \end{cases}$$

Tsuji e Koshiba (2000-2002)

Formulação anisotrópica  $[\Lambda]$  no sistema de coordenadas estendidas:

$$x' = \frac{x}{g_x}, \quad y' = \frac{y}{g_y}, \quad z' = \frac{z}{g_z} \quad [S] = \text{diag}(S, S, S)$$

Os parâmetros  $\{S\}$  e  $\{g_x, g_y, g_z\}$  são estimados para que a formulação se identifique com a de Berenger:

$$\begin{cases} \nabla' \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_2 [S] \vec{E} \\ -\nabla' \times \vec{E} = j\omega \mu [S] \vec{H} \\ \nabla' \cdot (\varepsilon_2 [S] \vec{E}) = 0 \\ \nabla' \cdot (\mu [S] \vec{H}) = 0 \end{cases}$$

### 1.3 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os formalismos apropriados à análise de estruturas PML, a saber: o de Berenger, o da anisotropia uniaxial e o de Tsuji-Koshiba, bem como demonstrada a equivalência entre eles. Foram modelados os campos e a propagação, e se compararam as estratégias utilizadas em cada uma das abordagens.

No capítulo 2, será analisado o comportamento de uma onda na interface entre uma região PML e um dielétrico, e entre duas regiões PML.

## 2 ANÁLISE DA REGIÃO ABSORVENTE (UPML)

Neste capítulo será analisada a incidência de ondas planas na interface entre duas regiões, uma dielétrica e outra absorvente anisotrópica. As condições de casamento perfeito (reflexão nula na interface) entre as regiões serão criteriosamente estabelecidas. Diferentemente de outros autores, que iniciam a análise pela interface entre duas regiões anisotrópicas [2], para abordar em seguida aquela entre regiões anisotrópicas e dielétricas, neste trabalho o enfoque será direcionado entre regiões absorventes (UPML) e dielétricas.

### 2.1 Descrição do Meio Absorvente Uniaxial

O meio absorvente considerado é a região anisotrópica uniaxial, cristal inercial [9]. Cristais inerciais são descritos pelos elipsóides de Fresnel, caracterizados por tensores referentes às permissividades e permeabilidades relativas do meio. Os elipsóides uniaxiais possuem dois graus de liberdade: um na direção de propagação da onda (eixo óptico) e o outro no plano transversal de propagação, vide figura 2.1. O eixo óptico neste trabalho coincidirá com o eixo cristalográfico do cristal. Portanto, os tensores serão diagonalizados.

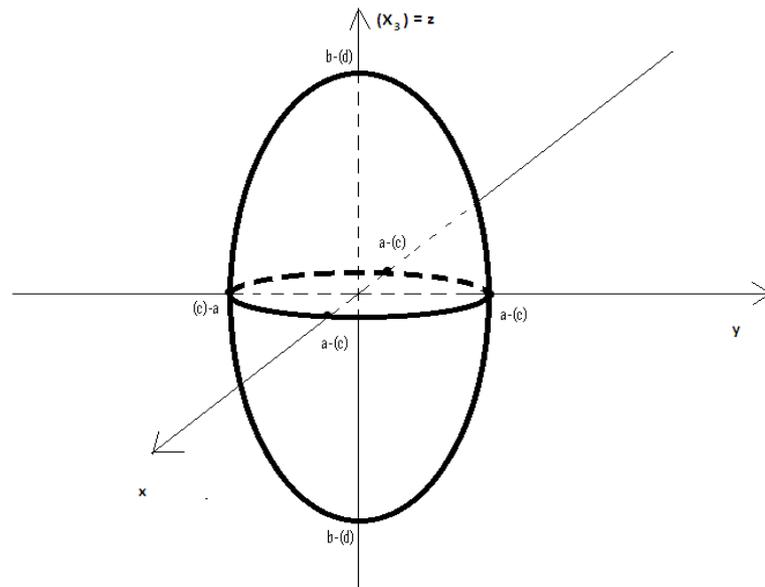


Figura 2.1: Elipsóide de Fresnel com seu eixo óptico  $(x_3) - \vec{z}$ .

A figura 2.1 mostra o cristal inercial. Com relação a ela, definem-se os tensores:

$$\bar{\epsilon} = [\Lambda_e] = \text{diag}(a, a, b)$$

$$\bar{\mu} = [\Lambda_h] = \text{diag}(c, c, d)$$

A anisotropia faz com que os vetores densidade de fluxo e campo elétrico ( $\vec{D}_2, \vec{E}_2$ ) deixem de ser colineares, ocorrendo o mesmo com a densidade e a intensidade de campo magnético ( $\vec{B}_2, \vec{H}_2$ ). Vide na Figura 2.2 o comportamento de ( $\vec{D}_2, \vec{E}_2$ ).

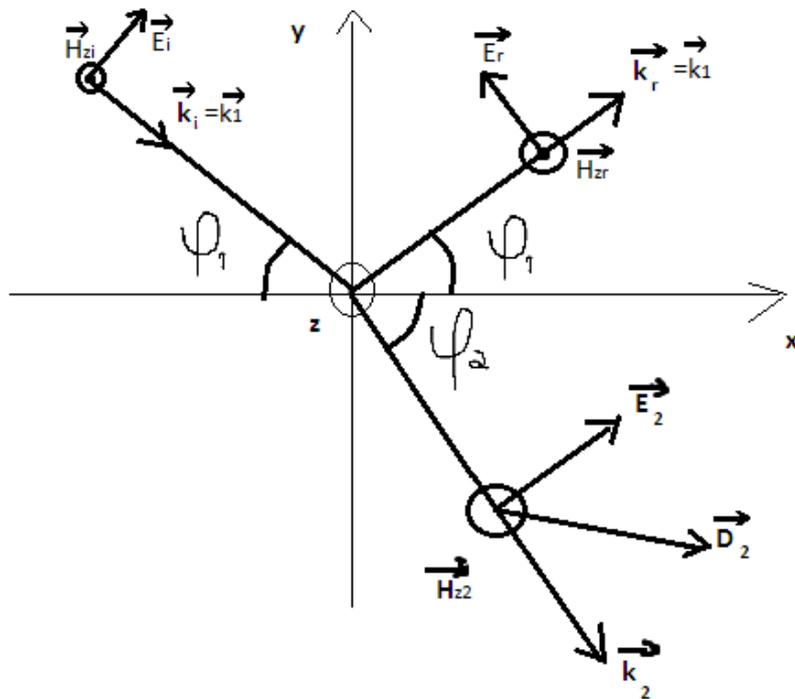


Figura 2.2: Gráfico de ( $\vec{H}_2, \vec{E}_2, \vec{D}_2$ ) no meio anisotrópico, modo  $TE_z$ .

## 2.2 Equação de Dispersão na Região Absorvente UPML

Nesta seção, deduz-se a equação de dispersão dos modos  $TE_z$  e  $TM_z$  na região absorvente PML e as condições de perfeito casamento entre os dois meios (dielétrico e absorvente). Mostra-se também que a condição UPML equivale a se ter reflexão nula dos campos incidentes na interface, independentemente do ângulo de incidência e da frequência.

Na figura 2.3 vê-se a onda relacionada ao elipsóide de Fresnel.

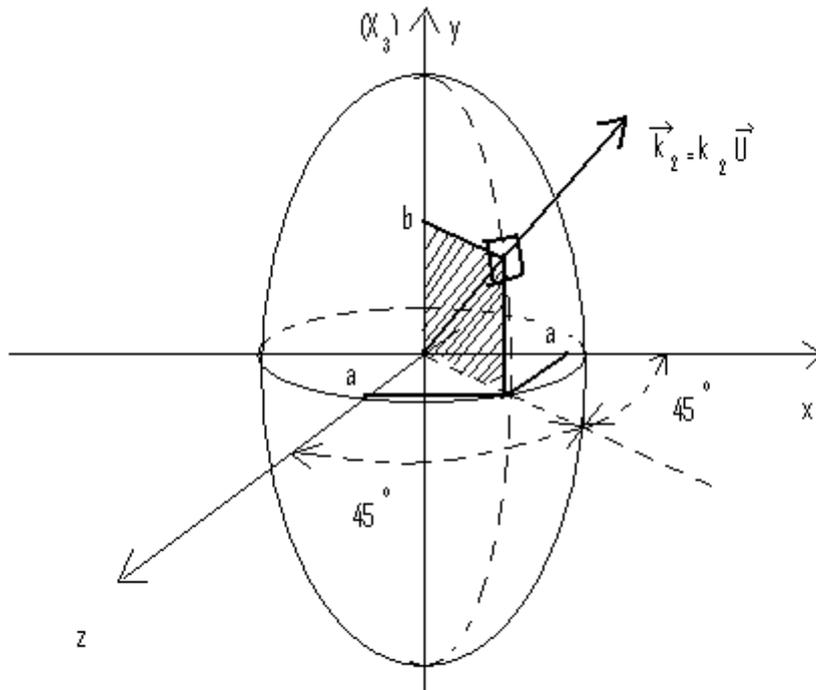


Figura 2.3: A onda plana analisada, referenciada ao elipsóide de Fresnel.

Considerem-se os campos com as três componentes:

$$\vec{E}_2 = (E_{x2}, E_{y2}, E_{z2})e^{-j(k_{x2}x+k_{y2}y+k_{z2}z)}$$

$$\vec{H}_2 = (H_{x2}, H_{y2}, H_{z2})e^{-j(k_{x2}x+k_{y2}y+k_{z2}z)}$$

A análise é efetuada pela incidência normal a  $\vec{y}$ , o eixo óptico do cristal. Os tensores elétrico e magnético, pela Figura 2.3, são:

$$\begin{aligned} [\Lambda_e] &= \text{diag}(a, b, a); & \bar{\epsilon} &= \epsilon_1 [\Lambda_e] \\ [\Lambda_h] &= \text{diag}(c, d, c); & \bar{\mu} &= \mu_0 [\Lambda_h] \end{aligned} \quad (2.3)$$

No meio anisotrópico uniaxial as equações de Maxwell são (no domínio fasorial):

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{H}_2 &= j\omega \vec{\epsilon} \vec{E}_2 \\
 -\nabla \times \vec{E}_2 &= j\omega \vec{\mu} \vec{H}_2 \\
 \nabla \cdot (\epsilon_1 \vec{\epsilon} \vec{E}_2) &= 0 \\
 \nabla \cdot (\mu_0 \vec{\mu} \vec{H}_2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

### 2.2.1 Equação de Dispersão dos Modos $TE_z$ e $TM_z$ na Região Absorvente - PML

Neste capítulo, as equações de dispersão dos modos,  $TE_z$  e  $TM_z$ , são obtidas por dois procedimentos: um pelo operador nabla no sistema de coordenadas estendido, formulação de Berenger (vide Capítulo 1), outro pelas equações de Maxwell no meio anisotrópico uniaxial (formulação de Gedney) (conjunto de equações (2.4)). A análise será realizada considerando-se interface normal a  $\vec{y}$ , eixo cristalográfico do cristal, conforme a Figura 2.4.

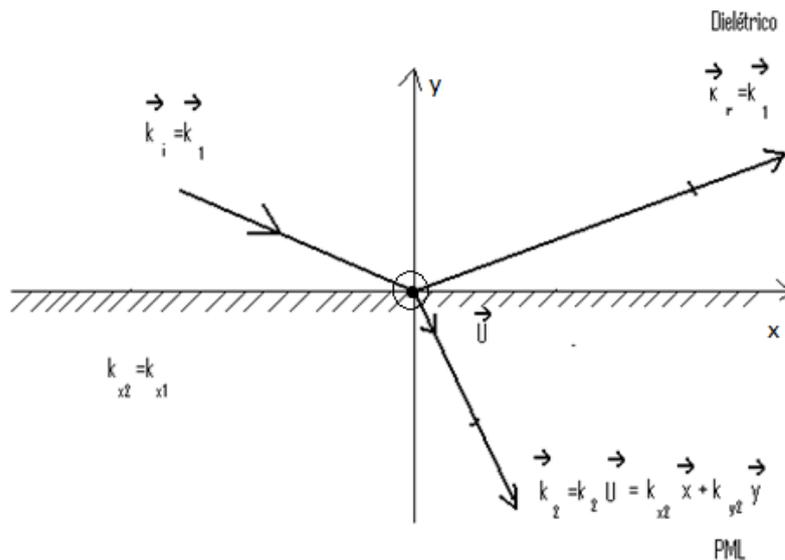


Figura 2.4: Incidência em interface normal a  $\vec{y}$ , o eixo óptico do cristal.

#### 2.2.1.1 Dedução da Equação de Dispersão pelo Sistema de Coordenadas Estendidas

Esta primeira abordagem da equação de dispersão se fundamenta no sistema de coordenadas estendidas, equação (1.58), do Capítulo 1, em que a anisotropia é implícita nas respectivas coordenadas.

A equação de Helmholtz escalar no sistema estendido é:

$$\nabla'^2 \phi + k_2^2 \phi = 0, \quad (2.5)$$

em que

$$\nabla' = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} + \frac{1}{S_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}$$

e

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2}$$

$$\phi = \phi_0 e^{-j(k_{x2}x + k_{y2}y + k_{z2}z)}$$

substituindo-se o operador nabla estendido, tem-se:

$$\nabla' \phi = -j \left( \frac{k_{x2}}{S_x} \vec{x} + \frac{k_{y2}}{S_y} \vec{y} + \frac{k_{z2}}{S_z} \vec{z} \right) \phi$$

Para simplificar a notação, seja  $\vec{A} = \frac{k_{x2}}{S_x} \vec{x} + \frac{k_{y2}}{S_y} \vec{y} + \frac{k_{z2}}{S_z} \vec{z}$ . Tem-se então:

$$\nabla' = -j\vec{A}$$

logo,

$$\nabla'^2 \phi = (\nabla' \cdot \nabla') \phi = (-j\vec{A}) \cdot (-j\vec{A}) \phi$$

então,

$$\nabla'^2 \phi = - \left[ \left( \frac{k_{x2}}{S_x} \right)^2 + \left( \frac{k_{y2}}{S_y} \right)^2 + \left( \frac{k_{z2}}{S_z} \right)^2 \right] \phi \quad (2.6)$$

Levando (2.6) na equação de Helmholtz (2.5),

$$\nabla'^2 \phi + k_2^2 \phi = 0$$

$$-\left[\left(\frac{k_{x2}}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{k_{y2}}{S_y}\right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{S_z}\right)^2\right]\phi + k_2^2\phi = 0$$

Subtraindo  $k_2^2\phi$  em ambos os lados,

$$-\left[\left(\frac{k_{x2}}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{k_{y2}}{S_y}\right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{S_z}\right)^2\right]\phi = -k_2^2\phi$$

Dividindo ambos os lados por  $\phi$

$$-\left[\left(\frac{k_{x2}}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{k_{y2}}{S_y}\right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{S_z}\right)^2\right] = -k_2^2$$

Tem-se a equação de dispersão da onda plana na região absorvente:

$$k_2^2 = \left(\frac{k_{x2}}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{k_{y2}}{S_y}\right)^2 + \left(\frac{k_{z2}}{S_z}\right)^2 \quad (2.7)$$

Ambos os modos ( $TE_z, TM_z$ ) têm a mesma frente de onda, pois os dois são componentes do modo híbrido ( $HEM = TE_z + TM_z$ ). Portanto, a equação (2.7) se aplica indistintamente aos modos  $TE_z$  e  $TM_z$ .

#### 2.2.1.2 Adaptação da Equação de Dispersão (Equação (2.7)) aos Sistemas Bidimensionais

- Incidência em interface normal a  $\vec{y}$ , vide Figura 2.4:

$$S_x = 1$$

$$S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$k_z^2 = k_{x2}^2 + \left(\frac{k_{2y}}{S_y}\right)^2$$

- Incidência em interface normal a  $\vec{x}$ :

$$S_x = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_1}\right)$$

$$S_y = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$k_z^2 = \left(\frac{k_{2x}}{S_x}\right)^2 + k_{y2}^2$$

- Incidência em interfaces normais a  $\vec{x}$  e a  $\vec{y}$ , o que caracteriza os cantos de regiões absorventes bidimensionais:

$$S_x = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_1}\right)$$

$$S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$k_z^2 = \left(\frac{k_{2x}}{S_x}\right)^2 + \left(\frac{k_{2y}}{S_y}\right)^2$$

### 2.2.1.3 Dedução da Equação de Dispersão Bidimensional pelas Equações de Maxwell

A segunda abordagem da equação de dispersão dos modos ( $TE_z, TM_z$ ) se baseia nas equações de Maxwell, em meios anisotrópicos [2]. Consideram-se os campos  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$  com as três componentes. O operador  $\nabla$  é o mesmo das ondas planas:  $\nabla = -j\vec{k}_2 = -j(k_{x2}\vec{x} \pm k_{y2}\vec{y})$ .

As equações de Maxwell são expressas:

$$\vec{k}_2 \times \vec{H}_2 = -\omega \varepsilon_2 [\Lambda_e] \vec{E}_2 \quad (2.8)$$

$$\vec{k}_2 \times \vec{E}_2 = -\omega \mu_0 [\Lambda_h] \vec{H}_2 \quad (2.9)$$

$$\vec{k}_2 \cdot ([\Lambda_e] \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{k}_2 \cdot ([\Lambda_h] \vec{H}_2) = 0$$

Os respectivos tensores referentes ao eixo óptico  $\vec{y}$ :

$$[\Lambda_e] = \text{diag}(a, b, a)$$

$$[\Lambda_h] = \text{diag}(c, d, c)$$

- Modo  $TE_z$ — Polarização Paralela (Modo  $H_z$ )

A equação de dispersão do modo  $TE_z(E_x, E_y, H_z)$  é deduzida com o auxílio das equações (2.8) e (2.9):

$$[\Lambda_h]^{-1} \{ \vec{k}_2 \times [\Lambda_e]^{-1} (\vec{k}_2 \times \vec{H}_2) \} = -k_2^2 \vec{H}_2 \quad (2.10)$$

Considerando  $\vec{k}_2$  e  $\vec{H}_2$ ,

$$\vec{k}_2 = k_{x2} \vec{x} + k_{y2} \vec{y}$$

$$\vec{H}_2 = H_{x2} \vec{x} + H_{y2} \vec{y} + H_{z2} \vec{z}$$

a equação (2.10) se torna:

$$\begin{aligned} & [\Lambda_h]^{-1} \left\{ (k_{x2} \vec{x} + k_{y2} \vec{y}) \times [\Lambda_e]^{-1} \left( (k_{x2} \vec{x} + k_{y2} \vec{y}) \times (H_{x2} \vec{x} + H_{y2} \vec{y} + H_{z2} \vec{z}) \right) \right\} \\ & = -k_2^2 (H_{x2} \vec{x} + H_{y2} \vec{y} + H_{z2} \vec{z}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desenvolve-se o segundo termo do lado esquerdo da equação (2.11). Chamemo-lo  $\vec{T}_2$ :

$$\vec{T}_2 = [\Lambda_e]^{-1} \left( (k_{x2} \vec{x} + k_{y2} \vec{y}) \times (H_{x2} \vec{x} + H_{y2} \vec{y} + H_{z2} \vec{z}) \right)$$

Efetuando o produto vetorial,

$$\vec{T}_2 = [\Lambda_e]^{-1}(k_{y2}H_{z2}\vec{x} - k_{x2}H_{z2}\vec{y} + (k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2})\vec{z})$$

com  $[\Lambda_e]^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ . Tem-se:

$$\vec{T}_2 = \frac{k_{y2}}{a}H_{z2}\vec{x} - \frac{k_{x2}}{b}H_{z2}\vec{y} + \frac{1}{a}(k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2})\vec{z}. \quad (2.12)$$

Desenvolvendo o primeiro termo, definido por

$$\vec{T} = [\Lambda_h]^{-1}[(k_{x2}\vec{x} + k_{y2}\vec{y}) \times \vec{T}_2], \quad (2.13)$$

substitui-se a equação (2.12) na (2.13):

$$\vec{T} = [\Lambda_h]^{-1} \left[ (k_{x2}\vec{x} + k_{y2}\vec{y}) \times \left( \frac{k_{y2}}{a}H_{z2}\vec{x} - \frac{k_{x2}}{b}H_{z2}\vec{y} + \frac{1}{a}(k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2})\vec{z} \right) \right].$$

Após algebrismo simples, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{T} = [\Lambda_h]^{-1} & \left[ \frac{k_{y2}}{a}(k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2})\vec{x} - \frac{k_{x2}}{a}(k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2})\vec{y} \right. \\ & \left. - \left( \frac{k_{2x}^2}{b} + \frac{k_{2y}^2}{a} \right) H_{2z}\vec{z} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\vec{T} = [\Lambda_h]^{-1}(-1) \left[ \left( \frac{k_{2x}^2}{b} + \frac{k_{2y}^2}{a} \right) H_{2z}\vec{z} + \left( \frac{k_{y2}}{a}\vec{x} - \frac{k_{x2}}{a}\vec{y} \right) (k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2}) \right]$$

Ao substituir o tensor  $[\Lambda_h]^{-1} = \text{diag}(c, d, c)$  em (2.14), obtém-se:

$$\vec{T} = \frac{1}{a} \left[ k_{y2} \left( \frac{\vec{x}}{c} \right) - k_{x2} \left( \frac{\vec{y}}{d} \right) \right] (k_{x2}H_{y2} - k_{y2}H_{x2}) - \frac{\vec{z}}{c} \left( \frac{k_{2x}^2}{b} + \frac{k_{2y}^2}{a} \right) H_{2z}$$

Assim, é obtida a equação de Helmholtz vetorial do campo magnético:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left[ k_{y2} \left( \frac{\vec{x}}{c} \right) - k_{x2} \left( \frac{\vec{y}}{d} \right) \right] (k_{x2} H_{y2} - k_{y2} H_{x2}) - \frac{\vec{z}}{c} \left( \frac{k_{2x}^2}{b} + \frac{k_{2y}^2}{a} \right) H_{2z} \\ = -k_2^2 (H_{x2} \vec{x} + H_{y2} \vec{y} + H_{z2} \vec{z}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

A equação vetorial (equação (2.15)), desmembrada nas três componentes, origina:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ac} k_{y2} (k_{x2} H_{y2} - k_{y2} H_{x2}) + k_2^2 H_{x2} &= 0 \\ -\frac{1}{ad} k_{x2} (k_{x2} H_{y2} - k_{y2} H_{x2}) + k_2^2 H_{y2} &= 0 \\ \left( \frac{k_{2x}^2}{bc} + \frac{k_{2y}^2}{ca} - k_2^2 \right) H_{2z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

No modo  $TE_z(E_x, E_y, H_z)$ ,  $H_x, H_y$  e  $E_z$  são nulos. Considerando essa condição no sistema (2.16), permanece, apenas, a terceira equação, que é a da dispersão procurada:

$$\frac{k_{2x}^2}{bc} + \frac{k_{2y}^2}{ca} = k_2^2 \quad (2.17)$$

Para que haja onda propagante na fronteira, é necessário que a condição de Descartes-Snell seja, também, satisfeita em  $y = 0$ , vide Figura 2.4, portanto:

$$k_{2x} = k_{1x} \quad (2.18)$$

Esta condição impõe, na equação (2.17) que:

$$b = \frac{1}{c}$$

Os tensores  $[\Lambda_e]$  e  $[\Lambda_h]$  passam a ser:

$$[\Lambda_e] = \text{diag} \left( a, \frac{1}{c}, a \right), \quad a = \left( 1 - \frac{j\sigma_y}{\omega\epsilon_1} \right) \quad (2.19)$$

$$[\Lambda_h] = \text{diag} \left( c, \frac{1}{d}, c \right), \quad c = \left( 1 - \frac{j\sigma_y^*}{\omega\mu_0} \right) \quad (2.20)$$

As condutividades elétrica e magnética satisfazem a condição de casamento em incidência normal [2]:

$$\frac{\sigma_y}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \quad (2.21)$$

Pela condição da equação (2.21), as equações (2.19) e (2.20) geram:

$$\left( 1 - \frac{j\sigma_y}{\omega\epsilon_1} \right) = \left( 1 - \frac{j\sigma_y^*}{\omega\mu_0} \right)$$

portanto:

$$a = c$$

Assim, o tensor elétrico fica definido:

$$[\Lambda_e] = \text{diag} \left( c, \frac{1}{c}, c \right), \quad c = \left( 1 - \frac{j\sigma_y}{\omega\epsilon_1} \right) \quad (2.22)$$

O tensor  $[\Lambda_h] = \text{diag} \left( c, \frac{1}{d}, c \right)$  é determinado ao se conhecer o termo “d”, calculado a seguir nesta seção.

- Modo  $TM_z$  (modo  $E_z$ ) – Polarização Perpendicular

A dispersão deste modo é deduzida identicamente ao do modo anterior, por dualidade:

1) Seja a equação de Faraday;

$$\vec{k}_2 \times \vec{E}_2 = \omega \mu_0 [\Lambda_h] \vec{H}_2$$

2) Aplica-se o rotacional em ambos os lados:

$$\vec{k}_2 \times [\Lambda_h]^{-1} [\vec{k}_2 \times \vec{E}_2] = \omega \mu_0 (\vec{k}_2 \times \vec{H}_2) \quad (2.23)$$

3) Substitui-se a equação de Ampère,  $\vec{k}_2 \times \vec{H}_2 = -\omega \varepsilon_2 [\Lambda_e] \vec{E}_2$  no segundo termo de (2.23):

$$\vec{k}_2 \times [\Lambda_h]^{-1} [\vec{k}_2 \times \vec{E}_2] = \omega \mu_0 (-\omega \varepsilon_2 [\Lambda_e] \vec{E}_2)$$

Multiplicam-se ambos os lados por  $[\Lambda_e]^{-1}$ :

$$[\Lambda_e]^{-1} \{ \vec{k}_2 \times [\Lambda_h]^{-1} [\vec{k}_2 \times \vec{E}_2] \} = \omega \mu_0 (-\omega \varepsilon_2 \vec{E}_2)$$

$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 = k_2^2$ , tem-se:

$$[\Lambda_e]^{-1} \{ \vec{k}_2 \times [\Lambda_h]^{-1} [\vec{k}_2 \times \vec{E}_2] \} = -k_2^2 \vec{E}_2 \quad (2.24)$$

Os vetores  $(\vec{k}_2, \vec{E}_2)$  em (2.24) são:

$$\vec{k}_2 = k_{2x} \vec{x} + k_{2y} \vec{y}$$

$$\vec{E}_2 = (E_{2x}, E_{2y}, E_{2z})$$

4) A equação de dispersão do modo  $TM_z$  é deduzida pela equação (2.24), ou pelo teorema da dualidade aplicado a (2.17).

O Teorema da Dualidade implica:

$$[\Lambda_h] \rightarrow [\Lambda_e]$$

$$diag \left( a, \frac{1}{b}, a \right) \rightarrow diag \left( c, \frac{1}{d}, c \right)$$

Submetendo a equação (2.17), reescrita por conveniência:

$$\frac{k_{2x}^2}{cb} + \frac{k_{2y}^2}{ca} = k_2^2$$

ao teorema da dualidade,

$$c \rightarrow a$$

$$b \rightarrow d$$

$$a \rightarrow c$$

Tem-se a equação de dispersão do modo  $TM_z$ :

$$\frac{k_{2x}^2}{ad} + \frac{k_{2y}^2}{ac} = k_2^2$$

Pela lei de Descartes-Snell, a componente em  $\vec{x}$  da propagação da onda deve ser igual em ambos os lados da interface, o que implica:

$$a = \frac{1}{d}$$

Pelo casamento da incidência normal, a componente em  $\vec{y}$  não pode ser refletida pela interface (transmissão total), o que significa que:

$$a = c$$

Assim, a equação de dispersão para ambos os modos é idêntica, e dada por

$$k_{2x}^2 + \frac{k_{2y}^2}{c^2} = k_2^2, \quad k_{2x} = k_{1x} \quad (2.25)$$

Igualdade verificada, também, nos tensores:

$$[\Lambda_h] = [\Lambda_e] = \text{diag}\left(c, \frac{1}{c}, c\right), \quad c = S_y = \left(1 - \frac{j\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}\right)$$

### 2.3 Condições PML entre Meio Dielétrico e Região Absorvente Uniaxial

Nesta seção serão obtidas as condições de perfeito casamento na fronteira (transmissão total da onda incidente) entre um meio dielétrico e um meio anisotrópico uniaxial, assim como a análise dos campos que se propagam na região absorvente. A análise será exemplificada pela incidência em superfície normal à direção  $\vec{y}$ .

A anisotropia se refere aos tensores:

$$[\Lambda_h] = [\Lambda_e] = [\Lambda] = \text{diag}\left(S_y, \frac{1}{S_y}, S_y\right)$$

$$S_y = 1 - \frac{j\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}$$

A equação de dispersão de ambos os modos,  $TE_z$  e  $TM_z$ , é a equação (2.18):

$$k_{2x}^2 + \left(\frac{k_{2y}}{S_y}\right)^2 = k_2^2 \quad (2.19)$$

Para que as equações de dispersão de ambos os modos sejam iguais, caracterizando casamento perfeito (PML), é necessário que  $k_{2y} = S_y k_{2y}$ . Da equação (2.19), tem-se:

$$\vec{k}_2 = k_{2x}\vec{x} + k_{2y}\vec{y} \quad (2.20)$$

As condições que tornam um meio PML são, vide Figura 2.4:

1- Lei de Descartes-Snell:

$$k_{2x} = k_{1x} \quad (2.21)$$

2- Coeficiente de Reflexão Nulo na Fronteira:

$$\begin{aligned} \Gamma_e = \Gamma_h = 0, & \quad \text{se } y = 0 \\ k_2 = k_1 & \end{aligned} \quad (2.22)$$

A condição estabelecida em (2.22) será satisfeita se, na equação (2.20),

$$k_{1y} = \frac{k_{2y}}{S_y} \quad (2.23)$$

Substituindo as equações (2.23) e (2.21) na equação (2.20), tem-se que, na fronteira,

$$\vec{k}_2 = k_{1x}\vec{x} + k_{1y}\vec{y}$$

as constantes de propagação da onda no meio dielétrico e no meio UPML são idênticas, ou seja, não há onda refletida. Em outras palavras, a região anisotrópica absorvente uniaxial se casa perfeitamente ao dielétrico, como esperado, fazendo jus à sua denominação (UPML).

### 2.3.1 Cálculo dos Coeficientes de Reflexão dos Modos $TE_z$ e $TM_z$ na Interface entre Dois Meios

Neste item, serão deduzidos os coeficientes de reflexão para ambos os modos, e sua relação com os campos. Finalmente, será mostrado que uma onda plana não sofre reflexão na interfacedielétrico-PML, quaisquer que sejam o ângulo de incidência e a frequência de operação.

- Os campos na região dielétrica, pelo Apêndice B, equações (B.7) e (B.8), são:

$$\begin{array}{ll} \textit{Modo } TE_z & \textit{Modo } TM_z \\ H_{z1} = H_0(1 + \Gamma_h) & E_{z1} = E_0(1 + \Gamma_e) \\ E_{x1} = H_0 Z_{1y}(1 - \Gamma_h) & -H_{x1} = E_0 Y_{y1}(1 - \Gamma_e) \\ E_{y1} = H_0 Z_{1x}(1 + \Gamma_h) & E_{z1} = E_0 Y_{x1}(1 + \Gamma_e) \end{array} \quad (2.24)$$

- Na região absorvente, pelas equações (B.16) e (B.17):

$$\begin{array}{ll}
\text{Modo } TE_z & \text{Modo } TM_z \\
H_{z2} = T_h H_0 & E_{z2} = T_e E_0 \\
E_{x2} = T_h H_0 Z_{2y} & -H_{x2} = T_e E_0 Y_{2y} \\
E_{y2} = T_h H_0 S_y Z_{2x} & -H_{y2} = T_e E_0 S_y Y_{2x}
\end{array} \quad (2.25)$$

A condição PML implica que a impedância de onda no meio PML é idêntica à do dielétrico, seja (Índice: 1- dielétrico; 2 –PML):

$$\begin{array}{ll}
\text{Modo } TE_z & \text{Modo } TM_z \\
Z_{2x} = Z_{1x} = Z_1 \cos \varphi_1 & Y_{2x} = Y_{1x} = Y_1 \cos \varphi_1 \\
Z_{2y} = Z_{1y} = Z_1 \sin \varphi_1 & Y_{2y} = Y_{1y} = Y_1 \sin \varphi_1
\end{array} \quad (2.26)$$

O perfeito casamento das regiões é decorrente da igualdade das impedâncias de onda de ambos os meios. Esta condição implica igualdade entre os ângulos de incidência ( $\varphi_1$  - região dielétrica) e transmissão ( $\varphi_2$  - região PML), esclarecida na sequência da seção.

- Cálculo dos Coeficientes de Reflexão (vide Apêndice D):

Os coeficientes de reflexão na interface dielétrico-PML são calculados pela condição de fronteira dos campos:

$$\begin{array}{ll}
\text{Modo } TE_z & \text{Modo } TM_z \\
E_{1x}(x, y = 0) = E_{2x}(x, y = 0) & H_{1x}(x, y = 0) = H_{2x}(x, y = 0) \\
H_{1z}(x, y = 0) = H_{2z}(x, y = 0) & E_{1z}(x, y = 0) = E_{2z}(x, y = 0)
\end{array} \quad (2.27)$$

Para que haja casamento, é necessário que:

$$\begin{array}{ll}
\text{Modo } TE_z & \text{Modo } TM_z \\
Z_{2y}(x, y = 0) = Z_{1y}(x, y = 0) & Y_{2y}(x, y = 0) = Y_{1y}(x, y = 0)
\end{array}$$

Em que, pelas equações (2.26), a impedância e a admitância da onda se definem:

$$\frac{E_x}{H_z} = -Z_y \qquad \frac{H_x}{E_z} = Y_y \qquad (2.28)$$

A condição (2.28) implica reflexão nula, da incidência de ambos os modos ( $TE_z, TM_z$ ), na fronteira dielétrico-PML. Substituindo as equações (2.24) e (2.25) no conjunto de equações (2.27), têm-se:

$$\begin{array}{cc} \textit{Modo } TE_z & \textit{Modo } TM_z \\ \frac{H_0 Z_{1y}(1 - \Gamma_h)}{H_0(1 + \Gamma_h)} = \frac{T_h H_0 Z_{2y}}{T_h H_0} & \frac{E_0 Y_{y1}(1 - \Gamma_e)}{E_0(1 + \Gamma_e)} = -\frac{T_e E_0 Y_{2y}}{T_e E_0} \end{array} \qquad (2.29)$$

Simplificando-se as equações (2.29):

$$\begin{array}{cc} \textit{Modo } TE_z & \textit{Modo } TM_z \\ \frac{Z_{1y}(1 - \Gamma_h)}{(1 + \Gamma_h)} = Z_{2y} & \frac{Y_{y1}(1 - \Gamma_e)}{(1 + \Gamma_e)} = -Y_{2y} \end{array}$$

Portanto,

$$Z_{1y}(1 - \Gamma_h) = Z_{2y}(1 + \Gamma_h) \qquad Y_{y1}(1 - \Gamma_e) = -Y_{2y}(1 + \Gamma_e)$$

Reagrupando os termos

$$Z_{1y} - Z_{2y} = Z_{1y}\Gamma_h + Z_{2y}\Gamma_h \qquad Y_{y1} + Y_{2y} = Y_{y1}\Gamma_e - Y_{2y}\Gamma_e$$

Fazendo uso da propriedade distributiva da multiplicação:

$$Z_{1y} - Z_{2y} = \Gamma_h(Z_{1y} + Z_{2y}) \qquad Y_{y1} + Y_{2y} = \Gamma_e(Y_{y1} - Y_{2y})$$

Têm-se então os coeficientes de reflexão:

$$\begin{array}{cc} \textit{Modo } TE_z & \textit{Modo } TM_z \\ \Gamma_h = \frac{Z_{1y} - Z_{2y}}{Z_{1y} + Z_{2y}} & \Gamma_e = \frac{Y_{y1} + Y_{2y}}{Y_{y1} - Y_{2y}} \end{array}$$

Para que haja perfeito casamento entre os dois meios, é necessário que o coeficiente de reflexão seja nulo, logo:

$$\begin{array}{ll} \text{Modo } TE_z & \text{Modo } TM_z \\ Z_{1y} = Z_{2y} & Y_{y1} = Y_{2y} \end{array}$$

As condições PML, equação (2.26), estabelecem:

$$Z_{2y} = Z_{1y} = Z_1 \sen \varphi_1 \qquad Y_{2y} = Y_{1y} = Y_1 \sen \varphi_1$$

Logo:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_h = 0 & \Gamma_e = 0 \\ T_h = 0 & T_e = 0 \end{array}$$

Assim, o respectivo casamento de impedâncias implica que a onda incidente é transmitida totalmente do dielétrico ao PML, independente da frequência de operação e do ângulo de incidência:

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

## 2.4 Conclusão

Esse capítulo apresentou o estudo da propagação da onda plana nas regiões absorventes [14], que, ao se adaptarem os meios [2], passaram a ser denominadas regiões PML (*Perfectly Matched Layer* - Camada Perfeitamente Casada).

Foi analisado, somente, o modo  $TE_z$ , uma vez que o  $TM_z$  é dual do primeiro. Conseqüentemente, as características de propagação de ambos são idênticas nas regiões PML (coeficientes de reflexão e transmissão similares e independentes do ângulo de incidência e da frequência de operação).

Empregando o método da anisotropia uniaxial (UPML – *Uniaxial Perfectly Matched Layer*), um dos apropriados à referida análise, demonstrou-se que o coeficiente de reflexão para uma onda plana incidente na fronteira entre dois meios adaptados é nulo, a onda é

transmitida integralmente ao meio refratário, independentemente do ângulo de incidência e da frequência. O apêndice D detalha com mais profundidade as conclusões obtidas neste capítulo.

O capítulo 3 aplicará a formulação PML ao Método dos Elementos Finitos.

### 3 IMPLEMENTAÇÃO DE REGIÕES PML DISSIPATIVAS

#### 3.1 Introdução

Na análise de Guia de Onda de seção transversa infinita, é imprescindível o uso de regiões PML para que o domínio espacial infinito seja reduzido a dimensões acessíveis ao processamento computacional.

No que se refere ao método dos elementos finitos (MEF – apêndice C), as regiões PML são introduzidas circundando a malha dos elementos finitos usuais, vide capítulo 2, e são limitadas por paredes elétricas perfeitas (PEC – *Perfect Electric Conductor*).

A técnica PML é, portanto, implementada como um complemento da formulação básica do método dos elementos finitos, vide capítulo 2.

#### 3.2 Definição das Regiões Usuais e PML

Camadas PML dissipativas são complementos do MEF usual e delimitam o domínio dos guias de onda abertos. Há três variedades de camadas PML: i) as referentes à propagação em  $\vec{x}$ , ii) em  $\vec{y}$ , e iii) as relativas aos cantos (*corners*) do domínio. Os elementos triangulares, neste trabalho, são definidos pelo vetor “TRPML (ELE)”, sob a seguinte convenção:

- Domínio usual  $\rightarrow$  TRPML(ELE)=0

- Regiões PML:

Propagação em  $\vec{x}$ , fronteira normal a  $\vec{y} \rightarrow$  TRPML(ELE)=1

Propagação em  $\vec{y}$ , fronteira normal a  $\vec{x} \rightarrow$  TRPML(ELE)=2

Cantos do domínio – fronteiras normais a  $\vec{x}$  e a  $\vec{y} \rightarrow$  TRPML(ELE)=3

A configuração espacial das regiões PML (1, 2 e 3) em relação ao meio dielétrico (0) é mostrada na Figura 3.1.

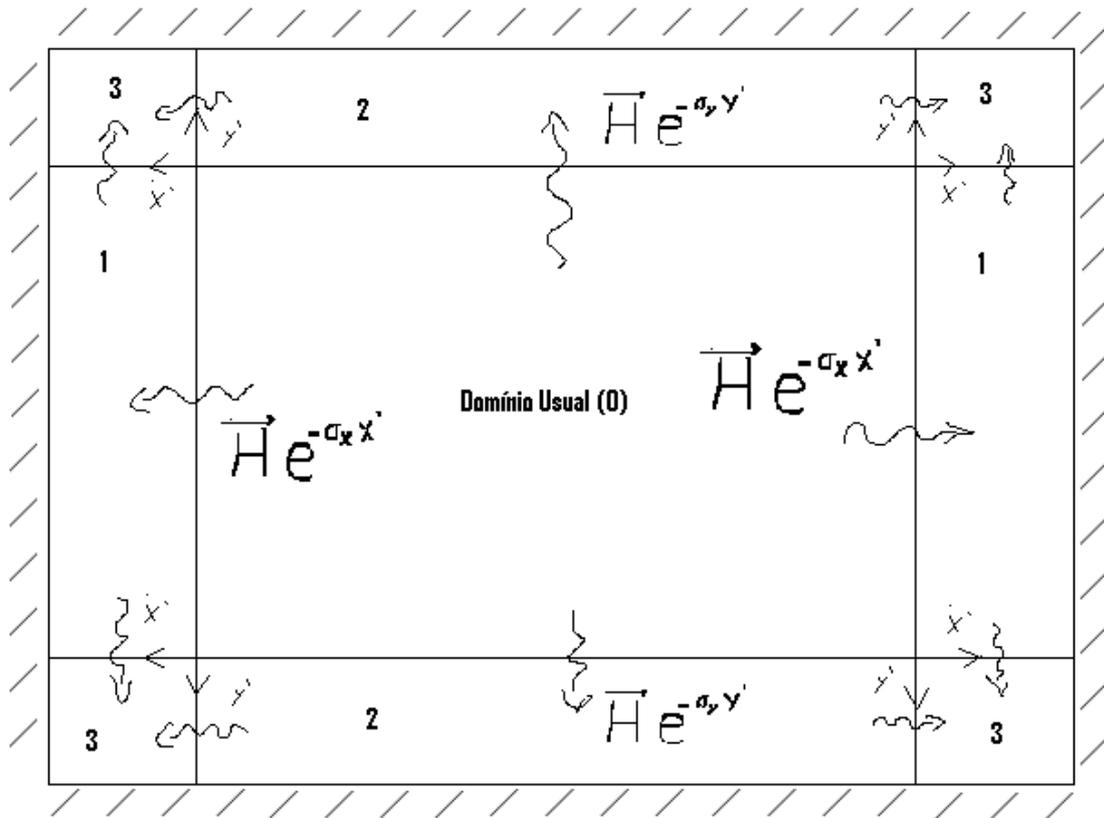


Figura 3.1: Domínio computacional relacionado às regiões PML 1, 2 e 3, limitado pelas fronteiras PEC.

### 3.3 Formalismo Generalizado do Método dos Elementos Finitos (MEF)

Nesta seção, serão apresentados os formalismos do MEF, condizentes às quatro regiões que compõem o domínio em análise, limitado pelas camadas PML.

Independentemente da região, usual ou PML, o formalismo tem por base a formulação fraca  $H_B^1(\Omega)$  do método variacional magnético [8]. Pelas componentes transversais magnéticas ( $H_x, H_y$ ) e as equações de Maxwell, definem-se os problemas de valores de fronteira das respectivas regiões [8]:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \vec{H} \right) - k_0^2 \vec{H} = 0$$

Condições de fronteira:  $B(\vec{H}) = G(\Gamma)$

A formulação é obtida pelo método de Galerkin-Bubnov (domínio usual) e Galerkin-Petrov (Regiões PML). Discretiza-se o domínio, usual ou PML, em elementos finitos triangulares. Impõem-se dois graus de liberdade a cada nó geométrico, pois a análise é desenvolvida pelas incógnitas magnéticas ( $H_x, H_y$ ). Assim,

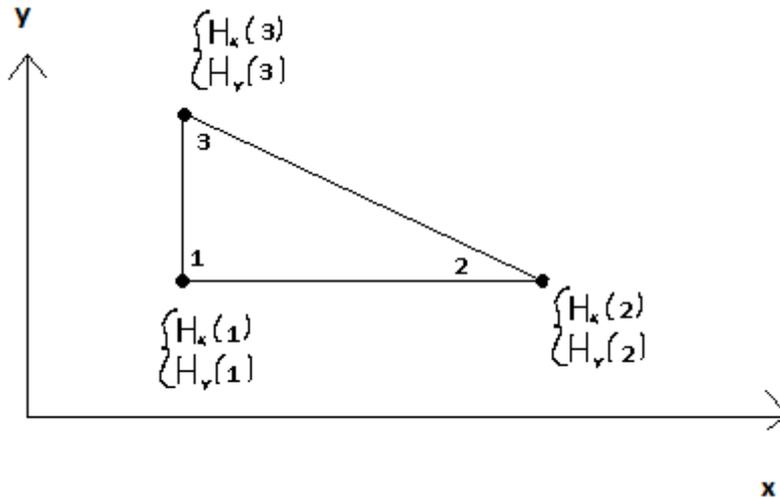


Figura 3.2: O elemento triangular com dois graus de liberdade em cada nó geométrico.

O campo vetorial magnético, incógnita da análise, é definido pelas duas componentes transversais ( $\vec{x}, \vec{y}$ ):

$$\vec{H}_t(x, y) = (H_x(x, y)\vec{x} + H_y(x, y)\vec{y})e^{-\gamma z}$$

Estes são expandidos pelas funções de interpolação linear ( $L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)$ ) alocadas nos respectivos nós globais:

- Referentes à componente  $H_x \rightarrow n = 1, 2, \dots, NG_x$
- Referentes à componente  $H_y \rightarrow m = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$

$NG_x$  - nó global máximo da componente  $H_x$

$NG_y = (NGT - NG_x)$  - quantidade de nós de  $H_y$

### 3.3.1 Domínio Usual

As componentes transversais do campo magnético são expandidas pelas funções coordenadas: em  $\vec{x}$ :

$$\{L_n(x, y), n = 1, 2, \dots, NG_x\}$$

e em  $\vec{y}$ :

$$\{L_m(x, y), m = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT\}$$

(vide Apêndice C – Método dos Elementos Finitos). O vetor magnético transversal,  $\vec{H}_t(x, y)$  então se escreve:

$$\vec{H}_t(x, y) = \left( \sum_{nx=1}^{NG_x} q_{nx} L_{nx}(x, y) \vec{x} + \sum_{my=(NG_x+1)}^{NG_y} q_{my} L_{my}(x, y) \vec{y} \right) e^{-\gamma z}$$

Em que

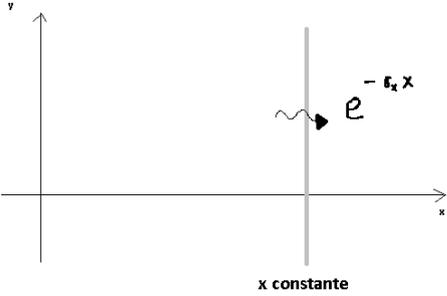
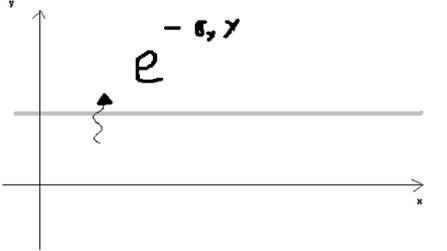
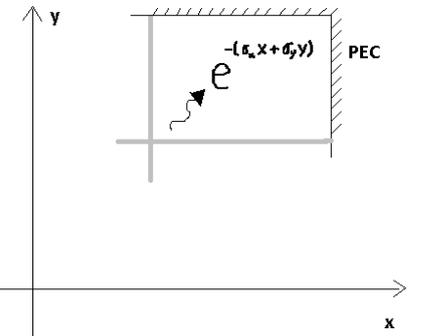
$q_{nx}$  - coordenada da função de base  $\vec{\varphi}_{nx}(x, y) = L_{nx}(x, y)$

$q_{my}$  - coordenada da função de base  $\vec{\varphi}_{my}(x, y) = L_{my}(x, y)$

### 3.3.2 Regiões PML

No Capítulo 1, fez-se a análise das três regiões anisotrópicas absorventes uniaxiais (UPML) ou camadas perfeitamente casadas (PML), e concluiu-se o apresentado no Quadro 3.1:

Quadro 3.1 – Resumo da análise PML

Região	Operador nabla transversal	Expansão do vetor magnético nas regiões PML
	$\nabla'_t = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}$	$\begin{aligned} \vec{H}_{xn}(x, y) &= (q_{nx} L_n(x, y) e^{-\sigma_x x}) e^{-\gamma z} \\ \vec{H}_{ym}(x, y) &= (q_{my} L_m(x, y) e^{-\sigma_x x}) e^{-\gamma z} \end{aligned}$
	$\nabla'_t = \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}$	$\begin{aligned} \vec{H}_{xn}(x, y) &= (q_{nx} L_n(x, y) e^{-\sigma_y y}) e^{-\gamma z} \\ \vec{H}_{ym}(x, y) &= (q_{my} L_m(x, y) e^{-\sigma_y y}) e^{-\gamma z} \end{aligned}$
	$\nabla'_t = \frac{1}{S_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + \frac{1}{S_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{y}$	$\begin{aligned} \vec{H}_{xn}(x, y) &= (q_{nx} L_n(x, y) e^{-(\sigma_x x + \sigma_y y)}) e^{-\gamma z} \\ \vec{H}_{ym}(x, y) &= (q_{my} L_m(x, y) e^{-(\sigma_x x + \sigma_y y)}) e^{-\gamma z} \end{aligned}$

Em que:

- Condutividade elétrica máxima de potência quadrática [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left( \frac{1,5 \ln(R)}{k_0 \eta_{xx} T_x} \right) \left( \frac{x}{T_x} \right)^2, & \text{compõe o termo } e^{-\sigma_x x} \\ \sigma_y &= \left( \frac{1,5 \ln(R)}{k_0 \eta_{yy} T_y} \right) \left( \frac{y}{T_y} \right)^2, & \text{compõe o termo } e^{-\sigma_y y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

- R: fator de reflexão teórico ou coeficiente de refletividade.

$$R = 10^{-r}$$

$$r \in \{4,5, \dots, 12, \dots\}$$

- $T_x$ : Espessura da região PML (TRPML(TR)=1). Propagação em  $\vec{x}$ , ortogonal à fronteira PML.  $x=\text{constante}$ .
- $T_y$ : Espessura da região PML (TRPML(TR)=2). Propagação em  $\vec{y}$ , ortogonal à fronteira PML.  $y=\text{constante}$ . (vide Quadro 3.1).
- $x$ : distância do ponto à fronteira PML (normal a  $\vec{x}$ ).
- $y$ : distância do ponto à fronteira PML (normal a  $\vec{y}$ ).

O formalismo inclui também os meios anisotrópicos, caracterizados pelo tensor:

$$[\Lambda_r] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rxx} & \varepsilon_{rxy} & 0 \\ \varepsilon_{ryx} & \varepsilon_{ryy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rzz} \end{bmatrix}$$

portanto,

$$\eta_{xx} = \sqrt{\varepsilon_{rxx}}$$

$$\eta_{yy} = \sqrt{\varepsilon_{ryy}}$$

- Fatores de Estiramento Transversal ( $S_x, S_y$ ):

Estes fatores mapeiam o sistema de coordenadas usuais  $(x,y)$  aos estirados  $(x',y')$  [18].

$$dx' = S_x dx$$

$$dy' = S_y dy$$

Os fatores de estiramento em  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  são definidos:

$$S_x = 1 + j\sigma_x = 1 - j \left( \frac{1,5 \ln(R)}{k_0 \eta_{xx}} \right) \left( \frac{x}{t_x} \right)^2$$

$$S_y = 1 + j\sigma_y = 1 - j \left( \frac{1,5 \ln(R)}{k_0 \eta_{yy}} \right) \left( \frac{y}{t_y} \right)^2$$

### 3.3.3 O Método de Galerkin

Estabelecidos os espaços das funções de base das componentes  $H_x$  e  $H_y$ , deduz-se o formalismo da análise das respectivas regiões, projetando a equação de onda, equação (3.2), no espaço das funções de ponderação. Esse espaço é o mesmo para qualquer das regiões, usual ou PML. Seja:

a) Espaço de ponderação  $\{\hat{\varphi}_{nx}(x, y), \hat{\varphi}_{my}(x, y)\}$

Referente à componente  $H_x$ :

$$\hat{\varphi}_{nx}(x, y) = L_{nx}(x, y), n = 1, 2, \dots, NG_x \quad (3.3.1)$$

Referente à componente  $H_y$ :

$$\hat{\varphi}_{my}(x, y) = L_{my}(x, y), m = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT \quad (3.3.2)$$

b) Domínio usual: Nesta região, o espaço das funções de base é o mesmo das funções de ponderação (vide capítulo 2), portanto, a aplicação do método de Galerkin é concretizada pelo critério de Bubnov.

Espaço das funções de base:

$$\varphi_{nx}(x, y) = L_{nx}(x, y), n = 1, 2, \dots, NG_x$$

$$\varphi_{my}(x, y) = L_{my}(x, y), m = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$$

Espaço das funções de ponderação:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{nx}(x, y) &= \varphi_{nx}(x, y) \\ \hat{\varphi}_{my}(x, y) &= \varphi_{my}(x, y)\end{aligned}\quad (3.4)$$

c) Domínio PML: Nas regiões PML, como o espaço das funções de base difere do das funções de ponderação (ver equação (3.3)), a aplicação de Galerkin é efetivada pelo critério de Petrov.

Resumindo o Quadro 3.1,

Quadro 3.2: Espaço das funções de base das regiões PML

Fronteira	Funções de base das respectivas componentes magnéticas
TRPML(TR)=1 (x constante)	$H_x: \varphi_{nx}(x, y) = e^{\sigma_x x} L_{nx}(x, y)$ $H_y: \varphi_{my}(x, y) = e^{\sigma_x x} L_{my}(x, y)$
TRPML(TR)=2 (y constante)	$H_x: \varphi_{nx}(x, y) = e^{\sigma_y y} L_{nx}(x, y)$ $H_y: \varphi_{my}(x, y) = e^{\sigma_y y} L_{my}(x, y)$
TRPML(TR)=3 (Cantos)	$H_x: \varphi_{nx}(x, y) = e^{\sigma_x x + \sigma_y y} L_{nx}(x, y)$ $H_y: \varphi_{my}(x, y) = e^{\sigma_x x + \sigma_y y} L_{my}(x, y)$
Em que $n = 1, 2, \dots, NG_x$ e $m = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$	

### 3.3.3.1 Aplicação do Método de Galerkin

O problema de valores de fronteira da equação (3.1) é expresso em linguagem de operador:

- Na forma forte ( $H_B^2(\Omega)$ ):

$$\vec{T}(\vec{H}) = \nabla \times ([\varepsilon_r]^{-1} \nabla \times \vec{H}) - k_0^2 \vec{H} = 0, \quad (3.5)$$

em que

$$[\varepsilon_r] = \begin{bmatrix} [\varepsilon_r]_t & 0 \\ 0 & \varepsilon_{rzz} \end{bmatrix}$$

Considerando que  $\nabla \cdot \vec{H} = \nabla_t \cdot \vec{H}_t - \gamma H_z = 0$ ,  $\left(H_z = \frac{1}{\gamma} \nabla_t \cdot \vec{H}_t\right)$ , após expressiva manipulação na equação de Helmholtz (equação (3.5)), o operador é estabelecido unicamente pelas componentes transversais do campo magnético, ou seja:

$$\vec{T}(\vec{H}) = \nabla_t \times (\varepsilon_{rzz} \nabla_t \times \vec{H}_t) - \vec{z} \times \{[\varepsilon_r]_t [\nabla_t \times (\vec{z} \nabla_t \cdot \vec{H}_t) - \gamma^2 (\vec{z} \times \vec{H}_t)]\} - k_0^2 \vec{H} = 0 \quad (3.6)$$

Aplicando o método de Galerkin, pelo método de aproximação de Bubnov nas regiões usuais e pelo de Petrov nas PML, isto é, projetando o operador (equação 3.6) em cada função do espaço de ponderação (equações (3.3)), têm-se os formalismos na forma forte  $H_B^2(\Omega)$ , referente às ponderações em  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ :

- Funções de ponderação em  $\vec{x}$ :

$$\hat{\varphi}_{nx}(x, y) = L_{nx}(x, y), nx = 1, 2, \dots, NG_x$$

Define-se o produto interno:

$$\langle \vec{T}(\vec{H}), \hat{\varphi}_{nx}(x, y) \rangle = \iint_{\Omega} \hat{\varphi}_{nx}^*(x, y) \cdot \vec{T}(\vec{H}) d\Omega$$

Tem-se, com  $n = 1, 2, \dots, NG_x$ :

$$\begin{aligned} & \langle [\nabla_t \times (\varepsilon_{rzz} \nabla_t \times \vec{H}_t)], \hat{\varphi}_{nx}(x, y) \rangle - \\ & \langle \vec{z} \times \{[\varepsilon_r]_t [\nabla_t \times (\vec{z} \nabla_t \cdot \vec{H}_t) - \gamma^2 (\vec{z} \times \vec{H}_t)]\}, \hat{\varphi}_{nx}(x, y) \rangle \\ & - k_0^2 \langle \vec{H}_t, \hat{\varphi}_{nx}(x, y) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Funções de ponderação em  $\vec{y}$ :

$$\hat{\varphi}_{my}(x, y) = L_{my}(x, y) \vec{y}, my = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$$

A projeção do operador no espaço das funções de ponderação em  $\vec{y}$ ,  $\hat{\varphi}_{my}(x, y)$  resulta a expressão idêntica à equação (3.7), substituindo  $\hat{\varphi}_{nx}(x, y)$  por  $\hat{\varphi}_{my}(x, y)$ .

Os formalismos apresentados pelas equações (3.6) e (3.7), para as funções de ponderação em  $\vec{x}$ , como em  $\vec{y}$ , estão na forma forte,  $H_B^2(\Omega)$ , devido às duas parcelas,

$$\langle \vec{z} \times \{[\varepsilon_r]_t [\nabla_t \times (\vec{z} \nabla_t \cdot \vec{H}_t) - \gamma^2 (\vec{z} \times \vec{H}_t)]\}, \hat{\varphi}_{nx}(x, y) \rangle$$

e

$$\langle [\nabla_t \times (\varepsilon_{rzz} \nabla_t \times \vec{H}_t)], \hat{\varphi}_{nx}(x, y) \rangle,$$

responsáveis pelos termos  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Para se aumentar o domínio das funções admissíveis à solução, essas parcelas são enfraquecidas por adequadas identidades vetoriais [8], resultando nos formalismos enfraquecidos ( $H_E^{(1)}(\Omega)$ )

- Espaço de Ponderação em  $\vec{x}$ :

$$\hat{\varphi}_{nx}(x, y) = \varphi_{nx}(x, y) \vec{x}, nx = 1, 2, \dots, NG_x$$

Então,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \varepsilon_{rzz} [(\nabla_t \times \vec{H}_t) \cdot (\nabla_t \times \hat{\varphi}_{nx})] d\Omega + \iint_{\Omega} (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) \{ \vec{z} \cdot [\nabla_t \times [[\varepsilon_r]_t (\vec{z} \times \vec{x}) \varphi_{nx}] ] \} d\Omega \\ & + \gamma^2 \iint_{\Omega} \{ \vec{z} \times [[\varepsilon_r]_t (\vec{z} \times \vec{H}_t)] \} \cdot \vec{x} \varphi_{nx} d\Omega \\ & + \oint (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) \{ [\vec{z} \times [[\varepsilon_r]_t (\vec{z} \times \vec{x})] \varphi_{nx}] \cdot \vec{n} dl - k_0^2 \iint_{\Omega} \varphi_{nx} (\vec{x} \times \vec{H}) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observe no termo da integral de linha que  $(\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{y}$

- Espaço de ponderação em  $\vec{y}$ :

$$\hat{\varphi}_{my}(x, y) = \varphi_{my}(x, y)\vec{y}, my = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$$

Então,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \varepsilon_{rzz} [(\nabla_t \times \vec{H}_t) \cdot (\nabla_t \times \hat{\varphi}_{my})] d\Omega + \iint_{\Omega} (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) \left\{ \vec{z} \cdot [\nabla_t \times [[\varepsilon_r]_t (\vec{z} \times \vec{y}) \varphi_{my}] ] \right\} d\Omega \\ & + \gamma^2 \iint_{\Omega} \left\{ \vec{z} \times [[\varepsilon_r]_t (\vec{z} \times \vec{H}_t)] \right\} \cdot \vec{y} \varphi_{my} d\Omega \\ & + \oint (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) \left\{ [\vec{z} \times [\varepsilon_r]_t (\vec{z} \times \vec{y})] \varphi_{my} \right\} \cdot \vec{n} dl - k_0^2 \iint_{\Omega} \varphi_{my} (\vec{y} \times \vec{H}) d\Omega \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

O termo na integral de linha,  $\vec{z} \times \vec{y} = -\vec{x}$

Os enfraquecimentos dos formalismos (equações (3.8) e (3.9)) estão desenvolvidos no apêndice C da Dissertação de Mestrado “Análise de Guias de Onda pelos Métodos Vetorial Magnético e dos Elementos Finitos”, de AlexsandroNogueira [8], com as considerações:

$$\begin{aligned} \vec{H}_t &= H_x(x, y)\vec{x} + H_y(x, y)\vec{y} \\ \vec{H}_t &= \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varphi_{nx}(x, y)\vec{x} + \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varphi_{my}(x, y)\vec{y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na expressão (3.10) foi omitido o termo  $e^{-\gamma z}$ , inconsequente no prosseguimento da análise.

As funções de base  $\varphi_{nx}(x, y)$  e  $\varphi_{my}(x, y)$  são as definidas no Quadro 3.2. Portanto, o raciocínio a seguir se aplica a qualquer uma das regiões, usual ou PML. Pelo apêndice E de [8] mostra-se que:

a) Espaço de ponderação em  $\vec{x}$ :

A integral de linha é reduzida a

$$\oint (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) \{ \vec{z} \times [\varepsilon_r]_t \vec{y} \varphi_{nx} \} d\Omega = - \oint_l [\varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n})] \varphi_{nx} \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) dl \quad (3.11)$$

b) Espaço de ponderação em  $\vec{y}$ :

A integral de linha pertinente ao referido espaço será

$$\begin{aligned} \oint (\nabla_t \cdot \vec{H}_t) \{ \vec{z} \times [\varepsilon_r]_t (-\vec{x}) \varphi_{my} \} d\Omega \\ = - \oint_l [\varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{ryy}(\vec{y} \cdot \vec{n})] \varphi_{my} \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) dl \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nas equações (3.11) e (3.12), o vetor  $\vec{n}$  é orientado ao interior do elemento, conforme Figura 3.3:

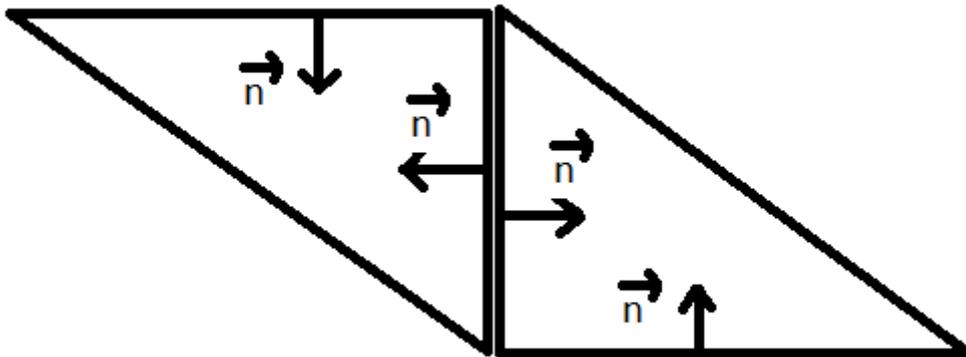


Figura 3.3: Orientação do vetor  $\vec{n}$  nos termos das integrais de linha

### 3.3.4 Discretização do Problema Contínuo

A análise da propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda dielétricos é tal que a solução do problema é uma função contínua em todo o domínio. Ao discretizá-lo pelo método de Galerkin (Bubnov ou Petrov), este se reduz ao problema matricial de autovalores e autovetores.

O problema matricial é definido pelas matrizes de:

- Rigidez:  $[A(k_0)]_{(NGT \times NGT)}$

- Massa:  $[B]_{(NGT \times NGT)}$ ,

e a matriz de autovalores/autovetores resultante é:

$$[A(k_0)]\{q\} = \lambda^2[B]\{q\}$$

ou, com maior detalhamento,

$$[A(k_0)] \begin{pmatrix} \{q_{nx}\}_{NG_x}^{n=1} \\ \{q_{my}\}_{NGT}^{m=NG_x+1} \end{pmatrix} = \lambda^2 [B] \begin{pmatrix} \{q_{nx}\}_{NG_x}^{n=1} \\ \{q_{my}\}_{NGT}^{m=NG_x+1} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Em que  $\lambda = \frac{\beta}{k_0}$ .

Ambas as matrizes  $[A(k_0)]$  e  $[B]$  são constituídas pelas seguintes sub-matrizes, definidas pelas convenções:

a) Referente às linhas das sub-matrizes:

$$\hat{\phi}_{nx}(x, y) = L_{nx}(x, y), nx = 1, 2, \dots, NG_x$$

(Estas são as funções do espaço de ponderação das componentes magnéticas em  $\vec{x}$ , vide equação (3.3))

$$\hat{\varphi}_{my}(x, y) = L_{my}(x, y)\vec{y}, my = (NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$$

(Estas são as funções do espaço de ponderação das componentes magnéticas em  $\vec{y}$ , vide equação (3.3))

b) Referente às colunas:

As colunas das sub-matrizes se relacionam às expansões do campo magnético transversal ( $H_x, H_y$ ) em cada região, usual e PML:

$$\vec{H}_t(x, y) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx}(\varphi_{nx}\vec{x}) + \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my}(\varphi_{my}\vec{y})$$

em que  $\varphi_{nx}$  e  $\varphi_{my}$  são os elementos do espaço das funções de base (coordenadas) da expansão das componentes magnéticas  $H_x$  e  $H_y$ , respectivamente (vide Quadro 3.2). As funções de base são distintas nas respectivas regiões (usual e PML - idem).

Aplicando-se o método de Galerkin, com o critério de Bubnov nas regiões usuais e Petrov nas PML, o sistema matricial de autovetores/autovalores (equação (3.13)) é expresso pelas seguintes sub-matrizes.

Quadro 3.3: Matriz referente à formulação discretizada pelo MEF da análise generalizada de guias de onda dielétricos

$nx$	$n = (1, 2, \dots, NG_x)$	$m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$					
1 2 . . . $NG_x$	$A_{xx}(nx, n)$	$A_{xy}(nx, m)$	$\begin{bmatrix} q_{x1} \\ \dots \\ q_{x(NG_x)} \end{bmatrix}$	$= \gamma^2$	$B_{xx}(nx, n)$	$B_{xy}(nx, m)$	$\begin{bmatrix} q_{x1} \\ \dots \\ q_{x(NG_x)} \end{bmatrix}$
my							
$(NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT$	$A_{yx}(my, n)$	$A_{yy}(my, m)$	$\begin{bmatrix} q_{y(NG_x+1)} \\ \dots \\ q_{y(NG_x)} \end{bmatrix}$		$B_{yx}(my, n)$	$B_{yy}(my, m)$	$\begin{bmatrix} q_{y(NG_x+1)} \\ \dots \\ q_{y(NG_x)} \end{bmatrix}$

### 3.4 Formalismo Generalizado do MEF à Análise de Guias de Onda Dielétricos

Os guias de onda dielétricos, teoricamente, idealizados com domínios: usual e PML, têm por solução as sub-matrizes, resultantes da aplicação do MEF, que compõem o sistema matricial de autovalores/autovetores do Quadro 3.3. As soluções nas regiões (usual e PML) são, portanto, caracterizadas pelas sub-matrizes referentes ao Quadro 3.3, definidas nos itens subsequentes.

Observação sobre as notações: FEC: Fronteiras elétricas perfeitas, Inter: fronteira entre dois elementos distintos, e FPI: Fronteiras PEC ou inter-elementos.

Os parâmetros  $(\sigma_x, \sigma_y, S_x, S_y)$  das regiões PML dependem das coordenadas (x ou y – ver equações (3.1) e (3.2)).

#### 3.4.1 Domínio Usual (Método de Galerkin-Bubnov)

$$TRPML(TR) = 0$$

Nesse domínio, o espaço de ponderação é o mesmo que o de base:

$$\{\hat{\varphi}_{nx}(x, y)\} = \{L_{nx}(x, y)\}$$

$$\{\hat{\varphi}_{my}(x, y)\} = \{L_{my}(x, y)\}$$

- As sub-matrizes componentes da matriz de rigidez (Quadro 3.3) são:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$A_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial L_n}{\partial x} \right) + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial L_n}{\partial x} \right) - k_0^2 L_{nx} L_n \right] d\Omega - \oint_{FPI} [\varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n})] L_{nx} \frac{\partial L_n}{\partial x} dl \right\}$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$A_{xy}(nx, m) = \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial L_m}{\partial y} \right) + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial L_n}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \oint_{FPI} [\varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n})] L_{nx} \frac{\partial L_m}{\partial y} dl \right\}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$A_{yx}(my, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \right) + \varepsilon_{ryx} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial L_m}{\partial x} \right) \right] d\Omega - \oint_{FPI} [\varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n})] L_{my} \frac{\partial L_n}{\partial x} dl \right\}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$A_{yy}(my, m) = \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial L_m}{\partial y} \right) + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial L_m}{\partial y} \right) - k_0^2 L_{my} L_m \right] d\Omega - \oint_{FPI} [\varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n})] L_{my} \frac{\partial L_m}{\partial y} dl \right\}$$

Com o vetor  $\vec{n}$  se dirigindo ao centro do elemento triangular.

- As sub-matrizes relacionadas à matriz de massa são:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{ryy} \iint_{\Omega} L_{nx} L_n d\Omega$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{xy}(nx, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{ryx} \iint_{\Omega} L_{nx} L_m d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{yx}(my, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{rxy} \iint_{\Omega} L_{my} L_n d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{yy}(my, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{rxx} \iint_{\Omega} L_{my} L_m d\Omega$$

### 3.4.2 Região PML com Dissipação em $\vec{x}$ (Método Galerkin-Petrov)

$$(TRPML(TR) = 1)$$

Nesta região, tem-se:

- Espaço de ponderação:

$$\{\hat{\varphi}_{nx}(x, y)\} = \{L_{nx}(x, y)\}$$

$$\{\hat{\varphi}_{my}(x, y)\} = \{L_{my}(x, y)\}$$

- Espaço de base:

$$\{\varphi_{nx}(x, y)\} = \{e^{\sigma_x x} L_{nx}(x, y)\}$$

$$\{\varphi_{my}(x, y)\} = \{e^{\sigma_x x} L_{my}(x, y)\}$$

- Coordenadas estiradas:

$$dx' = S_x dx$$

$$dy' = dy$$

- Sub-matrizes componentes da matriz de rigidez:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$A_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{1}{S_x^2} \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_n}{\partial x} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_n}{\partial x} \right) - k_0^2 e^{\sigma_x x} L_{nx} L_n \right] d\Omega \right. \\ \left. - \oint_{PEI} [\varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n})] \frac{L_{nx}}{S_x} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_n}{\partial x} dl \right\}$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$A_{xy}(nx, m) = \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_m}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_m}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \oint_{PEI} [\varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n})] L_{nx} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_m}{\partial y} dl \right\}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$\begin{aligned}
A_{yx}(my, n) = & \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_{nx}}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \varepsilon_{ryx} \left( \frac{1}{S_x^2} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_m}{\partial x} \right) \right] d\Omega \right. \\
& \left. - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{my}}{S_x} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_n}{\partial x} dl \right\}
\end{aligned}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$\begin{aligned}
A_{yy}(my, m) = & \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_x^2} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_m}{\partial y} \right) \right. \right. \\
& + \left. \left. \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_x} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_m}{\partial y} \right) - k_0^2 e^{\sigma_{xx}} L_{my} L_m \right] d\Omega \right. \\
& \left. - \oint_{FPI} \left[ \varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] L_{my} \frac{\partial e^{\sigma_{xx}} L_m}{\partial y} dl \right\}
\end{aligned}$$

- As sub-matrizes relacionadas à matriz de massa são:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{ryy} \iint_{\Omega} L_{nx} L_n e^{\sigma_{xx}} d\Omega$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{xy}(nx, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{ryx} \iint_{\Omega} L_{nx} L_m e^{\sigma_{xx}} d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{yx}(my, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{rxy} \iint_{\Omega} L_{my} L_n e^{\sigma_x x} d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{yy}(my, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{rxx} \iint_{\Omega} L_{my} L_m e^{\sigma_x x} d\Omega$$

### 3.4.3 Região PML com Dissipação em $\vec{y}$ (Método Galerkin-Petrov)

$$(TRPML(TR) = 2)$$

Nesta seção, tem-se:

- Espaço de ponderação:

$$\{\hat{\varphi}_{nx}(x, y)\} = \{L_{nx}(x, y)\}$$

$$\{\hat{\varphi}_{my}(x, y)\} = \{L_{my}(x, y)\}$$

- Espaço de base:

$$\{\varphi_{nx}(x, y)\} = \{e^{\sigma_y y} L_{nx}(x, y)\}$$

$$\{\varphi_{my}(x, y)\} = \{e^{\sigma_y y} L_{my}(x, y)\}$$

- Coordenadas estiradas:

$$dx' = dx$$

$$dy' = S_y dy$$

- Sub-matrizes componentes da matriz de rigidez:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$A_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_y^2} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_n}{\partial x} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_n}{\partial x} \right) - k_0^2 e^{\sigma_y y} L_{nx} L_n \right] d\Omega \right. \\ \left. - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{nx}}{S_y} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_n}{\partial x} dl \right\}$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$A_{xy}(nx, m) = \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_m}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_m}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{nx}}{S_y} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_m}{\partial y} dl \right\}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$A_{yx}(my, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_{nx}}{\partial x} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{ryx} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_m}{\partial x} \right) \right] d\Omega \right. \\ \left. - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] L_{my} \frac{\partial e^{\sigma_y y} L_n}{\partial x} dl \right\}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$A_{yy}(my, m) = \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_{yy}} L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{1}{S_y^2} \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial e^{\sigma_{yy}} L_m}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_y} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^{\sigma_{yy}} L_m}{\partial y} \right) - k_0^2 e^{\sigma_{yy}} L_{my} L_m \right] d\Omega \right. \\ \left. - \oint_{FPI} \left[ \varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{my}}{S_y} \frac{\partial e^{\sigma_{yy}} L_m}{\partial y} dl \right\}$$

- As sub-matrizes relacionadas à matriz de massa são:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{ryy} \iint_{\Omega} L_{nx} L_n e^{\sigma_{yy}} d\Omega$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{xy}(nx, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{ryx} \iint_{\Omega} L_{nx} L_m e^{\sigma_{yy}} d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{yx}(my, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{rxy} \iint_{\Omega} L_{my} L_n e^{\sigma_{yy}} d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{yy}(my, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{rxx} \iint_{\Omega} L_{my} L_m e^{\sigma_y y} d\Omega$$

### 3.4.4 Região PML – Os Quatro Cantos do Domínio (Método Galerkin-Petrov)

$$(TRPML(TR) = 1)$$

Nas regiões de canto do domínio PML, tem-se:

- Espaço de ponderação:

$$\begin{aligned} \{\hat{\varphi}_{nx}(x, y)\} &= \{L_{nx}(x, y)\} \\ \{\hat{\varphi}_{my}(x, y)\} &= \{L_{my}(x, y)\} \end{aligned}$$

- Espaço de base:

$$\begin{aligned} \{\varphi_{nx}(x, y)\} &= \{e^{(\sigma_x x + \sigma_x x)} L_{nx}(x, y)\} \\ \{\varphi_{my}(x, y)\} &= \{e^{(\sigma_x x + \sigma_x x)} L_{my}(x, y)\} \end{aligned}$$

- Coordenadas estiradas:

$$\begin{aligned} dx' &= S_x dx \\ dy' &= S_y dy \end{aligned}$$

- Sub-matrizes componentes da matriz de rigidez:

Seja  $e^t = e^{(\sigma_x x + \sigma_x x)}$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$\begin{aligned}
A_{xx}(nx, n) = & \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_y^2} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^t L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{1}{S_x^2} \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial e^t L_n}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& + \left. \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_x S_y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^t L_n}{\partial x} \right) - k_0^2 e^t L_{nx} L_n \right] d\Omega \\
& \left. - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{nx}}{S_x} \frac{\partial e^t L_n}{\partial x} dl \right\}
\end{aligned}$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$\begin{aligned}
A_{xy}(nx, m) = & \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_x S_y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^t L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{ryy} \left( \frac{1}{S_x S_y} \frac{\partial L_{nx}}{\partial x} \frac{\partial e^t L_m}{\partial y} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_y^2} \frac{\partial L_{nx}}{\partial y} \frac{\partial e^t L_n}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryy}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxy}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{nx}}{S_y} \frac{\partial e^t L_m}{\partial y} dl \right\}
\end{aligned}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$\begin{aligned}
A_{yx}(my, n) = & \sum_{n=1}^{NG_x} q_{xn} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ -\varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_x S_y} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^t L_n}{\partial y} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{1}{S_x S_y} \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial e^t L_{nx}}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \varepsilon_{ryx} \left( \frac{1}{S_x^2} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^t L_m}{\partial x} \right) \right] d\Omega - \oint_{PEI} \left[ \varepsilon_{ryx}(\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx}(\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{my}}{S_x} \frac{\partial e^t L_n}{\partial x} dl \right\}
\end{aligned}$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$\begin{aligned}
A_{yy}(my, m) = & \sum_{m=1+NG_x}^{NGT} q_{my} \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \varepsilon_{rzz} \left( \frac{1}{S_x^2} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^t L_m}{\partial x} \right) + \varepsilon_{rxx} \left( \frac{1}{S_y^2} \frac{\partial L_{my}}{\partial y} \frac{\partial e^t L_m}{\partial y} \right) \right. \right. \\
& + \varepsilon_{rxy} \left( \frac{1}{S_x S_y} \frac{\partial L_{my}}{\partial x} \frac{\partial e^t L_m}{\partial y} \right) - k_0^2 e^{\sigma_{xx}} L_{my} L_m \left. \right] d\Omega \\
& - \oint_{FPI} \left[ \varepsilon_{ryx} (\vec{x} \cdot \vec{n}) + \varepsilon_{rxx} (\vec{y} \cdot \vec{n}) \right] \frac{L_{my}}{S_y} \frac{\partial e^t L_m}{\partial y} dl \left. \right\}
\end{aligned}$$

- As sub-matrizes relacionadas à matriz de massa são:

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{xx}(nx, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{ryy} \iint_{\Omega} L_{nx} L_n e^t d\Omega$$

$$nx = (1, 2, \dots, NG_x); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{xy}(nx, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{ryx} \iint_{\Omega} L_{nx} L_m e^t d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); \quad n = (1, 2, \dots, NG_x)$$

$$B_{yx}(my, n) = \sum_{n=1}^{NG_x} q_{nx} \varepsilon_{rxy} \iint_{\Omega} L_{my} L_n e^t d\Omega$$

$$my = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT); \quad m = ((NG_x + 1), (NG_x + 2), \dots, NGT)$$

$$B_{yy}(my, m) = \sum_{m=NG_x+1}^{NGT} q_{my} \varepsilon_{rxx} \iint_{\Omega} L_{my} L_m e^t d\Omega$$

### 3.5 Resolução das Integrais das Formulações PML

As integrais de área ou de linha de qualquer um dos formalismos são solucionadas no elemento de referência, que se relaciona ao elemento real (global), pela transformada geométrica, vide Apêndice C. Seja o elemento TR, mostrado na Figura 3.4:

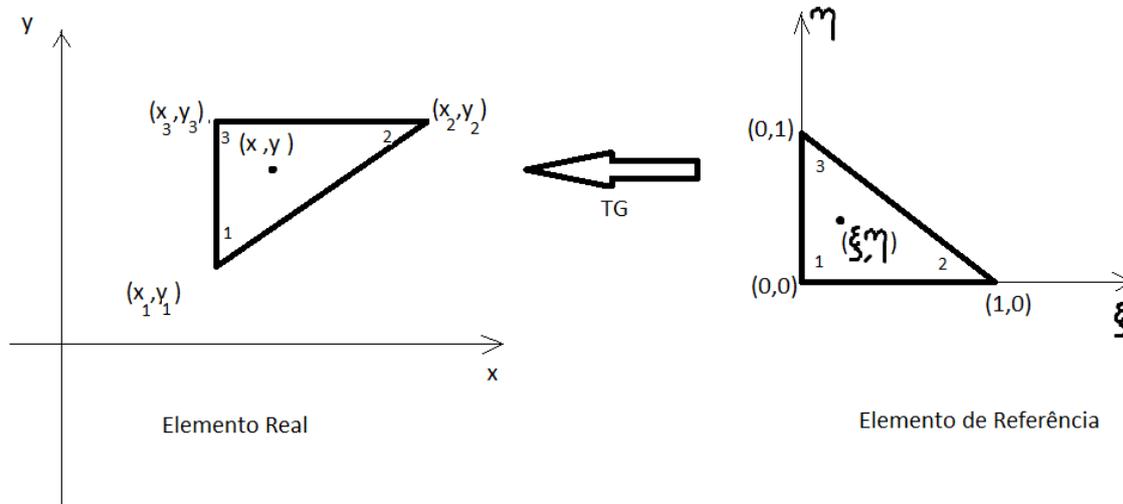


Figura 3.4: Elemento de referência (à direita), e elemento real correspondente (à esquerda).

$$x(\xi, \eta) = x_1 L_1(\xi, \eta) + x_2 L_2(\xi, \eta) + x_3 L_3(\xi, \eta)$$

$$y(\xi, \eta) = y_1 L_1(\xi, \eta) + y_2 L_2(\xi, \eta) + y_3 L_3(\xi, \eta)$$

Funções de forma no elemento de referência:

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$L_2 = \xi$$

$$L_3 = \eta$$

#### 3.5.1 Domínio Usual

Nos domínios usuais, as respectivas integrais (item 3.3.3.1) são solucionadas por conhecidas expressões [8]:

- Área:

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} L_1^a L_2^b L_3^c d\xi d\eta = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!}$$

- Linha:

$$\int_{\xi=0}^1 L_1^a(\xi, \eta = 0) L_2^b(\xi) d\xi = \frac{a! b!}{(a + b + c + 1)!}$$

Em que

$$L_1(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)$$

$$L_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$L_3(\xi, \eta) = \eta$$

Nota: Para elementos unidimensionais, as funções de Lagrange no elemento de referência são:

$$L_1(\xi) = (1 - \xi)$$

$$L_2(\xi) = \xi$$

### 3.5.2 Regiões PML

Nogueira [8] aproxima as resoluções das integrais nas regiões PML, itens 3.4.2 a 3.4.4, referenciando-as ao baricentro do elemento triangular. Este procedimento aproxima o integrando, ajustando-o às fórmulas do domínio usual (equação (3.14), [16,17]).

Neste trabalho, as integrais nas regiões dos cantos (item 3.4.4), por serem dependentes dos termos exponenciais decrescentes ( $e^{-\sigma_x x}; e^{-\sigma_y y}$ ), foram calculadas, aproximadamente, pela estratégia do baricentro do elemento triangular. Nas demais regiões PML, as respectivas integrais foram obtidas com valores exatos, pelas técnicas:

- a) As integrais de área são resolvidas, no triângulo de referência, pelo método direto de integração de ordem 5, conhecida por fórmula de Hammer de ordem 5 [16,17];
- b) As integrais de linha foram aproximadas pela fórmula de Simpson.

### 3.5.2.1 Integrais de Área

Analisando atentamente as integrais de área das regiões PML, percebe-se que estas se identificam a poucas integrais. Por exemplo, o termo com relação à variável  $x$  é explicitado:

$$L_n \frac{\partial e^{\sigma_x x} L_m}{\partial x} = e^{\sigma_x x} \left( \sigma_x L_n L_m + L_n \frac{\partial L_m}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

Assim, todas as integrais de área das regiões PML serão referenciadas unicamente aos operadores de integração, no elemento de referência, conforme os Quadros 3.4 e 3.5

- Elemento de referência:

$$\begin{aligned} L_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta) \\ L_2(\xi, \eta) &= \xi \\ L_3(\xi, \eta) &= \eta \\ q &= \begin{cases} x(\xi, \eta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y(\xi, \eta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases} \\ \sigma_q &= \sigma_x(x) \text{ ou } \sigma_y(y) \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Quadro 3.4: Integrais referentes à matriz de rigidez [A]:

$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q^2} L_i d\eta d\xi; \quad \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q} L_i d\eta d\xi; \quad \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} e^{\sigma_q q} L_i d\eta d\xi$
$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q^2} \sigma_q L_i d\eta d\xi; \quad \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q} \sigma_q L_i d\eta d\xi$
<p>Referente à parcela <math>k_0^2 \iint_{\Omega} e^{\sigma_q q} L_i L_j d\Omega</math>:</p> $i = 1; 2; 3$ $j = 1; 2; 3$ $k_0^2 \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} e^{\sigma_q q} L_i(\xi, \eta) L_j(\xi, \eta) d\eta d\xi \quad (3.16)$

Quadro 3.5: Integrais relacionadas à matriz de massa [B]:

As integrais relacionadas à matriz de massa são as mesmas da equação (3.16), ou seja:

$$\iint_{\Omega} e^{\sigma_{q^a}} L_i L_j d\Omega = \Delta S \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=1}^{1-\xi} e^{\sigma_{q^a}} L_i(\xi, \eta) L_j(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

em que  $\Delta S$  é a área do elemento triangular.

As referidas integrais foram calculadas exatamente, pela fórmula de Hammer de ordem 5 [16,17], referenciada por 7 pontos no triângulo de referência (Quadro 3.6):

Quadro 3.6: Valores Calculados das Integrais pela Fórmula de Hammer

Ordem	Número de pontos	$\xi_i$	$\eta_i$	Pesos $w_i$
5	7			
$a = 0,470142064105115$		1/3	1/3	$\frac{9}{80} = 0,0661970763942530$
		$a$	$a$	
		$1 - 2a$	$a$	
		$a$	$1 - 2a$	
$b = 0,101286507323456$		$b$	$b$	$\left(\frac{31}{240} - \frac{9}{80}\right) = 0,0629695902724135$
		$1 - 2b$	$b$	
		$b$	$1 - 2b$	
A integral é resolvida:				
$\int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} Y(\xi, \eta) d\eta d\xi = \sum_{i=1}^6 w_i Y(\xi, \eta)$				

### 3.5.2.2 Integrais de Linha

As integrais de linha de qualquer uma das regiões PML são referenciadas unicamente aos seguintes operadores de integração (vide quadros 3.7 e 3.8):

- Região de canto (item 3.3.3.4):

$$t = (\sigma_x x + \sigma_x x); \quad S_q = S_x \text{ ou } S_y$$

$$i = 1; 2$$

$$j = 1; 2$$

Quadro 3.7: Integrais de linha – Região de canto PML

$$\int_{\xi=0}^1 \frac{e^t}{S_q} \sigma_q L_i L_j d\xi; \quad \int_{\xi=0}^1 \frac{e^t}{S_q} L_i d\xi$$

- Propagação em  $\vec{x}$  e em  $\vec{y}$  - PML:

$$\sigma_q = \sigma_x \text{ ou } \sigma_y; \quad q = x \text{ ou } y$$

Quadro 3.8: Integrais de linha – Propagação em  $\vec{x}$  e em  $\vec{y}$  - PML

$$\int_{\xi=0}^1 \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q} \sigma_q L_i L_j d\xi; \quad \int_{\xi=0}^1 \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q} L_i d\xi$$

$$\int_{\xi=0}^1 \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q} \sigma_q L_i L_j d\xi; \quad \int_{\xi=0}^1 \frac{e^{\sigma_q q}}{S_q} L_i d\xi$$

As integrais de linha foram calculadas, com precisão razoável, pela regra de Simpson com 20 subdivisões no intervalo  $\xi = [0,1]$ , portanto, com 21 pontos.

### 3.6 Conclusão do capítulo

Neste capítulo, foi apresentado o formalismo matemático para se analisar guias de ondas abertos, com o domínio limitado por fronteiras PML. Foram empregados os métodos: Vetorial Magnético e dos Elementos Finitos. Com essa abordagem, o problema inicial de valores de contorno, que é contínuo, se reduz a um problema matricial discreto de autovalores e autovetores.

Os cálculos das integrais de área referentes à matriz de rigidez nos elementos PML, assim como das de linha das fronteiras dos mesmos, se simplificam pelo fato desses diversos operadores serem análogos entre si, já que são identificados a poucas integrais.

No próximo capítulo, o referido método será validado, comparando-se os resultados obtidos com os de outros autores.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.1 Introdução

Na análise de guias de onda, é imprescindível o conhecimento das características de dispersão dos modos,  $\beta(\omega)$ , para se compreender a propagação da onda guiada. Seja um pulso, como o da Figura 4.1

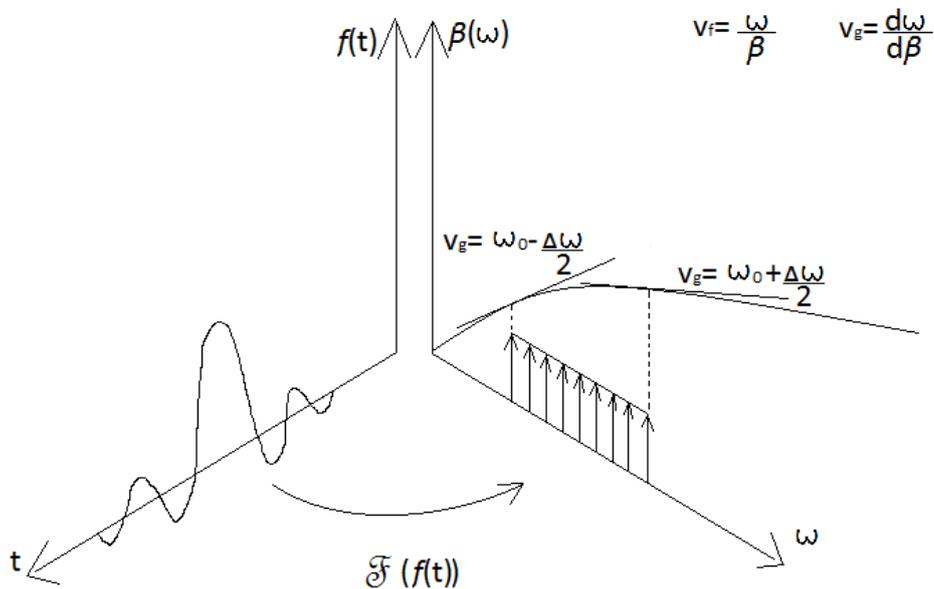


Figura 4.1: Pulso em meio dispersivo.

Conhecendo-se a dispersão dos modos, tem-se toda a informação necessária para se analisar a estrutura condutora de ondas.

Neste Capítulo, aplicar-se-á a formulação desenvolvida neste trabalho à análise de diferentes estruturas dielétricas. Os resultados são confrontados com os de outros autores [7,8,9,10,11,18], para validação do método.

## 4.2 Validação do Método

Os guias de onda caracterizados em [9], [11] (guia dielétrico retangular anisotrópico e não-homogêneo e guia canal ou incrustado) foram analisados, e os resultados, confrontados com os dos respectivos autores com concordância razoável. O guia ARROW, também foi estudado, ratificando os resultados anteriores [11].

Convenção: nos gráficos pertinentes, a camada PML se representará em cinza, as paredes elétricas em preto, e as magnéticas em vermelho.

### 4.2.1 Guia Retangular Anisotrópico Não-Homogêneo

O guia de onda retangular consiste em uma região dielétrica de seção transversal retangular, de maior permissividade que a do dielétrico em redor. O guia analisado é o mostrado na Figura 4.2:

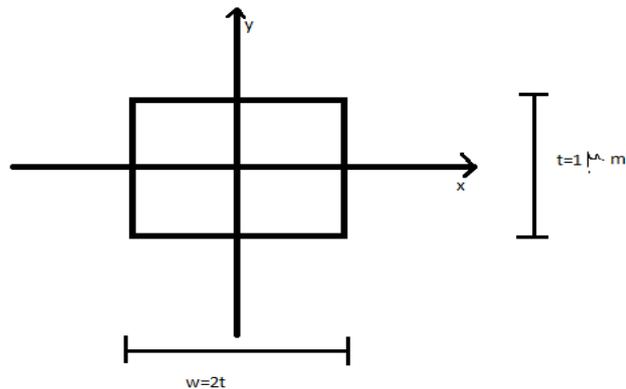


Figura 4.2: Guia dielétrico retangular.

Na análise desse guia, devido à sua simetria, considerou-se um quarto da sua seção transversal, ver Figura 4.3. A região PML foi dimensionada em  $1 \mu\text{m}$ , pois verificou-se empiricamente que essa espessura foi suficiente para prevenir reflexões nos limites do domínio computacional analisado neste caso. Essas reflexões, caso ocorressem, influenciariam o cálculo dos campos, invalidando os resultados.

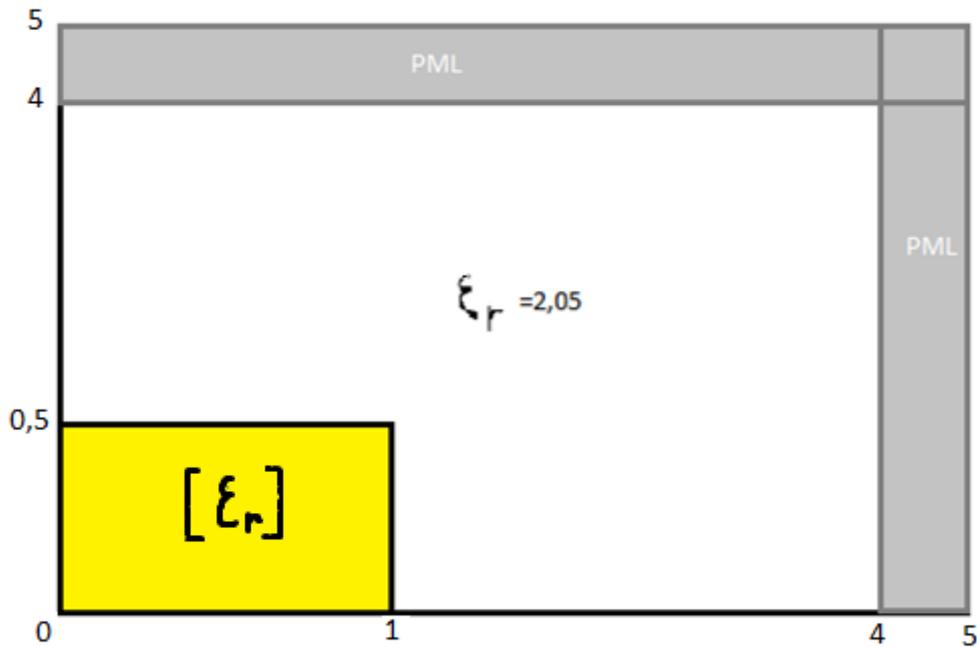


Figura 4.3: Seção transversal analisada.

As permissividades no guia são:

Região homogênea				
$\epsilon_r = 2,05$				
Região Anisotrópica (núcleo)				
$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{xy}$	$\epsilon_{yx}$	$\epsilon_{zz}$
2,31	2,19	0	0	2,31

A simulação foi realizada com 1860 elementos triangulares. A Figura 4.4 mostra a dispersão do guia, calculada pelo método proposto, e a compara com resultados da literatura [9,11]. Há razoável concordância.

#### 4.2.1.1 Cálculo de $Real(\eta_{eff}) = Real\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2$ das dispersões dos modos

As curvas de dispersão ( $Real(\eta_{eff}) \times k_0$ ), mostradas na Figura 4.4, foram calculadas pela metodologia apresentada neste trabalho. Essas se comparam com as da literatura

[9,11] pelos pontos assinalados. Observa-se perfeita concordância, já que a diferença entre ambos foi observada na terceira casa decimal.

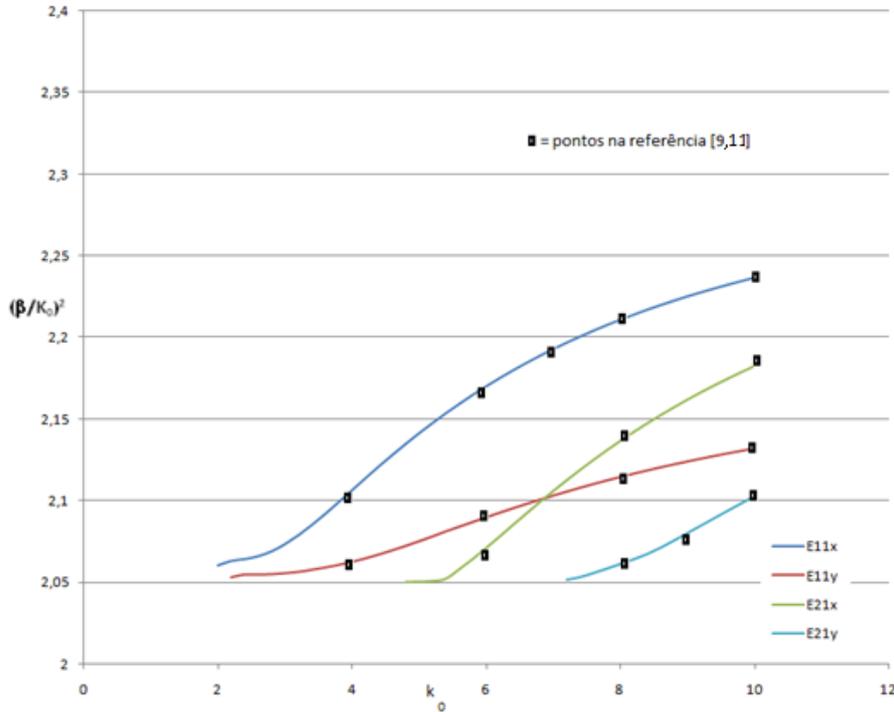


Figura 4.4: curvas de dispersão dos quatro primeiros modos do guia retangular.

#### 4.2.1.2 Cálculo de $Imag(\eta_{eff}) = Imag\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2$

Nas Figuras 4.5-a e 4.5-b, é visto o comportamento de  $Imag(\eta_{eff})$  em alguns pontos: na Figura 4.5-a – modos  $E_x(1,1), E_y(1,1)$ ; na Figura 4.5-b – modos  $E_x(2,1), E_y(2,1)$ .

O termo imaginário, na solução, não se identifica a perdas reais, já que a propagação neste guia ocorre sem perdas. É consequência do meio PML, caracterizado por parâmetros complexos.

Nas Figuras 4.5-a e 4.5-b, em que são apresentadas as curvas da parte real dos modos, com alguns pontos assinalados com a parte imaginária correspondente, percebe-se o acréscimo da parcela imaginária ao diminuir a frequência. Isso é consoante à teoria, já que, com o aumento da frequência, os campos se concentram no núcleo, o que reduz a influência das camadas PML na solução.

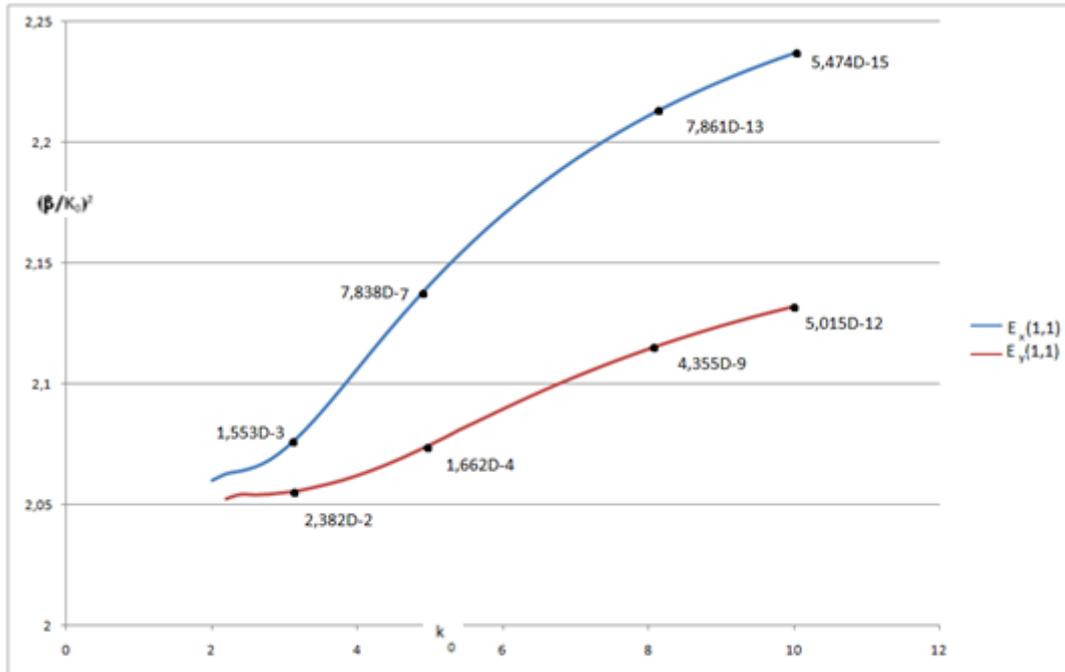


Figura 4.5-a: Dispersão dos dois primeiros modos do mesmo guia, com alguns valores de parte imaginária.

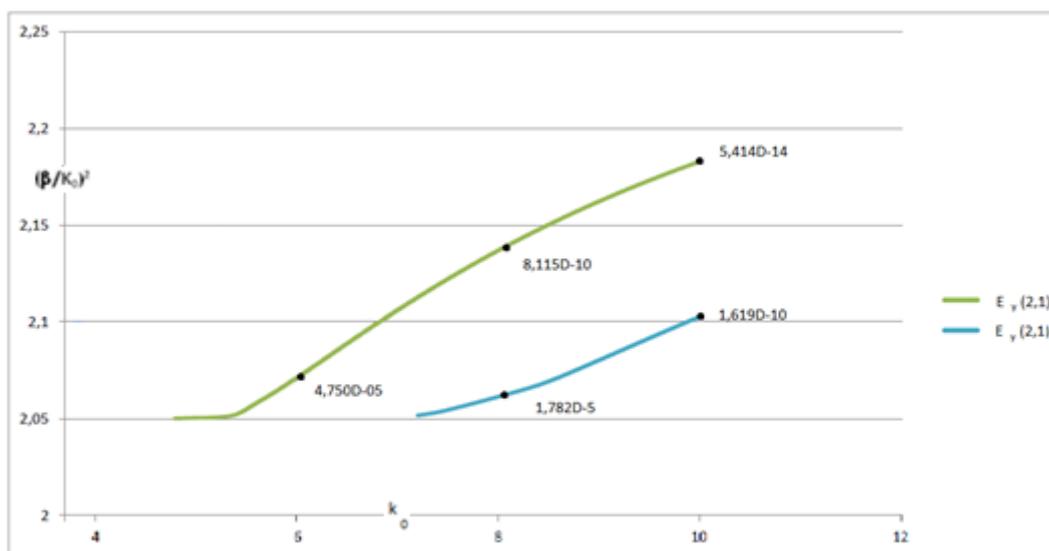


Figura 4.5-b: Dispersão do terceiro e quarto modos do mesmo guia, com alguns valores de parte imaginária.

4.2.1.3 Distribuição dos Campos

A distribuição de campos foi analisada no primeiro modo ( $H_y(1,1)$ ), confirmando os resultados obtidos por [9,11]. Também foi analisado o segundo modo ( $H_x(1,1)$ ).

- Modo  $H_y(1,1)$  ( $(E_x(1,1))$ ):

Este modo é o fundamental da estrutura, vide Figura 4.4. A análise foi desenvolvida por paredes: magnética vertical ( $x=0$ ) e elétrica horizontal ( $y=0$ ).

O gráfico da Figura 4.6-a foi calculado em  $k_0 = 4$ ; o da Figura 4.6-b, em  $k_0 = 7$ ; e o da Figura 4.6-c, em  $k_0 = 10$ . A distribuição de campo é idêntica à da Figura 4.7, extraída de [11].

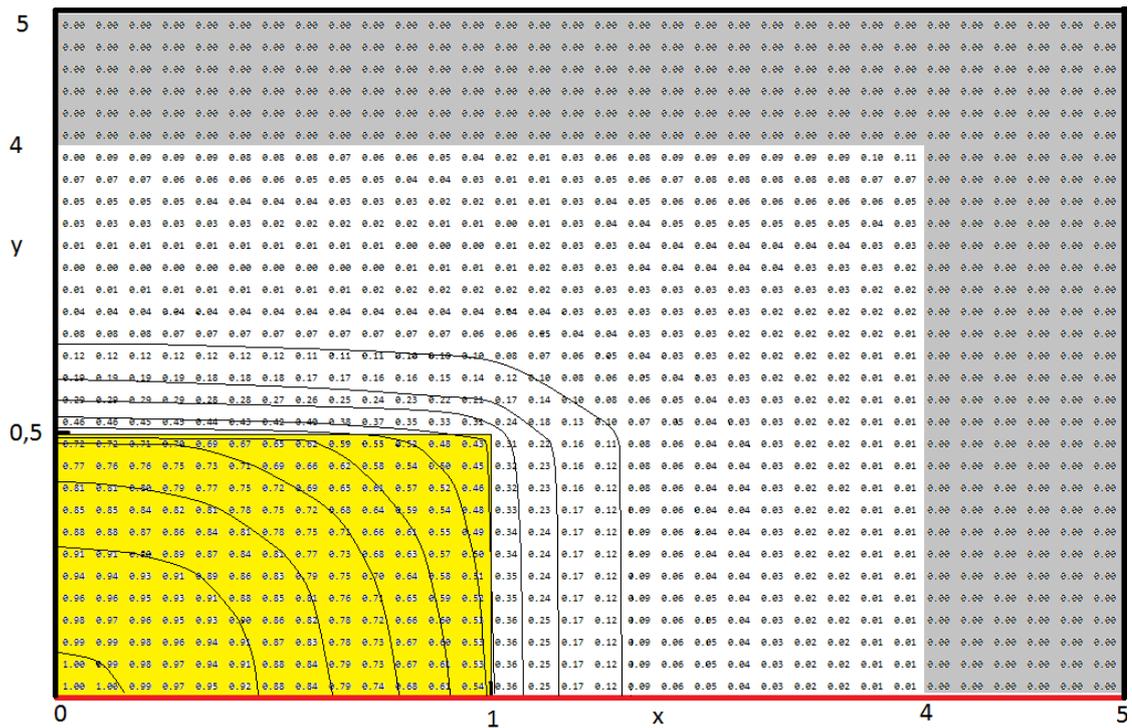


Figura 4.6-a: Distribuição de campo – componente  $H_y$ .  $k_0 = 4$ .

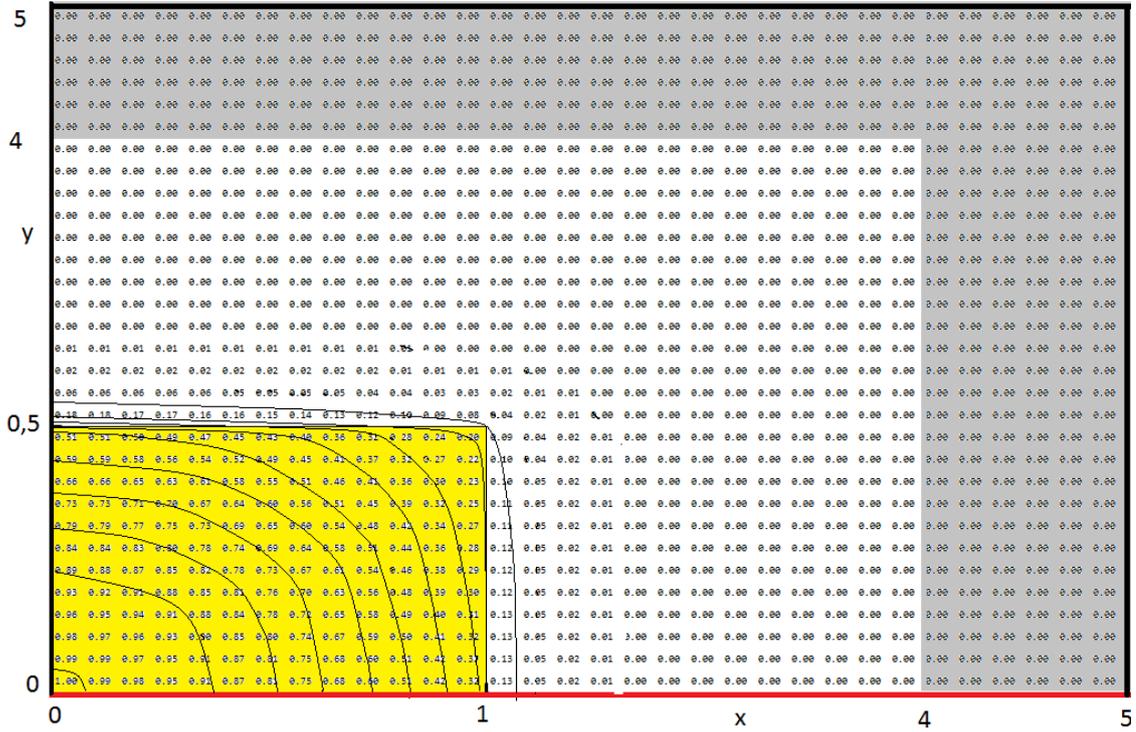


Figura 4.6-b: Distribuição de campo – componente  $H_y \cdot k_0 = 7$ .

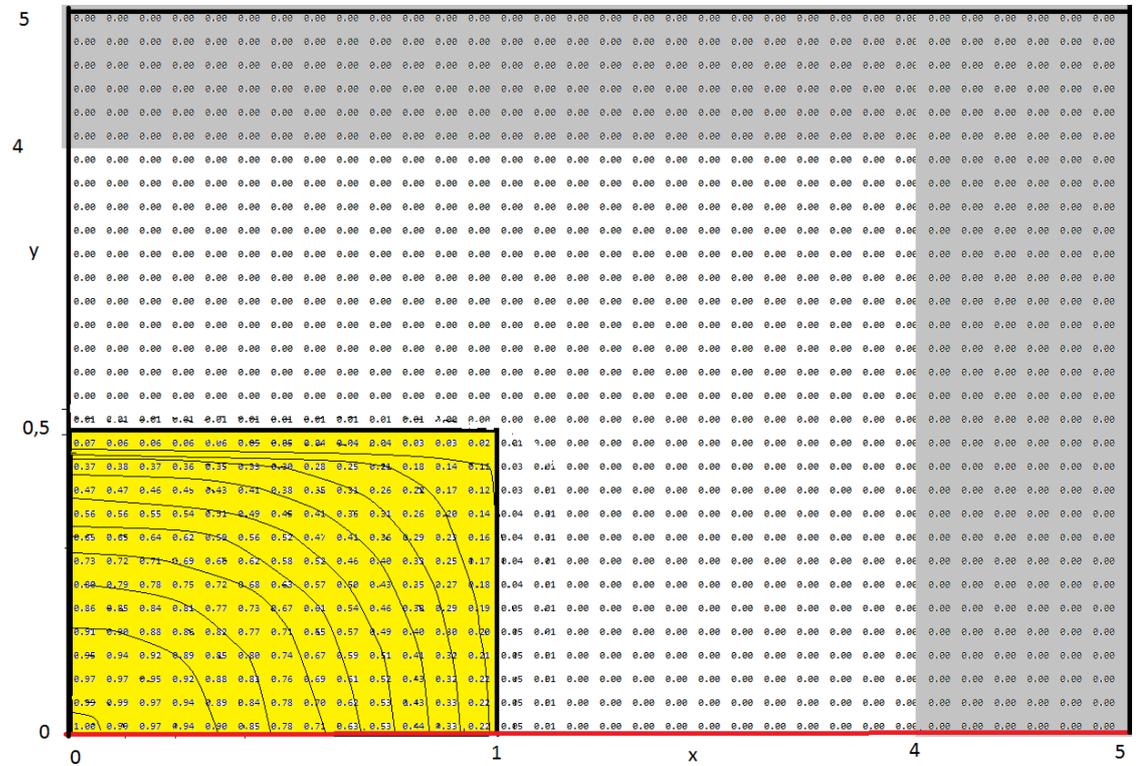


Figura 4.6-b: Distribuição de campo – componente  $H_y \cdot k_0 = 10$ .

Conforme se observa nas Figuras 4.6-a a 4.6-c, os campos tendem a se concentrarem no núcleo do guia, com o aumento da frequência. Por isso, a influência da camada PML é menor em frequências altas. Isso explica o decréscimo de  $Imag(\eta_{eff})$  em função da frequência, por ser este mera consequência da aplicação de PML.

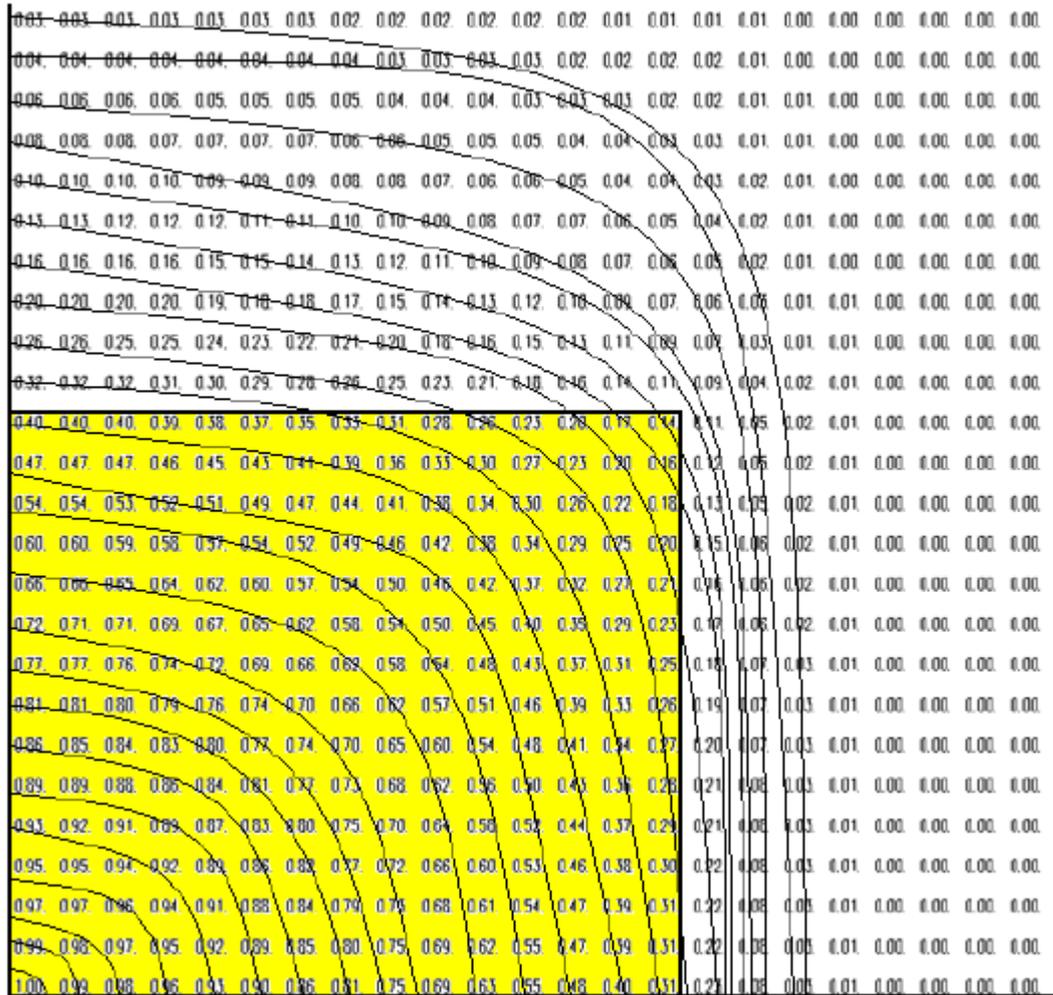


Figura 4.7: Distribuição do campo – modo  $H_y(1,1)$  em [11].

Os gráficos da dispersão e da distribuição de campo mostram concordância com [17] e [11], validando o método.

- Modo  $H_x(1,1)$  ( $E_y(1,1)$ )

O segundo modo,  $H_x(1,1)$ , foi analisado com parede magnética vertical em  $x=0$  e elétrica em  $y=0$ .

Os gráficos das Figuras 4.8-a e 4.8-b mostram a distribuição de campo no modo  $H_x(1,1)$ , em  $k_0 = 7$  e  $k_0 = 10$ , evidenciando a maior concentração da onda no núcleo em altas frequências.

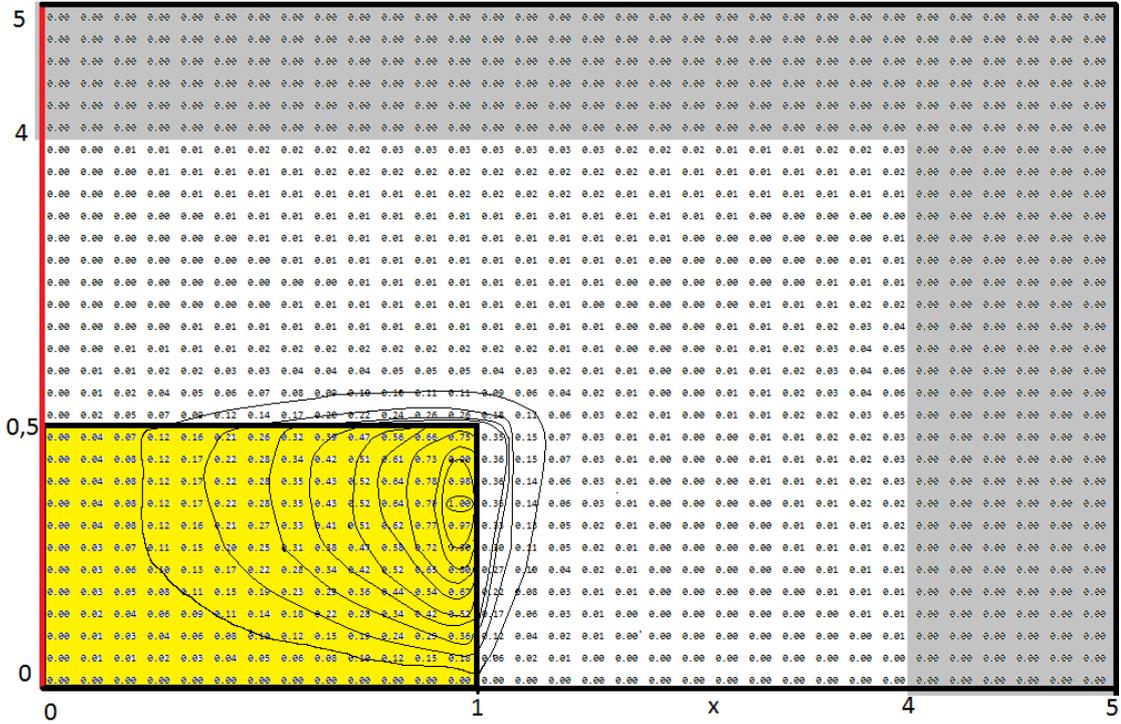


Figura 4.8-a: Distribuição de campo com  $k_0 = 7$  - Componente  $H_x$ .

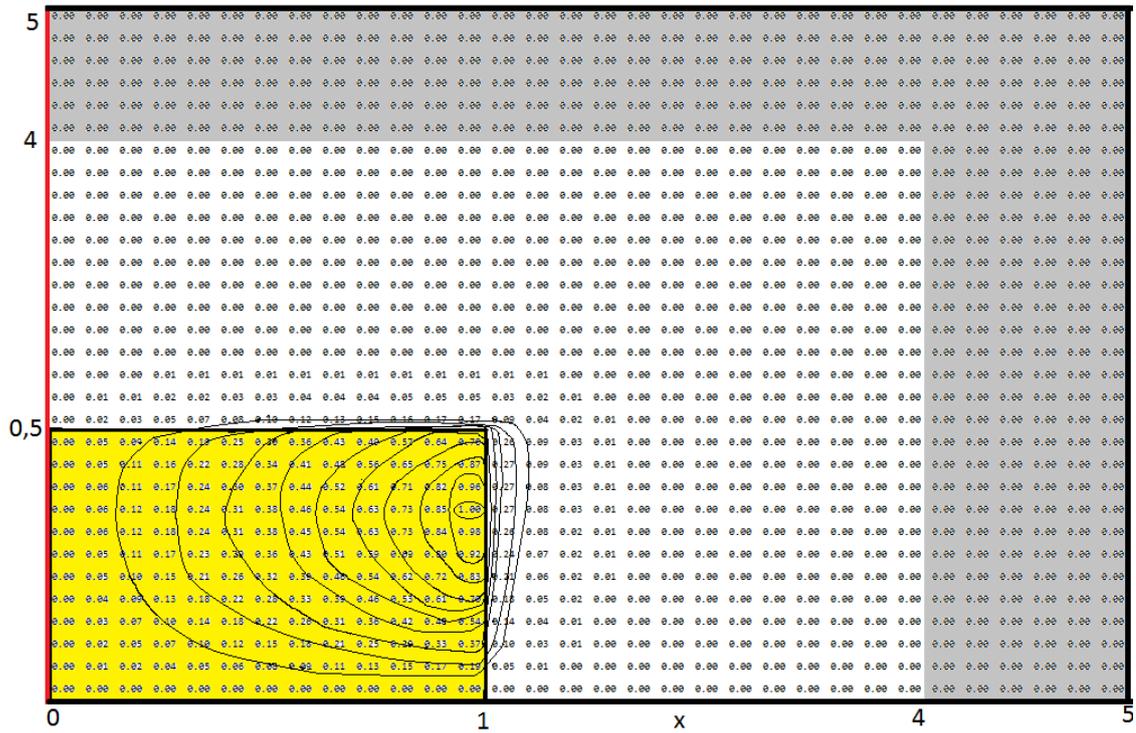


Figura 4.8-b: Distribuição de campo com  $k_0 = 10$  – Componente  $H_x$ .

É importante notar que o guia retangular anisotrópico não-homogêneo não apresenta perdas, e que, devido ao artifício matemático da camada PML, a permissividade efetiva calculada pelo método proposto é complexa. Isto é apenas consequência da introdução da região PML, e não implica a existência de perdas no guia.

#### 4.2.2 Guia Canal (*Embedded*)

O guia canal consiste de um retângulo feito de material dielétrico denso, incrustado em outro menos denso, conforme a Figura 4.9:

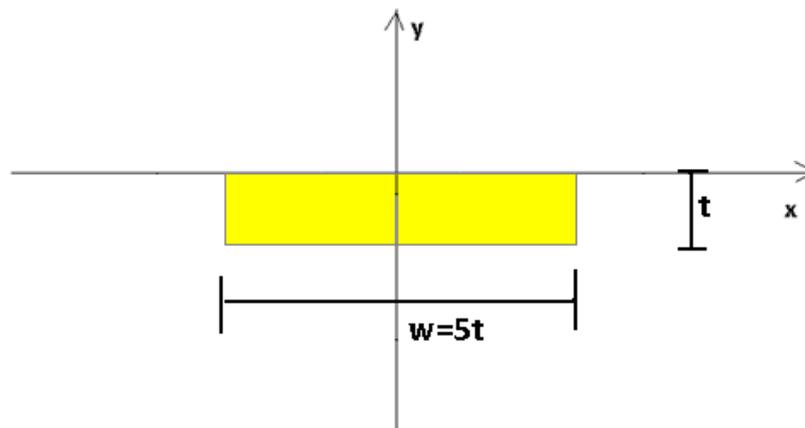


Figura 4.9: Guia de onda canal ou incrustado.

A simetria bilateral, relativa ao plano y-z, deste guia permite a sua análise a partir de metade da sua seção transversal (Figura 4.10):

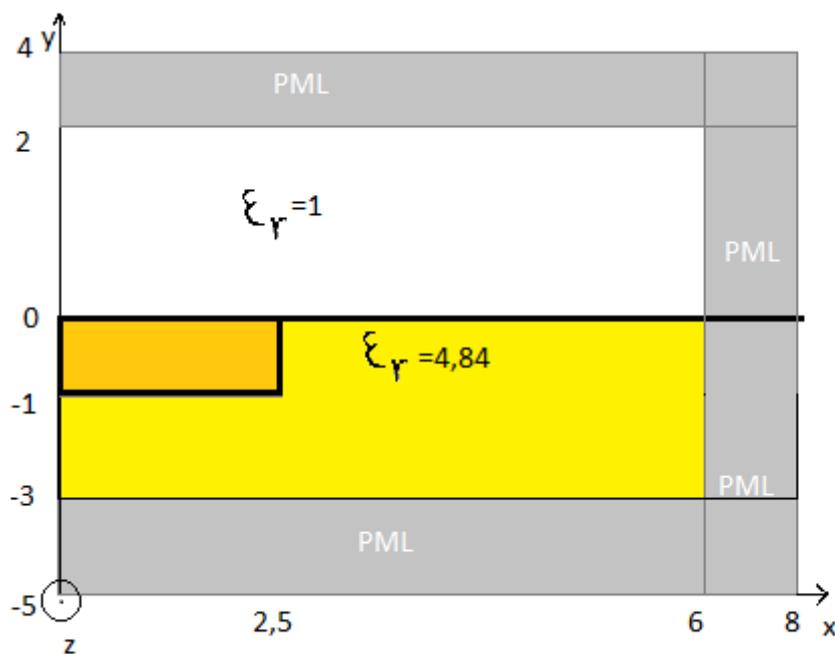


Figura 4.10: Modelo computacional do guia canal.

As permissividades na região mais densa são:

$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{xy}$	$\epsilon_{yx}$	$\epsilon_{zz}$
4,937	5,3495	0	0	5,3495

#### 4.2.2.1 Cálculo das Curvas de Dispersão

O guia foi analisado com 2736 elementos triangulares. Os valores de  $Real(\eta_{eff})$  dos quatro primeiros modos são mostrados na Figura 4.11. Nessa Figura, a curva de dispersão é confrontada com os resultados de [9,11] (pontos assinalados). Verifica-se perfeita concordância.

Como as regiões PML são caracterizadas por parâmetros complexos,  $\eta_{eff}$  será complexo, como visto nas Figuras 4.12-a ( $E_y(1,1), E_y(2,1)$ ) e 4.12-b ( $E_x(1,1), E_x(2,1)$ ). As curvas contínuas se referem às dispersões calculadas pela teoria, e os pontos assinalados, aos valores fornecidos por [9] e [11].

O guia não apresenta perda, como já extensivamente comprovado[8,19]. Portanto, ao contrário do dito por Fernandez e Lu [18], o termo imaginário não representa perda ou campos radiantes, sendo, apenas, consequência da formulação PML. Esta afirmação é ratificada, pela observação de que: em frequências menores, os campos, menos concentrados no núcleo, se expandem, penetrando mais fortemente nas regiões PML. Logo, o  $Imag(\eta_{eff})$  é majorado, vide Figuras: 4.13-a a 4.13-d, já que a influência das regiões é mais pronunciada.

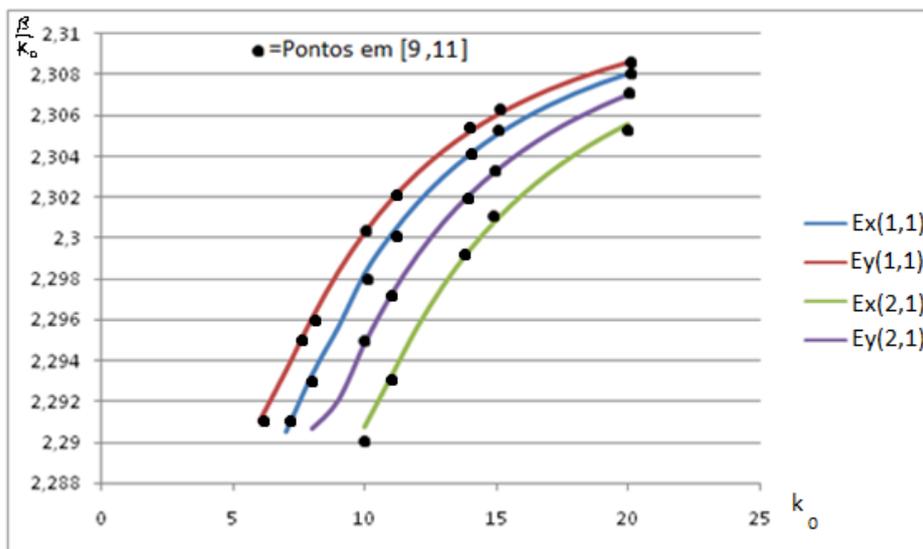


Figura 4.11: Curva de dispersão do guia canal – parte real.

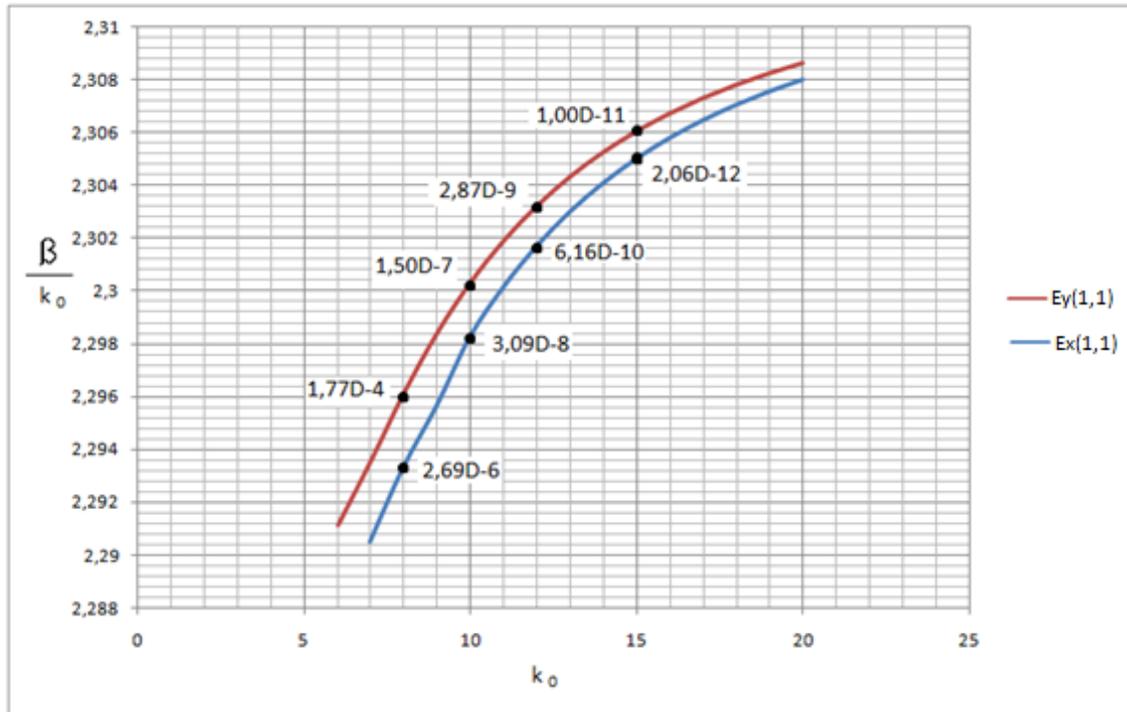


Figura 4.12-a: Dispersão dos dois primeiros modos do mesmo guia, com alguns valores de parte imaginária.

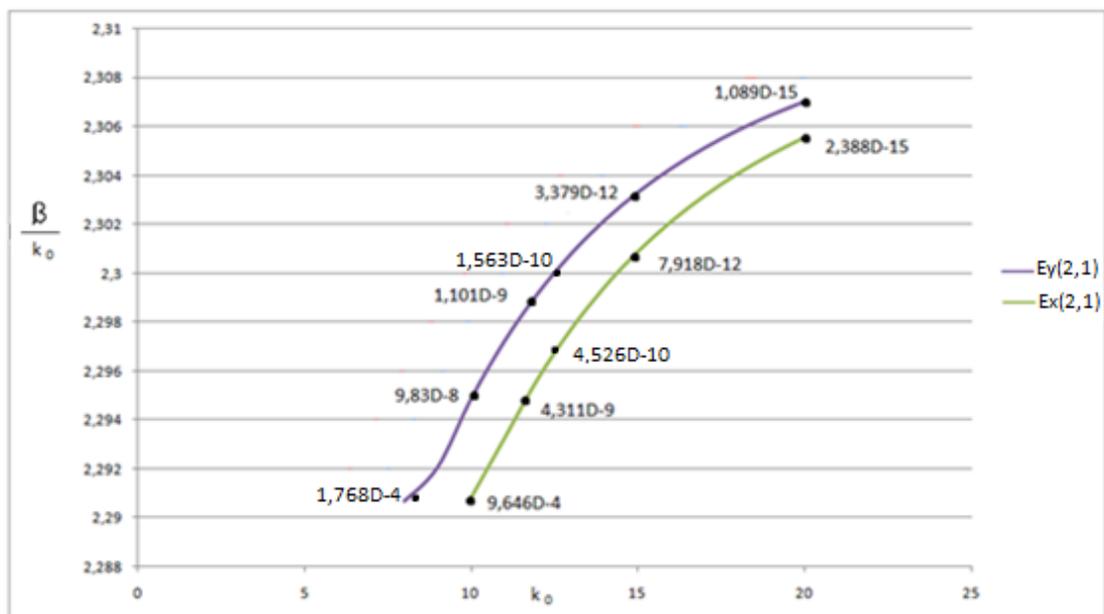


Figura 4.12-b: Dispersão do terceiro e quarto modos do mesmo guia, com alguns valores de parte imaginária.

#### 4.2.2.2 Distribuição de Campo

Analisou-se a distribuição espacial dos campos referentes aos dois primeiros modos que se propagam no guia ( $Ey(1,1)$ ,  $Ex(1,1)$ ), vide Figuras 4.13-a até 4.13-d:

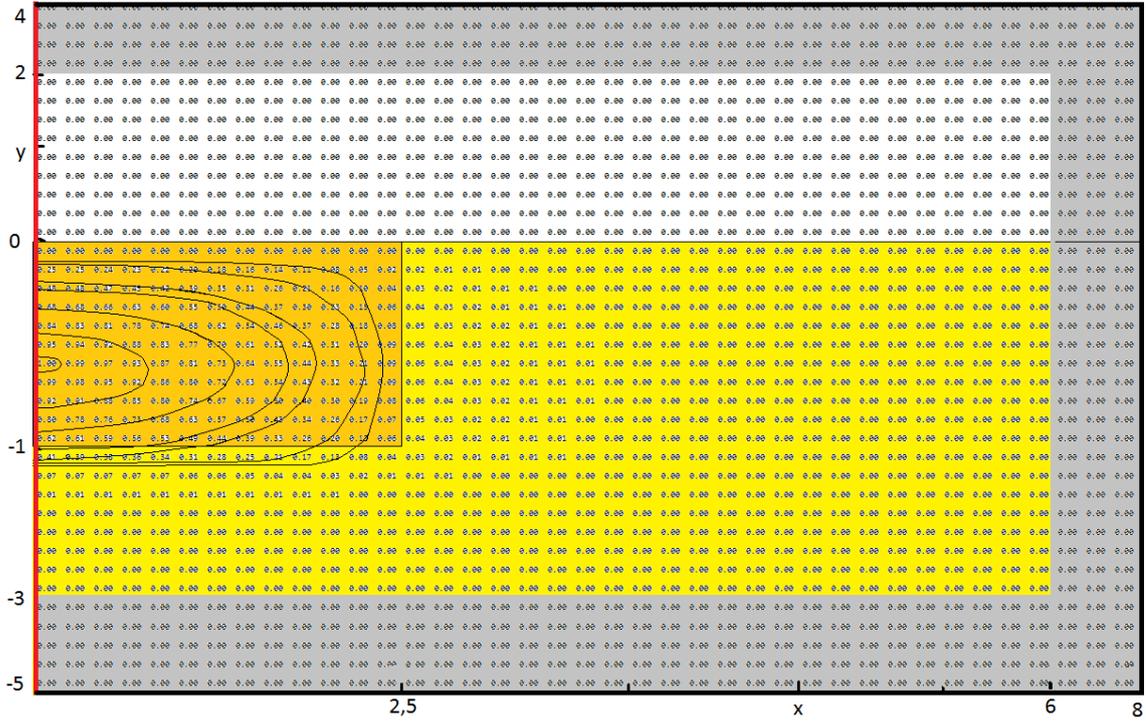


Figura 4.13-a: Distribuição de campo: modo fundamental do guia canal ( $E_y(1,1)$ ),  $k_0 = 20$ .

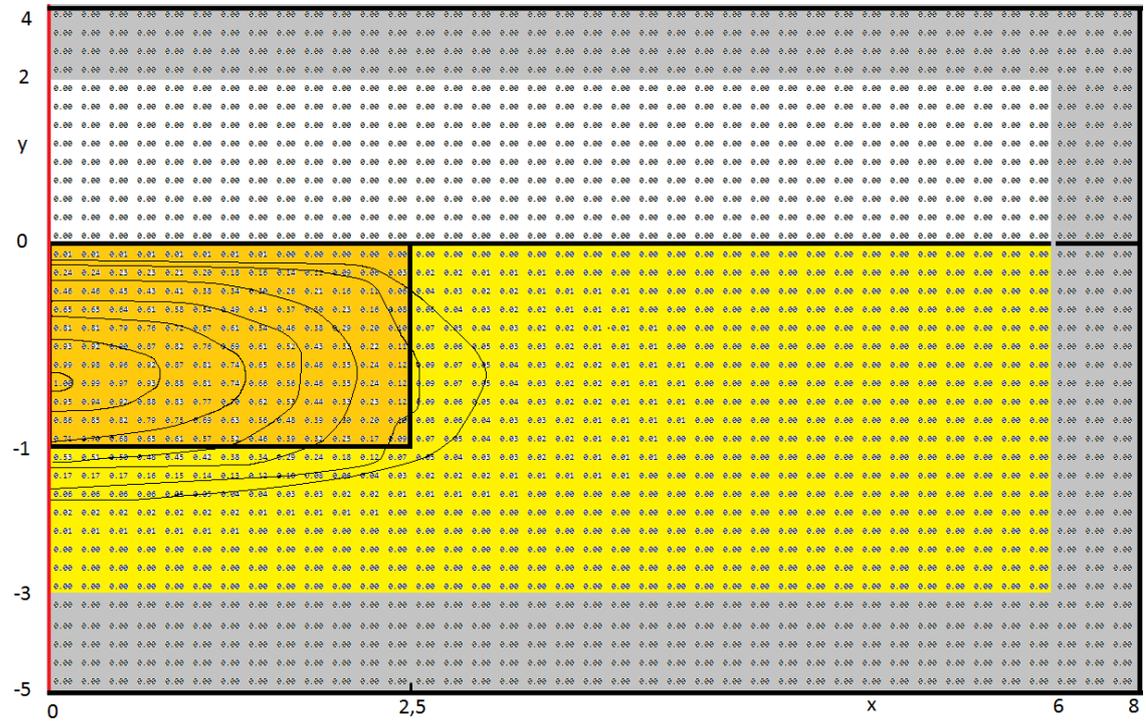


Figura 4.13-b: Distribuição de campo: modo  $E_y(1,1)$ ,  $k_0 = 15$ .

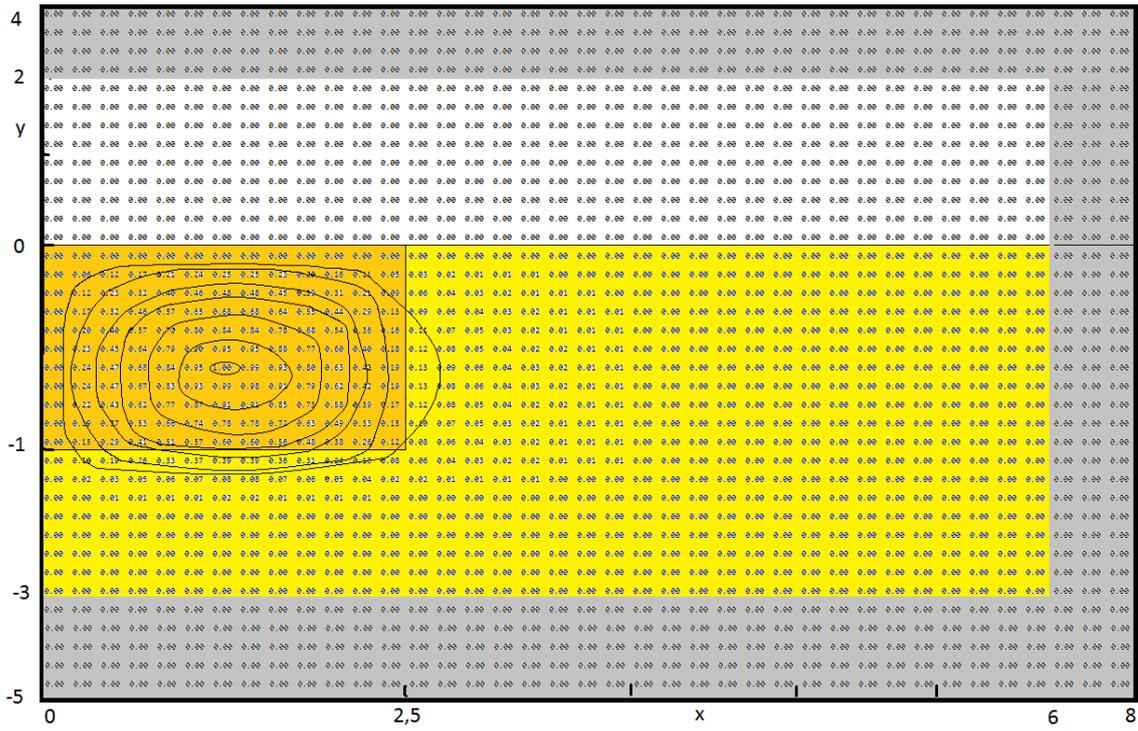


Figura 4.13-c: Distribuição de campo: 2º modo( $Ex(1,1)$ ),  $k_0 = 20$ .

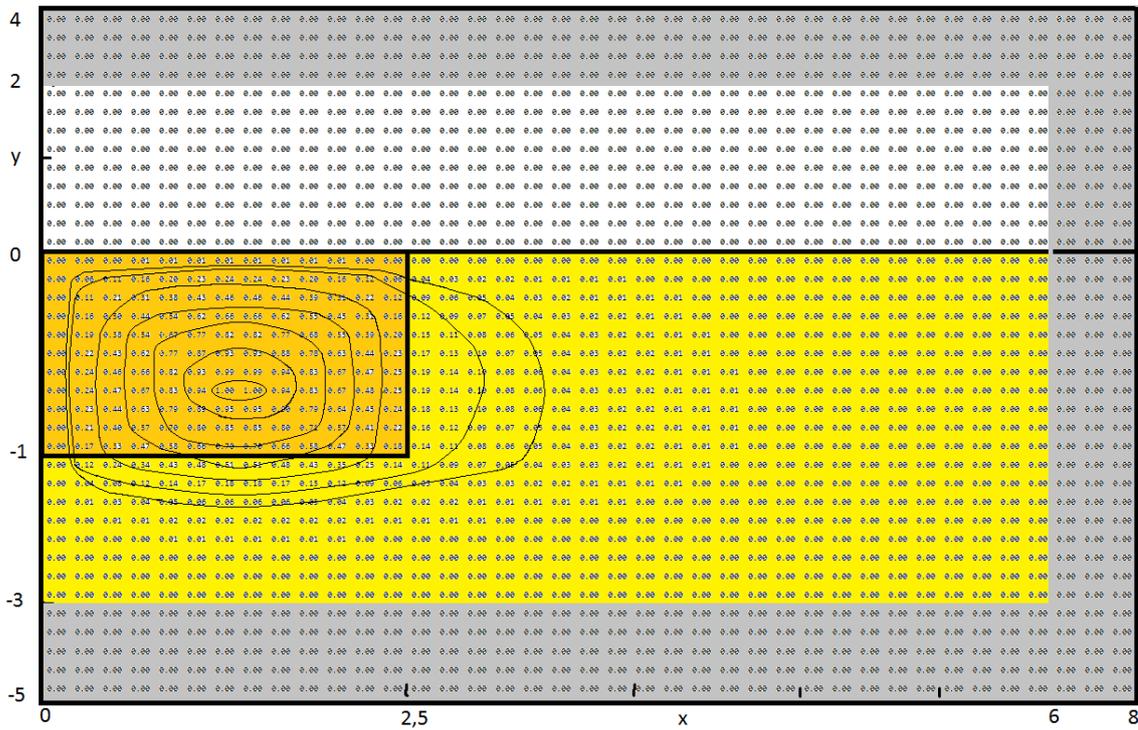


Figura 4.13-d: Distribuição de campo: modo  $Ex(1,1)$ ,  $k_0 = 15$ .

A distribuição de campo calculada por este método é idêntica à calculada por [8,18], Figuras 4.14-a e 4.14-b:

Distribuição de campo em [8]

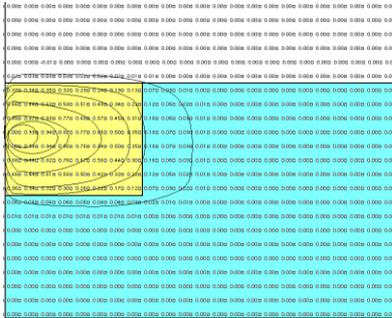


Figura 4.14-a: Distribuição de campo no modo  $(E_y^{11})$  em  $k_0 = 7$ .

Figura 4.14-b: Distribuição de campo no modo  $(E_x^{21})$  em  $k_0 = 7$ .

4.2.2 Guia ARROW

O guia de onda ARROW (Figura 4.15) foi analisado por diversos autores [7,8,9,10,11]. Os resultados apresentados por eles se concentraram em, somente, um ponto da curva de dispersão,  $k_0 = 5,91$ ,  $\lambda = 1,064\mu\text{m}$ . Esse valor foi confirmado pela teoria desenvolvida neste trabalho, ver quadro 4.1. Na confrontação dos resultados, os erros relativos ao  $Real(\eta_{eff})$  foram menores que 0,2%. Erros maiores foram encontrados no  $Imag(\eta_{eff})$ , justificáveis pelo fato da densidade de discretização, por limitação computacional, não poder ir muito além de 3000 triângulos.

O guia estudado é mostrado na Figura 4.15:

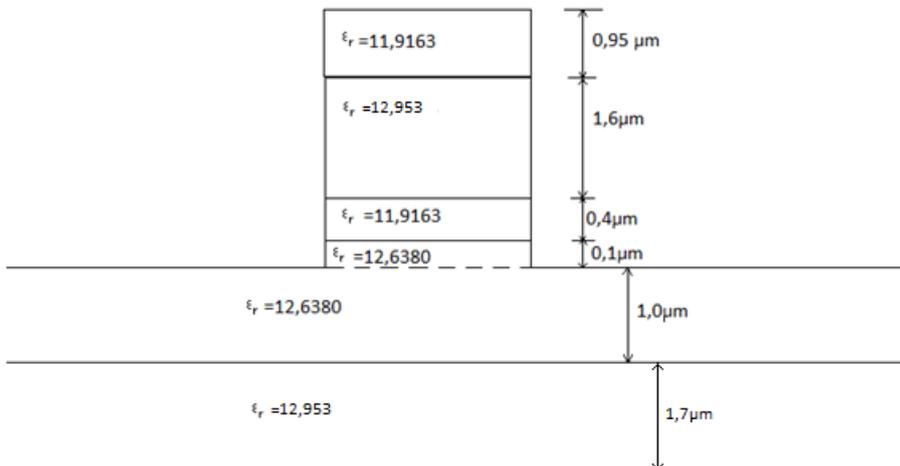


Figura 4.15: Guia ARROW.

A geometria do guia, bilateralmente simétrica, permite analisá-lo pela metade de sua seção transversal, vide Figura 4.16:

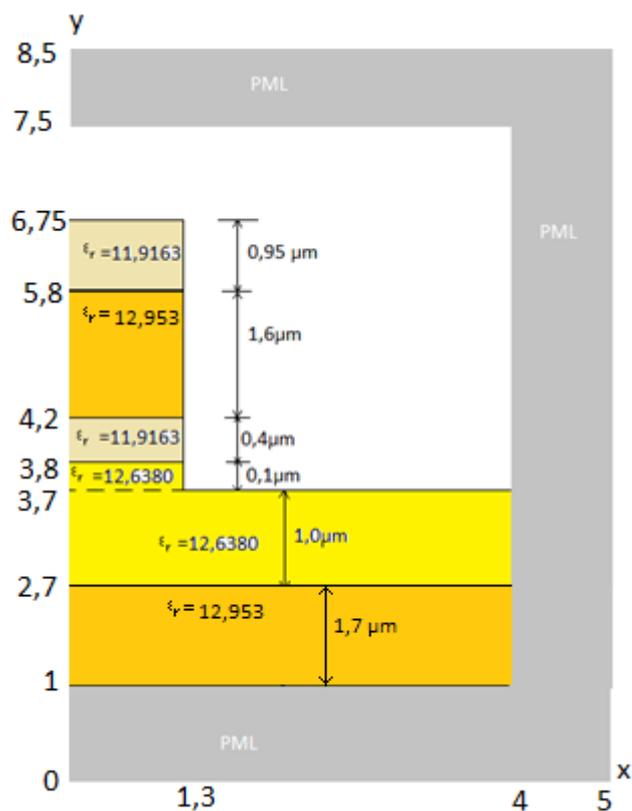


Figura 4.16: Modelo computacional do guia ARROW.

#### 4.2.2.1 Cálculo das Curvas de Dispersão

As curvas de dispersão dos quatro primeiros modos do guia são mostradas na Figura 4.17:

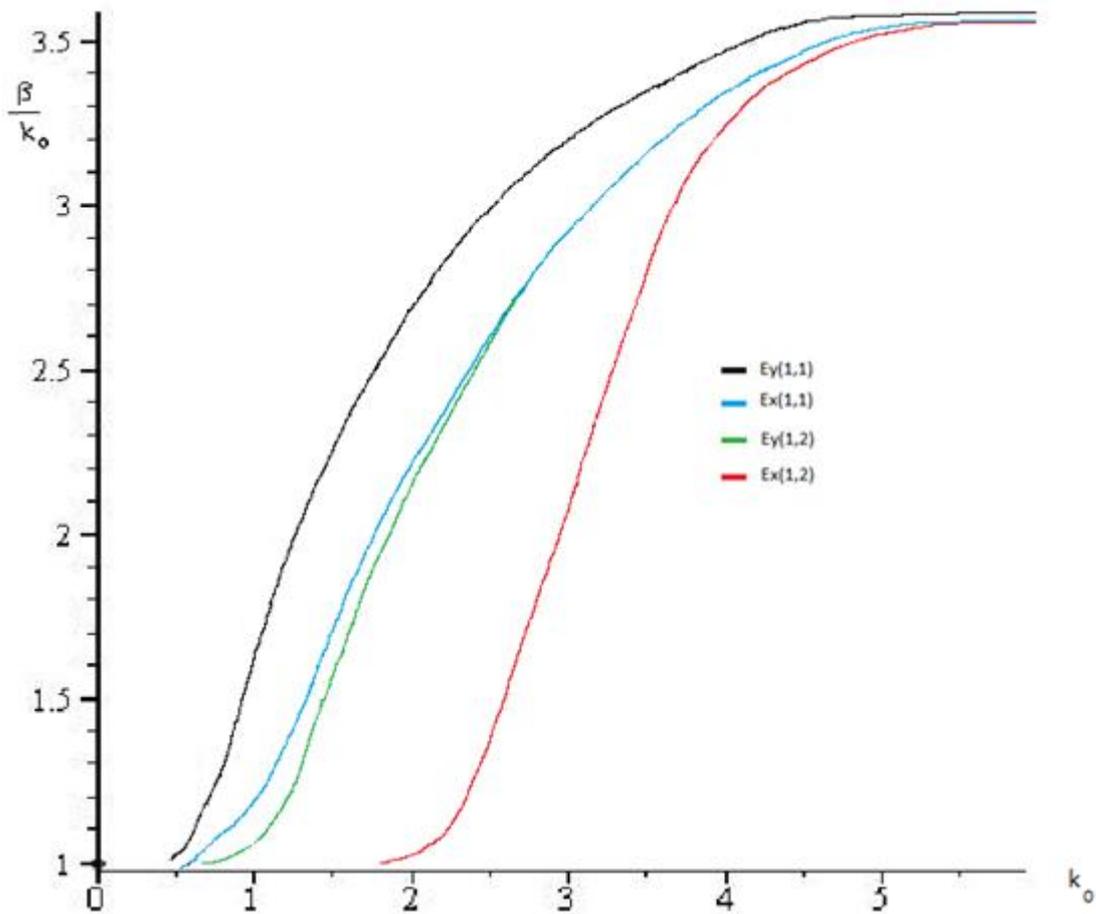


Figura 4.17: Curva de dispersão dos quatro primeiros modos do guia ARROW.

Como em todos os domínios limitados por regiões PML, o  $Imag(\eta_{eff})$  também aumentou com a diminuição da frequência, ver Figuras: 4.18-a (referente ao modo fundamental  $E_y(1,1)$ ); 4.18-b (primeiro modo superior,  $E_x(1,1)$ ), já que, nessa condição, o campo penetra mais profundamente nas regiões PML. Nestas figuras, as curvas representam a parte real e os valores assinalados aos pontos, à parte imaginária.

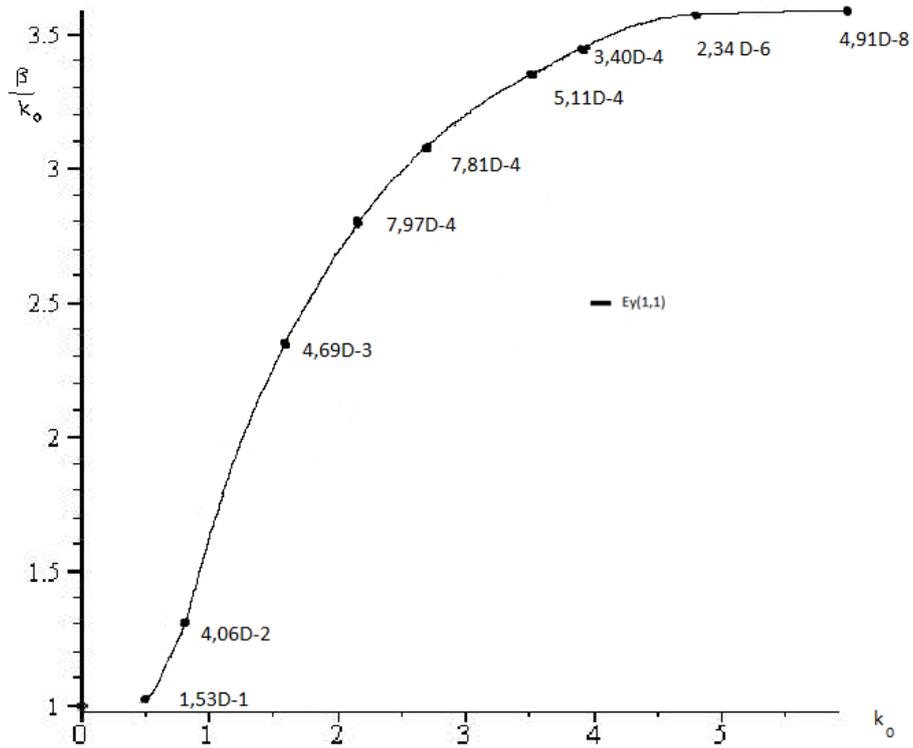


Figura 4.18-a: Curva de dispersão do modo fundamental,  $E_y(1,1)$ , com valores de  $\text{Imag}(\eta_{eff})$ .

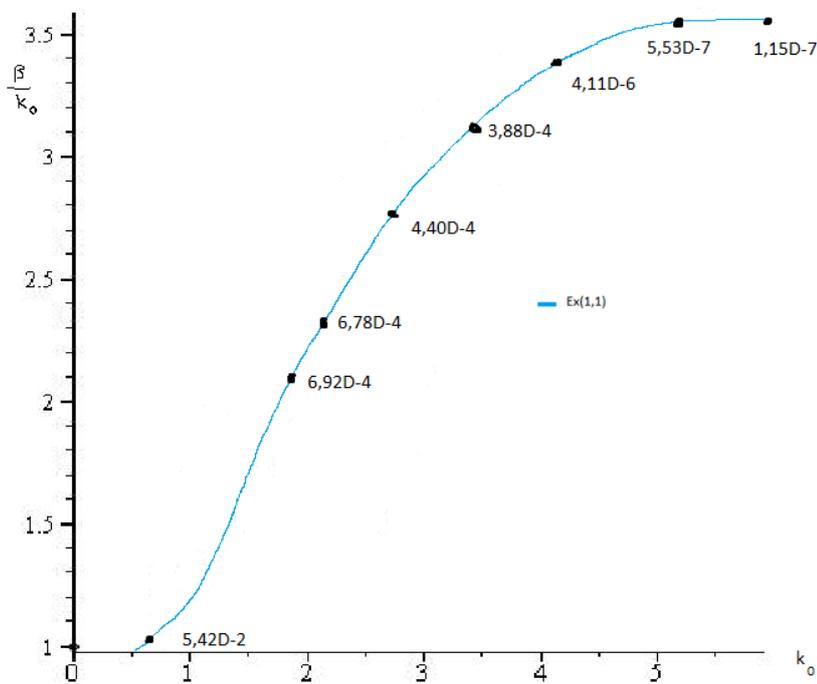


Figura 4.18-b: Curva de dispersão do primeiro modo superior,  $E_x(1,1)$ , com valores de  $\text{Imag}(\eta_{eff})$ .

Na literatura, as dispersões dos cinco primeiros modos foram calculadas em um único ponto, referente a  $k_0 = 5,91$ ,  $\lambda = 1,064\mu m$  [7,8,9,10,11]. No Quadro 4.1, são elas confrontadas com as deste trabalho. A nomenclatura dos modos foi revisada, considerando-se os tipos de parede, elétrica ou magnética, postos como limites do domínio computacional, para a obtenção de cada modo. Os nomes dos modos, publicados na literatura, referentes ao ponto  $k_0 = 5,91$ ,  $\lambda = 1,064\mu m$ :  $(E_x(1,1), E_x(1,2), E_x(1,3), E_x(3,2))$ , obtidos com paredes magnéticas e elétricas, foram substituídas, respectivamente, por:  $E_y(1,1), E_x(1,1), E_y(1,2), E_x(1,2)$ . Há razoável concordância com o  $Real(\eta_{eff})$ . Infelizmente, não foi possível confrontar os demais valores das curvas, já que não foram encontrados dados na literatura (em 2017).

Quadro 4.1: Comparação dos valores de dispersão calculados nesse trabalho com os da literatura, em  $k_0 = 5,91 \text{ rad/m}$  ( $\lambda = 1,064 \mu\text{m}$ ).

Modo	Hernandez-Figueroa		Tsuji/Koshiba		Berry <i>et al.</i>		Nogueira		Este trabalho		
	Real	Imaginário	Real	Imaginário	Real	Imaginário	Real	Imaginário	Modo	Real	Imaginário
$E_x(1, 1)$	3,574125	1,7649D-7	3,574131	1,6976D-7	3,573800	1,6968D-7	3,573795	1,7120D-7	$E_y(1, 1)$	3,564554	1,147D-7
$E_x(1, 2)$	3,543505	5,5352D-5	3,543530	5,4823D-5	3,543231	5,4810D-5	3,543225	5,5691D-5	$E_x(1, 1)$	3,551412	5,031D-5
$E_x(1, 3)$	3,529994	1,4923D-6	3,5299949	1,615D-6	-	-	3,526932	6,7865D-6	$E_y(1, 2)$	3,531447	4,761D-5
$E_x(3, 2)$	3,498680	1,2273D-4	3,495891	1,2316D-4	-	-	3,495866	1,1539D-4	$E_x(1, 2)$	3,497154	3,945D-4
$E_x(1, 4)$	-	-	-	-	3,494278	8,8414D-4	3,494256	8,8313D-4	$E_y(1, 3)$	3,478427	7,744D-4

4.2.2.2 Distribuição de Campo

Os gráficos das distribuições dos modos:  $E_y(1,1)$ ;  $E_x(1,1)$ ;  $E_y(1,2)$ , em  $k_0 = 20$  são vistos, respectivamente, nas Figuras 4.19-a a 4.19-c.

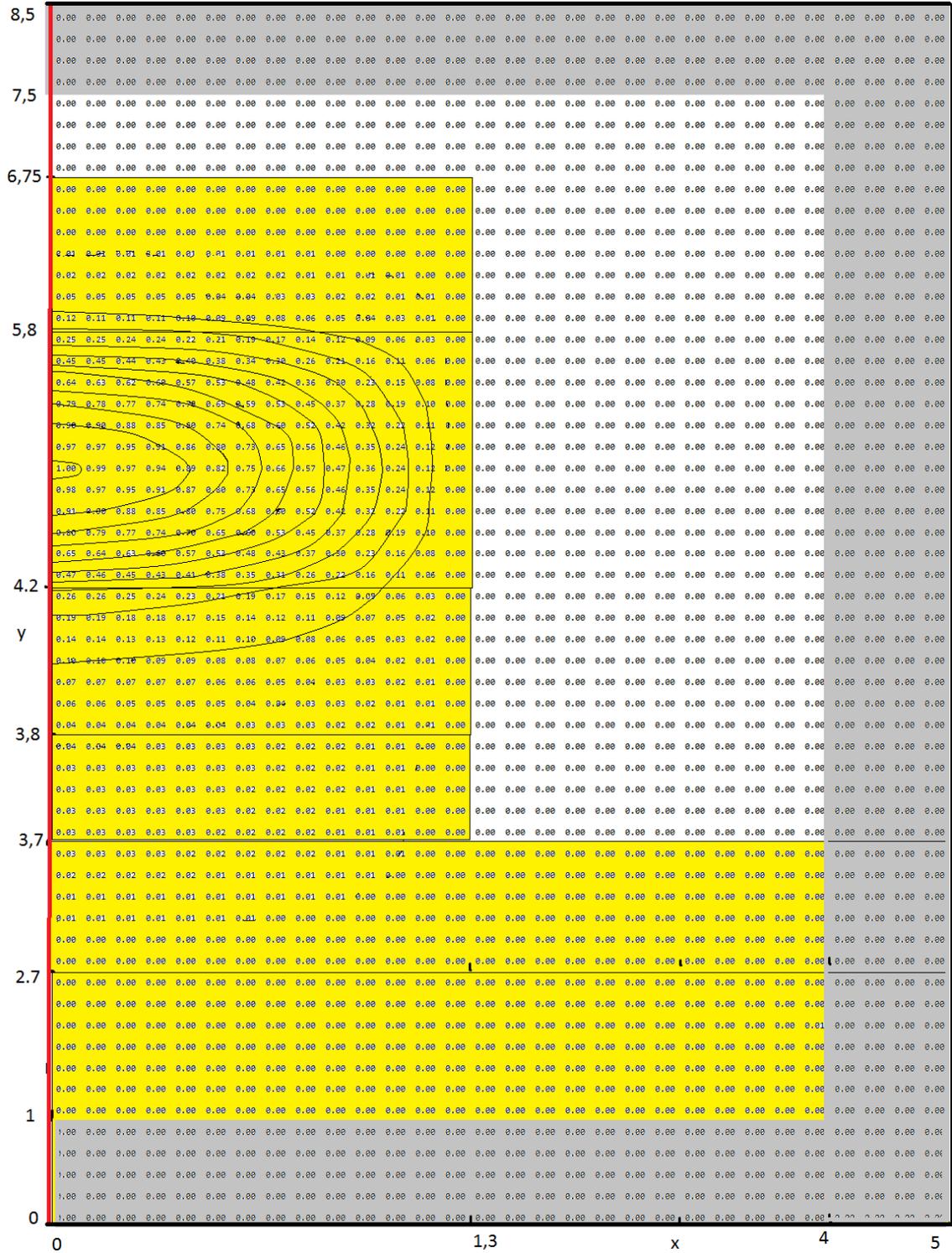


Figura 4.19-a: Distribuição de Campo do Modo  $E_y(1,1)$ .

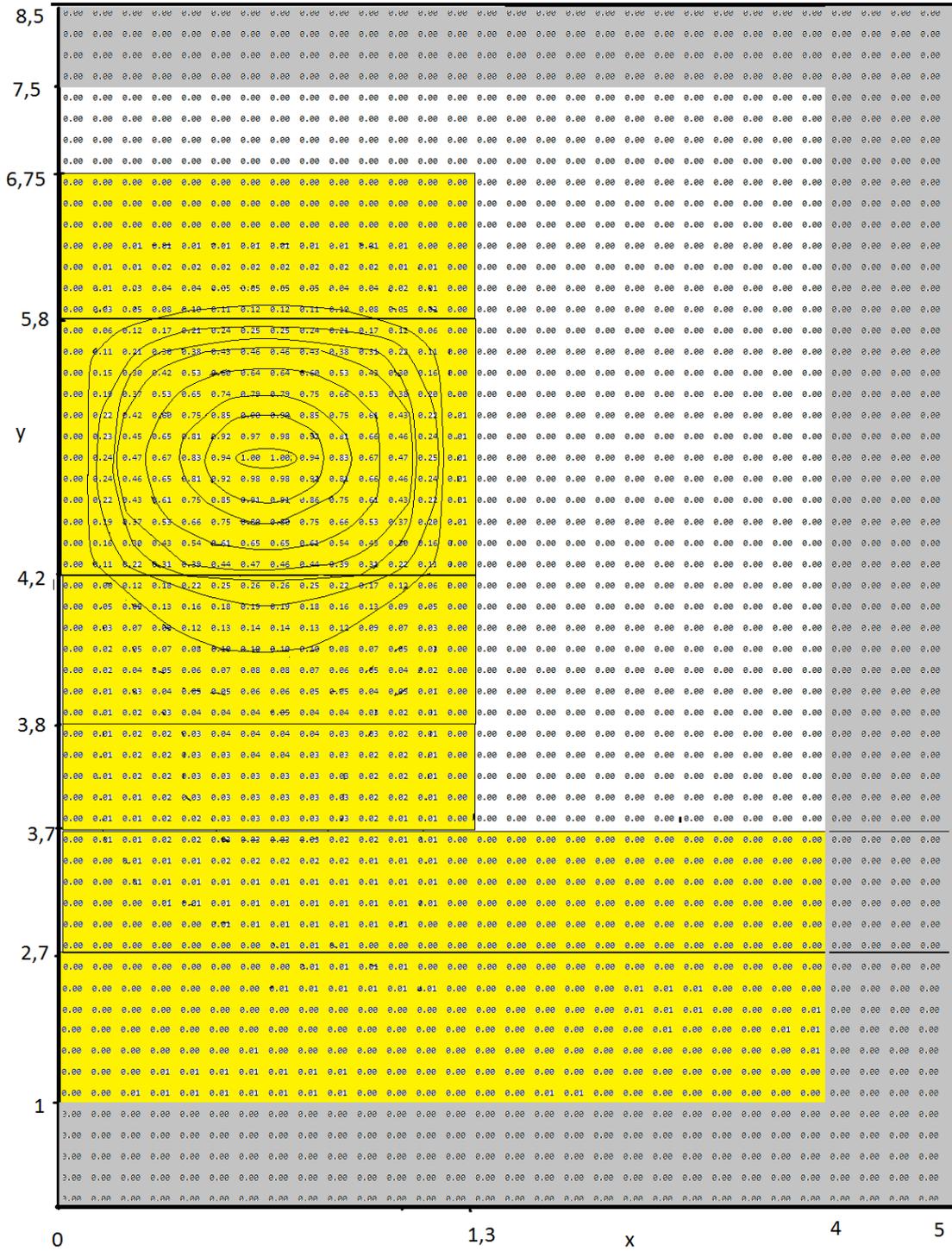


Figura 4.19-b: Distribuição de Campo no Modo  $E_x(1,1)$  (componente  $H_x$ ).

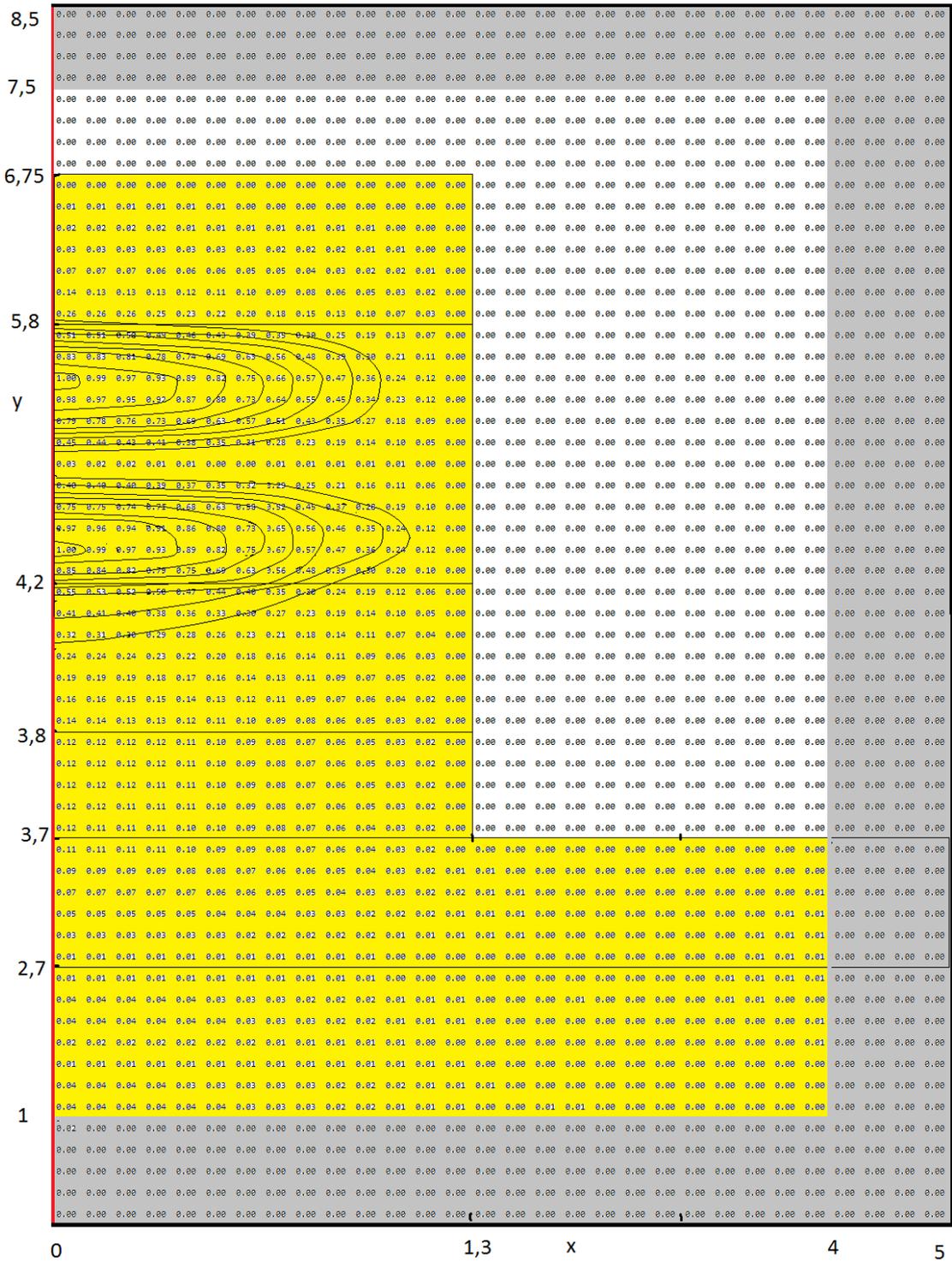


Figura 4.19-c: Distribuição de Campo do Modo  $E_y(1,2)$ .

### 4.3 Conclusão

Pelo método deste trabalho, foram analisados diferentes guias dielétricos, cujos resultados concordaram perfeitamente com os da literatura.

Conclui-se que os valores complexos de  $\eta_{eff}$  não representam perdas, são consequências das regiões PML, caracterizadas por parâmetros complexos. Ao se diminuir a frequência de operação, os campos se estendem mais profundamente nas regiões PML, aumentando, portanto, o fator imaginário.

## 5 CONCLUSÃO FINAL

Neste trabalho, foram elaborados formalismos para se analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em guias dielétricos abertos, isto é, com fronteiras no infinito, modelados por regiões PML.

No Capítulo 1, foram desenvolvidos os três formalismos adequados à análise de regiões PML: o de Berenger, o da Anisotropia Uniaxial e o de Tsuji-Koshiba. As três abordagens são equivalentes.

No Capítulo 2, estudou-se a propagação de ondas planas em regiões absorventes, enfatizando a propagação nos meios adaptados (PML). A análise do modo  $TE_z$  foi suficiente, já que a do  $TM_z$  se obtém desta, pelo teorema da dualidade. Demonstrou-se que a reflexão é nula na interface PML-dielétrico ou PML-PML, quaisquer que sejam o ângulo de incidência e a frequência de operação o que advém da definição de PML. No Apêndice D, tem-se a análise pormenorizada desse tópico.

No Capítulo 3, apresentou-se o formalismo matemático para se analisar estruturas dielétricas abertas, por domínio finito, limitado por fronteiras PML. O estudo foi elaborado pelos métodos: Vetorial Magnético e dos Elementos Finitos. Pelo uso desses métodos, o problema contínuo de valores de fronteira é discretizado no problema matricial de autovalores e autovetores.

No Capítulo 4, validou-se o método desse trabalho, ao confrontar os resultados de dispersão e distribuição dos campos para duas estruturas dielétricas: o guia retangular anisotrópico não-homogêneo e o guia canal, com os da literatura. O  $\eta_{eff}$  calculado é complexo. A parte real é referente à constante de fase e concordou perfeitamente com o de outros autores. Os guias analisados não apresentam perdas, fato já bem conhecido. Portanto, a parcela imaginária advém das propriedades complexas inerentes às regiões PML. Não caracterizam perdas, literalmente, nem tampouco radiação dos modos, sendo consequência matemática da inclusão das regiões PML no domínio analisado. Pelo fato de a parte imaginária da dispersão não corresponder a perdas reais, o fator responsável a absorção de ondas nas equações de propagação em regiões PML ( $S_j, j = x, y, z$ ), neste trabalho, foi denominado: fator equivalente de dissipação.

Estudou-se, também, o guia ARROW (*Anti-Ressonant Reflecting Optical Waveguide*), para o qual, infelizmente, os únicos valores das curvas de dispersão publicados, dos cinco primeiros modos, são para um único ponto,  $k_0 = 5,91$ ,  $\lambda = 1,064\mu m$ . Houve razoável concordância da parte real do  $\eta_{eff}$ , embora o erro do termo imaginário fora maior, devido à limitação computacional, pois, o equipamento utilizado só permitiu simulações com matrizes de ordem inferior a 4000. Ao diminuir a frequência de operação, o campo se expande além do núcleo, penetra cada vez mais nas regiões PML, como ficou evidente nos respectivos gráficos.

O efeito das regiões PML, portanto, se torna mais pronunciado, aumentando a influência do fator equivalente de dissipação.

Em trabalhos futuros, esta metodologia será adaptada ao método matricial de armazenamento de dados por linha do céu (*Skyline*) [22], complementado pela técnica de iteração no subespaço (*Subspace Iteration*) [23]. Com essas implementações, o método torna-se mais abrangente, poderoso e veloz.

## REFERÊNCIAS

- [1] HOLLAND, R., WILLIAMS, J.. *Total Field versus Scattered-Field Finite Difference*. IEEE Trans. Nuclear Science, vol. 30, pp. 4583-4587. 1983.
- [2] BERENGER, J. P.. *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*. Journal of Computational Physics 114, pp. 185-200. Academic Press. 1994.
- [3] SACKS, Z. S., *et alii*. *A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Condition*. IEEE Trans. Antenna Propagation, vol. 43, pp. 1460-1463. 1995.
- [4] ZHAO, L., CANGELLARIS, A. C.. *A general approach for the development of unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for FDTD grid truncation*. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 6, no. 5. IEEE. 1995.
- [5] GEDNEY, S. D.. *An Anisotropic Perfectly Matched Layer-Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices*. IEEE Trans. Antenna Propagation, vol. 44, pp. 1631-1639. 1996.
- [6] TSUJI, Y., KOSHIBA, M.. *Finite element method using port truncation by perfectly matched layer boundary conditions for optical waveguide discontinuity problems*. Journal of Lightwave Technology, Volume 20, Issue 3, pp. 463-468. IEEE. 2002.
- [7] TSUJI, Y., KOSHIBA, M.. *Finite Element Beam Propagation Method with Perfectly Matched Layer Boundary Conditions for Three-Dimensional Optical Waveguides*. International Journal of Numerical Modeling, no. 13, pp.115-126, doi: 10.1002/(SICI)1099-1204(200003/06)13:2/3<115::AID-JNM349>3.0.CO;2-T. Wiley. 2000.
- [8] NOGUEIRA, A.. *Análise de guias de ondas pelos métodos vetorial magnético e dos elementos-finitos*. Dissertação de Mestrado. UERJ. 2011.
- [9] BORN, M., WOLF, E.. *Principles of Optics*. 6<sup>th</sup> Edition. Pergamon Press. 1980.
- [10] BERRY, G. M., *et alii*. *Leaky Modal Analysis of Semiconductor Optical Waveguides*. Integrated Photonics Research Technical Digest, 10(1994), pp. 81-83. Optical Society of America. Washington. 1994.
- [11] HERNANDEZ-FIGUEROA, H. E., *et alii*. *Vectorial Finite-Element Modeling of 2D Leaky Waveguides*. Trans. Magnetics, vol. 31, n° 3, pp. 1710-1713. 1995.

- [12] BERENGER, J. P.. *Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*. Journal of Computational Physics 127, pp. 363-379. Academic Press. 1996.
- [13] ALMEIDA, J. F., *et alii*. *Técnica Computacional para Implementação de Condições de Fronteira Absorvente UPML – Por FDTD: Abordagem Completa*. IEEE Latin America Transactions, Vol. 3, No. 5, December 2005.
- [14] YEE, K. S.. *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell Equations in Isotropic Media*. IEEE Trans. Antenna Propag. 14, 302. 1966.
- [15] CHEW, W. C., WEEDON, W. H.. *A 3D Perfectly Matched Medium From Modified Maxwell's Equations with Stretched Coordinates*. Microwave and Optical Technology Letters vol. 1 n° 13 pp. 599-604. 1994.
- [16] HAMMER, P. C., *et alii*. *Numerical Integration over Simplexes and Cones*. Math Tables and Other Aids to Computation, 10, pp. 130-139. 1956.
- [17] HAMMER, P. C., *et alii*. *Numerical Evaluation of Multiple Integrals*. Math Tables and Other Aids to Computation, 12, pp. 272-280. 1958.
- [18] FERNANDEZ, F. A., LU, Y.. *Microwave and Optical Waveguide Analysis by the Finite Element Method*. Wiley. 1996.
- [19] CHIANG, P., CHANG, H.. *A High-Accuracy Pseudospectral Full-Vectorial Leaky Optical Waveguide Mode Solver with Carefully Implemented UPML Absorbing Boundary Conditions*. Optics Express, vol. 19, n. 2, pp. 1594-1608. 2011.
- [20] CHIANG, P., *et alii*. *Full Vectorial Optical Waveguide Mode Solvers Using Multidomain Pseudospectral Frequency-Domain (PSFD) Formulations*. IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 44, n° 1. 2008.
- [21] HERNANDEZ-FIGUEROA, H., *et alii*. *Improved Vectorial Finite-Element BPM Analysis for Transverse Anisotropic Media*. Journal of Lightwave Technology, Vol. 21, n° 2. 2003.
- [22] FORTES, C. J.. *Modelação Matemática da Refracção e Difraccção de Ondas Marítimas, Análise pelo Método dos Elementos Finitos*. MSc Thesis. IST. 1993.
- [23] BATHE, K. J.. *The Subspace Iteration Method – Revisited*. Comp. Struc. 2012. Elsevier.
- [24] REZENDE, V.. *O Método de Galerkin*. Dissertação de Mestrado. UEM. Maringá. 2005.

O Teorema da Dualidade é fundamental na análise da propagação em meios confinados. Dado que, em guias de onda de condutor singelo (um só condutor) ou em superfícies dielétricas, os modos de propagação excitados são TE, TM ou Híbridos (HEM), a análise é muito simplificada pelo Teorema da Dualidade, pois o formalismo matemático do modo TM é obtido diretamente do modo TE, e o modo HEM é uma combinação linear dos dois. O quadro A.1 mostra a correlação entre os parâmetros dos modos TE e TM; “i” se refere à onda incidente na interface entre os meios, e “r” à refletida :

Quadro A.1 Correlação entre os modos TE e TM.

Modo $TE_z (H_z)$	Modo $TM_z (E_z)$
$H_z$	$-E_z$
$(E_x, E_y)$	$(H_x, H_y)$
$\mu$	$\varepsilon$
$\varepsilon$	$\mu$
$Z_1 = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$Y_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}$
$k_{x(i,r)}$	$k_{x(i,r)}$
$k_{y(i,r)}$	$k_{y(i,r)}$
$Z_{x(i,r)} = \frac{k_{x(i,r)}}{\omega \varepsilon_1}$	$Y_{x(i,r)} = \frac{k_{x(i,r)}}{\omega \mu_0}$
$Z_{y(i,r)} = \frac{k_{y(i,r)}}{\omega \varepsilon_1}$	$Y_{y(i,r)} = \frac{k_{y(i,r)}}{\omega \mu_0}$
$Z_{xi} = Z_{xr} = Z_{x1}$	$Y_{xi} = Y_{xr} = Y_{x1}$
$Z_{yi} = -Z_{y1}$	$Y_{yi} = -Y_{y1}$
$Z_{yr} = +Z_{y1}$	$Y_{yr} = +Y_{y1}$
$Z_{x1} = Z_1 \cos \varphi_1$	$Y_{x1} = Y_1 \cos \varphi_1$
$Z_{y1} = Z_1 \sin \varphi_1$	$Y_{y1} = Y_1 \sin \varphi_1$

**APÊNDICE B** – Análise das componentes elétricas e magnéticas dos modos  $TE_z$  e  $TM_z$  nas regiões dielétrica e absorvente (PML)

Nesta seção, os campos elétrico e magnético das regiões dielétrica e anisotrópica dissipativa são calculados sob a condição de casamento perfeito entre ambas. O estudo se baseia na incidência de ondas planas na interface entre estas regiões, conforme mostrado na figura B1. Os modos de propagação  $TE_z$  e  $TM_z$  são considerados.

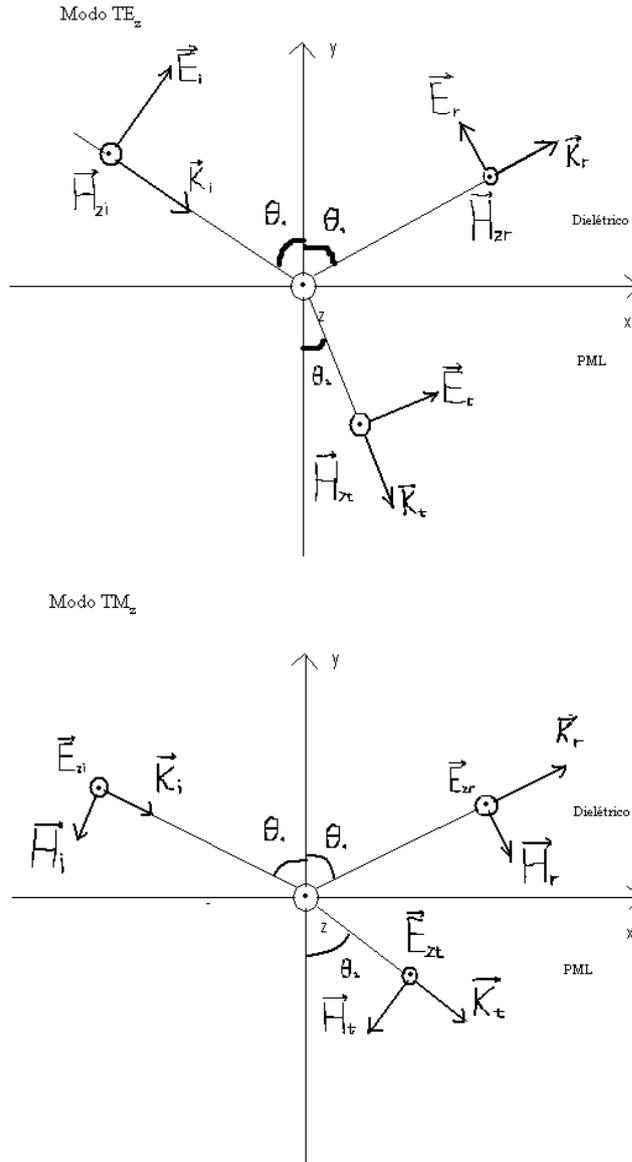


Figura B1: Campos elétricos e magnéticos nos modos  $TE_z$  (polarização paralela) e  $TM_z$  (polarização perpendicular), de onda plana incidindo em interface dielétrico-PML normal ao eixo  $y$ , com  $\theta_1 = \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \varphi_2$

Seja a dependência temporal convencionada por  $e^{+j\omega t}$ . Os modos de propagação  $TE_z$  ( $E_x, E_y, H_z$  - polarização paralela) e  $TM_z$  ( $H_x, H_y, E_z$  - polarização perpendicular) têm sua

formulação matemática em função dos campos longitudinais ( $E_z$ , no caso do modo  $TM_z$ ,  $H_z$  no modo TE). A abordagem, neste trabalho, será feita pelo modo  $TE_z$ ; em função da componente longitudinal ( $H_z$ ), obtêm-se os campos transversais. Pelo método da dualidade, tem-se a formulação do modo TM ( $H_z$ )

### B.1 Campos Longitudinais

#### Meio dielétrico:

No meio dielétrico ( meio 1), a onda incidente é descrita, no modo  $TE_z$ , por:

$$H_{zi} = H_0 e^{-j(k_{x1}x + k_{y1}y)}$$

Onde  $H_0$  é a amplitude máxima do campo magnético,  $k_{x1} = k_1 \cos \varphi_1$  e  $k_{y1} = k_1 \sin \varphi_1$  representam o número de onda projetado nas direções x e y. Já a onda refletida pode ser expressa por:

$$H_{zr} = \Gamma_h H_0 e^{-j(k_{x1}x + k_{y1}y)} \quad (B. 1. a)$$

#### Meio Absorvente:

No meio absorvente, o campo longitudinal é representado por

$$H_{z2} = T_h H_0 e^{-j(k_{x2}x + k_{y2}y)} \quad (B. 1. b)$$

onde  $T_h$  é o coeficiente de transmissão, que representa a parcela da onda incidente que não foi refletida pela interface ( $\Gamma_h + T_h = 1$ ):

$$T_h = \frac{H_{z2}}{H_{zi}}$$

Conforme o caso anterior,  $k_{x2} = k_2 \cos \varphi_2$ , e  $k_{y2} = k_2 \sin \varphi_2$ .

No modo  $TM_z$ , os campos na direção  $\vec{z}$ , serão, nos meios dielétrico e absorvente, deduzidos através do Teorema da Dualidade :

**No meio dielétrico:**

No meio dielétrico, o campo elétrico na direção  $\vec{z}$  da onda incidente é expresso por:

$$E_{zi} = E_0 e^{-j(k_{x1}x + k_{y1}y)} \quad (B.1.c)$$

em que  $E_0$  é a amplitude máxima do campo elétrico. Ao alcançar a interface, a onda plana terá uma parcela de sua potência (que será zero, no caso de casamento entre os dois meios) refletida. Esta onda refletida terá seu campo elétrico na direção  $\vec{z}$  relacionado ao da onda incidente através do coeficiente de reflexão  $\Gamma_e$ :

$$E_{zr} = \Gamma_e E_{zi} = \Gamma_e E_0 e^{-j(k_{x1}x + k_{y1}y)}$$

com  $\Gamma_e = \frac{E_{zr}}{E_{zi}}$ .

**No meio absorvente:**

No meio absorvente, a parcela da onda incidente que não sofreu reflexão a interface a onda transmitida se escreve:

$$E_{z2} = T_e E_0 e^{-j(k_{x2}x + k_{y2}y)}$$

em que o coeficiente de transmissão,  $T_e$ , é dado por

$$T_e = 1 - \Gamma_e = \frac{E_{z2}}{E_{zi}}$$

$E_0$  é a amplitude máxima do campo elétrico,

**B.2 Campos Transversais**

Os campos transversais ( $TE_z: (E_x, E_y)$ ;  $TM_z: (H_x, H_y)$ ) serão calculados, respectivamente, pelas equações de Ampère e Faraday, em função dos campos longitudinais. Primeiramente, a análise será feita no meio dielétrico, sendo a seguir analisados os campos no meio absorvente.

### Análise no Meio Dielétrico

- Modo  $TE_z$ : No modo  $TE_z$  (polarização paralela), a relação entre os campos transversais e os campos na direção  $\vec{z}$  é encontrada, no domínio temporal, através da equação de Ampère:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Obtém-se a equação de Ampère na forma fasorial substituindo-se  $\nabla = -jk$ ,

$$-j\vec{k}_i \times \vec{H}_{zi} = j\omega\varepsilon_1 \vec{E}$$

Pela figura B.1, pode-se definir a onda incidente. Seja o número de onda:

$$\vec{k}_i = k_{xi}\vec{x} + k_{yi}\vec{y} \quad (B.2)$$

em que

$$k_{xi} = k_1 \cos\varphi_1$$

e

$$k_{yi} = -k_1 \sin\varphi_1$$

Pela equação de Ampère:

$$-j\vec{k}_i \times \vec{H}_{zi} = j\omega\varepsilon_1 \vec{E}_i$$

multiplicando os dois lados por  $j$ :

$$-\vec{k}_i \times \vec{H}_{zi} = \omega\varepsilon_1 \vec{E}_i$$

desmembrando  $\vec{k}_i$  e  $\vec{H}_{zi}$  em suas componentes:

$$-[(k_{xi}\vec{x} + k_{yi}\vec{y}) \times \vec{z}]H_{zi} = \omega\varepsilon_1\vec{E}_i$$

Obtém se:

$$E_{xi} = -\frac{k_{yi}}{\omega\varepsilon_1}H_{zi}(x, y) \quad (B. 3. a)$$

$$E_{yi} = \frac{k_{xi}}{\omega\varepsilon_1}H_{zi}(x, y) \quad (B. 3. b)$$

Em que:

$$H_{zi}(x, y) = H_0e^{-j(k_{x1}\vec{x}+k_{y1}\vec{y})}$$

Com isto, a impedância de onda se define:

$$Z_{xi} = \frac{E_{yi}}{H_{zi}} = \frac{k_{xi}}{\omega\varepsilon_1} = \frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}\cos\varphi_1$$

$$Z_{yi} = -\frac{E_{xi}}{H_{zi}} = \frac{k_{yi}}{\omega\varepsilon_1} = -\frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}\sen\varphi_1$$

Seja a impedância  $Z_1 = \frac{k_1}{\omega\varepsilon_1}$ . Assim, as expressões de  $Z_{xi}$  e  $Z_{yi}$  se reescrevem:

$$Z_{xi} = Z_1\cos\varphi_1$$

$$Z_{yi} = -Z_1\sen\varphi_1$$

Analogamente, pela equação fasorial de Ampère, se define a formulação da onda refletida:

Seja o número de onda  $\vec{k}_r = k_{xr}\vec{x} + k_{yr}\vec{y}$ . Suas componentes, pela figura 1.b, se exprimem:

$$k_{xr} = k_1\cos\varphi_1 \quad (B. 4. a)$$

$$k_{yr} = k_1\sen\varphi_1. \quad (B. 4. b)$$

Da equação de Ampère,

$$-[(k_{xr}\vec{x} + k_{yr}\vec{y}) \times \vec{z}]H_{zr} = \omega\varepsilon_1\vec{E}_r$$

Se inferem:

$$E_{xr} = -\frac{k_{yr}}{\omega\epsilon_1} H_{zr}(x, y) \quad (B. 5. a)$$

$$E_{yr} = \frac{k_{xr}}{\omega\epsilon_1} H_{zr}(x, y) \quad (B. 5. b)$$

Em que:

$$H_{zr}(x, y) = \Gamma_h H_0 e^{-j(k_{x1}\vec{x} + k_{y1}\vec{y})}$$

Assim, as impedâncias da onda refletida nas direções  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  se definem:

$$Z_{xr} = \frac{E_{yr}}{H_{zr}} = \frac{k_{xr}}{\omega\epsilon_1} = \frac{k_1}{\omega\epsilon_1} \cos\varphi_1$$

$$Z_{yr} = -\frac{E_{xr}}{H_{zr}} = \frac{k_{yr}}{\omega\epsilon_1} = \frac{k_1}{\omega\epsilon_1} \sin\varphi_1$$

Em resumo, as impedâncias em  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  das ondas incidente e refletida se definem pelas impedâncias de onda no meio dielétrico. Assim, são escritas:

$$Z_{xi} = Z_1 \cos\varphi_1 = Z_{x1} \quad (B. 6. a)$$

$$Z_{yi} = -Z_1 \sin\varphi_1 = -Z_{y1} \quad (B. 6. b)$$

$$Z_{xr} = Z_1 \cos\varphi_1 = Z_{x1} \quad (B. 6. c)$$

$$Z_{yr} = Z_1 \sin\varphi_1 = Z_{y1} \quad (B. 6. d)$$

Pode-se, a partir de então, expressar a relação entre os campos elétrico e magnético totais. O campo elétrico no meio 1 é a soma dos campos elétricos das ondas incidente e refletida:

$$\vec{E}_1 = (E_{xi} + E_{xr})\vec{x} + (E_{yi} + E_{yr})\vec{y}$$

Substituindo-se as componentes elétricas em função dos campos magnéticos, obtém-se:

$$\vec{E}_1 = (-Z_{yi}H_{zi} - Z_{yr}H_{zr})\vec{x} + (Z_{xi}H_{zi} + Z_{xr}H_{zr})\vec{y}$$

Como  $Z_{x1} = Z_{xi} = Z_{xr}$  e  $Z_{y1} = -Z_{yi} = Z_{yr}$ , o campo  $\vec{E}_1$ , em função das impedâncias de onda do meio 1, é expresso:

$$\vec{E}_1 = (Z_{y1}H_{zi} - Z_{y1}H_{zr})\vec{x} + (Z_{x1}H_{zi} + Z_{x1}H_{zr})\vec{y}$$

ou seja,

$$\vec{E}_1 = Z_{y1}(H_{zi} - H_{zr})\vec{x} + Z_{x1}(H_{zi} + H_{zr})\vec{y} \quad (B.7)$$

A equação (B.7) estabelece as componentes do campo elétrico ( $\vec{E}_1$ ), no meio dielétrico, em função do campo longitudinal ( $H_z$ ). Sintetizando:

$$H_{z1} = H_0(e^{-jk_{y1}y} + \Gamma_h e^{-jk_{y1}y})e^{-jk_{x1}x} \quad (B.8.a)$$

$$E_{x1} = H_0 Z_{y1}(e^{-jk_{y1}y} - \Gamma_h e^{-jk_{y1}y})e^{-jk_{x1}x} \quad (B.8.b)$$

$$E_{y1} = H_0 Z_{x1}(e^{-jk_{y1}y} + \Gamma_h e^{-jk_{y1}y})e^{-jk_{x1}x} \quad (B.8.c)$$

- Modo  $TM_z (H_x, H_y, E_z)$  - Polarização perpendicular: A formulação do modo TM é diretamente deduzida das equações (B.8), do modo TE, através do Teorema da Dualidade, descrito no Apêndice A:

$$E_{z1} = E_0(e^{-jk_{y1}y} + \Gamma_e e^{-jk_{y1}y})e^{-jk_{x1}x} \quad (B.9.a)$$

$$-H_{x1} = H_0 Y_{y1}(e^{-jk_{y1}y} - \Gamma_h e^{-jk_{y1}y})e^{-jk_{x1}x} \quad (B.9.b)$$

$$-H_{y1} = H_0 Y_{x1}(e^{-jk_{y1}y} + \Gamma_h e^{-jk_{y1}y})e^{-jk_{x1}x} \quad (B.9.c)$$

em que

$$Y_{x1} = \frac{1}{Z_1} \cos \varphi_1$$

$$Y_{y1} = \frac{1}{Z_1} \sen \varphi_1$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

## Análise da Propagação na Região Absorvente Anisotrópica Uniaxial

O meio absorvente (Região 2) é considerado uma região anisotrópica uniaxial (ou cristal inercial), cujos tensores elétricos e magnéticos são referenciados pelo elipsóide de Fresnel. O referido elipsóide possui dois graus de liberdade, a saber: um na direção do eixo óptico, e o

outro no plano transversal a este, conforme evidenciado na figura (B.2). Neste trabalho, o eixo óptico será coincidente com o eixo cristalográfico do cristal, sendo os tensores, portanto, diagonalizados, vide figura B.2.

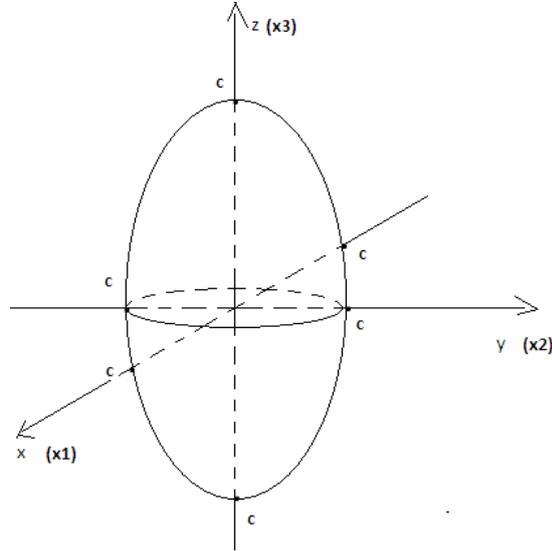


Figura B.2: Elipsóide de Fresnel e o eixo óptico  $z(x_3)$ .

Seja a incidência sobre interface normal ao eixo  $\vec{y}$  (Figura B.1). A partir da análise realizada no capítulo 2, com base na figura B.2, os tensores elétrico e magnético são definidos (no capítulo 2):

$$[A_e] = [A_h] = \text{diag} \left( c, \frac{1}{c}, c \right)$$

tais que

$$c = S_y = \left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_1} \right)$$

Os campos longitudinais ( $E_{z2}$  e  $H_{z2}$ ) são, respectivamente:

$$\text{Modo } TE_z(E_x, E_y, H_{z2}): \quad H_{z2} = T_h H_0 e^{-j(k_{x2}x - k_{y2}y)} \quad (B.9.a)$$

$$\text{Modo } TM_z(H_x, H_y, E_z): \quad E_{z2} = T_e E_0 e^{-j(k_{x2}x - k_{y2}y)} \quad (B.9.b)$$

em que

$$T_h = \frac{H_{z2}}{H_{zi}}; \quad T_e = \frac{E_{z2}}{E_{zi}}$$

Neste trabalho, é de interesse que se tenha o meio anisotrópico perfeitamente casado ao meio dielétrico. Portanto, para se obterem os campos, seja os do modo  $TM_z$ , seja os do modo  $TE_z$ , é imprescindível o emprego dos conceitos básicos da adaptação entre ambas as regiões. A equação de dispersão de ambos os modos, incidência à interface normal a  $\vec{y}$ , é dada pela equação (2.18) do capítulo 2:

$$k_2^2 = k_{x2}^2 + \left(\frac{k_{y2}}{S_y}\right)^2 \quad (B.10)$$

Para que a onda transmitida exista, a condição de Descartes-Snell deve ser satisfeita na interface ( $y=0$ ):

$$k_{x2} = k_{x1} \quad (B.11)$$

Para que haja total transmissão à região anisotrópica, é necessário que:

$$k_2 = k_1 \quad (B.12)$$

A fim de que a equação (B.12) seja satisfeita, pelas equações (B.10) e (B.11), é necessário também que:

$$\frac{k_{y2}}{S_y} = k_{y1}$$

ou seja,

$$k_{y2} = S_y k_{y1} \quad (B.13)$$

Assim, o vetor de onda no meio 2 será:

$$k_2 = k_{x1}\vec{x} + (S_y k_{y1})\vec{y}$$

Nesta situação, a transmissão é total, ou seja, não há reflexão ( $\Gamma = 0; T = 1$ ).

## B.2 Análise Matemática dos Modos

### a) Modo $TE_z$ (Polarização Paralela)

A análise da propagação no modo  $TE_z$  através do meio 2 é feita a partir da equação de Ampère:

$$\nabla \times \vec{H}_{z2} = j\omega\varepsilon_1\Lambda_y\vec{E}_2 \quad (B.14)$$

em que

$$\nabla = -j\vec{k}_2 = -j[k_{x1}\vec{x} + (S_y k_{y1})\vec{y}]$$

e

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j[k_{x1}\vec{x} + (S_y k_{y1})\vec{y}]} \quad (B.15)$$

Note-se que a equação (B.15) corresponde ao comportamento esperado dos campos na região dissipativa na direção  $\vec{y}$ . Ora, se

$$S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}\right)$$

$$k_{y1} = -k_1 \text{sen}\varphi_1$$

e

$$\frac{k_{y1}}{\omega\varepsilon_1} = -Z_1 \text{sen}\varphi_1 = -Z_{y1}$$

então,

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j\left[k_{x1}x + \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_1}\right)k_{y1}y\right]}$$

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j\left[k_{x1}x + \left(k_{y1} - j \frac{\sigma_y k_{y1}}{\omega\varepsilon_1}\right)y\right]}$$

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j\left[k_{x1}x + (k_{y1} - j\sigma_y(-Z_{y1}))y\right]}$$

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j[k_{x1}x + k_{y1}y]} e^{-j[-j(-Z_{y1})\sigma_y]y}$$

o que dá:

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j[k_{x1}x + k_{y1}y]} e^{(Z_{y1}\sigma_y)y}, \quad y \leq 0$$

Desenvolvendo-se a equação de Ampère, equação (B.14), se obtém:

$$-j[A_y]^{-1}[\vec{k}_2 \times \vec{H}_{z2}] = j\omega\varepsilon_2(E_{x2}\vec{x} + E_{y2}\vec{y})$$

em que

$$[A_y]^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{S_y}, S_y, \frac{1}{S_y}\right)$$

e

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$$

ou seja:

$$-j[A_y]^{-1}\{[k_{x1}\vec{x} + (S_y k_{y1})\vec{y}] \times \vec{z}\}H_{z2}(x, y) = j\omega\varepsilon_2(E_{x2}\vec{x} + E_{y2}\vec{y})$$

resolvendo-se o produto vetorial:

$$[A_y]^{-1}[k_{x1}\vec{y} - (S_y k_{y1})\vec{x}]H_{z2}(x, y) = \omega\varepsilon_2(E_{x2}\vec{x} + E_{y2}\vec{y})$$

Explicitando-se em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{S_y} & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(S_y k_{y1}) \\ k_{x1} \\ 0 \end{pmatrix} H_{z2}(x, y) = \omega\varepsilon_2 \begin{pmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

multiplicando as matrizes do lado esquerdo da igualdade:

$$\begin{pmatrix} -k_{y1} \\ S_y k_{x1} \\ 0 \end{pmatrix} H_{z2}(x, y) = \omega \varepsilon_2 \begin{pmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que fica, retornando-se à notação anterior:

$$[-k_{y1}\vec{x} + S_y k_{x1}\vec{y}] H_{z2}(x, y) = \omega \varepsilon_2 (E_{x2}\vec{x} + E_{y2}\vec{y})$$

Com isto, as componentes do campo elétrico são obtidas:

$$E_{x2} = \left( -\frac{k_{y1}}{\omega \varepsilon_2} \right) H_{z2}(x, y) \quad (B.16. a)$$

$$E_{y2} = S_y \frac{k_{x1}}{\omega \varepsilon_2} H_{z2}(x, y) \quad (B.16. b)$$

A partir da figura B.1, é possível inferir que  $k_{x1} = k_1 \cos \varphi_1$  e  $k_{y1} = -k_1 \sin \varphi_1$ . Com isto, as equações (B.16) se reescrevem:

$$E_{x2} = \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\omega \varepsilon_2} H_{z2}(x, y)$$

$$E_{y2} = S_y \frac{k_1 \cos \varphi_1}{\omega \varepsilon_2} H_{z2}(x, y)$$

Substituindo  $Z_{x1} = \frac{k_1 \cos \varphi_1}{\omega \varepsilon_2}$  e  $Z_{y1} = \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\omega \varepsilon_2}$ :

$$E_{x2} = Z_{y1} H_{z2}(x, y)$$

$$E_{y2} = (S_y Z_{x1}) H_{z2}(x, y)$$

Em resumo, o modo  $TE_z$  (polarização paralela) é caracterizado pelos campos:

$$H_{z2}(x, y) = T_h H_0 e^{-j[S_y k_{y1} y]} e^{-jk_{x1} x} \quad (B.16. a)$$

$$E_{x2} = Z_{y1} T_h H_0 e^{-j[S_y k_{y1} y]} e^{-jk_{x1} x} \quad (B.16. b)$$

$$E_{y2} = (S_y Z_{x1}) T_h H_0 e^{-j[S_y k_{y1} y]} e^{-jk_{x1} x} \quad (B.16.c)$$

Em que

$$\begin{aligned} k_{x1} &= k_1 \cos \varphi_1 \\ k_{y1} &= -k_1 \sin \varphi_1 \\ Z_{x1} &= \frac{k_1 \cos \varphi_1}{\omega \varepsilon_2} \\ Z_{y1} &= \frac{k_1 \sin \varphi_1}{\omega \varepsilon_2} \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \\ S_y &= \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1}\right) \end{aligned}$$

Com isto, observa-se que os campos no meio absorvente são perfeitamente adaptados àqueles do meio dielétrico (equações (B.8)), o que implica transmissão total, sem reflexão. Comprova-se, a partir das equações (B.16), que, na superfície ( $y=0$ ), os campos de ambas a regiões estão casados:

$$\begin{aligned} H_{z2}(x, y = 0) &= H_0 e^{-jk_{x1} x} \\ E_{x2}(x, y = 0) &= Z_{y1} H_0 e^{-jk_{x1} x} \\ E_{y2} &= (S_y Z_{x1}) H_0 e^{-jk_{x1} x} \end{aligned}$$

A componente  $E_{y2} = (S_y Z_{x1}) H_0 e^{-jk_{x1} x}$  está em função de  $S_y$ , o qual é:

$$S_y = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1}\right) = \sqrt{1 + \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1}} e^{-j \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1}\right)}$$

Ora, se  $\sigma_y(y = 0) = 0$ , então  $S_y = 1$ , o que implica:

$$E_{y2}(x, y = 0) = (S_y Z_{x1}) H_0 e^{-jk_{x1} x}$$

No capítulo 2 deste trabalho, é feito o estudo minucioso da penetração da onda plana no meio absorvente.

b) Modo  $TM_z$

Aplicando-se o teorema da dualidade, apresentado no Apêndice 1 deste trabalho às componentes dos campos do modo  $TE_z$ , obtêm-se as do modo  $TM_z$ :

$$E_{z2}(x, y) = T_e E_0 e^{-j[S_y k_{y1} y]} e^{-jk_{x1} x} \quad (B. 17. a)$$

$$H_{x2} = Y_{y1} T_e E_0 e^{-j[S_y k_{y1} y]} e^{-jk_{x1} x} \quad (B. 17. b)$$

$$H_{y2} = (S_y Y_{x1}) T_e H_0 e^{-j[S_y k_{y1} y]} e^{-jk_{x1} x} \quad (B. 17. c)$$

em que

$$k_{x1} = k_1 \text{sen} \varphi_1$$

$$k_{y1} = k_1 \text{cos} \varphi_1$$

$$Y_{x1} = Y_1 \text{sen} \varphi_1 = \frac{\text{sen} \varphi_1}{Z_1}$$

$$Y_{y1} = Y_1 \text{cos} \varphi_1 = \frac{\text{cos} \varphi_1}{Z_1}$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

$$S_y = \left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_1} \right)$$

Na fronteira,  $y = 0$ , logo  $\sigma_y(y = 0) = 0$  e  $S_y = 1$ . Pelo desenvolvimento anterior, nota-se que a transmissão é total, sem reflexão, o que mostra o casamento dos campos entre as duas regiões.

## **APÊNDICE C– O Método dos Elementos Finitos**

A análise de estruturas condutoras de energia eletromagnética é realizada a partir da resolução das equações de Maxwell, calculada em função da geometria do problema. Nem

sempre a estrutura estudada se adéqua a algum dos onze sistemas de coordenadas ortogonais pela mão direita existentes, o que impede a obtenção de uma solução analítica [19,20]. Diversos métodos de cálculo numéricos têm sido empregados como ferramentas para o estudo da propagação em tais estruturas, destacando-se o Método dos Elementos Finitos, por sua facilidade de aplicação e por sua adaptabilidade a diferentes fronteiras [11,21].

A aplicação do Método dos Elementos Finitos à solução de problemas de contorno envolve a subdivisão do domínio objeto da análise em subdomínios menores, geralmente triangulares ou quadrangulares (os ditos elementos finitos). Envolve também a aproximação da função contínua que se deseja calcular por meio de funções de Lagrange associadas aos nós de interpolação (vértices) dos elementos. Estes dois pontos são fontes potenciais de erro. Porém, o processo de obtenção da malha de elementos finitos deve ser automatizado, o que permite a obtenção de uma malha densa o suficiente para que o resultado obtido pelo método dos elementos finitos convirja à solução desejada.

Porém, antes desses dois passos, é necessário transferir o sistema de equações diferenciais a um sistema integral. Caso o fenômeno estudado seja regido por um princípio variacional (isto é, se os graus das derivadas forem pares), é possível a transferência para sistema integral pelo emprego do método variacional. Caso não o seja, há que se empregar o método dos pesos residuais (Método de Galerkin) [24] para este fim.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) resume a solução de problemas de valores de contorno à resolução de problemas matriciais. A aplicação do MEF está condicionada à discretização do domínio a ser analisado em uma malha de elementos, obtida automaticamente (vide Figura C.1), e à aproximação da função procurada a um somatório de funções de interpolação polinomiais (Funções de Lagrange), as quais serão nulas em qualquer ponto, exceto aquele a que se referem (vide Figura C.2).

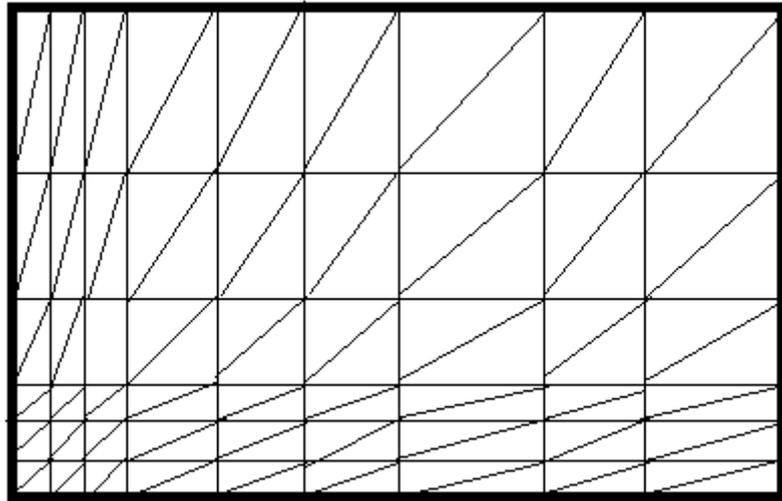


Figura C.1: Malha de 108 elementos finitos.

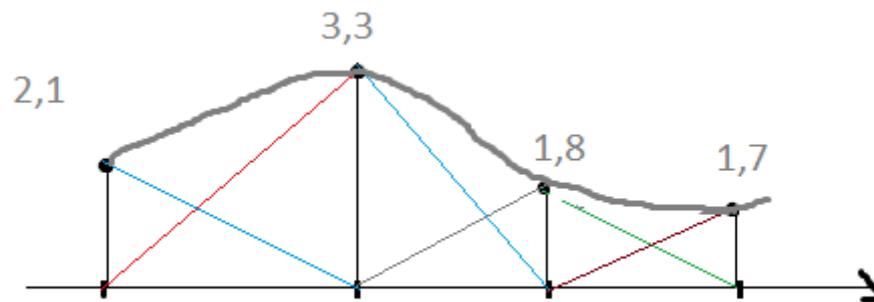


Figura C.2: Formação da unção interpolada em um espaço unidimensional pelo método dos elementos finitos.

### C.1 Cálculo das Funções de Interpolação – Elementos Triangulares

O cálculo das funções de interpolação pode ser efetuado pelas técnicas da matriz nodal e da homotetia, indicados respectivamente para as funções de interpolação lineares<sup>1</sup> e para aquelas de grau 2 ou superior.

<sup>1</sup> É possível aplicar o MEF com funções de grau superior pela técnica da matriz nodal, porém é muito mais simples o emprego a técnica da homotetia nestes casos.

### C.1.1 Técnica da matriz nodal:

Nesta técnica, as funções de Lagrange se escolhem a partir das funções linearmente independentes que formam o triângulo de Pascal, isto é:

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & x & y \\
 & x^2 & xy & y^2 \\
 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

A seleção de funções para montar o polinômio de interpolação exige que se satisfaçam duas condições, a saber: a) Que a função e suas derivadas primeiras convirjam a um valor constante se a área do elemento tender a zero (o que exige a presença de 1, x e y no polinômio de interpolação), e b) Que a escolha de funções seja simétrica (por exemplo, se  $x^2y$  for escolhida,  $xy^2$  também deverá ser).

O número de nós de interpolação será dado pela função:

$$d = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Em que  $n$  é o grau das funções de interpolação utilizadas.

Seja o elemento triangular da Figura C.3

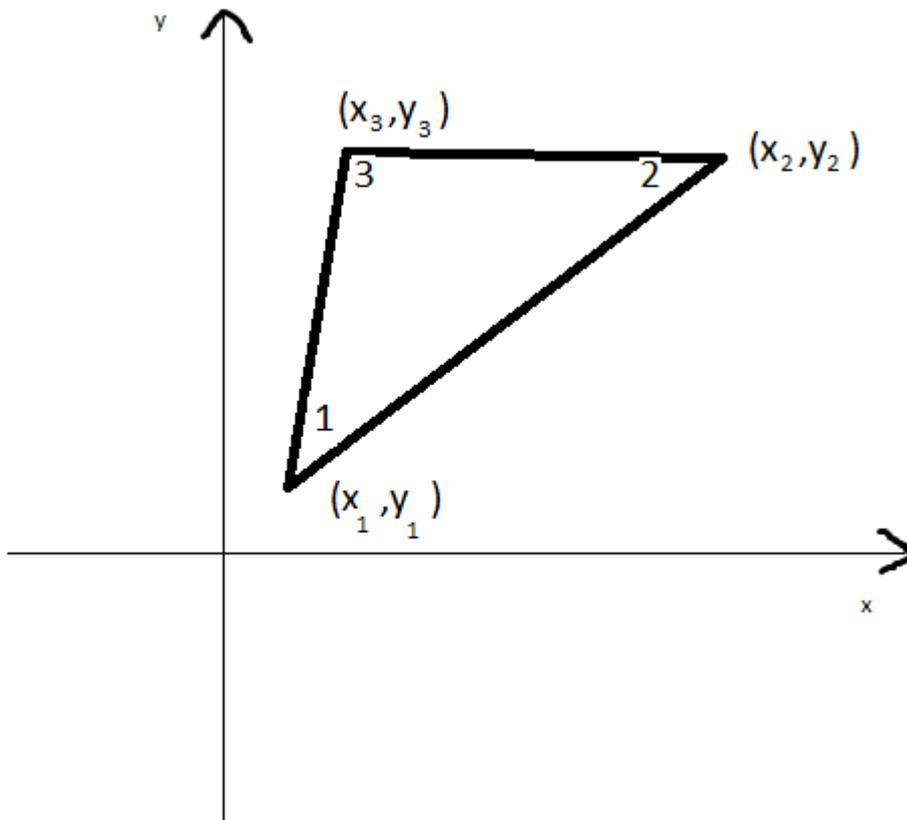


Figura C.3:Elemento triangular.

No caso de interpolação linear, ter-se-á como polinômio de interpolação:

$$P(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (C. 1)$$

Ou em linguagem matricial:

$$P(x, y) = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Em que  $a_j, j = 1, 2, 3$  são os parâmetros gerais da interpolação. De posse das coordenadas dos vértices do elemento, estes parâmetros são utilizados, juntamente com os parâmetros nodais ( $q_j$ ), para calcular as funções de Lagrange em cada vértice do elemento:

$$\begin{array}{l} \text{vértice - 1} \\ \text{vértice - 2} \\ \text{vértice - 3} \end{array} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Onde  $P_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$  é a matriz nodal.

Estas funções de Lagrange ( $L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)$ ) relacionarão a função de interpolação aos parâmetros nodais:

$$P(x, y) = q_1 L_1(x, y) + q_2 L_2(x, y) + q_3 L_3(x, y) \quad (C.2)$$

Os parâmetros nodais  $q_j, j = 1, 2, 3$  equivalem ao valor da função de interpolação nos vértices do elemento. Os parâmetros gerais  $a_j, j = 1, 2, 3$  não possuem significado físico, e são obtidos através da inversão da matriz nodal:

$$[a] = [P_n]^{-1}[q] \quad (C.3)$$

Substituindo na equação C.1:

$$P(x, y) = [1 \quad x \quad y] \left( \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right)$$

Fazendo uso da propriedade associativa de matrizes:

$$P(x, y) = \left( [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Pela equação C.2:

$$[L_1 \quad L_2 \quad L_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \left( [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{[q]}$  e calculando a matriz inversa de  $[P_n]$ , obtém-se uma expressão para as funções de Lagrange  $L_j, j = 1, 2, 3$ .

$$[L_1 \quad L_2 \quad L_3] = \left( [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \right)$$

$$[L_1 \quad L_2 \quad L_3] = [1 \quad x \quad y] \left( \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{bmatrix}^t \right) \quad (C.4)$$

Onde  $S = 1/2[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$  é a área do elemento triangular. Obtêm-se as funções de Lagrange a partir da equação (C.4):

$$L_1 = \frac{1}{2S} [(x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3)]$$

$$L_2 = \frac{1}{2S} [(x_3y_1 - x_1y_3) + x(y_3 - y_1) - y(x_3 - x_1)] \quad (C.5)$$

$$L_3 = \frac{1}{2S} [(x_1y_2 - x_2y_1) + x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2)]$$

ou, generalizando,

$$L_i = \frac{1}{2S} [a_i + xb_i + yc_i]$$

Com

$$a_i = (x_jy_k - x_ky_j)$$

$$b_i = (y_j - y_k)$$

$$c_i = -(x_j - x_k)$$

E sendo  $i, j$  e  $k$  cíclicos, assumindo valores entre 1 e 3 (se  $i = 1$  então  $j = 2$  e  $k = 3$ , e assim por diante).

- No Elemento de Referência:

Seja o elemento de referência um elemento genérico, de catetos de dimensões unitárias, ao qual qualquer elemento da malha possa ser referenciado, conforme figura C.4.

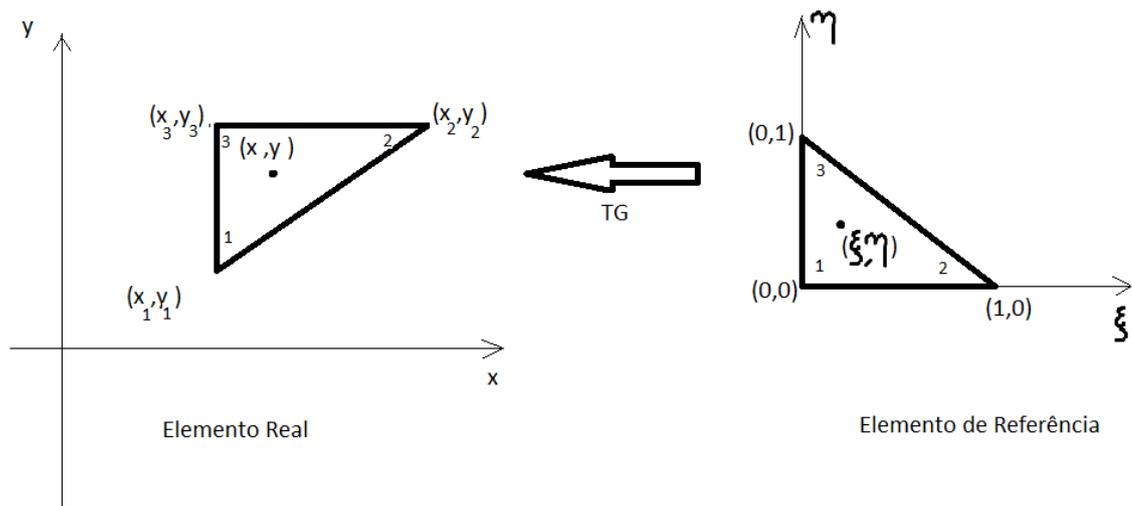


Figura C.4: Elemento real versus elemento de referência.

O artifício matemático que o relaciona aos elementos reais é denominado “Transformada Geométrica”

$$x(\xi, \eta) = x_1 L_1(\xi, \eta) + x_2 L_2(\xi, \eta) + x_3 L_3(\xi, \eta)$$

$$y(\xi, \eta) = y_1 L_1(\xi, \eta) + y_2 L_2(\xi, \eta) + y_3 L_3(\xi, \eta)$$

Funções de forma no elemento de referência:

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$L_2 = \xi$$

$$L_3 = \eta$$

Como é possível observar, se a análise do problema se der no elemento de referência, não há a necessidade de se calcularem as funções de forma para todos os elementos reais, bastando que sejam desenvolvidas uma única vez.

Nesta abordagem, o polinômio de base será:

$$P(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta = [1 \quad \xi \quad \eta] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros nodais e de interpolação se relacionam por:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz nodal  $[P_n]$  será:

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E sua inversa  $[P_n]^{-1}$ :

$$[P_n]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O cômputo das funções de área é então tremendamente simplificado:

$$[L_1 \quad L_2 \quad L_3] = [1 \quad \xi \quad \eta] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

### C.1.2 Cálculo das Funções de Lagrange pelo Sistema de Coordenadas Baricêntricas

É possível determinar a posição de qualquer ponto interno a um triângulo em função da área dos triângulos formados pelo ponto em questão e dois dos vértices do triângulo em que estes se encontram, conforme figura C.5:

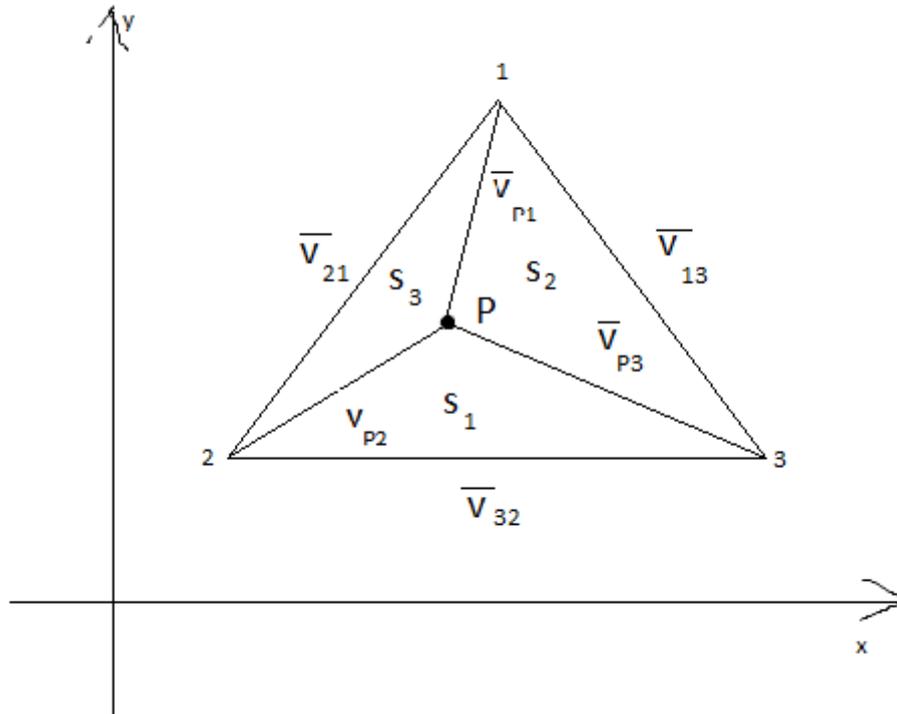


Figura C.5: Sistema de coordenadas baricêntricas.

onde  $\vec{v}_{ij} = (x_i - x_j)\vec{x} + (y_i - y_j)\vec{y}$ . A área de cada triângulo relativo ao ponto  $P(x,y)$  será dada pelo produto vetorial:

$$\begin{aligned} S_1(x, y) &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{32} \times \vec{v}_{P2}) \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(x, y) &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{13} \times \vec{v}_{P3}) \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ &= \frac{1}{2} (a_2 + b_2 x + c_2 y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(x, y) &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{P1}) \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \\ &= \frac{1}{2} (a_3 + b_3 x + c_3 y) \end{aligned}$$

Definamos cada coordenada baricêntrica de um ponto interno ao triângulo como:

$$L_j(x, y) = \frac{S_j(x, y)}{S}$$

Esta definição de coordenadas atende aos requisitos das Funções de Lagrange (uma função de forma é unitária no vértice relativo a esta e nula nos demais). Com isto, é possível determinar as funções de base em quaisquer pontos internos ao elemento:

Logo:

$$L_1(x, y) = \frac{S_1(x, y)}{S} = \frac{1}{2S} (a_1 + b_1x + c_1y)$$

$$L_2(x, y) = \frac{S_2(x, y)}{S} = \frac{1}{2S} (a_2 + b_2x + c_2y)$$

$$L_3(x, y) = \frac{S_3(x, y)}{S} = \frac{1}{2S} (a_3 + b_3x + c_3y)$$

- Técnica da Homotetia (Exemplificada em elementos unidimensionais)

Ao se aplicar o MEF com interpolação não linear (interpolação de grau  $n \geq 2$ ), o cômputo das funções polinomiais relativas a cada nó é tremendamente simplificado ao expressá-las a partir das funções lineares. Esta é a técnica da homotetia.

A técnica da homotetia usa como ponto de partida a nulidade de cada função de base nos nós não relacionados a esta, e generaliza este conceito, vide figura C.6. As funções de interpolação de grau superior são calculadas por meio da atribuição de pesos aos nós dos elementos, e do estabelecimento de nós intermediários entre estes. Deste modo, aos nós que representam os vértices dos elementos se atribuirá peso equivalente ao grau máximo das funções de base utilizadas ( $n$ ), e serão inseridos, entre cada dois vértices,  $n - 1$  nós intermediários. A estes nós intermediários se atribuirá peso condizente com a sua proximidade de cada vértice.

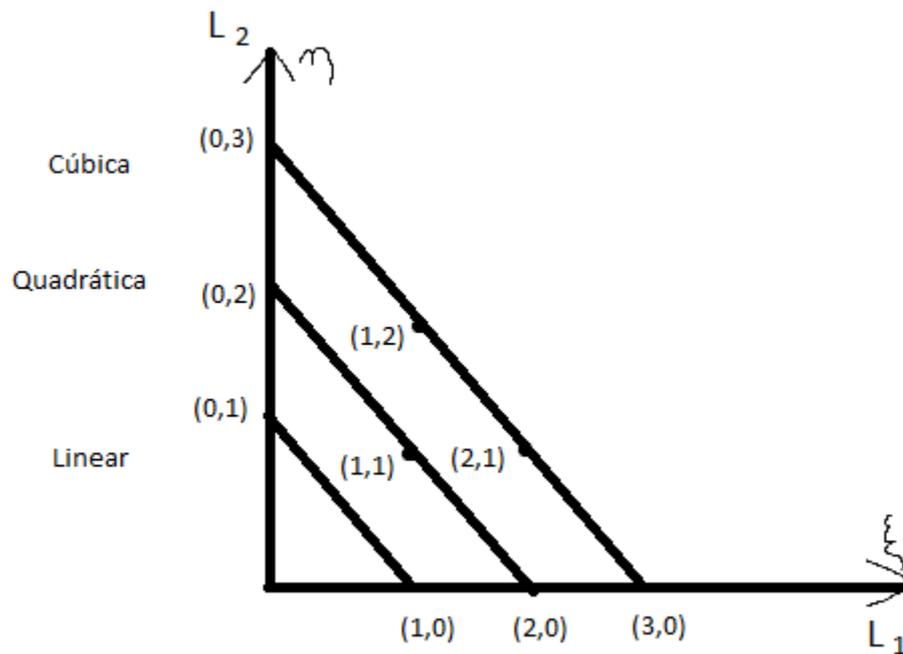


Figura C.5: Nós intermediários e pesos atribuídos a estes, em interpolações cúbica e quadrática.

Os pares ordenados pertinentes ao sistema de pesos ((1,0), (0,1), (2,1), etc.) servirão para relacionar as funções de base não lineares àsquelas lineares. Define-se a função de interpolação não linear ( $n \geq 2$ ) por:

$$N_j = (nL_1)^p (nL_2)^q$$

Em que

$$p = x^{(j)}(L_1)$$

$$q = x^{(j)}(L_2)$$

$$(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j - m)!}$$

E, na interpolação Linear:

$$x^{(1)} = (1,0)$$

$$x^{(2)} = (0,1)$$

. Quadrática:

$$x^{(1)} = (2,0)$$

$$x^{(2)} = (0,2)$$

$$x^{(3)} = (1,1)$$

. Cúbica:

$$x^{(1)} = (3,0)$$

$$x^{(2)} = (0,3)$$

$$x^{(3)} = (2,1)$$

$$x^{(4)} = (1,2)$$

Por exemplo, tomemos um elemento linear (unidimensional) com interpolação quadrática ( $n = 3$ ). Haverá somente um nó intermediário neste caso. No nó 1, a função de interpolação se dará por:

$$N_1 = (3L_1)^2(3L_2)^0$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j-m)!}$ :

$$N_1 = \frac{1}{2!} \frac{(2L_1)!}{(2L_1-2)!} \frac{1}{0!} \frac{(2L_2)!}{(2L_2-0)!}$$

$$N_1 = \frac{1}{2!} \frac{(2L_1)(2L_1-1)(2L_1-2)!}{(2L_1-2)!}$$

$$N_1 = \frac{1}{2} (2L_1)(2L_1-1)$$

Mas, conforme o capítulo 3, no elemento de referência, as funções de base lineares  $L_j$  para elementos unidimensionais são:

$$L_1(\xi) = (1 - \xi)$$

$$L_2(\xi) = \xi$$

Portanto,

$$N_1 = \frac{1}{2}(2 - 2\xi)(1 - 2\xi)$$

Semelhantemente, no nó 2, a função de interpolação se dará por:

$$N_2 = (2L_1)^0(2L_2)^2$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j - m)!}$ :

$$N_2 = \frac{1}{0!} \frac{(2L_1)!}{(2L_1 - 0)!} \frac{1}{2!} \frac{(2L_2)!}{(2L_2 - 2)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{2!} \frac{(2L_2)(2L_2 - 1)(2L_2 - 2)!}{(2L_2 - 2)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(2L_2)(2L_2 - 1)$$

Substituindo  $L_1(\xi) = (1 - \xi)$  e  $L_2(\xi) = \xi$

$$N_2 = \frac{1}{2}(2\xi)(2\xi - 1)$$

No nó intermediário 3

Nó 3:

$$N_2 = (2L_1)^2(2L_2)^1$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j-m)!}$ :

$$N_2 = \frac{1}{1!} \frac{(2L_1)!}{(2L_1-1)!} \frac{1}{1!} \frac{(2L_2)!}{(2L_2-1)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{1!} \frac{(2L_1)(2L_1-1)!}{(2L_1-1)!} \frac{1}{1!} \frac{(2L_2)(2L_2-1)!}{(2L_2-1)!}$$

$$N_2 = 4L_1L_2$$

Substituindo  $L_1(\xi) = (1 - \xi)$  e  $L_2(\xi) = \xi$ :

$$N_2 = 4\xi(1 - \xi)$$

Agora, tomemos um elemento linear com interpolação cúbica ( $n = 3$ ). O número de nós intermediários é 2. No nó 1, a função de interpolação será:

$$N_1 = (3L_1)^3(3L_2)^0$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j-m)!}$ :

$$N_1 = \frac{1}{3!} \frac{(3L_1)!}{(3L_1 - 3)!} \frac{1}{0!} \frac{(3L_2)!}{(3L_2 - 0)!}$$

$$N_1 = \frac{1}{3!} \frac{(3L_1)(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)(3L_1 - 3)!}{(3L_1 - 3)!}$$

$$N_1 = \frac{1}{6} (3L_1)(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)$$

Mas, conforme o capítulo 3, no elemento de referência, as funções de base lineares  $L_j$  para elementos unidimensionais são:

$$L_1(\xi) = (1 - \xi)$$

$$L_2(\xi) = \xi$$

Portanto,

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - 3\xi)(2 - 3\xi)$$

Semelhantemente, no nó 2, a função de interpolação se dará por:

$$N_2 = (3L_1)^0 (3L_2)^3$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j - m)!}$ :

$$N_2 = \frac{1}{0!} \frac{(3L_1)!}{(3L_1 - 0)!} \frac{1}{3!} \frac{(3L_2)!}{(3L_2 - 3)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{3!} \frac{(3L_2)(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)(3L_2 - 3)!}{(3L_2 - 3)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{6} (3L_2)(3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

Substituindo  $L_1(\xi) = (1 - \xi)$  e  $L_2(\xi) = \xi$

Portanto,

$$N_2 = \frac{1}{2} \xi (3\xi - 1)(3\xi - 2)$$

Nos nós intermediários 3 e 4:

Nó 3:

$$N_2 = (3L_1)^2 (3L_2)^1$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j - m)!}$ :

$$N_2 = \frac{1}{2!} \frac{(3L_1)!}{(3L_1 - 2)!} \frac{1}{1!} \frac{(3L_2)!}{(3L_2 - 1)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \frac{(3L_1)(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)!}{(3L_1 - 2)!} \frac{(3L_2)(3L_2 - 1)!}{(3L_2 - 1)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (3L_1)(3L_1 - 1)(3L_2)$$

Substituindo  $L_1(\xi) = (1 - \xi)$  e  $L_2(\xi) = \xi$ :

$$N_2 = \frac{1}{2} (3 - 3\xi)(2 - 3\xi)3\xi$$

Nó 4:

$$N_2 = (3L_1)^1(3L_2)^2$$

Substituindo  $(nL_j)^m = \frac{1}{m!} \frac{(nL_j)!}{(nL_j-m)!}$ :

$$N_2 = \frac{1}{1!} \frac{(3L_1)!}{(3L_1-1)!} \frac{1}{2!} \frac{(3L_2)!}{(3L_2-2)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \frac{(3L_1)(3L_1-1)!}{(3L_1-1)!} \frac{(3L_2)(3L_2-1)(3L_2-2)!}{(3L_2-2)!}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (3L_1)(3L_2-1)(3L_2)$$

Substituindo  $L_1(\xi) = (1-\xi)$  e  $L_2(\xi) = \xi$ :

$$N_2 = \frac{1}{2} (3-3\xi)(3\xi-1) 3\xi$$

## APÊNDICE D - Condições de Meios Perfeitamente Casados (PML)

Neste Apêndice, será analisado o comportamento dos campos nas fronteiras entre dois meios PML, entre PML e dielétrico, com o objetivo de se estabelecer as condições de reflexão nula, qualquer que seja a incidência, independente do ângulo de incidência e da frequência de operação [12]. A análise será feita pelo modo  $TE_z$ , em regiões PML.

Considere o sistema de coordenadas cartesiano, e a onda plana que se propaga no plano  $(x,y)$ , vide figura 1. O campo eletromagnético, do modo  $TE_z$  possui três componentes:  $E_x, E_y$  e  $H_z$ .

De acordo com Berenger [12], são consideradas duas correntes de condução: uma referente à condutividade elétrica ( $\sigma$ ) e a outra, à magnética ( $\sigma^*$ )

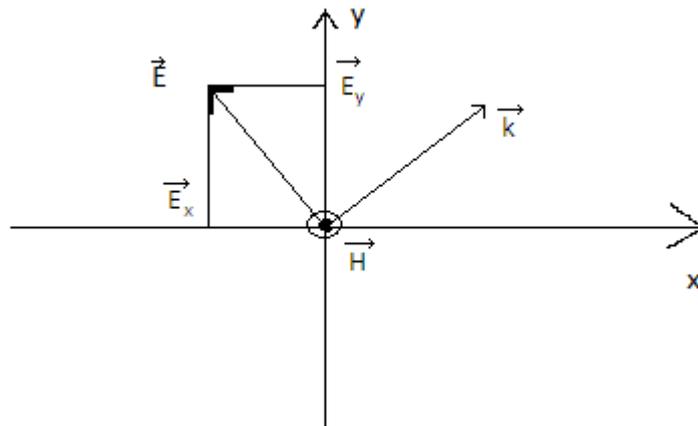


Fig. D.1: Componentes do campo elétrico, modo  $TE_z$ , da onda plana com campo magnético ( $H_z$ ), propagando-se no plano  $(x,y)$ .

As equações rotacionais de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e$$

$$-\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m$$

As equações de Maxwell são reduzidas em componentes transversais e longitudinais.

Parte-se da onda plana generalizada, os campos são constituídos pelas três componentes  $(H_x, H_y, H_z)$  e  $(E_x, E_y, E_z)$ .

Substitui-se o campo magnético  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ , na equação de Ampère:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \hat{y} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}$$

Separam as respectivas componentes; transversais; longitudinais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo raciocínio na equação de Faraday,  $-\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{J}_m$ :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} = - \left( \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma^* \vec{H} \right)$$

A equação é desmembrada, também, em 3 equações:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_z}{\partial y} &= \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma^* H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z \end{aligned}$$

Para o modo  $TE_z$ , polarização paralela, as componentes não nulas são  $(E_x, E_y$  e  $H_z)$ . Portanto, a análise é formulada pelas três equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z\end{aligned}\quad (D.1)$$

Pela técnica de Berenger [2], o estudo é facilitado ao se decompor a componente  $H_z$  em dois termos,  $H_z \vec{z} = (H_{zx} + H_{zy}) \vec{z}$ .

Pelo sistema (D.1), têm-se:

$$\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x \quad (D.2.1)$$

$$-\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y \quad (D.2.2)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} \quad (D.2.3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} \quad (D.2.4)$$

Em que  $(H_{zx}, H_{zy})$  são as componentes do campo magnético  $(H_z)$  relacionadas, respectivamente, às componentes  $(E_x, E_y)$ .

Os termos:  $(\sigma_x, \sigma_x^*)$  e  $(\sigma_y, \sigma_y^*)$  são as condutividades elétricas e magnéticas nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ .

- Observação:

As condutividades elétrica e magnética,  $\sigma$  e  $\sigma^*$  dos meios PML caracterizam a propagação das ondas planas nos diferentes meios. Veja o sistema de equações (D.2).

Sejam as regiões seguintes:

Item- a)  $(\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma^*)$ ,  $(\sigma_x, \sigma_y)$

Com essa condição em que as condutividades magnéticas em  $(\hat{x}$  e  $\hat{y})$  são iguais, as equações (D.2.2) e (D.2.3) se simplificam, o meio passa a ser regido por três equações em  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma^*)$ , envolvendo, somente, as componentes  $(E_x, E_y, H_z)$ , seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z\end{aligned}$$

Este sistema é o que governa os meios absorventes generalizados. Qualquer outro meio recai nos casos dos Itens -b) a -d), e é um caso particular do meio absorvente referido no Item-a).

Item- b)  $(\sigma_x = \sigma_y = 0)$ ,  $(\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0)$

Essa condição correspondente aos meios dielétricos, as equações (D.2.3) e (D.2.4) são expressas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial (H_{zx} + H_{zx})}{\partial t}\end{aligned}$$

Item- c)  $(\sigma_x = \sigma_y = \sigma)$ ,  $(\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0)$

Esta é a condição referente aos meios condutores imperfeitos. O conjunto de equações (D.2) se resume em:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial (H_{zx} + H_{zx})}{\partial t}\end{aligned}$$

Item-d) ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ) e ( $\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma^*$ )

Essa é a condição de interesse deste trabalho, refere-se às equações dos meios absorventes (isotrópico).

O sistema de equações e as condições de casamento de impedância nas fronteiras, (equação (1.18)), são a base da técnica PML, apresentada por Berenger [2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial (H_{zx} + H_{zx})}{\partial y} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \\ -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zx})}{\partial x} &= \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \mu_0 \frac{\partial (H_{zx} + H_{zx})}{\partial t} + \sigma^* (H_{zx} + H_{zx})\end{aligned}$$

Ao satisfazer, na fronteira, a condição de casamento de impedância, a reflexão da onda é nula. Como será confirmado; independente do ângulo de incidência e da frequência de operação. Que justifica o nome PML (*Perfectly Matched Layer*) aos meios até então conhecidos por Absorventes.

- Lei de Descartes-Snell pelo método de Berenger[2]:

Neste item, será feita a análise rigorosa da incidência oblíqua de ondas planas em fronteiras entre diferentes regiões.

Serão calculados os parâmetros fundamentais da propagação da onda plana em qualquer meio; dielétrico e PML, a lei de Descartes-Snell estabelecida, as condições de casamento da incidência determinadas e comprova-se que a nulidade do coeficiente de reflexão independe do ângulo de incidência e da frequência de operação.

- Interface entre PML e Dielétrico:

Uma onda, de magnitude  $E_0$ , se propaga no meio PML. Incide obliquamente na fronteira com ângulo  $\phi$  ao eixo vertical ( $\hat{x}$ ), veja Figura 1.

Sejam  $H_{zx0}$  e  $H_{zy0}$  as respectivas magnitudes das componentes do campo magnético  $H_z \vec{z} = (H_{zx} + H_{zy}) \vec{z}$ , relativas à  $(E_x \rightarrow H_{zy})$  e  $(E_y \rightarrow H_{zx})$ .

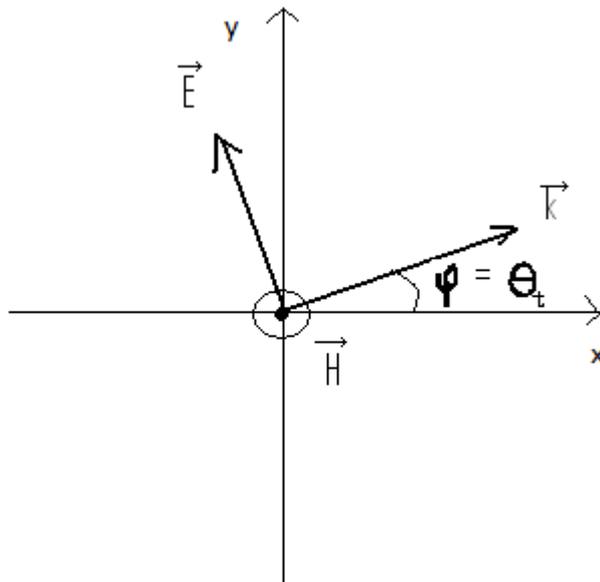


Figura D.4: Onda oblíqua na fronteira.

A componente do campo magnético, em  $z=0$ , referente à onda plana  $TE_z$ , que se propaga no meio PML é:

$$\vec{H} = H_{z0} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Em que:  $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$  e  $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$

Então:

$$\vec{H} = H_{z0} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \hat{z}$$

$$\vec{H} = (H_{zx0} + H_{zy0}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \hat{z}$$

Pela técnica de Berenger [2], o campo magnético  $H_z$  é decomposto em duas componentes

$$H_{zx} = H_{zx0} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

e

$$H_{zy} = H_{zy0} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

O campo elétrico é definido:

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

As duas componentes elétricas, vide figura D.4, são:

$$\vec{E} = (-E_0 \sin \phi \hat{x} + E_0 \cos \phi \hat{y}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

Seja:

$$E_x = (-E_0 \sin \phi) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

$$E_y = (E_0 \cos \phi) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

$$E_z = 0$$

Sejam as componentes dos campos no meio PML:

$$E_x = (-E_0 \sin \phi) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (D.3.1)$$

$$E_y = (E_0 \cos \phi) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (D.3.2)$$

$$H_{zx} = H_{zx0} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (D.3.3)$$

$$H_{zy} = H_{zy0} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (D.3.4)$$

Em que  $\omega$  é a pulsação de onda,  $t$  é o tempo.

O número de onda em  $(\hat{x})$   $\alpha = \frac{k_x}{\omega}$  e em  $(\hat{y})$  é  $\beta = \frac{k_y}{\omega}$ .

As equações (D.3) são expressas pelos respectivos números de onda:

$$E_x = (-E_0 \text{sen} \phi) e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

$$E_y = (E_0 \text{cos} \phi) e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

$$H_{zx} = H_{zx0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

$$H_{zy} = H_{zy0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são complexos.

Levando em conta que  $E_0$  é um dado conhecido da análise, as incógnitas do sistema (D.3) são quatro, a saber:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $H_{zx0}$  e  $H_{zy0}$ .

As quatro incógnitas são relacionadas pelos sistemas de equações (D.2) e (D.3).

$\phi$  é o ângulo referenciado ao eixo  $\vec{x}$ :

Por (D.2)

$$\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x$$

Em notação fasorial:

$$-j\omega\beta(H_{zx0} + H_{zy0})e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} = (j\omega\varepsilon_0\eta^2 + \sigma_y) \left( (-E_0 \text{sen} \phi) e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \right)$$

Dividindo-se ambos os lados por  $j\omega e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$ :

$$\beta(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( \frac{j\omega\varepsilon_0\eta^2}{-j\omega} + \frac{\sigma_y}{-j\omega} \right) (-E_0 \text{sen} \phi)$$

Com um simples algebrismo

$$\beta(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( -\varepsilon_0\eta^2 + j\frac{\sigma_y}{\omega} \right) (-E_0 \text{sen} \phi)$$

Seja:

$$\beta(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( \varepsilon_0 \eta^2 - j \frac{\sigma_y}{\omega} \right) (E_0 \sin \phi)$$

Por (D.2.2):

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y$$

No domínio fasorial:

$$-(-j\omega\alpha)(H_{zx0} + H_{zy0})e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} = (j\omega\varepsilon_0\eta^2 + \sigma_x)(E_0 \cos \phi)e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

Dividindo ambos os lados por  $j\omega e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$  :

$$\alpha(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( \frac{j\omega\varepsilon_0\eta^2}{j\omega} + \frac{\sigma_x}{j\omega} \right) (E_0 \cos \phi)$$

Portanto:

$$\alpha(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( \varepsilon_0 \eta^2 - j \frac{\sigma_x}{\omega} \right) (E_0 \cos \phi)$$

Uma segunda equação é encontrada, partindo-se (D.2.3):

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx}$$

Com o mesmo raciocínio anterior, tem-se a expressão fasorial;

$$-(-j\omega\alpha)(E_0 \cos \phi)e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} = (j\omega\mu_0 + \sigma_x^*) H_{zx0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

Simplificando-a:

$$j\omega\alpha E_0 \cos \phi = (j\omega\mu_0 + \sigma_x^*) H_{zx0}$$

$$\alpha E_0 \cos \phi = \left( \mu_0 + \frac{\sigma_x^*}{j\omega} \right) H_{zx0}$$

Deduz-se a expressão referente à  $\alpha$ ;

$$\alpha E_0 \cos \phi = \left( \mu_0 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega} \right) H_{zx0}$$

Por (D.2.4), obtém-se a expressão referente à  $\beta$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy}$$

Sob forma fasorial:

$$-j\omega\beta(-E_0 \text{sen}\phi)e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} = (j\omega\mu_0 + \sigma_y^*)H_{zy0}e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

Com as devidas simplificações;

$$j\omega\beta E_0 \text{sen}\phi = (j\omega\mu_0 + \sigma_y^*)H_{zy0}$$

Ou

$$\beta E_0 \text{sen}\phi = \left( \mu_0 + \frac{\sigma_y^*}{j\omega} \right) H_{zy0}$$

Seja a expressão do parâmetro  $\beta$

$$\beta E_0 \text{sen}\phi = \left( \mu_0 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} \right) H_{zy0}$$

Portanto, as equações, que governam o modo  $TE_z$ , nos meios PML são

$$\beta(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( \varepsilon_0 \eta^2 - j \frac{\sigma_y}{\omega} \right) (E_0 \text{sen}\phi) \quad (D.4.1)$$

$$\alpha(H_{zx0} + H_{zy0}) = \left( \varepsilon_0 \eta^2 - j \frac{\sigma_x}{\omega} \right) (E_0 \text{cos}\phi) \quad (D.4.2)$$

$$\alpha E_0 \text{cos}\phi = \left( \mu_0 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega} \right) H_{zx0} \quad (D.4.3)$$

$$\beta E_0 \text{sen}\phi = \left( \mu_0 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} \right) H_{zy0} \quad (D.4.4)$$

O conjunto (D.4) permite que se relacionem as incógnitas  $\beta$  e  $\alpha$ :

Por (D.4.3):

$$H_{zx0} = \frac{\alpha E_0 \cos\phi}{\left(\mu_0 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega}\right)} \quad (D.5.1)$$

Analogamente, a partir de (D.4.4):

$$H_{zy0} = \frac{\beta E_0 \sin\phi}{\left(\mu_0 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega}\right)} \quad (D.5.2)$$

Obtém-se a razão entre (  $\beta$  e  $\alpha$  ) pela relação entre as equações (D.4.1) e (D.4.2):

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left(\varepsilon_0 \eta^2 - j \frac{\sigma_y}{\omega}\right)}{\left(\varepsilon_0 \eta^2 - j \frac{\sigma_x}{\omega}\right)} \quad (D.5.2.1)$$

- Cálculo da equação referente ao parâmetro  $\beta$

O valor de  $\beta$  é encontrado, ao substituir as equações (D.5.1) e (D.5.2) em (D.4.1) :

$$\beta \left( \frac{\alpha \cos\phi}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \frac{\beta \sin\phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right) \frac{E_0}{\mu_0} = \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) E_0 \sin\phi$$

Simplificando  $E_0$  em ambos os lados, tem-se o parâmetro  $\beta$

$$\beta \left( \frac{\alpha \cos\phi}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \frac{\beta \sin\phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \sin\phi \quad (D.5.3)$$

- Cálculo da equação referente ao parâmetro  $\alpha$

Similarmente, a expressão de  $\alpha$  é deduzida ao substituir (D.5.1) e (D.5.2) em (D.4.2):

$$\alpha \left( \frac{\alpha \cos\phi}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \frac{\beta \sin\phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right) \frac{E_0}{\mu_0} = \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) E_0 \cos\phi$$

Com o mesmo procedimento anterior. Tem-se a expressão do parâmetro  $\alpha$

$$\alpha \left( \frac{\alpha \cos \phi}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \frac{\beta \sin \phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \cos \phi \quad (D.5.4)$$

- Confirmação da relação entre  $\beta$  e  $\alpha$

A relação entre  $\beta$  e  $\alpha$ , equação (D.5.2.1), é confirmada ao se dividir (D.5.3) por (D.5.4):

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \sin \phi}{\left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \cos \phi} \quad (D.6)$$

- Cálculo do valor de  $\alpha$

O valor de  $\alpha$  é encontrado levando a expressão (D.6) em (D.5.4):

$$\left\{ \frac{\alpha \cos \phi}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \alpha \left[ \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \sin \phi}{\left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \cos \phi} \right] \frac{\sin \phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right\} = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \cos \phi$$

Pondo em evidência  $\frac{\alpha}{\cos \phi}$  :

$$\frac{\alpha^2}{\cos \phi} \left\{ \frac{\cos^2 \phi}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \frac{\sin^2 \phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \left[ \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right)}{\left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right)} \right] \right\} = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \cos \phi$$

Assim com, o denominador do termo entre colchetes

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{\cos \phi \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right)} \left\{ \cos^2 \phi \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \sin^2 \phi \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right\} \\ & = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \cos \phi \end{aligned}$$

Tem-se :

$$\alpha^2 \left\{ \cos^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \sin^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right\} = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)^2 \cos^2 \phi$$

A equação referente ao valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \eta} \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \cos \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \sin^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}}}}$$

Numa notação menos carregada, definem-se:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} \\ \omega_y &= \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \end{aligned} \quad (D.6.1)$$

$$G = \sqrt{(\omega_x \cos^2 \phi + \omega_y \sin^2 \phi)}$$

A velocidade da luz no meio:

$$v = \frac{c}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \eta}}$$

Aliviando a notação da expressão de  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \cos \phi}{vG} \quad (D.7)$$

- Cálculo do valor de  $\beta$ :

O valor do parâmetro  $\beta$  é encontrado, com o mesmo raciocínio, ao substituir a equação (D.6) na equação (D.5.3):

$$\beta \left( \beta \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \cos \phi}{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \operatorname{sen} \phi} \frac{\cos \phi}{\left(1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}\right)} + \frac{\beta \operatorname{sen} \phi}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \operatorname{sen} \phi$$

Pondo em evidência  $\frac{\beta^2}{\operatorname{sen} \phi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{\operatorname{sen} \phi \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)} & \left\{ \cos^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \operatorname{sen}^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right\} \\ & = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

Com simples algebrismo:

$$\beta^2 \left\{ \cos^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \operatorname{sen}^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}} \right\} = \mu_0 \varepsilon_0 \eta^2 \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \phi$$

A equação referente ao valor de  $\beta$

$$\beta = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \eta \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}} + \operatorname{sen}^2 \phi \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}}}}$$

Aliviando a notação da expressão de  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \operatorname{sen} \phi}{vG} \quad (D.8)$$

- Cálculo das componentes  $H_{zx0}$  e  $H_{zy0}$

As componentes  $H_{zx0}$  e  $H_{zy0}$  são determinadas pelas equações (D.4.3) e (D.4.4):

- Cálculo de  $H_{zx0}$ :

Pela equação (D.4.3):

$$\alpha E_0 \cos\phi = \left( \mu_0 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega} \right) H_{zx0}$$

Substitui-se  $\alpha$ , equação (D.7):

$$H_{zx0} = \frac{E_0 \cos\phi}{\left( \mu_0 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega} \right)} \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0 \eta^2} \right) \cos\phi}{vG}$$

Sabendo-se que

$$\omega_x = \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0 \eta^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_x^*}{\omega \mu_0}}$$

Então

$$H_{zx0} = E_0 \cos\phi \omega_x \frac{\cos\phi}{\mu_0 vG}$$

Levando em conta;

$$\frac{1}{\mu_0 v} = \frac{1}{\mu_0 \frac{c}{\eta}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\frac{\mu_0}{\eta}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \eta$$

Tem-se a componente  $H_{zx0}$ :

$$H_{zx0} = \frac{E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \eta \omega_x \cos^2 \phi}{G} \quad (D.9)$$

- Cálculo de  $H_{zy0}$ :

Com o mesmo raciocínio anterior,  $H_{zy0}$  é calculado pela equação (D.4.4):

$$\beta E_0 \operatorname{sen} \phi = \left( \mu_0 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} \right) H_{zy0}$$

Por simples algebrismo

$$H_{zy0} = \frac{\beta E_0 \operatorname{sen} \phi}{\left( \mu_0 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} \right)}$$

Substitui-se  $\beta$ , equação (D.8):

$$H_{zy0} = \frac{E_0 \operatorname{sen} \phi}{\left( \mu_0 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} \right)} \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right) \operatorname{sen} \phi}{vG}$$

Leva-se em conta que

$$\omega_y = \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}}$$

Tem-se

$$H_{zy0} = E_0 \frac{\omega_y \operatorname{sen}^2 \phi}{\mu_0 vG}$$

Pela expressão

$$\frac{1}{\mu_0 v} = \frac{1}{\mu_0 \frac{c}{\eta}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\frac{\mu_0}{\eta}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \eta$$

Obtém-se a componente  $H_{zy0}$

$$H_{zy0} = \frac{E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \eta \omega_y \text{sen}^2 \phi}{G} \quad (D.10)$$

- Cálculo do campo magnético  $H_z$  (modo  $TE_z$ ):

Pela técnica de Berenger [2], o campo magnético é constituído por duas componentes  $H_z \vec{z} = (H_{zx} + H_{zy}) \vec{z}$ :

$$H_z(x, y, t) = H_{zx}(x, y, t) + H_{zy}(x, y, t)$$

As duas componentes pertencem à mesma frente de onda

$$H_z = (H_{zx0} + H_{zy0}) e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

Pelas equações D.9 e D.10

$$H_z = \frac{E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \eta}{G} (\omega_x \cos^2 \phi + \omega_y \text{sen}^2 \phi) e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

Pela equação D.6.1 ;  $\omega_x \cos^2 \phi + \omega_y \text{sen}^2 \phi = G^2$ , portanto;

$$H_z = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \eta G e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

A amplitude do campo magnético é definida como  $H_0$

$$H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \eta G \quad (D.10.1)$$

- Cálculo do campo elétrico (modo  $TE_z$ - polarização paralela):

O campo elétrico possui duas componentes,  $E_x$  e  $E_y$ , caracterizadas pelas projeções sobre os eixos coordenados. Ou seja:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

Pela Figura 1,

$$E_x = E_0 \cos \phi e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}, \quad E_y = E_0 \sin \phi e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

A impedância da onda-plana é:

$$Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{E_0 e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}}{H_0 e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}}$$

Suprime-se o termo comum do numerador e denominador

$$Z = \frac{E_0}{H_0}$$

Substitui a amplitude  $H_0$ , equação D.10.1

$$Z = \frac{E_0}{E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \eta G}$$

A impedância se reduz:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\eta G}$$

Denominando a impedância intrínseca por  $Z_0$

$$Z = \frac{Z_0}{\eta G} = \frac{120\pi}{\eta G} \quad (D.11)$$

A impedância  $Z$  é a razão entre o campo elétrico e o campo magnético da onda plana.

- Análise da incidência de ondas-planas na fronteira (Dielétrico–PML)

Sob a condição de casamento de impedância, ou seja,  $\frac{\sigma^*}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \eta^2}$ , os parâmetros  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $G$  são unitários, qualquer que seja a frequência. Seja  $\psi$  a componente do campo elétrico ou magnético, de intensidade  $\psi_0$ :

$$\psi = \psi_0 e^{j\omega \left( t - \frac{\cos\phi}{vG} x - \frac{\sin\phi}{vG} y \right)} e^{-\left[ \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 \eta^2} \frac{\cos\phi}{vG} x + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0 \eta^2} \frac{\sin\phi}{vG} y \right]}$$

Pela condição de casamento de impedância,  $G = 1$ , e as componentes dos campos são

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{j\omega(t - \cos\phi x - \sin\phi y)}{v}} e^{-(\sigma_x \cos\phi x + \sigma_y \sin\phi y) \frac{1}{\varepsilon_0 \eta^2}} \quad (D.11.1)$$

Enquanto, a impedância de onda, equação (D.11), se resume, em

$$Z = \frac{Z_0}{\eta} = \frac{120\pi}{\eta} \quad (D.12)$$

Conclui-se por (D.12), que a impedância de onda independe da frequência.

- Incidência oblíquana Interface (y-z). Propagação em( $\hat{x}$ )

Neste item, será efetuada a análise da propagação em ( $\hat{x}$ ), do modo  $TE_z$  da onda-plana que incide obliquamente na interface (y-z), vide Figuras D.5 e D.6. Considere a onda  $TE_z$  cuja direção de propagação forma um ângulo  $\phi$  com o eixo coordenado  $\hat{x}$ .

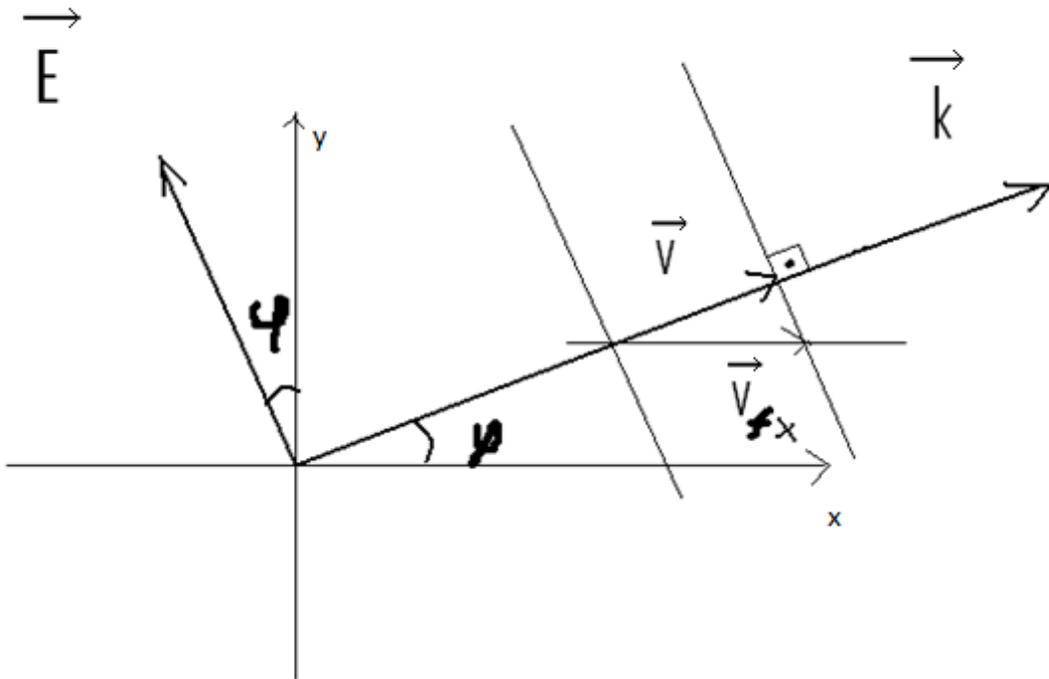


Figura D.5: Velocidade de fase em x da incidência obliqua da onda-plana à interface (z-y)

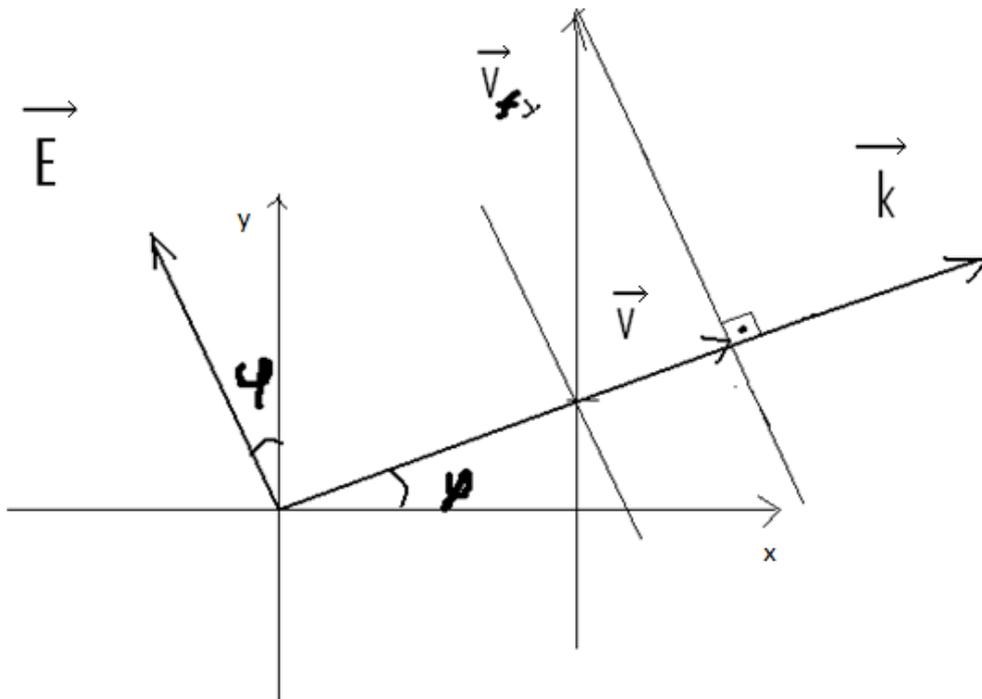


Figura D.6: Velocidade de fase em y da incidência obliqua da onda-plana à interface (z-y)

Sob a condição do casamento de impedância, as componentes dos campos são

$$\psi = \psi_0 e^{j\omega \left( t - \frac{x}{v_{fx}} - \frac{y}{v_{fy}} \right)} e^{-\left[ \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \eta^2 v_{fx}} x + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0 \eta^2 v_{fy}} y \right]}$$

Condição do casamento de impedância:

$$\frac{\sigma^*}{\mu_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \eta^2} \quad (D.13.1)$$

As velocidades de fase são definidas em função do ângulo de incidência:

a) Propagação em ( $\hat{x}$ ):

$$v_{fx} = \frac{v}{\cos\phi} \quad (D.13.2)$$

b) Propagação em ( $\hat{y}$ ):

$$v_{fy} = \frac{v}{\sin\phi} \quad (D.13.3)$$

Portanto,  $v_{fx}$  e  $v_{fy}$  se referem, veja Figuras D.5, D.6, as componentes da velocidade de fase da onda-plana, respectivamente, em  $\hat{x}$  e em  $\hat{y}$ .

Observam-se pelas equações (D.5) e (D.6) que os campos, localizados na frente de onda, são ortogonais à velocidade de fase.

O termo que rege a atenuação das componentes, equação (D.11.1), é ;

$$e^{-\left[ \frac{\sigma_x}{\epsilon_0 \eta^2 v_{fx}} x + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0 \eta^2 v_{fy}} y \right]}$$

A figura D.7 mostra a atenuação das componentes ao se deslocarem ao longo de x e y.

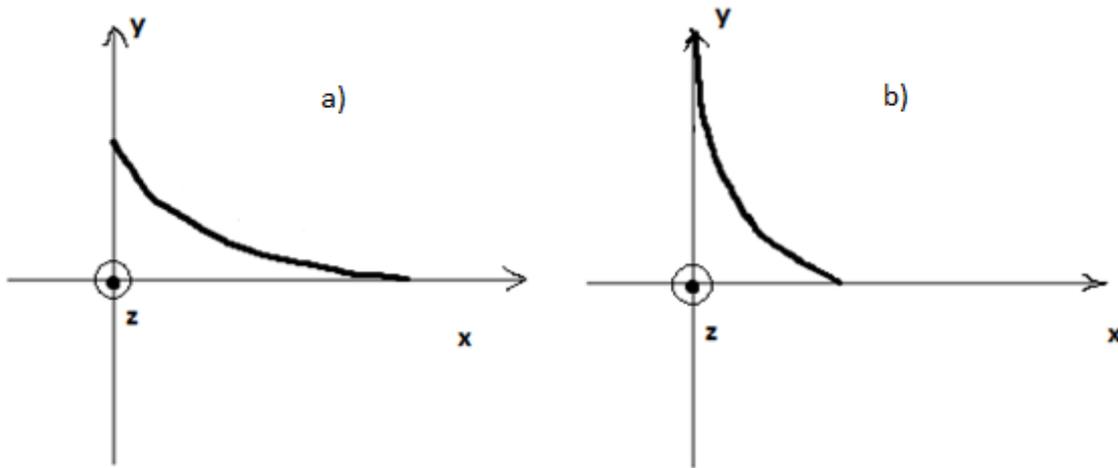


Figura D.7: Atenuação da onda (a) em fronteira normal a  $x$ , (b) em fronteira normal a  $y$ .

A impedância de onda  $Z = \frac{Z_0}{\eta}$  do meio PML é idêntica à da região dielétrica ( $\mu_0, \varepsilon_0 \eta^2, \sigma = 0$ ), e independente da frequência.

A condição de casamento de impedância é aplicada a ambos os meios; PML e Dielétrico, assim como as equações D.1. A diferença entre o meio usual e o PML é que neste, há duas duplas de condutividades ( $\sigma_x, \sigma_x^*$ ) e ( $\sigma_y, \sigma_y^*$ ) que são incorporadas as equações.

- Incidência oblíquana Interface (x-z). Propagação em( $\hat{y}$ ):

Considerando a componente da onda que se propaga ao longo do eixo  $y$ , conforme a figura D.8, então  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , não há atenuação em  $\hat{x}$ . Pois, as velocidades de fase são, respectivamente,  $v_{fx} = \infty$  e  $v_{fy} = v$ , ou seja, a frente de onda independe das coordenadas (x,z).Então, se as condutividades elétrica e magnética na direção  $y$  forem, também, nulas, a onda não é absorvida. Condição própria dos meios dielétricos.

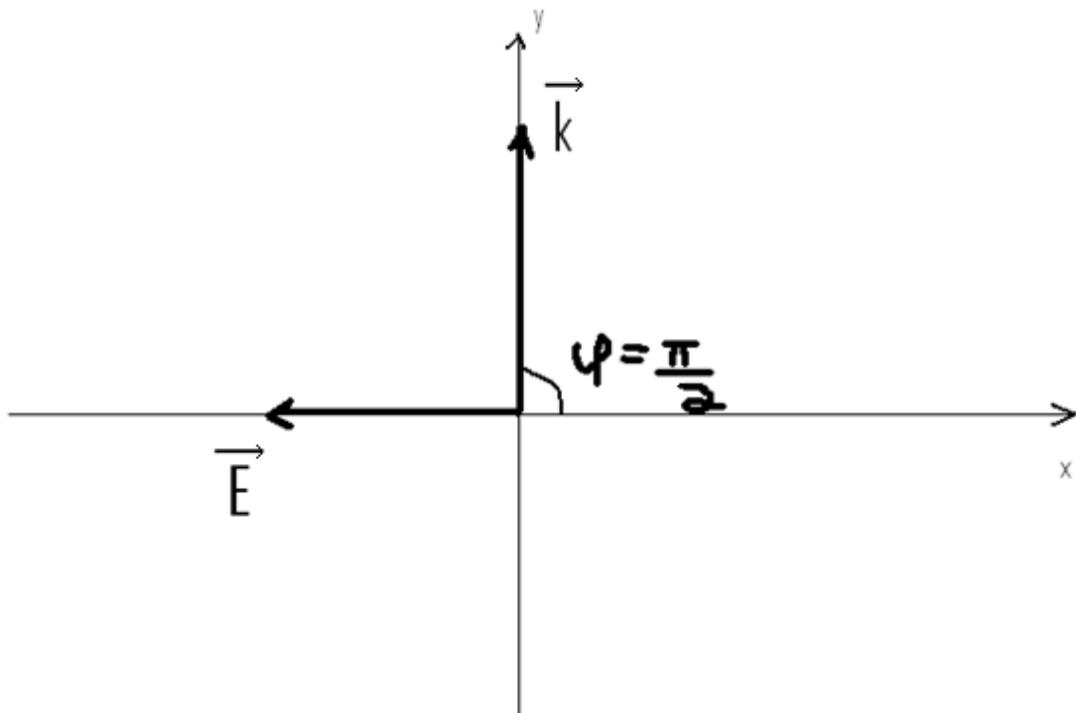


Figura D.8: Onda incidente na fronteira normal a  $\vec{y}$ .

Em resumo, se  $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$ , as componentes dos campos elétrico e magnético são

$$\psi = \psi_0 e^{j\omega \left( t - \frac{x}{v_{fx}} - \frac{y}{v_{fy}} \right)} e^{-\left[ \frac{\sigma_x x}{\epsilon_0 \eta^2 v_{fx}} \right]}$$

em que a atenuação (dada pela função exponencial decrescente) é função apenas de  $x$ . Se  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , mesmo que  $\sigma_x = \sigma_x^* \neq 0$ , a onda não sofre atenuação, pois o plano  $(x, z)$  é o plano de fase da onda.

#### - Análise da incidência de ondas-planas na fronteira (PML–PML):

Esta seção analisa a incidência de ondas-planas na fronteira entre duas regiões PML. Será demonstrado que com adequados conjuntos dos parâmetros de condutividades;  $(\sigma_x, \sigma_x^*)$ ;  $(\sigma_y, \sigma_y^*)$ , a reflexão da onda na fronteira é nula, independente da frequência e do ângulo de incidência. Assim, a onda é transmitida totalmente através da fronteira. Esta seção estabelece as condições fundamentais da técnica PML.

- Incidência oblíquana Interface (y-z), normal a ( $\hat{x}$ ). Propagação em ( $\hat{x}$ ):

Seja a incidência oblíqua na interface(y-z), normal a  $\hat{x}$ , entre dois meios PML, veja Figura D.9. Considere  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos que os campos elétricos  $E_i$  e  $E_t$  fazem, respectivamente, com o plano da interface. O ângulo de incidência  $\phi$  da onda-plana foi definido com relação ao eixo  $\hat{x}$ . Então, os ângulos das componentes dos campos elétricos com a interface  $\hat{y}$  em cada um dos meios, será  $\phi = \theta$ , vide Figura D.9. O ângulo  $\theta$  é, pois, o da incidência, definido entre o vetor propagação de fase  $\vec{k}$  e o eixo  $\hat{x}$ .

A interface é considerada infinita , e a onda plana

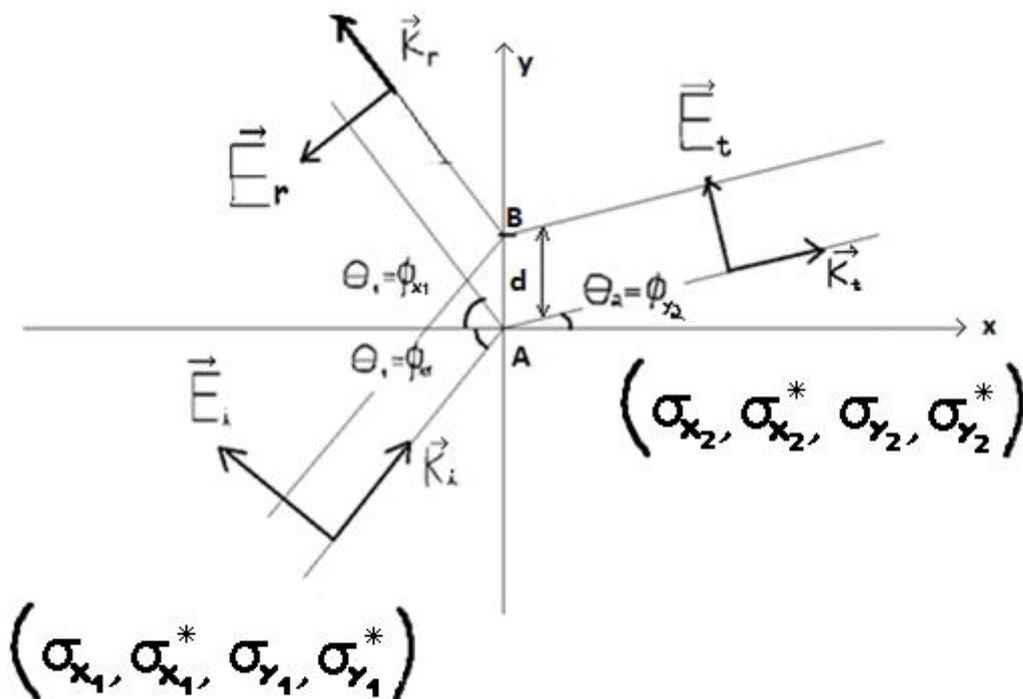


Figura D.9: Ondas incidente, transmitida e refletida do modo  $TE_z$

Na incidência de ondas planas, há duas propriedades importantes a ser consideradas.

- 1) As ondas refletida e transmitida, também serão ondas planas.
- 2) Em qualquer ponto da interface, a razão entre as componentes da onda transmitida e incidente, é constante. Isto é, a razão entre as componentes  $\psi_t$  (onda transmitida) e  $\psi_i$  (onda incidente), em dois pontos quaisquer, A e B, da interface, vide Figura D.9, é constante. Seja a onda transmitida:

$$\psi_t = \psi_{0t} e^{j\omega \left( t - \frac{x}{\bar{v}_{fxt}} - \frac{y}{\bar{v}_{fyt}} \right)} e^{-\left[ \frac{\sigma_{x2}}{\varepsilon_0 \eta_2^2 \bar{v}_{fxt}} x + \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0 \eta_2^2 \bar{v}_{fyt}} y \right]}$$

Os respectivos parâmetros, já definidos, são reescritos por conveniência:

$$\bar{v}_{fxt} = \left( \frac{v_2}{\cos \theta_2} \right) G_2$$

$$\bar{v}_{fyt} = \left( \frac{v_2}{\sen \theta_2} \right) G_2$$

$$v_2 = \frac{c}{\eta_2}$$

$$\omega_{x2} = \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_{x2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_{x2}^*}{\omega \mu_0}}$$

$$\omega_{y2} = \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_{y2}^*}{\omega \mu_0}}$$

$$G_2 = \sqrt{\omega_{x2} \cos^2 \theta_2 + \omega_{y2} \sen^2 \theta_2}$$

Seja a onda incidente:

$$\psi_i = \psi_{0i} e^{j\omega \left( t - \frac{x}{\bar{v}_{fxi}} - \frac{y}{\bar{v}_{fyi}} \right)} e^{-\left[ \frac{\sigma_{x1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fxi}} x + \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyi}} y \right]}$$

Em que

$$\bar{v}_{fxi} = \left( \frac{v_1}{\cos \theta_1} \right) G_1$$

$$\bar{v}_{fyi} = \left( \frac{v_1}{\sen \theta_1} \right) G_1$$

$$v_1 = \frac{c}{\eta_1}$$

$$\omega_{x1} = \frac{\left( 1 - j \frac{\sigma_{x1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2} \right)}{1 - j \frac{\sigma_{x1}^*}{\omega \mu_0}}$$

$$\omega_{y1} = \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_{y1}^*}{\omega \mu_0}}$$

As respectivas componentes dos campos na interface são:

- No ponto A(x=0,y=0):

$$\psi_t(t, x = 0, y = 0) = \psi_{0t} e^{j\omega t}$$

$$\psi_i(t, x = 0, y = 0) = \psi_{0i} e^{j\omega t}$$

ea razão entre elas,

$$\frac{\psi_t(A)}{\psi_i(A)} = \frac{\psi_{0t}}{\psi_{0i}} \quad (D.13.4)$$

- No ponto B(x=0,y=d):

$$\psi_t(t, x = 0, y = d) = \psi_{0t} e^{j\omega \left(t - \frac{d}{\bar{v}_{fyt}}\right)} e^{-\left[\frac{\sigma_{y2} d}{\varepsilon_0 \eta_2^2 \bar{v}_{fyt}} y\right]}$$

$$\psi_i(t, x = 0, y = d) = \psi_{0i} e^{j\omega \left(t - \frac{d}{\bar{v}_{fyi}}\right)} e^{-\left[\frac{\sigma_{y1} d}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyi}} y\right]}$$

Cuja razão é

$$\frac{\psi_t(B)}{\psi_i(B)} = \frac{\psi_{0t}}{\psi_{0i}} e^{-\left(\frac{j\omega d + \sigma_{y2} d}{\bar{v}_{fyt} \varepsilon_0 \eta_2^2 \bar{v}_{fyt}}\right)} e^{\left(\frac{j\omega d + \sigma_{y1} d}{\bar{v}_{fyi} \varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyi}}\right)} \quad (D.13.5)$$

Pela segunda propriedade, a razão entre as componentes é constante e independe da localização na fronteira. Portanto;

Substitui-se  $\frac{\psi_t(A)}{\psi_i(A)} = \frac{\psi_{0t}}{\psi_{0i}}$ , equação D.13.4, na equação D.13.5

$$\frac{\psi_t(B)}{\psi_i(B)} = \frac{\psi_t(A)}{\psi_i(A)} e^{-\left(\frac{j\omega d}{\bar{v}_{fyt}} + \frac{\sigma_{y2} d}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyt}}\right)} e^{\left(\frac{j\omega d}{\bar{v}_{fyi}} + \frac{\sigma_{y1} d}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyi}}\right)}$$

Pondo em evidência,  $d$ , distância entre os pontos (A,B)

$$\frac{\psi_t(B)}{\psi_i(B)} = \frac{\psi_t(A)}{\psi_i(A)} e^{-d\left(\frac{j\omega}{\bar{v}_{fyt}} + \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyt}}\right)} e^{\left(\frac{j\omega}{\bar{v}_{fyi}} + \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2 \bar{v}_{fyi}}\right)}$$

Assim como a frequência ( $j\omega$ )

$$\frac{\psi_t(B)}{\psi_i(B)} = \frac{\psi_t(A)}{\psi_i(A)} e^{-j\omega d \left[ \left(1 + \frac{\sigma_{y2}}{j\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fyt}} - \left(1 + \frac{\sigma_{y1}}{j\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fyi}} \right]}$$

Nos termos entre colchete, coloca-se o imaginário ( $j$ ) no numerador, tem-se

$$\frac{\psi_t(B)}{\psi_i(B)} = \frac{\psi_t(A)}{\psi_i(A)} e^{-j\omega d \left[ \left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fyt}} - \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fyi}} \right]}$$

Para que a razão entre as componentes dos campos transmitido e incidente não dependa do ponto da interface, é necessário que

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fyt}} = \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fyi}}, \quad (D.13.6)$$

em que

$$\bar{v}_{fyt} = \left(\frac{v_2}{\text{sen}\theta_2}\right) G_2 = \frac{c}{\eta_2} \frac{G_2}{\text{sen}\theta_2} \quad (D.13.7)$$

e

$$\bar{v}_{fyi} = \left(\frac{v_1}{\text{sen}\theta_1}\right) G_1 = \frac{c}{\eta_1} \frac{G_1}{\text{sen}\theta_1}$$

Substituindo, as equações D.13.7, em D13.6

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen}\theta_2}{c G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen}\theta_1}{c G_1}$$

Tem-se, enfim, a relação que assegura a constância entre as componentes das ondas transmitida e incidente na fronteira:

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen} \theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen} \theta_1}{G_1} \quad (D.14)$$

A equação (D.14) é a Lei de Descartes-Snell entre dois meios PML, sob incidências oblíquas, na interface normal a  $\hat{x}$ . Essa equação estabelece a condição necessária para que a onda de superfície se propague entre os dois meios PML, na direção  $\hat{y}$ .

Caso os dois meios sejam dielétricos usuais (todas as condutividades;  $(\sigma_x, \sigma_x^*)$ ;  $(\sigma_y, \sigma_y^*)$ , se anulam), os parâmetros  $G_2$  e  $G_1$  são unitários, e a equação (D.14), passa a ser a que rege a lei clássica de Descartes-Snell nas interfaces entre dielétricos

$$\eta_2 \text{sen} \theta_2 = \eta_1 \text{sen} \theta_1$$

Para que haja onda a se propagar na direção  $\hat{y}$ , é imprescindível, veja a figura D.9, que

$$k_{yi} = k_{yr} = k_{yt}$$

Logo

$$k_1 \text{sen} \theta_1 = k_2 \text{sen} \theta_2$$

A convenção adotada, neste trabalho, para se referenciar os ângulos, na equação de Descartes-Snell, será o do vetor normal à interface. Para ambas as propagações;  $\hat{x}$  ou  $\hat{y}$ ,

Considerando, a propagação em  $\hat{x} \rightarrow (\theta_k = \varphi_{xk} = \varphi_{\vec{n}k})$ . Portanto

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen} \varphi_{x2}}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen} \varphi_{x1}}{G_1}$$

Os ângulos na direção  $\hat{y}$ , direção da propagação da onda de superfície é

$$\theta_k = \varphi_{yk}, \quad \varphi_{yk} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{xk} = \frac{\pi}{2} - \theta_k$$

Os vetores número de onda, em  $\hat{y}$ , das duas regiões fronteiriças, são projeções do número de onda do meio no eixo de coordenadas (  $y$  ), obtido pelo  $\cos(\varphi_{yk})$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_k\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\theta_k - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\theta_k = \operatorname{sen}\theta_k,$$

que resulta

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_2 \operatorname{sen}\theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \operatorname{sen}\theta_1}{G_1}$$

- Cálculo do coeficiente de reflexão na fronteira

Cálculo da relação entre onda incidente e refletida: Na fronteira, haverá uma onda plana que se propaga em  $\hat{y}$ . Sejam as onda; refletida  $\psi_r$  e a transmitida  $\psi_t$ . A componente tangente à fronteira se dá por:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_r &= \psi_{0r} e^{j(\omega t - k_{xr}x - k_{yr}y)} (-\hat{y}) \\ \vec{\psi}_t &= \psi_{0t} e^{j(\omega t - k_{xt}x - k_{yt}y)} (\hat{y})\end{aligned}$$

As componentes se reescrevem:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_r &= \psi_{0r} e^{j\omega(t - \beta_r y)} (-\hat{y}) \\ \vec{\psi}_t &= \psi_{0t} e^{j\omega(t - \beta_t y)} (\hat{y})\end{aligned}$$

em que  $\beta_k = \frac{k_y k}{\omega}$ . A fim de que haja propagação no sentido  $+\hat{y}$ , é necessário que as fases sejam iguais nos dois lados da fronteira. Ou seja,  $\varphi_1(t, y) = \varphi_2(t, y)$ :

$$\left(t - \frac{y}{\bar{v}_{fyr} G_1}\right) = \left(t - \frac{y}{\bar{v}_{fyt} G_2}\right)$$

em que

$$\bar{v}_{fyr} = \frac{c}{\eta_1} \frac{G_1}{\text{sen}(\pi - \theta_1)} = \frac{c}{\eta_1} \frac{G_1}{\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)} = \frac{c}{\eta_1} \frac{G_1}{\text{sen}\theta_1}$$

$$\bar{v}_{fyt} = \frac{c}{\eta_2} \frac{G_2}{\text{sen}\theta_2}$$

As componentes do campo da onda refletida são:

$$\psi_r = -\psi_{0r} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{\bar{v}_{fxr}} - \frac{y}{\bar{v}_{fyr}}\right)} e^{-\left[\frac{\sigma_{x1}}{\varepsilon_0\eta_1^2} \frac{x}{\bar{v}_{fxr}} + \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0\eta_1^2} \frac{y}{\bar{v}_{fyr}}\right]}$$

As componentes das ondas refletidas e transmitidas são apresentadas mais adequadamente:

$$\psi_t = \psi_{0t} e^{\omega\left[jt - \left(j + \frac{\sigma_{x2}}{\varepsilon_0\eta_2^2}\right) \frac{x}{\bar{v}_{fxt}} - \left(j + \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0\eta_2^2}\right) \frac{y}{\bar{v}_{fyt}}\right]}$$

$$\psi_r = -\psi_{0r} e^{\omega\left[jt - \left(j + \frac{\sigma_{x1}}{\varepsilon_0\eta_1^2}\right) \frac{x}{\bar{v}_{fxr}} - \left(j + \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0\eta_1^2}\right) \frac{y}{\bar{v}_{fyr}}\right]}$$

Na fronteira entre as regiões ( $x=0$ ), as fases das ondas transmitida e refletida são:

$$\varphi_r(x=0) = j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0\eta_1^2} \right) \right] \frac{y}{\bar{v}_{fyr}} \right\}$$

$$\varphi_t(x=0) = j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0\eta_2^2} \right) \right] \frac{y}{\bar{v}_{fyt}} \right\}$$

Pela lei de Descartes-Snell, as fases em ambos os lados devem ser iguais na fronteira. Logo,

$$\varphi_r(x=0) = \varphi_t(x=0)$$

Então:

$$t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0\eta_1^2} \right) \right] \frac{y}{\bar{v}_{fyr}} = t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0\eta_2^2} \right) \right] \frac{y}{\bar{v}_{fyt}}$$

Explicitando-se  $\bar{v}_{fyr}$  e  $\bar{v}_{fyt}$ :

$$\left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0\eta_1^2} \right) \right] \frac{\text{sen}\theta_1}{v_1 G_1} = \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0\eta_2^2} \right) \right] \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2 G_2}$$

$v_k = c/\eta_k$ , tem-se:

$$\left[1 - j\left(\frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0\eta_1^2}\right)\right] \frac{\eta_1 \text{sen}\theta_1}{G_1} = \left[1 - j\left(\frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0\eta_2^2}\right)\right] \frac{\eta_2 \text{sen}\theta_2}{G_2}$$

que é a equação (D.14), calculada para ondas planas  $TE_z$  em fronteiras entre dois meios PML.

- Análise dos campos elétricos e magnéticos das regiões PML 1 e 2:

Sejam os campos elétricos e magnéticos nas regiões 1 e 2, *modo*  $TE_z$ :

$\vec{E}_i, \vec{H}_{zi}$  – Onda Incidente

$\vec{E}_r, \vec{H}_{zr}$  – Onda refletida

$\vec{E}_t, \vec{H}_{zt}$  – Onda transmitida

Na fronteira entre os dois meios, são atendidas as seguintes condições:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$$

Incidência normal a  $\hat{y}$ ,  $\vec{n} = -\hat{x}$ . Portanto,

$$\vec{n} \times [\vec{E}_1(t, x = 0, y) - \vec{E}_2(t, x = 0, y)] = 0$$

$$\vec{n} \times [\vec{H}_1(t, x = 0, y) - \vec{H}_2(t, x = 0, y)] = 0$$

Pela figura D.9, os campos são expressos:

$$\vec{E}_1 = (E_{xi}\hat{x} + E_{yi}\hat{y}) + (E_{xr}\hat{x} + E_{yr}\hat{y})$$

$$\vec{E}_2 = (E_{xt}\hat{x} + E_{yt}\hat{y})$$

$$\vec{H}_1 = (H_{zi} + H_{zr})\hat{z}$$

$$\vec{H}_2 = H_{zt}\hat{z}$$

Substituindo-se estas expressões nas condições de fronteira, têm-se:

$$(-\hat{x}) \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = [E_{yi}(x=0) + E_{yr}(x=0) - E_{yt}(x=0)](-\hat{z}) = 0$$

e

$$(-\hat{x}) \times (-\hat{z})[(H_{zi} + H_{zr}) - H_{zt}] = 0$$

Aplicando as condições de fronteira:

$$E_{yi}(x=0) + E_{yr}(x=0) = E_{yt}(x=0)$$

$$H_{zi}(x=0) + H_{zr}(x=0) = H_{zt}(x=0)$$

Substituindo as respectivas componentes:

$$E_{yi} = E_{0i} \cos\theta_1 e^{j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2} \right) \right] \frac{y}{v_{fyi}} \right\}}$$

$$E_{yr} = -E_{0r} \cos\theta_1 e^{j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2} \right) \right] \frac{y}{v_{fyi}} \right\}}$$

$$E_{yt} = E_{0t} \cos\theta_2 e^{j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0 \eta_2^2} \right) \right] \frac{y}{v_{fyt}} \right\}}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} (E_{0i} \cos\theta_1 - E_{0r} \cos\theta_1) e^{j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2} \right) \right] \frac{\eta_1 \sin\theta_1}{G_1} y \right\}} & \quad (D.15) \\ = E_{0t} \cos\theta_2 e^{j\omega \left\{ t - \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0 \eta_2^2} \right) \right] \frac{\eta_2 \sin\theta_2}{G_2} y \right\}} & \end{aligned}$$

Considera-se a lei de Descartes-Snell, equação D.14:

$$\left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y1}}{\varepsilon_0 \eta_1^2} \right) \right] \frac{\eta_1 \sin\theta_1}{G_1} = \left[ 1 - j \left( \frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_0 \eta_2^2} \right) \right] \frac{\eta_2 \sin\theta_2}{G_2}$$

As exponenciais em ambos os lados, da equação (D.15), se igualam e da expressão (D.15) resulta:

$$E_{0i} \cos \theta_1 - E_{0r} \cos \theta_1 = E_{0t} \cos \theta_2$$

Esta é a primeira relação exigida pela condição de fronteira.

A outra, por analogia, se relaciona aos campos magnéticos:

$$H_{zi}(x = 0) + H_{zr}(x = 0) = H_{zt}(x = 0)$$

Conforme visto, a impedância de onda generalizada de um meio ( dielétrico, PML) é:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\eta G}$$

Portanto:

$$Z_1 = \frac{Z_0}{\eta_1 G_1}$$

$$Z_2 = \frac{Z_0}{\eta_2 G_2}$$

Sejam as componentes dos campos magnéticos, respectivamente, incidente, refletida e transmitida,  $H_{zi}$ ,  $H_{zr}$  e  $H_{zt}$ . Essa componentes se relacionam com as dos campos elétricos pelas impedâncias de onda.

### Onda incidente

$$H_{zi} = H_{z0i} e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

$$\frac{E_i}{H_{zi}} = Z_1 = \frac{Z_0}{\eta_1 G_1}$$

$$\frac{E_{0i} e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}}{H_{z0i} e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}} = Z_1$$

$$H_{z0i} = \frac{E_{0i}}{Z_1}$$

**Onda refletida**

$$H_{zr} = H_{z0r} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

$$\frac{E_r}{H_{zr}} = Z_1$$

$$H_{z0r} = \frac{E_{0r}}{Z_1}$$

**Onda transmitida**

$$H_{zt} = H_{z0t} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)}$$

$$\frac{E_t}{H_{zt}} = Z_2$$

$$H_{z0t} = \frac{E_{0t}}{Z_2}$$

Então as respectivas componentes magnéticas, em função das elétricas, na fronteira, são:

$$H_{z0i}(t, x = 0, y) = \frac{E_{0i}(t, x = 0, y)}{Z_1}$$

$$H_{z0r}(t, x = 0, y) = \frac{E_{0r}(t, x = 0, y)}{Z_1}$$

$$H_{z0t}(t, x = 0, y) = \frac{E_{0t}(t, x = 0, y)}{Z_2}$$

Em que  $Z_k = \frac{Z_0}{\eta_k G_k}$ .

As condições de fronteira, Lei de Descartes-Snell, em  $x=0$ , exige:

$$E_i + E_r = E_t$$

$$H_{zi} + H_{zr} = H_{zt}$$

Essas condições, expressas pelas respectivas componentes elétricas, são:

$$E_{0i} \cos \theta_1 - E_{0r} \cos \theta_1 = E_{0t} \cos \theta_2 \quad (D. 15.1)$$

$$(E_{0i} + E_{0r}) \frac{1}{Z_1} = \frac{E_{0t}}{Z_2} \quad (D.15.2)$$

Define-se o coeficiente de reflexão na interface,  $x=0$ , pela razão entre as componentes elétricas refletida e incidente na interface. Ou seja,

$$\Gamma_p = \frac{E_{yr(x=0)}}{E_{yi(x=0)}} = -\frac{E_{0r} \cos \theta_1}{E_{0i} \cos \theta_1} = \frac{-E_{0r}}{E_{0i}}$$

Pelas equações (D.15.1) e (D.15.2):

$$\frac{E_{0i} \left(1 - \frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right) \cos \theta_1}{E_{0i} \left(1 + \frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right) \frac{1}{Z_1}} = Z_2 \cos \theta_2$$

O coeficiente de reflexão magnético,  $\Gamma_p$ , é expresso pelo coeficiente de reflexão elétrico  $\Gamma_p = \frac{-E_{0r}}{E_{0i}}$ , e as equações (D.15.1) e (D.15.2) são escritas, respectivamente:

$$(1 + \Gamma_p) Z_1 \cos \theta_1 = (1 - \Gamma_p) Z_2 \cos \theta_2$$

$$(Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1) \Gamma_p = Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1$$

O coeficiente de reflexão, modo  $TE_z$ , é obtido:

$$\Gamma_p = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{(Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1)} \quad (D.16)$$

A equação referente ao coeficiente de reflexão na interface entre regiões PML, é similar à dos meios dielétricos. Será provado que, com adequados parâmetros dos meios, a transmissão na fronteira entre as regiões PML é perfeita, não há reflexão, quaisquer que sejam; o ângulo de incidência; a frequência de operação, o que é o fundamento da técnica PML.

Seja a impedância de ondas em meios PML:

$$Z_k = \frac{Z_0}{\eta_k G_k} = \frac{Z_{0k}}{\eta_k}$$

Pela equação (D.16), o coeficiente de reflexão se configura

$$\Gamma_p = \frac{G_1 \frac{\cos\theta_2}{\eta_2} - G_2 \frac{\cos\theta_1}{\eta_1}}{G_1 \frac{\cos\theta_2}{\eta_2} + G_2 \frac{\cos\theta_1}{\eta_1}}$$

### Interface Dielétrico-dielétrico

Considere as regiões dielétricas, por exemplo, o ar,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0$ , então  $G_1 = G_2 = 1$ , o coeficiente de reflexão:

$$\Gamma_p = \frac{Z_{02} \cos\theta_2 - Z_{01} \cos\theta_1}{(Z_{02} \cos\theta_2 + Z_{01} \cos\theta_1)} \quad (D.16.1)$$

A equação (D.16.1) é a equação clássica regente da reflexão, de incidência oblíqua de ondas-planas, em superfície entre dois meios dielétrico

### Interface PML-PML

Considere meios PML contíguos a interface  $\hat{y}$ , vide figura D.9, com as mesmas condutividades elétrica e magnética na direção  $\hat{y}$ :

$$\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$$

$$\sigma_{y1}^* = \sigma_{y2}^*$$

Os meios são definidos pelos respectivos parâmetros de condutividades  $(\sigma_{x1}, \sigma_{x1}^*, \sigma_y, \sigma_y^*)$  e  $(\sigma_{x2}, \sigma_{x2}^*, \sigma_y, \sigma_y^*)$ .

Pela Lei de Descartes-Snell, equação (D.14),

$$\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen}\theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen}\theta_1}{G_1} \quad (D.16.2)$$

A lei de Descartes-Snell exige que  $\eta_1 = \eta_2$ . A equação (D.16.2) é simplificada

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{G_2} = \frac{\text{sen}\theta_1}{G_1} \quad (D.17)$$

Embora [2] tenha considerado, no desenvolvimento, o ar, generaliza-se, para qualquer dielétrico, ao se perceber que a única exigência é a igualdade dos índices de refração entre as respectivas regiões.

Meios PML , condição de casamento :

$$\frac{\sigma_x}{\omega\varepsilon_0\eta^2} = \frac{\sigma_x^*}{\omega\mu_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\omega\varepsilon_0\eta^2} = \frac{\sigma_y^*}{\omega\mu_0}$$

Aplicando as condições de casamento, tem-se  $\omega_{xk} = \omega_{yk} = 1$ . Pois

$$\omega_{xk} = \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_{xk}}{\omega\varepsilon_0\eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_{xk}^*}{\omega\mu_0}} = 1$$

$$\omega_{yk} = \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_{yk}}{\omega\varepsilon_0\eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_{yk}^*}{\omega\mu_0}} = 1 \quad (D.17.1)$$

Por conseguinte:

$$G_k = \sqrt{\omega_{xk}\cos^2\phi + \omega_{yk}\text{sen}^2\phi} = 1 \quad (D.17.2)$$

Essas condições levadas na equação (D.17), estabelecem que  $\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2$ , ou seja,  $\theta_1 = \theta_2$ . Portanto, a onda incidente na fronteira não se reflete, se transmite totalmente para a outra região.

A incidência oblíqua na interface passa a ser regida pela lei de Descartes-Snell, própria dos dielétricos usuais. O coeficiente de reflexão é nulo:

$$\Gamma_p = \frac{G_1 \frac{\cos\theta_2}{\eta_2} - G_2 \frac{\cos\theta_1}{\eta_1}}{G_1 \frac{\cos\theta_2}{\eta_2} + G_2 \frac{\cos\theta_1}{\eta_1}}$$

O coeficiente de reflexão se anula, sob as condições;  $\eta_1 = \eta_2$ ;  $G_1 = G_2$  e  $\theta_1 = \theta_2$ , a onda se transmite integralmente à outra região, vide figura D.10

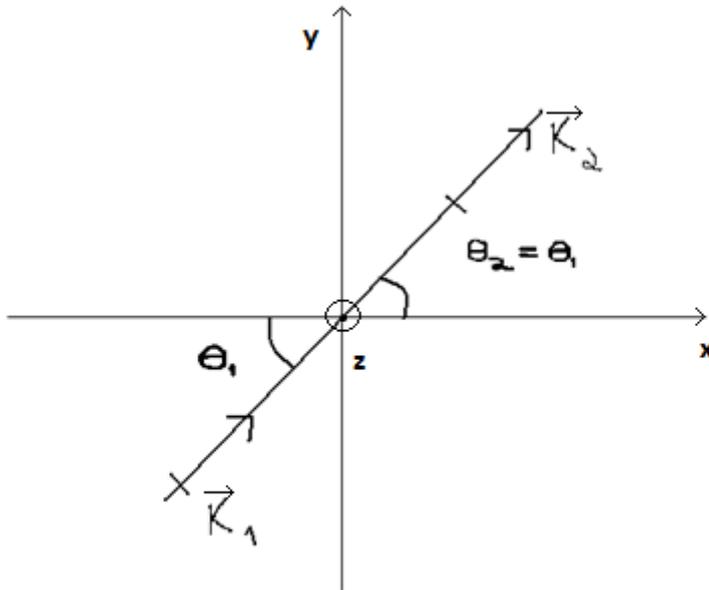


Figura D.10: Transmissão total de uma onda plana através de uma fronteira PML-PML.

Portanto, as velocidades de fase em x e em y são iguais em ambas regiões PML. Resumindo, não há reflexão em:

- a) Interface normal a x com;  $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$  ;  $\sigma_{y1}^* = \sigma_{y2}^*$
- b) Como, também, em interface normal a y sob a condição;  $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$  ;  $\sigma_{x1}^* = \sigma_{x2}^*$

- Análise da incidência de ondas-planas na fronteira (Dielétrico-PML)

Considere a interface normal a  $\hat{x}$  entre o vácuo  $(0,0,0,0)$  e o meio PML  $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0,0)$ . As condutividades dos dielétricos são nulas, então, pelo raciocínio anterior, as referentes às do meio PML tem que satisfazer;  $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = 0$ ;  $\sigma_{y1}^* = \sigma_{y2}^* = 0$ . Da mesma forma, não haverá reflexão em uma interface normal a  $\hat{y}$ , entre o vácuo  $(0,0,0,0)$  e um meio  $(0,0, \sigma_y, \sigma_y^*)$ , pois  $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = 0$  e  $\sigma_{x1}^* = \sigma_{x2}^* = 0$ . Se os meios estão casados, então:

$$\frac{\sigma_{xk}}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} = \frac{\sigma_{xk}^*}{\omega \mu_0}, \quad \frac{\sigma_{yk}}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} = \frac{\sigma_{yk}^*}{\omega \mu_0}$$

Então as equações (D.17.1), (D.17.2) são unitárias

$$\omega_{xk} = \omega_{yk} = G_k = 1$$

Se os índices de refração dos meios (Dielétrico,PML) forem iguais, então  $\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2$ , ou seja,  $\theta_1 = \theta_2$ . Assim, o coeficiente de reflexão:

$$\Gamma_p = \frac{G_1 \frac{\cos\theta_2}{\eta_2} - G_2 \frac{\cos\theta_1}{\eta_1}}{G_1 \frac{\cos\theta_2}{\eta_2} + G_2 \frac{\cos\theta_1}{\eta_1}}$$

anula-se para quaisquer que sejam o ângulo de incidência e a frequência de operação.

Propagação através da interface entre meios PML não casados (condutividades iguais em  $\hat{y}$ ):  
Seja a interface entre dois meios PML, não casados, definidos por  $(\sigma_{x1}, \sigma_{x1}^*, \sigma_{y1}, \sigma_{y1}^*)$  e  $(\sigma_{x2}, \sigma_{x2}^*, \sigma_{y2}, \sigma_{y2}^*)$ . Por não estarem casados;

$$\frac{\sigma_{xk}}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \neq \frac{\sigma_{xk}^*}{\omega \mu_0}$$

$$\frac{\sigma_{yk}}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \neq \frac{\sigma_{yk}^*}{\omega \mu_0}$$

Nesse caso,  $\omega_{xk}, \omega_{yk}$  e  $G_k$  ( $k = \{1,2\}$ ), equações D.17.1 e D.17.2, assumirão valores complexos. A lei de Descartes-Snell, em incidência nas fronteiras normais a  $(\hat{x})$ , propagação em  $(\hat{x})$ , exige que as condutividades na direção  $(\hat{y})$  sejam iguais. Assim, pela a lei de em incidência nas fronteiras normais a  $(\hat{x})$ , propagação em  $(\hat{x})$ , exige que as condutividades na direção  $(\hat{y})$  sejam iguais. Assim, pela a lei de Snell, equação (D.16.1), tem-se:

$$\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen}\theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen}\theta_1}{G_1}$$

Para que a lei de Descartes-Snell seja satisfeita, impõem-se igualdade dos índices de refração dos respectivos meios PML. A lei de Descartes-Snell será;

$$\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta \text{sen} \theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta \text{sen} \theta_1}{G_1} \quad (D.17.3)$$

Então;

$$\frac{\text{sen} \theta_2}{G_2} = \frac{\text{sen} \theta_1}{G_1}$$

Ora, o coeficiente de reflexão, equação (D.16.1), é:

$$\Gamma_p = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}$$

com

$$Z_k = \frac{Z_0}{\eta_k G_k} = \frac{Z_{0k}}{\eta_k}$$

Define-se o coeficiente de reflexão, pelo parâmetro,  $G_k(\omega_{xk}, \omega_{yk})$ , equações (D.17.1) e (D.17.2);

$$\Gamma_p = \frac{\left(\frac{120\pi}{\eta}\right) \frac{\cos \theta_2}{G_2} - \left(\frac{120\pi}{\eta}\right) \frac{\cos \theta_1}{G_1}}{\left(\left(\frac{120\pi}{\eta}\right) \frac{\cos \theta_2}{G_2} + \left(\frac{120\pi}{\eta}\right) \frac{\cos \theta_1}{G_1}\right)}$$

Simplificando

$$\Gamma_p = \frac{\frac{\cos \theta_2}{G_2} - \frac{\cos \theta_1}{G_1}}{\left(\frac{\cos \theta_2}{G_2} + \frac{\cos \theta_1}{G_1}\right)}$$

Pondo em evidência  $G_1$

$$\Gamma_p = \frac{\frac{G_1 \cos \theta_2}{G_2} - \cos \theta_1}{\left(\frac{G_1 \cos \theta_2}{G_2} + \cos \theta_1\right)}$$

ou seja,

$$\Gamma_p = \frac{\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} \cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\left(\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} \cos\theta_2 + \cos\theta_1\right)}$$

Logo

$$\Gamma_p = \frac{\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1}{(\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2 \cos\theta_1)} \quad (D.18)$$

Casando-se os meios,  $\theta_1 = \theta_2$ , a equação (D.18) se anula, assim, não há reflexão.

A conclusão do item “Meios PML-PML” é confirmada.

- Outra análise da interface PML-PML não casada, com  $\eta_1 = \eta_2$ :

Considere a incidência oblíqua na interface normal a  $\hat{x}$ , entre duas regiões PLM (propagação em  $\hat{x}$ ), satisfazendo à lei de Descartes-Snell. Portanto, são idênticas as condutividades em  $\hat{y}$ , assim como os índices de refração de ambas regiões;  $\eta_1 = \eta_2$ ;  $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$  e  $\sigma_{y1}^* = \sigma_{y2}^*$

Os meios não estão adaptados;

$$\frac{\sigma_{xk}}{\omega \varepsilon_0 \eta^2} \neq \frac{\sigma_{xk}^*}{\omega \mu_0}$$

A lei de Snell, equação (D.16.1), sob a condição dos meios não casados, é expressa;

$$\frac{\text{sen}\theta_2}{G_2} = \frac{\text{sen}\theta_1}{G_1}$$

Ou seja

$G_2 \text{sen}\theta_1 = G_1 \text{sen}\theta_2$	(D.18.1)
$(G_2 \text{sen}\theta_1)^2 = (G_1 \text{sen}\theta_2)^2$	

Tendo em vista

- Os parâmetros  $G_k(\omega_{xk}, \omega_{yk})$  ( $k = \{1,2\}$ ), equação (D.17.2).

Substituem-se na equação (D.18.1)

$$(\omega_{x2} \cos^2 \theta_2 + \omega_{y2} \sin^2 \theta_2) \sin^2 \theta_1 = (\omega_{x1} \cos^2 \theta_1 + \omega_{y1} \sin^2 \theta_1) \sin^2 \theta_2 \quad (D.18.2)$$

- E a condição imposta pela lei de Descartes-Snell, incidências, nas fronteiras normais a  $(\hat{x})$ , propagação em  $(\hat{y})$ , que exige igualdade das condutividades em  $(\hat{y})$ , ou seja

$$\omega_{y1} = \omega_{y2} = \frac{\left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_0 \eta^2}\right)}{1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu_0}}$$

A equação (D.18.2) é escrita

$$\omega_{x2} \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 + \omega_{y2} \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1 = \omega_{x1} \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \omega_{y1} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2$$

Após ligeiro algebrismo, obtém-se a relação entre os ângulos (de incidência e refração) e os termos  $(\omega_{x2}$  e  $\omega_{x1})$ :

$$\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cos \theta_1} = \sqrt{\frac{\omega_{x1}}{\omega_{x2}}} \quad (D.18.3)$$

Objetivo: calcular o coeficiente de reflexão em função de  $\omega_{x2}$  e  $\omega_{x1}$ . Seja o coeficiente de reflexão, equação (D.18)

$$\Gamma_p = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1}{(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)}$$

Pondo em evidência a parcela da esquerda

$$\Gamma_p = \frac{\frac{\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2}{\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1} - 1}{\left(\frac{\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2}{\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1} + 1\right)} \quad (\text{D.18.4})$$

Reconhece-se em (D18.4) a equação (D18.3)

$$\Gamma_p = \frac{\sqrt{\frac{\omega_{x1}}{\omega_{x2}}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{x1}}{\omega_{x2}}} + 1\right)}$$

O coeficiente de reflexão é, então, calculado em função de  $\omega_{x2}$  e  $\omega_{x1}$

$$\Gamma_p = \frac{\sqrt{\omega_{x1}} - \sqrt{\omega_{x2}}}{\sqrt{\omega_{x1}} + \sqrt{\omega_{x2}}} \quad (\text{D.19})$$

Casando as regiões: Ao se adaptarem as respectivas regiões,

$$\omega_{xk} = \omega_{yk} = G_k = 1$$

O coeficiente de reflexão se anula, vide equação (D.19), não há reflexão, a onda passa integralmente para o outro meio ( região refratária), vide Figura D.10

- Incidência oblíquana Interface (x-z), normal ( $\hat{y}$ ). Propagação em ( $\hat{y}$ ):

Seja uma onda plana que incide na interface (x-z), normal a  $\hat{y}$ . Define-se o ângulo de incidência,  $\theta$ , com respeito ( $\hat{y}$ ), ou seja,  $\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$ . Veja Figura (D.15)

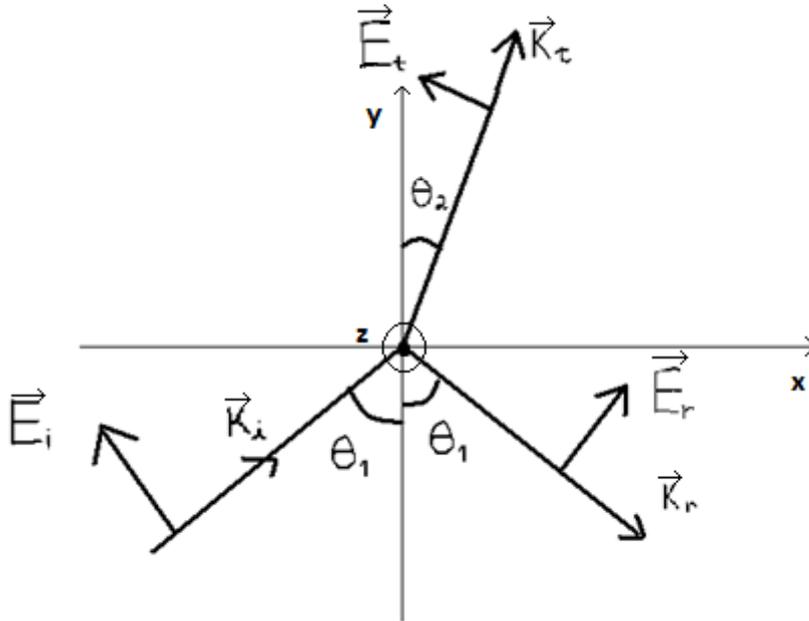


Figura D.14: Incidência de uma onda plana sobre uma interface normal a  $y$ .

Os ângulos de incidência e de refração são referidos, agora, ao vetor normal à interface  $(x,z)$ , logo,  $\vec{n} = \hat{y}$ . As componentes dos campos tangenciais à nova fronteira são idênticas as das incidências anteriores, normal à interface  $\hat{x}$ . Pois, o vetor normal como a superfície sofreram rotações idênticas de  $\frac{\pi}{2}$ . Portanto, todas as fórmulas, conclusões e o coeficiente de reflexão, próprios da incidência normal à interface  $\hat{x}$ , se aplicam, também, à incidência na interface  $(x-z)$ , normal a  $(\hat{y})$ . Propagação em  $(\hat{y})$ .

- Análise rigorosa da incidência oblíqua na Interface  $(x-z)$ , normal a  $(\hat{y})$ . Propagação em  $(\hat{y})$ :

Neste item, a incidência oblíqua a interface normal a  $\hat{y}$  (Modo  $TE_z$ ) será analisada detalhadamente. Veja Figura D.15. A análise é análoga ao da incidência normal a  $\hat{x}$ , desenvolvido anteriormente. A lei de Descartes-Snell garante que, em qualquer ponto da fronteira  $(y=0)$  a fase nos dois meios não depende das coordenadas da interface  $(x)$ . Assim, na fronteira, os campos satisfazem as condições :

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1(y=0) - \vec{E}_2(y=0)) = 0, \quad \vec{n} = \hat{y}$$

ou seja,

$$E_{xi}(y = 0) + E_{xr}(y = 0) = E_{xt}(y = 0)$$

A partir da figura D.15, as componentes dos campos elétricos (incidente, transmitido e refletido) tangentes a fronteira (componentes em  $\vec{x}$ ) são;

$$E_{xi} = E_{0i} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) e^{j\omega(t - \alpha_1 x - \beta_1 y)} = -E_{0i} \text{sen}\theta_1 e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

$$E_{xr} = E_{0r} \cos(\pi + \theta_1) e^{j\omega(t - \alpha_1 x - \beta_1 y)} = -E_{0r} \text{cos}\theta_1 e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

$$E_{xt} = E_{0t} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) e^{j\omega(t - \alpha_2 x - \beta_2 y)} = -E_{0t} \text{sen}\theta_2 e^{j\omega(t - \alpha x - \beta y)}$$

Pela equação (D.7):

$$\alpha_k = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta_k^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fx} G_k}$$

$$\beta_k = \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon_0 \eta_k^2}\right) \frac{1}{\bar{v}_{fy} G_k}$$

com

$$\bar{v}_{fx} = \frac{c}{\eta_k \text{cos}\phi_{xk}}$$

$$\bar{v}_{fy} = \frac{c}{\eta_k \text{sen}\phi_{xk}}$$

Aplicando a condição de fronteira,  $y=0$ , ( condição de Descartes-Snell);

$$-E_{0i} \text{sen}\theta_1 e^{j\omega(t - \alpha_1 x)} + E_{0r} \text{cos}\theta_1 e^{j\omega(t - \alpha_1 x)} = -E_{0t} \text{sen}\theta_2 e^{j\omega(t - \alpha_2 x)} \quad (D. 20)$$

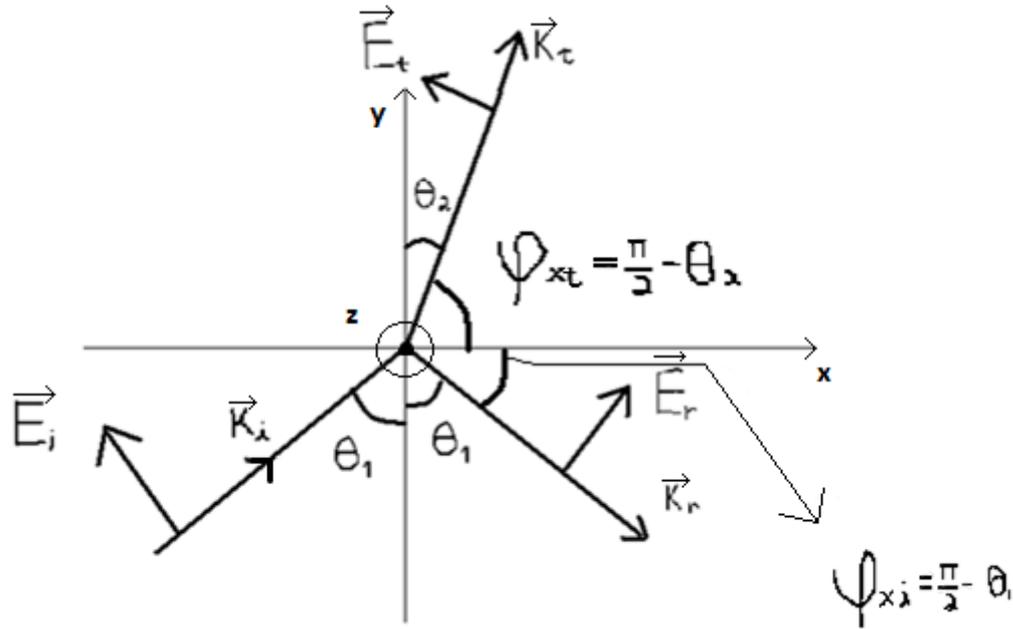


Figura D.15: Relações entre os ângulos.

A fim de se uniformizar as notações angulares em ambas incidências, os ângulos de incidência e refração, na incidência em fronteiras normais  $\hat{y}$  serão, também, referenciado ao unitário ( $\hat{x}$ ):

$$\phi_{xi} = \phi_{xr} = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

$$\phi_{xt} = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

Da análise anterior, tem-se ;

$$\alpha = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0 \eta^2}\right) \frac{\cos \phi_x}{vG}$$

$$\beta = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0 \eta^2}\right) \frac{\sen \phi_x}{vG}$$

ou

$$\alpha = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0 \eta^2}\right) \frac{\cos \theta_k}{vG}$$

$$\beta = \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \varepsilon_0 \eta^2}\right) \frac{\text{sen} \theta_k}{vG}$$

Em incidência normal à interface (  $\hat{y}$  ), a condição de fronteira impõe;

$$E_{x1}(t, x, y) = E_{x2}(t, x, y)$$

ou seja,

$$-E_{0i} \cos \theta_1 e^{j\omega(t-\alpha_1 x)} + E_{0r} \cos \theta_1 e^{j\omega(t-\alpha_1 x)} = -E_{0t} \cos \theta_2 e^{j\omega(t-\alpha_2 x)}$$

Agrupando os respectivos termos;

$$(E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_1 e^{j\omega(t-\alpha_1 x)} = E_{0t} \cos \theta_2 e^{j\omega(t-\alpha_2 x)}$$

A lei de Descartes-Snell estabelece que

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{x2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen} \theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_{x1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen} \theta_1}{G_1}$$

Logo

$$\left[1 - j \left(\frac{\sigma_{x1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right)\right] \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)}{v_1 G_1} = \left[1 - j \left(\frac{\sigma_{x2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2}\right)\right] \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)}{v_2 G_2}$$

ou

$$\left[1 - j \left(\frac{\sigma_{x1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right)\right] \frac{\eta_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)}{v_1 G_1} = \left[1 - j \left(\frac{\sigma_{x2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2}\right)\right] \frac{\eta_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)}{v_2 G_2}$$

ou ainda,

$$\left[1 - j \left(\frac{\sigma_{x1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right)\right] \frac{\eta_1 \text{sen}(\theta_1)}{v_1 G_1} = \left[1 - j \left(\frac{\sigma_{x2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2}\right)\right] \frac{\eta_2 \text{sen}(\theta_2)}{v_2 G_2}$$

Para a lei de Descartes-Snell,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são definidos ao unitário  $\vec{n} = \vec{y}$ . Então:

$$\left[1 - j \left( \frac{\sigma_{x1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2} \right)\right] \frac{\eta_1 \text{sen}(\theta_1)}{G_1} = \left[1 - j \left( \frac{\sigma_{x2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2} \right)\right] \frac{\eta_2 \text{sen}(\theta_2)}{G_2} \quad (D.21)$$

A equação referente à lei de Descartes-Snell, das incidências em interfaces normais a  $\hat{y}$ , equação (D.21), é idêntica as das interfaces normais a  $(\hat{x})$ , substituindo as condutividades em  $\hat{y}$  pelasdas de  $\hat{x}$ .

Incidência em interface normal a  $\hat{x}$ : A incidência em interfaces normais a  $\hat{x}$  será resumida a seguir, já que foi detalhada no item –“Incidência oblíqua na Interface (y-z), normal( $\hat{x}$ ) . Propagação em ( $\hat{x}$ )”, Vide Figura D.16

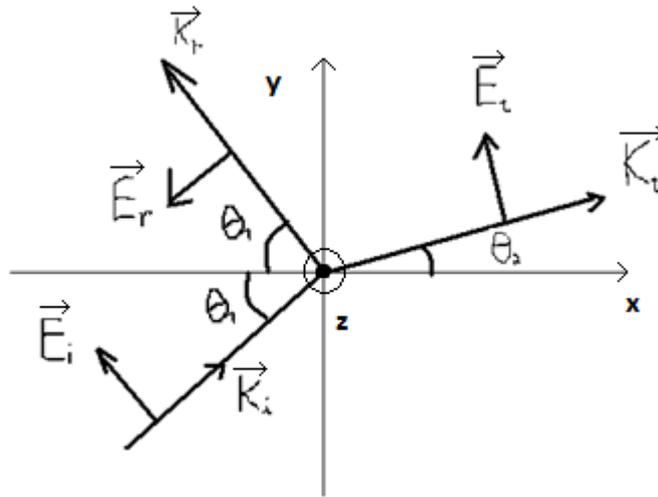


Figura D.16: Onda incidindo na interface normal a  $\hat{x}$ .

A condição de fronteira exige que;

$$E_{0i} \cos \theta_1 e^{j\omega(t - \alpha_1 x - \beta_1 y)} - E_{0r} \cos \theta_1 e^{j\omega(t - \alpha_1 x - \beta_1 y)} = E_{0t} \cos \theta_2 e^{j\omega(t - \alpha_2 x - \beta_2 y)}$$

Na interface,  $x=0$ , tem-se

$$(E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_1 e^{j\omega(t - \beta_1 y)} = E_{0t} \cos \theta_2 e^{j\omega(t - \beta_2 y)}$$

A lei de Descartes-Snell, equação D17.3;

$$\left(1 - j \frac{\sigma_{y2}}{\omega \varepsilon_0 \eta_2^2}\right) \frac{\eta_2 \text{sen} \theta_2}{G_2} = \left(1 - j \frac{\sigma_{y1}}{\omega \varepsilon_0 \eta_1^2}\right) \frac{\eta_1 \text{sen} \theta_1}{G_1}$$

Em que

$$G_k = \sqrt{\omega_{xk} \cos^2 \phi_{xk} + \omega_{yk} \text{sen}^2 \phi_{xk}}$$

Como  $\theta_k$  é referido ao vetor normal  $\vec{n} = \pm \hat{x}$ ,

$$G_k = \sqrt{\omega_{xk} \cos^2 \theta_k + \omega_{yk} \text{sen}^2 \theta_k}$$

Calcula-se o coeficiente de reflexão pela equação (D.18) ;

$$\Gamma_p = \frac{\frac{\text{sen} \theta_1 \cos \theta_2}{\text{sen} \theta_2 \cos \theta_1} - 1}{\left(\frac{\text{sen} \theta_1 \cos \theta_2}{\text{sen} \theta_2 \cos \theta_1} + 1\right)}$$

Com auxílio da equação (D.18.3), obtém-se o coeficiente de reflexão em função dos parâmetros ( $\omega_{x2}$  e  $\omega_{x1}$  )

$$\Gamma_p = \frac{\sqrt{\frac{\omega_{x1}}{\omega_{x2}}} - 1}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{x1}}{\omega_{x2}}} + 1\right)}$$

Portanto;

$$\Gamma_p = \frac{\sqrt{\omega_{x1}} - \sqrt{\omega_{x2}}}{\sqrt{\omega_{x1}} + \sqrt{\omega_{x2}}}$$

A equação do coeficiente de reflexão é válida para ambas incidências; fronteiras normais a  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$

Portanto, se houver casamento entre os meios, veja equações (D.17.1) e (D.17.2), o coeficiente de reflexão se anula, não há ondas refletidas,  $\theta_1 = \theta_2$ , toda onda é transmitida ao meio refratário.

- Incidência de ondas planas dos modos  $TM_z$

Como os modos  $TM_z$  são duais do  $TE_z$ , a sua análise é feita aplicando o teorema da dualidade nas equações e nos campos do modo  $TE_z$ . Assim, a análise apresentada nesse trabalho está completa, aplica-se a ambos os modos.