



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Aline Lopes Dibo

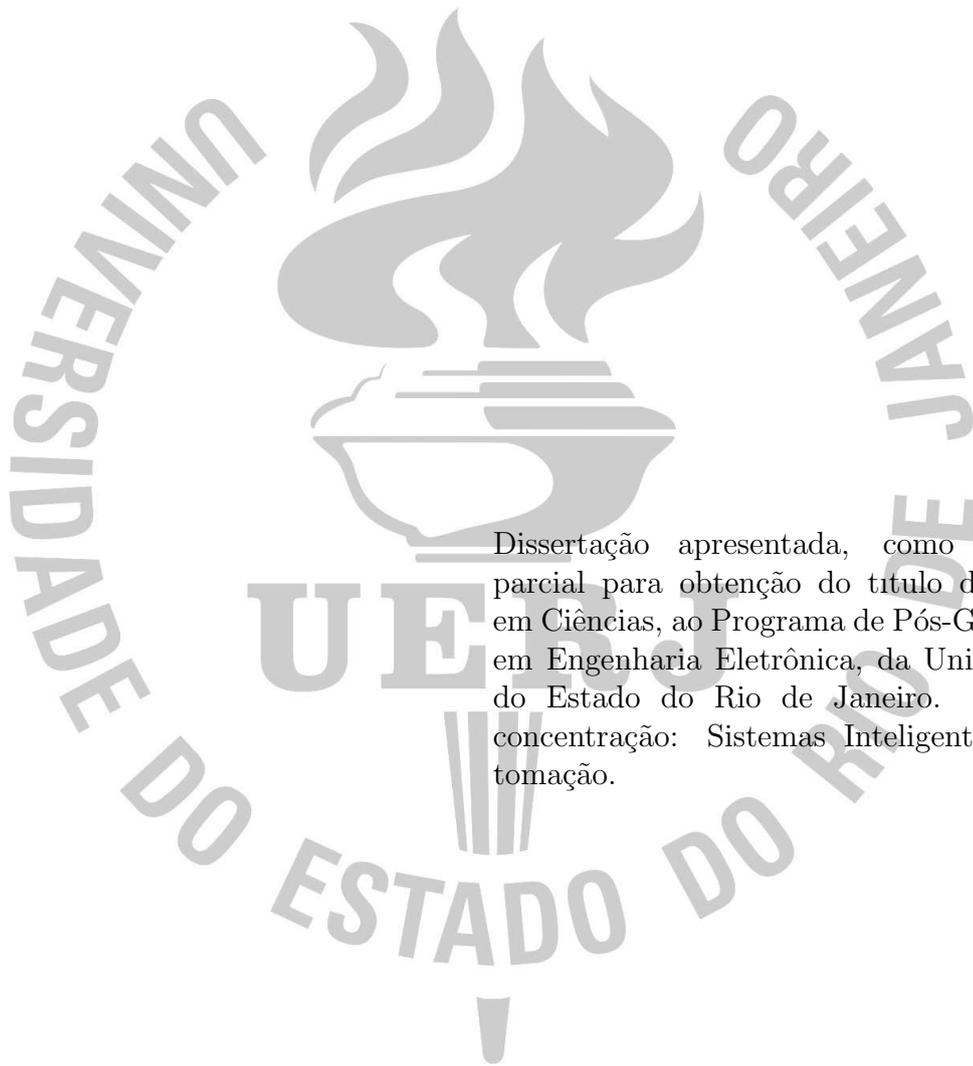
**Controle Extremal para Mapeamentos Estáticos e Dinâmicos  
com Sinal de Hessiana Desconhecido**

Rio de Janeiro

2019

Aline Lopes Dibo

**Controle Extremal para Mapeamentos Estáticos e Dinâmicos com Sinal de Hessiana Desconhecido**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

D544 Dibo, Aline Lopes.  
Controle extremal para mapeamentos estáticos e  
dinâmicos com sinal de Hessiana desconhecido / Aline  
Lopes Dibo. – 2019.  
61f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio  
de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de  
controle ajustável - Teses. 3. Sistemas não-lineares -  
Teses. 4. Otimização matemática - Teses. I. Oliveira, Tiago  
Roux de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681.511.4

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total  
ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Aline Lopes Dibo

**Controle Extremal para Mapeamentos Estáticos e Dinâmicos com Sinal de Hessiana Desconhecido**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação

Aprovado em: 26 de Fevereiro de 2019

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof<sup>a</sup>. Grace Silva Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

---

Prof. Oumar Diene

Departamento de Engenharia Elétrica - UFRJ

Rio de Janeiro

2019

## AGRADECIMENTO

Agradeço ao meu orientador, Tiago Roux, por toda ajuda e confiança no decorrer deste trabalho. Obrigada por ser essa fonte ativa de inspiração, pelo profissional extremamente competente e pelos momentos divertidos. Muito obrigada, foi uma honra trabalhar ao seu lado.

À Victor Hugo, amizade construída durante o mestrado que será levada para a vida. Obrigada pela ajuda, companheirismo e carinho durante essa jornada, obrigada por estar ao meu lado em momentos tão importantes da minha vida. Seu futuro será brilhante, Victor, espero estar por perto, aplaudindo cada vitória sua.

Aos amigos, Dayane, Denis, Manuchi e Martha, que fizeram essa caminhada mais leve e divertida. Obrigada pelos momentos divididos.

Como não só dentro da UERJ essa conquista foi alcançada, ao meu companheiro de vida, parceiro de alma, Thalles. Obrigada pela paciência, por toda a ajuda, sendo presença ou ação, e por acreditar nos momentos em que eu duvidei. Cada pedacinho dessa conquista eu divido com você.

Aos meu pais, Sonia e Jorge, e meus irmãos, Vinicius e Felipe, pela torcida e orações, são vocês minha fonte de coragem.

Aos demais familiares e amigos que durante todo o tempo deram incentivo e apoio, acreditando que esse momento chegaria.

Agradeço ainda às agencias de fomento envolvidas pelo suporte para que esse trabalho fosse possível.

Por último, um agradecimento especial à Universidade do Estado do Rio de Janeiro, que com sua história e convicções não me deixam dúvidas de que fiz a escolha certa. Obrigada pela educação ofertada, amizades construídas e momentos inesquecíveis.

*“A persistência é o menor  
caminho para o êxito.”*

Charles Chaplin

## RESUMO

**DIBO**, Aline Lopes. *Controle Extremal para Mapeamentos Estáticos e Dinâmicos com Sinal de Hessiana Desconhecido* 61f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

O controle extremal tem como objetivo determinar e manter a saída de um mapeamento não-linear desconhecido em seu ponto de extremo. Na literatura, apesar de não se conhecer a função objetivo do problema de otimização em tempo real, é necessário saber se o extremo desconhecido se trata de um ponto de máximo ou de mínimo, informação está caracterizada pelo sinal da Hessiana do mapeamento escalar de sistemas estáticos e dinâmicos. Neste trabalho, propõe-se que o processo de busca pelo extremo (busca extremal) se dê independentemente dessa informação sobre o sinal da Hessiana. A ideia chave para que o processo de otimização aconteça é combinar o esquema clássico de controle extremal com uma função de monitoração chaveada. O algoritmo de chaveamento irá conduzir o sistema em malha fechada ao extremo desconhecido, independente de se tratar de um ponto de máximo ou de mínimo. Além disso, resultados de simulação mostram a robustez do algoritmo proposto a mudanças repentinas do sinal da Hessiana desconhecido e sua capacidade de adaptação na tarefa de tratar problemas distintos de minimização e maximização em tempo real e em sequência.

Palavras-Chave: Controle Extremal, Controle Adaptativo, Sistemas Não-Lineares Incertos, Funções de Monitoração Chaveadas, Otimização em Tempo Real.

## ABSTRACT

**DIBO**, Aline Lopes. *Extremum Seeking for Static and Dynamic Maps with Unknown Hessian Signs*. 61f. Master Thesis (Master in Science of Electronic Engineering) - Engineering Faculty, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Extremum seeking control aims at determining and keeping the output of a non-linear map on its unknown extremum point. In the literature, despite of considering an unknown objective function in the real-time optimization problem, it is mandatory to know whether the extremum point is a maximum or a minimum, which is determined by means of the Hessian signs in case of static and dynamic scalar maps. This paper proposes the process of extremum seeking occurs independent of the Hessian sign information. The key idea is to combine the classical extremum seeking approach with a switching monitoring function. The switching algorithm will drive the closed-loop system to the unknown extremum, neglecting if it is a maximum or a minimum. In addition, simulation results show the robustness properties of the proposed recipe under changes of the Hessian signs occurring “on-the-fly” fashion as well as its adaptability to solve distinct online minimizing and maximizing problems in sequence.

Keywords: Extremum-seeking Control, Adaptive Control, Uncertain Nonlinear Systems, Switching Monitoring Function, Real-time Optimization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema de busca extremal baseado em perturbações com o mapeamento $y = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2$ .....	18
Figura 2 - Resultado de simulação em malha fechada do mapeamento $y = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2$ e com os seguintes parâmetros: $\omega = 10$ , $a = 0.2$ , $k = 0.2$ , $H = -0.2$ , $y^* = 5$ e $\theta^* = 2$ . .....	21
Figura 3 - Esquema de controle por busca extremal pelo método gradiente.....	23
Figura 4 - Esquema de ESC pelo método gradiente utilizando filtros passa-alta e passa-baixa. ....	26
Figura 5 - Trajetória da função de monitoração $\varphi_m$ (linha pontilhada) e $ \hat{G}(t) $ (linha sólida). ....	31
Figura 6 - Resultados de simulação: (a) entrada do mapa $\theta(t)$ e o ponto de otimização $\theta^*$ ; (b) saída $y(t)$ e o valor ótimo $y^*$ ; (c) função de monitoração $\varphi_m(t)$ e $ \hat{G}(t) $ ; (d) <i>zoom</i> no sinal de saída na ocorrência de uma mudança de direção do sinal de controle.....	35
Figura 7 - Esquema de busca extremal para sistema dinâmico.....	37
Figura 8 - Esquema de busca extremal com a perturbação periódica com a planta sendo vista como um mapa estático.....	38
Figura 9 - Esquema de busca extremal para sistema dinâmico com sinal da Hessiana desconhecido. ....	48
Figura 10- Entrada do mapa $x(t)$ e o ponto de otimização $x^*$ . ....	51
Figura 11- Saída $y(t)$ e valor ótimo $y^*$ . ....	52
Figura 12- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e $ \xi(t) $ . ....	53
Figura 13- Mudança de sinal da estimativa da Hessiana. ....	54
Figura 14- Esquema de busca extremal baseado no método de Newton. ....	56

## LISTA DE SIGLAS

ABS	<i>Antilock Braking System</i>
BLM	<i>Boundary Layer Model</i>
ESC	<i>Extremum Seeking Control</i>
ISS	<i>Input-to-State Stable</i>
MISO	<i>Multiple-Input Single-Output</i>
QSS	<i>Quasi-Steady State</i>
RM	<i>Reduced Model</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
VLP	Valor Presente Líquido

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
1	<b>CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS ESTÁTICOS</b>	18
2	<b>CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS ESTÁTICOS COM SINAL DE HESSIANA DESCONHECIDO</b> .....	22
2.1	Formulação do Problema .....	22
2.2	Função de Monitoração .....	25
2.2.1	Majorante do Gradiente .....	25
2.2.2	Projeto da Função de Monitoração .....	30
2.3	Análise de Estabilidade .....	32
2.4	Resultados de Simulação .....	34
3	<b>CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS DINÂMICOS</b>	36
3.1	Análise média .....	40
3.2	Análise via Perturbação Singular .....	44
4	<b>CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS DINÂMICOS COM SINAL DE HESSIANA DESCONHECIDO</b> .....	47
4.1	Formulação do Problema .....	47
4.2	Majorante do Gradiente .....	48
4.3	Projeto da Função de Monitoração .....	49
4.4	Análise de Estabilidade .....	49
4.5	Resultados de Simulação .....	51
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	55
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	58

## INTRODUÇÃO

O controle extremal é um método de otimização em tempo real que não se baseia no conhecimento do modelo [1] e tem como objetivo determinar o extremo de uma função quando aplicado em situações em que se depara com uma não-linearidade, e esta apresenta um mínimo ou máximo no problema de controle. Essa não-linearidade pode ser física, estar inserida na planta, ou pode estar ainda na formulação do problema, por meio de uma função objetivo de um problema de otimização que esteja, de alguma forma, associada ao sistema [2].

### Histórico

O controle extremal, ou busca extremal, do inglês *extremum seeking control* (ESC) surgiu com Leblanc [3] numa proposta de um mecanismo de controle que buscava manter uma máxima transferência de potência entre uma linha de transmissão e um bonde elétrico.

Em 1951, Draper e Li [4] publicam um estudo sobre um algoritmo de controle extremal e seu desempenho, com a proposta de otimizar um motor de combustão elétrica. Sendo, provavelmente esta, a primeira publicação sobre o assunto na literatura inglesa.

Nas décadas de 1950 e 1960, o controle extremal ganhou destaque, assim como outras formas de controle adaptativo, com estudos focados na descrição de algoritmos e no desempenho em aplicações particulares. Entre as décadas de 1970 e 2000 o foco da pesquisa passou a ser a busca de novas estratégias de controle adaptativo de maior complexidade com garantia de desempenho e estabilidade [5].

A publicação de Krstić e Wang, em 2000 [1] provando a estabilidade do sistema clássico de controle extremal despertou novamente o interesse no assunto. Este estudo inclusive, é a base do terceiro capítulo desta dissertação, como será visto adiante.

Esse método é considerado uma das áreas mais promissoras do controle adaptativo [6]. Tendo em vista que a necessidade de otimizar plantas com o objetivo de reduzir os custos operacionais se adequando às especificações do produto é cada vez maior, o controle extremal vem ganhando destaque na teoria de controle.

No tradicional ESC (Extremum Seeking Control) baseado em perturbações (*dither*) utiliza-se um filtro passa-alta na saída da planta e uma perturbação senoidal para estimar

o gradiente da função objetivo [7]. Este método é reconhecido pela sua simplicidade e sua adaptação satisfatória. Porém, pode-se garantir apenas a estabilidade local, assumindo-se acesso a todo vetor de estado [1].

Em [8], é desenvolvida uma análise matemática assim como resultados de simulações com o objetivo de mostrar que a forma dos sinais de perturbação exercem influência direta na precisão, velocidade e domínio de convergência do controlador extremal. Já em [9], trabalha-se com o controle extremal sendo considerado um problema de controle não-linear que depende do estado e do ganho de alta frequência que altera a direção de controle no ponto de extremo desejado.

Recentemente, a área do ESC alcançou uma certa maturidade e uma nova geração de estratégias de ESC foi aplicada a uma ampla classe de problemas, tais como: busca extremal para sistemas dinâmicos híbridos [10], sistemas dinâmicos com atrasos [11], equações diferenciais parciais [12] e busca extremal estocástica [13], para citar alguns.

Nos últimos anos, [14], [15], [16], foram desenvolvidos trabalhos de ESC baseados em funções de monitoração, porém em todas elas o sinal da Hessiana é conhecido. Sendo a Hessiana, a segunda derivada da saída do mapeamento estático ou função custo com respeito a sua entrada. A proposta desse trabalho é desenvolver uma abordagem inédita na literatura e apresentar resultados em que, independente de conhecer o sinal da Hessiana, o sistema seja conduzido para uma vizinhança pequena do extremo desconhecido.

### **Algumas Aplicações Recentes**

Como dito anteriormente, o ESC é considerada uma área promissora do controle adaptativo, com isso vem se destacando e sendo alvo de estudos em diversas aplicações.

Uma dessas áreas de destaque é no projeto de freios ABS (*Antilock Braking System*), onde o coeficiente de força de fricção alcança um valor máximo para um valor desconhecido não-nulo de coeficiente de deslizamento da roda. Essa função varia dependendo do asfalto onde o carro se encontra, isso faz com que o sistema tenha que se adaptar ao tipo de solo que esteja tendo contato. Com isso, o ESC seria usado para projetar um controlador capaz de alcançar esse valor máximo independente do tipo de pista, [7], [17], [2].

Uma importante aplicação do ESC na indústria é na otimização de coeficientes

de controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) [2]. Em [18] a técnica de busca extremal é apresentado com potencial para sintonizar um controlador PID, sendo feito ainda uma comparação de desempenho com outros método de sintonia, porém todos apresentando um pior desempenho.

Em [19] foi estudada a possibilidade de usar o método de ESC para otimizar a produção de petróleo em poços que operam por elevação artificial através da injeção de gás *lift*. O objetivo seria encontrar o sistema em malha fechada e conservá-lo em torno do ponto ótimo da curva de produção, aumentando assim o Valor Presente Líquido (VPL) do sistema e os lucros de operação. Os métodos aplicados hoje se mostram, em geral, lentos e não automatizados, essa proposta foi desenvolvida com o propósito de ser uma alternativa, e, por se tratar de um controle adaptativo que não necessita do conhecimento explícito da planta, o ESC se mostra uma boa opção por envolver várias incertezas na modelagem deste problema.

Em [20] o controle extremal é aplicado na otimização de bioreatores. Enquanto que em [21] é apresentado uma forma de diminuir os impactos em válvulas de motores de combustão.

Em [5] foi apresentado uma proposta de ESC via função de monitoração, assim como neste trabalho, com a finalidade de simular freios ABS e posicionar painéis solares. Num experimento prático, o controle extremal se mostrou uma boa alternativa a ser aplicada no problema de *source seeking*. Entretanto, a informação da Hessiana era assumida de conhecimento do projetista.

## Objetivo

O objetivo do controle extremal é determinar e manter o extremo de uma função não-linear desconhecida. Apesar de não conhecer a função objetivo, é necessário saber se esta se trata de uma função de máximo ou de mínimo, sendo caracterizada pelo sinal da Hessiana.

A objetivo deste trabalho é desenvolver uma nova abordagem na literatura e apresentar resultados em que, independentemente de conhecer o sinal da Hessiana, o sistema seja conduzido para uma vizinhança pequena do extremo desconhecido. Ou seja, é proposto que a otimização seja feita sem que se possa afirmar se o extremo se trata de um

ponto de máximo ou de mínimo.

O estudo será realizado tanto para mapeamentos estáticos quanto para sistemas dinâmicos e, como dito anteriormente, utilizando um algoritmo de chaveamento baseado em função de monitoração para alcançar a otimização, apresentando resultados de simulação de forma a ilustrar o desenvolvimento.

## Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, o principal método utilizado é o Controle Extremal, um método de otimização em tempo real baseado no conhecimento limitado do sistema [22]. O desafio encontrado é o fato de, como dito anteriormente, o sinal da Hessiana não ser conhecido.

A execução do projeto será dividida em etapas: num primeiro momento uma fundamentação matemática apresentando casos de esquemas de controle extremal pelo método gradiente para sistemas estáticos e dinâmicos é apresentada, em seguida será criado um cenário onde os esquemas já discutidos possuam sinal de Hessiana desconhecido, sendo desenvolvida uma análise teórica e, posteriormente, a comprovação destas por meio de simulações numéricas.

A metodologia utilizada no desenvolvimento do projeto é:

- O estudo da estabilidade de sistemas não-lineares;
- Encontrar o modelo médio do sistema em malha fechada;
- Invocar o *Teorema da Média* [23] para concluir a convergência assintótica para vizinhança do extremo;
- Aplicar o *Método da Perturbação Singular* [23].

Durante o estudo e simulações, foi utilizada um algoritmo de chaveamento baseado em função de monitoração, capaz de determinar a direção do controle (antes desconhecida) a partir de um algoritmo de comutação [24] para contornar o problema da falta de conhecimento do sinal da Hessiana.

## Notações e Normas

Considerando um sistema não linear genérico  $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$ , onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x, \epsilon)$  é periódico em  $t$  com  $T$ -período, isto é,  $f(t + T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$ . Então, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por  $\dot{x}_{av} = f_{av}(x_{av})$ , com  $f_{av}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$ , onde  $x_{av}(t)$  denota a versão média do estado  $x(t)$  [23]. Em [23], define-se uma função vetorial  $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$  é dita de ordem  $\mathcal{O}(\epsilon)$  dentro do intervalo  $[t_1, t_2]$  se existem constantes positivas  $k$  e  $\epsilon^*$  tais que  $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon \quad \forall \epsilon \in [t_1, t_2]$  e  $\forall t \in [t_1, t_2]$ . Por vezes, é possível estimar  $k$  e  $\epsilon^*$  e, com isso, quantificar  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Caso contrário, deve-se admitir  $\mathcal{O}(\epsilon)$  como sendo uma “ordem da relação de magnitude” para “ $\epsilon$  suficientemente pequeno”.

### Teorema da Média para Equações Diferenciais [23]

Considere o sistema original

$$\dot{z} = f(\omega t, z), \quad z(0) = z_0, \quad (1)$$

sendo  $f(\omega t, z)$  e suas derivadas parciais em relação a  $z$  até segunda ordem contínuas e limitadas por  $(\omega t, z) \in [0, \infty) \times D_0$  para cada conjunto compacto  $D_0 \subset D$ , onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é o domínio. Considerando  $f$  uma função  $T$ -periódica com  $T > 0$  em  $\omega t$ , ou seja,  $f(s, z) = f(s + T, z)$ ,  $\forall s \in [0, \infty)$ . Considere o sistema médio

$$\dot{z}_{av} = f_{av}(z_{av}), \quad z_{av}(0) = z_{av,0}. \quad (2)$$

com

$$f_{av}(z_{av}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, z_{av}) d\tau. \quad (3)$$

Supondo que  $z_{av} = 0 \in D$  é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (2),  $\omega \subset D$  é um subconjunto compacto da região de atração,  $z_{av}(0) \in \omega$ , e  $z(0) - z_{av} = \mathcal{O}(1/\omega)$ , então existe algum  $\bar{\omega} > 0$ ,  $\forall \omega > \bar{\omega}$ , tal que

$$\|z(t) - z_{av}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathcal{O}(1/\omega), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (4)$$

Além disso, (1) tem uma única solução,  $T$ -periódica, exponencialmente estável  $\bar{z}(t, 1/\omega)$

com propriedade  $\|\bar{z}(t, 1/\omega)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathcal{O}(1/\omega)$ .

Deve-se notar que  $\bar{z}$  é a aproximação da solução de (1), ao considerarmos a solução do sistema médio como sendo (2) [23]. Analizando o sistema médio e provando que este é exponencialmente estável, pode-se aplicar o caso acima. Então, o sistema original (1) é exponencialmente estável e a solução tem comportamento semelhante à (4).

### Método da Perturbação Singular [23]

Tem-se o seguinte modelo em cascata comumente utilizado no método de perturbação singular [23], [25], [26]:

$$\dot{v} = f(t, v, x, \mu), \quad (5)$$

$$\mu \dot{x} = g(t, v, x, \mu), \quad (6)$$

A solução do sistema *quase estacionário* (QSS) [23] de (6) é

$$x = h(t, v), \quad (7)$$

que é obtido definindo  $\mu = 0$  e obtendo  $0 = g(t, v, x, 0)$  de (6).

Por outro lado, o *modo reduzido* (RM) [23] é definido por

$$\dot{\bar{v}} = f(t, \bar{v}, h(t, \bar{v}), 0). \quad (8)$$

A separação da escala de tempo pode ser avaliada usando o *erro de discrepância*:

$$\tilde{x} = x(t, \mu) - h(t, v(t, \mu)). \quad (9)$$

Substituindo-se (9) em (5) e (6), tem-se

$$\dot{v} = f(t, v, \tilde{x} + h(t, v), \mu), \quad (10)$$

$$\mu \dot{\tilde{x}} = g(t, v, \tilde{x} + h(t, v), \mu) - \mu \frac{\partial h}{\partial t} - \mu \frac{\partial h}{\partial v} f(t, v, \tilde{x} + h(t, v), \mu). \quad (11)$$

Reescalando a variável tempo de forma que  $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$ , com  $t_0$  sendo o instante de tempo

inicial, tem-se que  $\frac{d}{d\tau} = \mu \frac{d}{dt}$ , o que leva a

$$\mu \dot{\tilde{x}} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau}. \quad (12)$$

Fazendo-se  $\mu = 0$ , “congela-se” o tempo  $t = t_0 + \mu\tau$  em  $t_0$  e  $v(t_0 + \mu\tau, \mu)$  em  $v(t_0, 0)$ . Assim sendo,  $t$  e  $v$  são vistos como parâmetros constantes e (11) pode ser reescrito em função da nova variável de tempo  $\tau$  como

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = g(t, v, \tilde{x} + h(t, v), 0), \quad (13)$$

que é denominado de *boundary layer model* (BLM) [23].

Com isso, pode-se estabelecer os principais resultados de estabilidade do sistema (5)-(6) no próximo teorema.

**Teorema:** Sendo os modelos RM (8) e BLM (13) exponencialmente estáveis na origem, então, se  $\mu$  for suficientemente pequeno, tem-se que:

$$v(t, \mu) = \bar{v}(t) + \mathcal{O}(\mu), \quad (14)$$

$$x(t, \mu) = h(t, \bar{v}(t)) + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}\left(e^{-\gamma \frac{t-t_0}{\mu}}\right). \quad (15)$$

Além disso, visto que  $g(t, 0, 0, \mu) = 0$  e  $h(t, 0) = 0$ , então, para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno, a origem  $x = 0$  é localmente exponencialmente estável.

## Organização da Dissertação

Este texto está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 será apresentado o caso simples de controle extremal para sistemas estáticos pelo método Gradiente, ilustrando-se por meio de simulação o comportamento da entrada e da saída do sistema. Este capítulo é uma revisão bibliográfica e servirá como base para o estudo desenvolvido no caso estático.

No Capítulo 2 será considerado um cenário em que, num esquema de controle extremal para sistemas estáticos pelo método do Gradiente, o sinal da Hessiana seja desconhecido. Sendo essa falta de conhecimento um problema para a otimização, será mostrado ainda um algoritmo de chaveamento agindo de forma a contornar esse problema.

Sendo construída uma função de monitoração e feita a análise da estabilidade. Resultados de simulação serão apresentados de forma a consolidar o desenvolvimento apresentado e efetivar a contribuição para este trabalho.

No Capítulo 3, será utilizado o estudo desenvolvido em [1] de modo a apresentar um esquema de controle extremal também pelo método Gradiente, porém desta vez para sistemas dinâmicos, que servirá de base para as contribuições do Capítulo 4.

No Capítulo 4, também uma contribuição apresentada por esta dissertação assumiremos que o sinal da Hessiana é desconhecido em mapeamentos dinâmicos. A função de monitoração deverá ser modificada e a análise refeita para o caso mais geral. Como no Capítulo 2, resultados de simulação serão apresentados.

Por fim, serão apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 1 CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS ESTÁTICOS

Como dito anteriormente, a busca extremal é um método de otimização em tempo real que não é baseada no conhecimento do modelo. Como proposto, neste trabalho o estudo será desenvolvido utilizando apenas o método do gradiente. Nesta seção será apresentada a ideia básica do caso de um mapa estático de uma única entrada e única saída.

A versão mais comum desse método, emprega sinais de perturbação com o objetivo de se estimar o gradiente do mapa que se desconhece. Na Figura 1, é mostrado um esquema básico de busca extremal pelo método do gradiente. Pode-se dizer que o objetivo da busca extremal é encontrar uma entrada  $\theta(t)$  em uma pequena vizinhança do ponto  $\theta^*$  que minimize ou maximize a saída  $y$  mensurada [27].

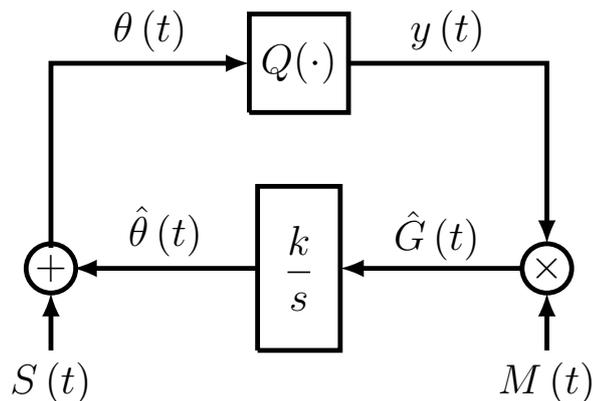


Figura 1 - Esquema de busca extremal baseado em perturbações com o mapeamento  $y = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2$ .

Vamos considerar nessa análise da Figura 1 um mapa quadrático de uma entrada definido por

$$y(t) = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2, \quad (16)$$

O sinais de perturbação empregados são definidos como

$$S(t) = a \sin(\omega t), \quad (17)$$

$$M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (18)$$

Para o desenvolvimento, três diferentes sinais de  $\theta$  são apresentados, o sinal de entrada  $\theta$ , o ponto desconhecido que otimiza o mapa,  $\theta^*$ , e a estimativa desse ponto,  $\hat{\theta}$ . São desconhecidos ainda  $y^*$ ,  $H$  e  $\theta^*$ . Para esse método deve-se conhecer apenas o sinal de  $H$ , ou seja, saber se o mapa possui um extremo máximo ou mínimo, e ser capaz de escolher um ganho de adaptação  $k$  tal que  $\text{sgn}(k) = -\text{sgn}(H)$ . Deve-se ainda escolher uma frequência  $\omega$  que seja relativamente grande quando comparada aos valores de  $a$ ,  $k$  e  $H$ . Analisando a Figura 1, observa-se que

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\omega t). \quad (19)$$

Vale ressaltar, que a senóide é apenas uma escolha possível para o sinal de perturbação, qualquer sinal periódico com média nula poderia ser utilizado. A estimativa  $\hat{\theta}(t)$  é gerada por um integrador com ganho de adaptação  $k$  controlando a velocidade da estimação.

O objetivo do algoritmo de busca extremal é levar o erro entre a estimativa  $\hat{\theta}(t)$  e o ponto desconhecido  $\theta^*$ , ou seja,

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (20)$$

para zero. Com auxílio da equação (20), pode-se reescrever (19) como

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + \theta^* + a \sin(\omega t). \quad (21)$$

Analisando novamente a Figura 1 e lembrando (16), é possível concluir que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= k \frac{2}{a} \sin(\omega t) y \\ &= k \frac{2}{a} \sin(\omega t) \left[ y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2 \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

A partir da equação (20) pode-se perceber que  $\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t)$ . Sendo assim, substituindo-

se (21) em (22), pode-se concluir que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}}(t) &= k \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[ y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}(t) + a \operatorname{sen}(\omega t) \right)^2 \right] \\ &= k \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \left[ y^* + \frac{H}{2} \left( \tilde{\theta}^2(t) + 2a\tilde{\theta}(t) \operatorname{sen}(\omega t) + a^2 \operatorname{sen}^2(\omega t) \right) \right] \\ &= k \frac{2}{a} y^* \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{kH}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + 2kH\tilde{\theta}(t) \operatorname{sen}^2(\omega t) + kaH \operatorname{sen}^3(\omega t),\end{aligned}$$

sabendo que  $\operatorname{sen}^2(\omega t) = (1 - \cos(2\omega t)) / 2$ , tem-se

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k \frac{2}{a} y^* \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{kH}{a} \operatorname{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + kH\tilde{\theta}(t) - kH\tilde{\theta}(t) \cos(2\omega t) + kaH \operatorname{sen}^3(\omega t) \quad (23)$$

Para continuidade da análise de estabilidade aplica-se o Teorema da Média. O método aproxima a solução de um dado sistema pela solução de um sistema médio [23]. No sistema em estudo isto é feito calculando-se a média temporal dos termos senoidais, o que leva a

$$\dot{\hat{\theta}}_{\text{av}}(t) = kH\tilde{\theta}_{\text{av}}(t). \quad (24)$$

Sabendo que  $k = |k| \operatorname{sgn}(k) = -|k| \operatorname{sgn}(H)$ , tem-se

$$\dot{\hat{\theta}}_{\text{av}}(t) = -|k| |H| \tilde{\theta}_{\text{av}}(t), \quad (25)$$

cuja solução é exponencialmente estável. O Teorema da Média [23] garante a existência de uma frequência  $\omega$  suficientemente grande tal que, se a condição inicial de  $\hat{\theta}(t)$  estiver suficientemente próxima ao ponto de otimização  $\theta^*$ , então:

$$|\theta(t) - \theta^*| \leq |\theta(0) - \theta^*| \exp(-|k| |H| t) + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (26)$$

O exemplo de simulação apresentado na Figura 2, ilustra o que foi descrito neste capítulo. Pode-se observar, em resultado de simulação em malha fechada utilizando o mapa estático (16), o comportamento da entrada  $\theta(t)$  e da saída  $y(t)$  convergindo para o valor ótimo  $\theta^*$  e  $y^*$  respectivamente, além da estimativa  $\hat{\theta}$  que converge também para o valor que otimiza o mapa e  $\hat{G}$  com o comportamento esperado.

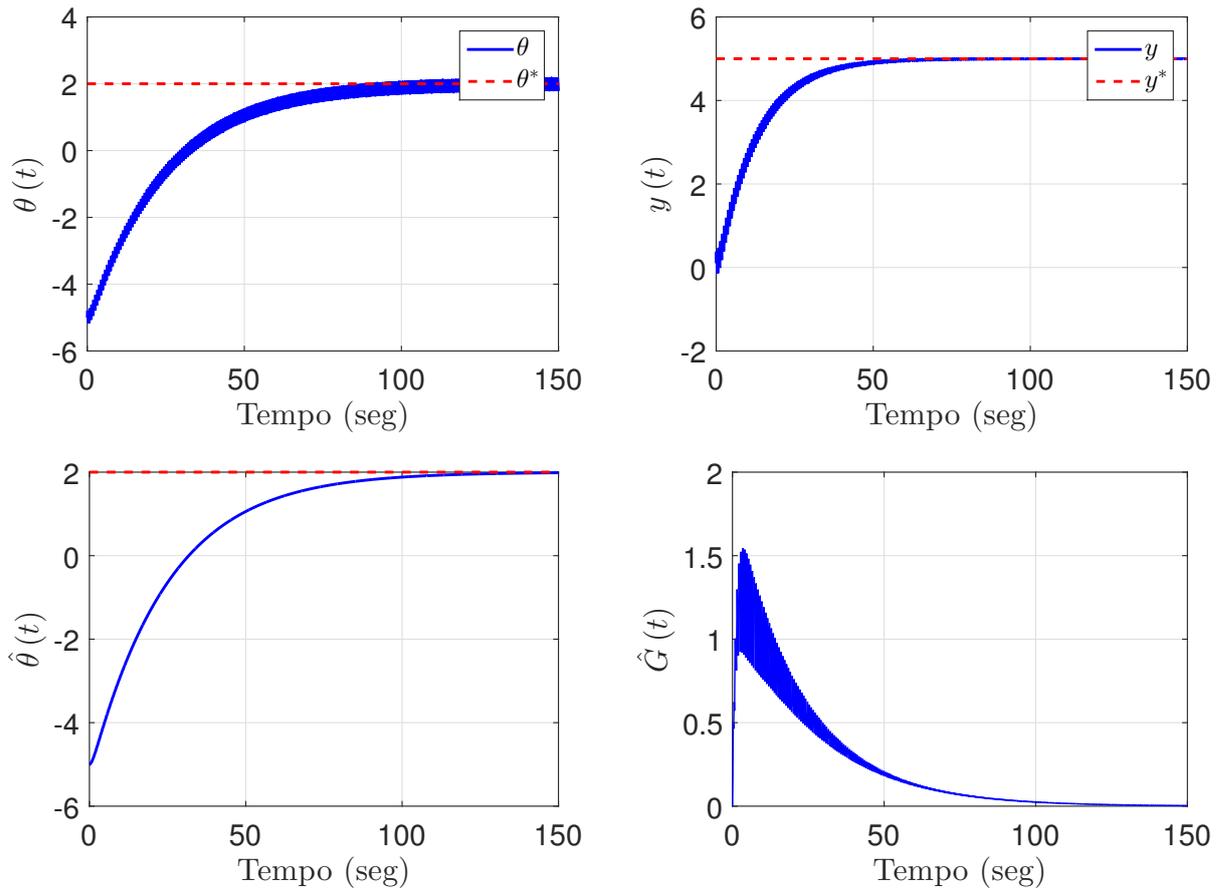


Figura 2 - Resultado de simulação em malha fechada do mapeamento  $y = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2$  e com os seguintes parâmetros:  $\omega = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $k = 0.2$ ,  $H = -0.2$ ,  $y^* = 5$  e  $\theta^* = 2$ .

## 2 CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS ESTÁTICOS COM SINAL DE HESSIANA DESCONHECIDO

Como dito anteriormente, no geral, em um problema de otimização clássica assume-se que o sinal da Hessiana é sempre conhecido. Neste trabalho está sendo questionado justamente a necessidade do conhecimento desse sinal, ou seja, está sendo proposto que a otimização seja feita sem que se possa afirmar que o ponto de extremo é um máximo ou um mínimo. Neste capítulo, então, será apresentada uma situação parecida com a vista no Capítulo 1, porém se desconhecendo o sinal da Hessiana. Essa falta de conhecimento pode ser contornada utilizando um algoritmo de chaveamento baseado em uma função de monitoração para a estimativa do gradiente. Será apresentado ainda, a análise da estabilidade e resultados de simulação de forma a consolidar o estudo. Esta etapa da pesquisa deu origem a um artigo apresentado no XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2018) e sob revisão no 27th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2019), veja [28] e [29], respectivamente.

### 2.1 Formulação do Problema

Considere o mapa estático

$$y(t) = Q(\theta), \quad (27)$$

com um extremo na vizinhança de  $\theta^*$  e podendo mensurar  $y$  e manipular  $\theta$ . O esquema de busca extremal baseado em gradiente para este mapa estático quadrático de uma única entrada, é mostrado na Figura 3, e seus sinais de perturbação serão mantidos como

$$S(t) = a \operatorname{sen}(\omega t), \quad (28)$$

$$M(t) = \frac{2}{a} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (29)$$

Assim como no Capítulo 1, o mapa quadrático a ser otimizado é definido por

$$y(t) = Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2, \quad (30)$$

onde  $H \neq 0$  é a Hessiana desconhecida do mapeamento estático,  $(\theta^*, y^*)$  é o ponto de

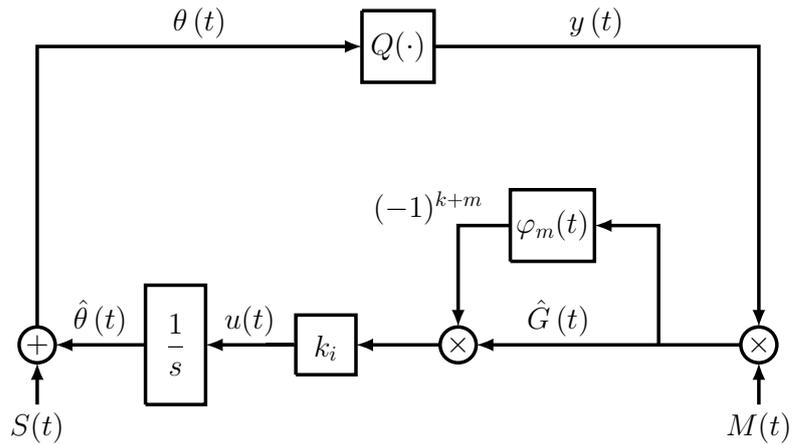


Figura 3 - Esquema de controle por busca extremal pelo método gradiente.

extremo desconhecido, com  $\theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$ . Como proposto, será assumido que o sinal da Hessiana ( $\text{sgn}(H)$ ) é desconhecido.

Como dito no capítulo anterior, os  $\theta$  presentes no desenvolvimento são a entrada  $\theta$ , o ponto desconhecido que otimiza o mapa,  $\theta^*$ , e a estimativa desse ponto,  $\hat{\theta}$ . Diferente do esquema visto na Figura 1, pode ser visto também, a função de monitoração  $\varphi_m(t)$ , onde  $k \in [0, 1, \dots]$  é o índice de chaveamento gerado pela função de monitoração e  $m \in \{0, 1\}$ . Logo, dependendo da escolha de  $m$  (0 ou 1) podemos definir o valor inicial para a estimativa da direção de controle desconhecida  $(-1)^{(k+m)}$  [30].

A entrada do mapa,  $\theta(t)$ , continua sendo composta pela perturbação de sinal  $S(t)$  somada à estimativa de  $\theta^*$ .

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \text{sen}(\omega t), \quad (31)$$

e o sinal de controle pode ser definido por

$$u(t) = (-1)^{(k+m)} k_i \hat{G}(t). \quad (32)$$

A estimativa  $\hat{\theta}$  controla a velocidade de estimação com o integrador e o ganho  $k_i$ . Assim como definido no capítulo anterior, para que sejam encontrados resultados satisfatórios é preciso que o erro de estimação  $\tilde{\theta}(t)$ , convirja para zero, e esse erro é obtido

através da diferença entre a estimativa  $\hat{\theta}(t)$ , e o ponto de otimização do mapa  $\theta^*$ ,

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*. \quad (33)$$

Ainda analisando a Figura 3, facilmente constata-se que

$$\hat{G}(t) = M(t)y(t). \quad (34)$$

Pode-se afirmar também que

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = (-1)^{(k+m)} k_i \hat{G}(t), \quad (35)$$

e substituindo (29) e (30) em (34), tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) &= y^* \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t) \text{sen}(\omega t) + \\ &+ 2H\tilde{\theta}(t) \text{sen}^2(\omega t) + aH \text{sen}^3(\omega t). \end{aligned} \quad (36)$$

Sabendo que  $\text{sen}^2(\omega t) = (1 - \cos(2\omega t))/2$ , pode-se reescrever (36) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) &= y^* \frac{2}{a} \text{sen}(\omega t) + \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t) \text{sen}(\omega t) + H\tilde{\theta}(t) \\ &- H\tilde{\theta}(t) \cos(2\omega t) + aH \text{sen}^3(\omega t). \end{aligned} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (35), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= (-1)^{(k+m)} \left[ k_i \frac{2}{a} y^* \text{sen}(\omega t) - H\tilde{\theta} \cos(2\omega t) \right. \\ &\left. + \frac{H}{a} \text{sen}(\omega t) \tilde{\theta}^2(t) + H\tilde{\theta} + aH \text{sen}^3(\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Novamente chegaremos a um resultado onde se faz necessário aplicar a Teoria da Média [23] de forma a continuar a análise da estabilidade. Para (38), novamente um sistema médio será encontrado calculando a média temporal dos termos senoidais. Com

isso, chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) &= (-1)^{(k+m)} k_i H \tilde{\theta}_{av}(t), \\ &= [(-1)^{(k+m)} \text{sgn}(k_i) \text{sgn}(H)] |k_i| |H| \tilde{\theta}_{av}(t).\end{aligned}\quad (39)$$

A estabilidade desse sistema só poderia ser garantida caso fosse conhecido o sinal de  $H$ , para, a partir deste, definir o sinal de  $k_i$ . Como o sinal da Hessiana é desconhecido, se faz necessário usar a função de monitoração, sendo esta aplicada sempre que o sinal de controle é desconhecido. Mais detalhes serão apresentados na próxima seção.

## 2.2 Função de Monitoração

### 2.2.1 Majorante do Gradiente

A função de monitoração é construída com base no majorante do Gradiente. Para isso, assumiremos num primeiro momento, que o sinal de  $H$  é conhecido, ou seja, que é possível saber se o mapa possui um sinal de máximo ou de mínimo.

Partindo do esquema básico, Figura 4, por ora é conveniente a utilização de filtros passa-alta e passa-baixa para fornecer uma explicação intuitiva sobre o funcionamento do esquema (e obter o majorante para a estimativa  $\hat{G}(t)$ ). Embora o uso desses filtros não seja necessário para a obtenção de um resultado de estabilidade rigoroso, é sabido que seu uso pode melhorar o desempenho de controle do sistema em malha fechada.

Analisando novamente a Figura 4, e substituindo (31) em (30), tem-se

$$\begin{aligned}y(t) &= y^* + \frac{H}{2} \left[ \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) + a \text{sen}(\omega t) \right]^2, \\ &= y^* + \frac{H}{2} \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right)^2 + \frac{H}{2} a^2 \text{sen}^2(\omega t) + \\ &\quad + H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) a \text{sen}(\omega t), \\ &= y^* + \frac{H}{2} \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right)^2 - \frac{H}{4} a^2 \cos(2\omega t) + \\ &\quad + H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) a \text{sen}(\omega t) + \frac{H}{4} a^2.\end{aligned}\quad (40)$$

Para encontrar esse majorante, é necessário obter a equação dinâmica do gradiente. Com algum abuso de notação, nesta seção iremos misturar os domínios do tempo e frequência, assumindo que a função de transferência age como um operador na função

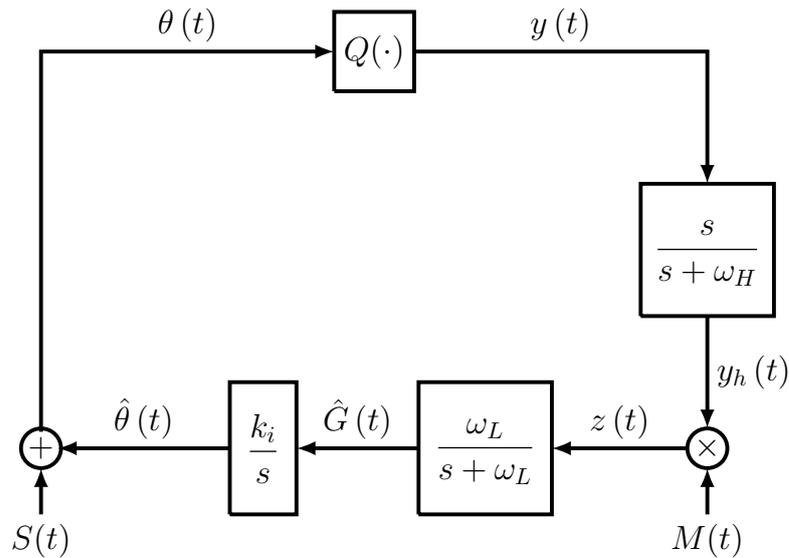


Figura 4 - Esquema de ESC pelo método gradiente utilizando filtros passa-alta e passa-baixa.

no domínio do tempo. Assim como em [31], para manter a apresentação simples, o sinal de igualdade assumirá o significado de igual e de aproximadamente igual. A aproximação pode ser com relação a termos negligenciados de ordem superior ou em termos de aproximações de média. Todas as declarações a que serem feitas podem ser interpretadas em termos de teoria rigorosos de média e estabilidade local.

Ao passar pelo filtro passa-alta, só permanecem os sinais de alta frequência, os componentes de baixa frequência serão atenuados.

$$\begin{aligned}
 y_h &= \frac{s}{s + \omega_H} y \\
 &= H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) a \sin(\omega t) - \frac{H}{4} a^2 \cos(2\omega t). \tag{41}
 \end{aligned}$$

Ao passar pela perturbação de sinal:

$$\begin{aligned}
 z(t) &= 2H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) \sin(\omega t) - \frac{H}{2} a \cos(2\omega t) \sin(\omega t), \\
 &= H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) - H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) \cos(2\omega t) + \\
 &\quad - \frac{H}{4} a \sin(3\omega t) + \frac{H}{4} a \sin(\omega t). \tag{42}
 \end{aligned}$$

Em seguida, o filtro passa-baixa descarta os sinais de alta frequência, permanecendo apenas os componentes de baixa frequência.

Obtém-se então, a seguinte estimativa

$$\hat{G} = \frac{\omega_L}{s + \omega_L} z = H \left( \hat{\theta}(t) - \theta^* \right) \quad (43)$$

para o gradiente de (30):

$$G(t) = \frac{\partial y}{\partial \theta} = H(\theta(t) - \theta^*). \quad (44)$$

Voltando para a estimativa (43) e substituindo (31), temos:

$$\hat{G}(t) = H(\theta(t) - a \operatorname{sen}(\omega t) - \theta^*), \quad (45)$$

$$= H(\theta(t) - \theta^*) - H a \operatorname{sen}(\omega t). \quad (46)$$

Reconhecendo (44) em (46):

$$\hat{G}(t) = G(t) - H a \operatorname{sen}(\omega t). \quad (47)$$

Isolando  $G(t)$  e derivando (44):

$$\dot{G}(t) = H \dot{\theta}. \quad (48)$$

Sabemos que  $\hat{\theta} = \theta - a \operatorname{sen}(\omega t)$  e que  $\dot{\hat{\theta}} = k_i \hat{G}(t)$ :

$$\dot{\theta} = a \omega \cos(\omega t) + \dot{\hat{\theta}}, \quad (49)$$

$$= a \omega \cos(\omega t) + k_i G(t) - k_i H a \operatorname{sen}(\omega t). \quad (50)$$

Substituindo (50) em (48), obtém-se:

$$\dot{G}(t) = H k_i G(t) + H a \omega \cos(\omega t) - k_i H^2 a \operatorname{sen}(\omega t). \quad (51)$$

Para encontrar a solução da equação diferencial (51), aplica-se a transformada de

Laplace (denotando-se o operador por  $\mathcal{L}(\cdot)$ ):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{G}(t)) &= Hk_i\mathcal{L}(G(t)) + Ha\omega\mathcal{L}(\cos(\omega t)) - \\ & k_iH^2a\mathcal{L}(\sin(\omega t)),\end{aligned}\tag{52}$$

e obtém-se

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{1}{s - k_iH}G(t_0) + \\ & + \frac{Ha\omega}{2\sqrt{k_i^2H^2 + \omega^2}} \left[ \frac{e^{j\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_iH}\right)}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_iH}\right)}}{s + j\omega} \right] \\ & - \frac{k_iH^2a}{2\sqrt{k_i^2H^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{e^{j\left[\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_iH}\right) - \frac{\pi}{2}\right]}}{s - j\omega} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-j\left[\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_iH}\right) - \frac{\pi}{2}\right]}}{s + j\omega} \right\}.\end{aligned}\tag{53}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned}
G(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{k_i H(t-t_i)} G(t_i) + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{e^{j\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right)\right]}}{2} + \right. \\
&\left. + \frac{e^{-j\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right)\right]}}{2} \right\} - \\
&- \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left\{ \frac{e^{j\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) - \frac{\pi}{2}\right]}}{2} + \right. \\
&\left. + \frac{e^{-j\left[\omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{k_i H}\right) - \frac{\pi}{2}\right]}}{2} \right\}, \\
&= e^{k_i H(t-t_i)} G(t_i) + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \cos \left[ \omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{k_i H} \right) \right] \\
&- \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \text{sen} \left[ \omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{k_i H} \right) \right].
\end{aligned} \tag{54}$$

Chegamos então ao majorante de  $G(t)$

$$\begin{aligned}
|G(t)| &\leq e^{k_i H(t-t_i)} |G(t_i)| + \\
&+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \cos \left[ \omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{k_i H} \right) \right] \right| \\
&+ \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \text{sen} \left[ \omega(t-t_i) + \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{k_i H} \right) \right] \right|.
\end{aligned} \tag{55}$$

A partir de (47), temos:

$$\begin{aligned} |G(t)| &= |\hat{G}(t) - H \operatorname{asen}(\omega t)|, \\ &\leq |\hat{G}(t)| + |H \operatorname{asen}(\omega t)|. \end{aligned} \quad (56)$$

Substituindo (56) em (55), obtém-se :

$$\begin{aligned} |G(t)| &\leq e^{k_i H(t-t_i)} \left| \hat{G}(t) \right| + |H \operatorname{asen}(\omega t)| + \\ &+ \frac{Ha\omega}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \cos \left[ \omega(t-t_i) + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{k_i H} \right) \right] \right| \\ &+ \frac{k_i H^2 a}{\sqrt{k_i^2 H^2 + \omega^2}} \left| \operatorname{sen} \left[ \omega(t-t_i) + \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega}{k_i H} \right) \right] \right|. \end{aligned} \quad (57)$$

Sabendo que o valor máximo das senóides é 1 e invocando (47), logo, podemos escrever:

$$|\hat{G}(t)|, |G(t)| \leq e^{k_i H(t-t_i)} |\hat{G}(t_i)| + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\omega} + a \right), \quad (58)$$

onde  $t_i \geq 0$  para qualquer instante de tempo inicial.

### 2.2.2 Projeto da Função de Monitoração

Como dito anteriormente, o projeto da monitoração se dá a partir do majorante do Gradiente, definido em (58). É sabido também que os sinais de  $H$  e  $k_i$  são sempre opostos, ou seja,  $\operatorname{sgn}(H) = -\operatorname{sgn}(k_i)$ . Pode-se então definir a função auxiliar  $\varphi_k(t)$  como

$$\varphi_k(t) = e^{-\lambda(t-t_k)} |\hat{G}(t_k)| + a(k) \left( \frac{1}{\omega} + a \right), \quad (59)$$

onde  $0 < \lambda < |k_i||H|$ , o termo  $t_k$  é o instante em que ocorre o chaveamento,  $k$  é a quantidade de chaveamentos e  $a(k)$  é qualquer sequência monotonicamente crescente em  $k$ .

A função de monitoração  $\varphi_m(t)$  pode ser definida como [32]

$$\varphi_m(t) = \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, +\infty). \quad (60)$$

Como trata-se de uma abordagem onde o sinal da Hessiana é desconhecido, não se pode afirmar nada sobre o extremo desse sistema, invoca-se, então,  $\varphi_m$ . Visto em (60), sempre  $|\hat{G}(t)| \leq \varphi_k(t_k)$  em  $t = t_k$ . Deste modo, o tempo de chaveamento  $t_k$  será definido (para  $k \geq 0$ ) por

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{t \geq t_k : |\hat{G}(t)| = \varphi_k(t)\}, \\ +\infty, \end{cases} \quad (61)$$

onde  $k \in [1, 2, \dots]$  e  $t_0 := 0$ . Por construção, a seguinte desigualdade é obtida de (60)

$$|\hat{G}(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (62)$$

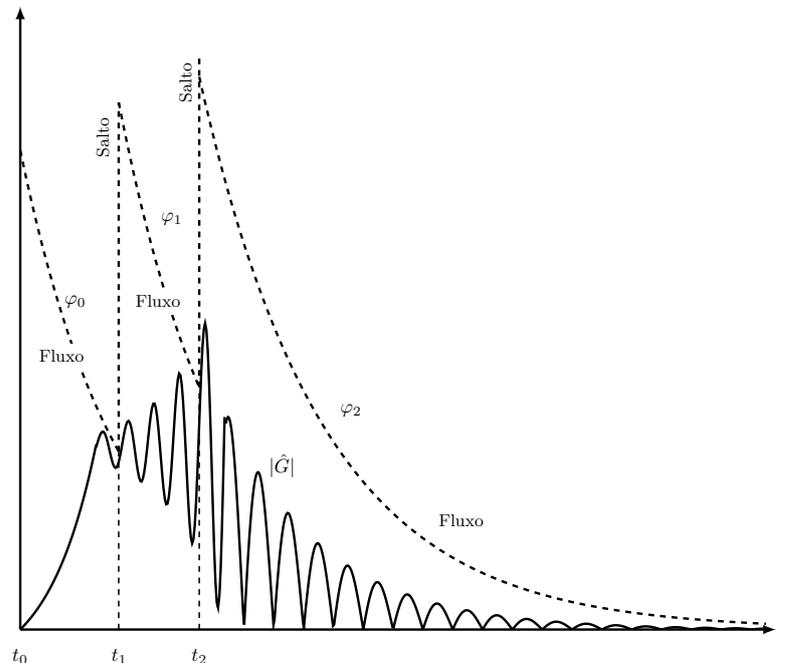


Figura 5 - Trajetória da função de monitoração  $\varphi_m$  (linha pontilhada) e  $|\hat{G}(t)|$  (linha sólida).

A função de monitoração pode ser vista como um operador híbrido [33] onde cada salto é definido pelo tempo de chaveamento  $t_k$  (61). Após cada salto, um decaimento de forma exponencial é percebido, esse comportamento é denominado de *fluxo*, e a Figura 5 ilustra o valor absoluto do gradiente ao longo do tempo e a função de monitoração [30], a última sendo levada à convergência quando a primeira alcança também esta condição.

### 2.3 Análise de Estabilidade

**Teorema 2.1:** Considerando o mapa estático (30), com a lei de controle (32) e a função de monitoração (60). Então, se  $\omega$  em (28) e (29) for suficientemente grande, pode-se concluir que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right), \quad (63)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2} + a^2\right), \quad (64)$$

independente do sinal da Hessiana.

*Prova:* Por simplicidade, assumiremos em (58) que o conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right) = k_1 \left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ , sendo  $k_1$  uma constante fixa desconhecida. A prova é realizada utilizando argumentos de contradição. Considera-se dois casos:  $|G(t)| > \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$  e  $|G(t)| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ . Enquanto  $|G(t)| > \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ , suponhamos que a lei de controle  $u(t)$ , vista em (32), realiza infinitos chaveamentos,  $\forall t \in [0, +\infty)$ . Então, o termo  $a(k)$  (59) aumentará ilimitadamente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ . Assim, existe um valor finito  $\kappa > 0$  tal que para  $k \geq \kappa$ : **(i)** o termo  $a(k)$  será o limitante superior para  $k_1$  em (58), tal que  $k_1 \left(\frac{1}{\omega} + a\right) < a(\kappa) \left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ , e **(ii)** o sinal da Hessiana é corretamente estimado, i.e.,  $(-1)^{(\kappa+m)} \text{sgn}(k_i) \text{sgn}(H) = -1$ . Por conveniência, define-se

$$\zeta(t) := e^{k_i H(t-t_i)} |\hat{G}(t_i)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right), \quad (65)$$

de acordo com o lado direito da desigualdade (58). A partir do item **(i)**, conclui-se que  $\varphi_m(t) > \zeta(t)$ ,  $\forall t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$ . Do item **(ii)**,  $\zeta$  é o limitante superior válido para  $|G(t)|$ . Consequentemente, nenhum chaveamento irá ocorrer após  $t = t_\kappa$ , i.e.,  $t_{\kappa+1} = +\infty$ , veja (61), o que nos leva a uma contradição. Portanto,  $\varphi_k(t)$  deve parar o chaveamento após algum valor finito  $k = N$  e  $t_N \in [0, +\infty)$ , sempre que  $|G(t)| > \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ . Assim sendo, de (59), (60) e (62), conclui-se que

$$|G(t)| \leq e^{-\lambda(t-t_N)} |\hat{G}(t_N)| + \underbrace{a(N) \left(\frac{1}{\omega} + a\right)}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)}, \quad (66)$$

i.e., o gradiente converge para um conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ . Lembrando que no caso complementar já temos  $|G(t)| \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ , é necessário mostrar ainda que  $G(t)$  finalmente entra na vizinhança de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$  com o sinal de controle correto,  $\text{sgn}(H)$ . Supondo que é encontrada uma estimativa de controle incorreta:  $\text{sgn}(k_i) = \text{sgn}(H)$ . Então, analogicamente, a equação dinâmica de  $G(t)$  pode ser reescrita como:

$$\dot{G}(t) = |H||k_i|G(t) + H\omega\cos(\omega t) - k_i H^2 a \sin(\omega t). \quad (67)$$

Nesse caso, (67) NÃO é *Input-to-State Stable* (ISS) [23], portanto, existe um  $t_d > 0$  tal que  $G\dot{G} > 0, \forall t > t_d$  e  $a > 0$  suficientemente pequeno. Com isso,  $G(t)$  iria divergir para  $t \rightarrow +\infty$ , i.e.,  $G(t)$  e  $\hat{G}(t)$ , ver (56), não permaneceria no conjunto residual, gerando a contradição (e o processo de chaveamento seria reiniciado). Portanto,  $\text{sgn}(H)$  deve ser corretamente estimado em  $k = N$ . Logo, conclui-se que  $G(t)$  tende localmente para um conjunto residual da ordem  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a\right)$ , à medida que  $t \rightarrow +\infty$ .

Desta forma, a partir de (44) tem-se que  $\theta(t) - \theta^* = H^{-1}G(t)$ , podendo-se concluir (63). Além disto, a partir de (16), tem-se:

$$y(t) - y^* = \frac{H}{2} (\theta(t) - \theta^*)^2, \quad (68)$$

e substituindo (63) em (68), obtém-se:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega} + a^2\right)^2, \quad (69)$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{2}{\omega}a + a^2\right). \quad (70)$$

Pela desigualdade de Young [23], pode-se afirmar que:

$$ab \leq \frac{\gamma}{2}a^2 + \frac{1}{2\gamma}b^2, \quad \forall \gamma > 0 \quad (71)$$

Com isso, (70) pode ser reescrita como ( $\gamma = 1$ ):

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} + a^2 + a^2\right), \quad (72)$$

$$= \mathcal{O}\left(2\frac{1}{\omega^2} + 2a^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2} + a^2\right). \quad (73)$$

Desta forma, obtém-se (64).  $\square$

## 2.4 Resultados de Simulação

Considere o mapa estático quadrático de uma entrada utilizado nas seções anteriores, com Hessiana  $H = 2$ , otimizador  $\theta^* = 2$ , e valor ótimo  $y^* = 5$ . Os parâmetros do sinal *dither* e do proposto ESC baseado no método de Gradiente tem os seguintes valores  $\omega = 10$ ,  $a = 0, 2$ ,  $c = 10$  e  $k_i = 0, 2$ .

A simulação numérica foi desenvolvida com o propósito de descobrir se a função de monitoração seria capaz de levar a saída do sistema para a convergência, independente de saber se tratar de uma função de máximo ou de mínimo, corrigindo qualquer possível erro de interpretação do sistema.

Nos resultados da simulação de malha fechada, Figura 6(a), é possível ver a entrada do mapa,  $\theta$ , convergindo para o ponto de otimização,  $\theta^*$ . O sistema foi inicializado achando se tratar de um problema de máximo, Figura 6(b), porém, nota-se que a saída,  $y(t)$ , começa a se distanciar logo em seguida, divergindo em aproximadamente dez segundos. Visto o erro na interpretação do sistema, a função de monitoração fez um chaveamento identificando o extremo como mínimo, recuperando a saída e garantindo a convergência do sistema.

A fim de testar a eficiência dessa abordagem, após 30 segundos, a direção de controle foi alterada (pode ser visto em zoom na Figura 6(d)) e com isso inicia-se novamente a análise de  $y(t)$ . Desta vez a saída foi interpretada com um sinal de mínimo e após 40 segundos começa a divergir. Novamente a função de monitoração atua e seu chaveamento leva a saída a identificar o extremo máximo e convergir.

Na Figura 6(c) pode ser vista a trajetória da função de monitoração,  $\varphi_m$ , e de  $|\hat{G}(t)|$ . Nos momentos em que a saída,  $y(t)$  e, conseqüentemente,  $|\hat{G}(t)|$  começam a divergir, acontece o chaveamento de  $\varphi_m$ , levando ambos à convergência, mesmo que momentânea. O decaimento exponencial da função de monitoração se dá após cada chaveamento e será

alcançado em definitivo se o mesmo comportamento puder ser visto em  $|\hat{G}(t)|$ , ou seja, se a convergência acontecer.

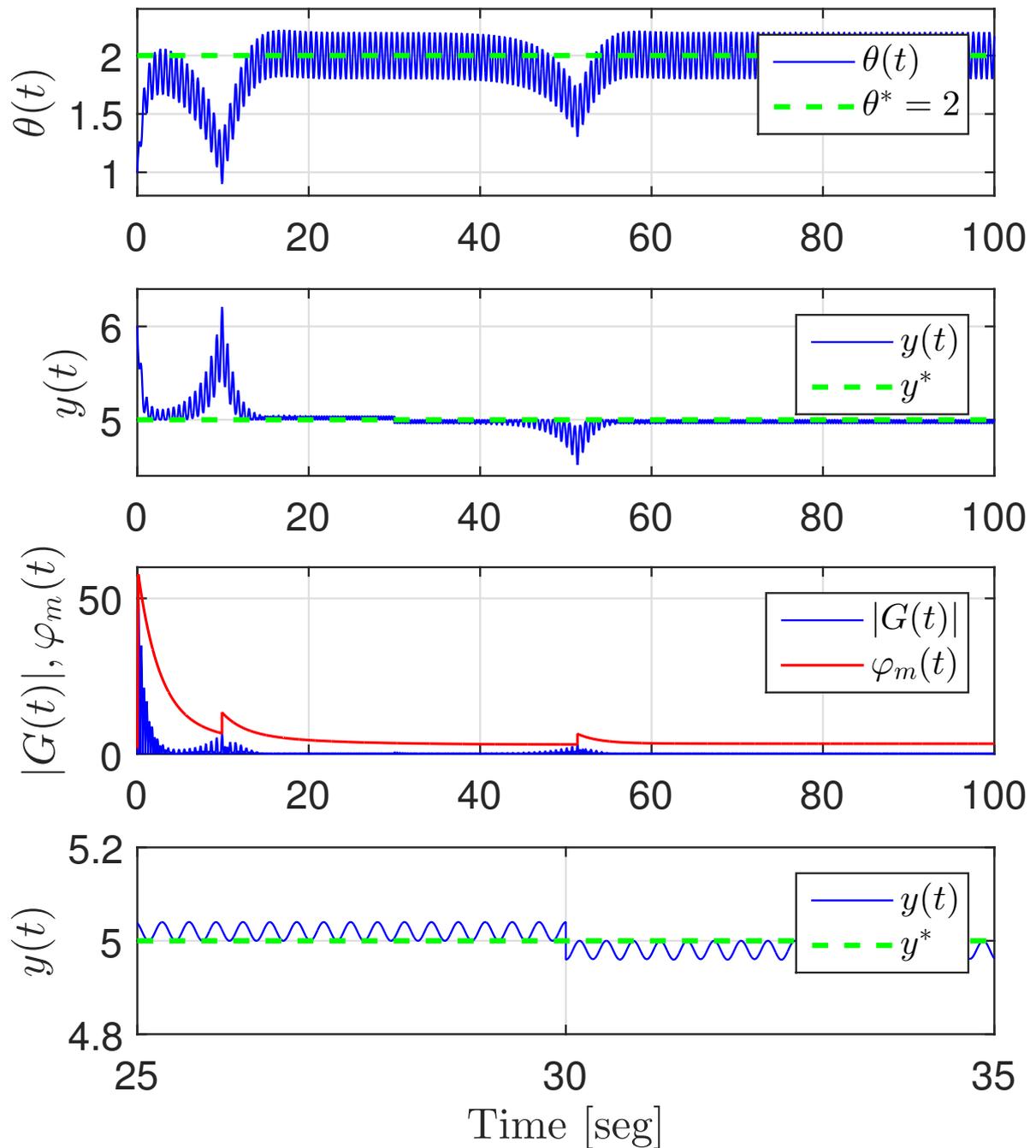


Figura 6 - Resultados de simulação: (a) entrada do mapa  $\theta(t)$  e o ponto de otimização  $\theta^*$ ; (b) saída  $y(t)$  e o valor ótimo  $y^*$ ; (c) função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e  $|\hat{G}(t)|$ ; (d) *zoom* no sinal de saída na ocorrência de uma mudança de direção do sinal de controle.

### 3 CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS DINÂMICOS

Nas seções anteriores foi dito sobre a maioria dos trabalhos utilizando controle extremal consideram a planta como um mapa estático. Porém, algumas referências abordam problemas em que a planta dinâmica descrita por uma equação diferencial ordinária está em cascata com o mapa estático não linear. Sendo essa situação também o objetivo desse estudo, para a continuidade do desenvolvimento, tomaremos como referência o trabalho apresentado por Wang e Krstić em [1], em que o estudo é desenvolvido em um sistema dinâmico, de forma a complementar o que foi apresentado nos Capítulos 1 e 2.

Em [1], é considerada a seguinte planta como um modelo não-linear SISO

$$\dot{x} = f(t, u), \quad (74)$$

$$y = h(x), \quad (75)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada,  $y \in \mathbb{R}$  é a saída,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Supondo que a lei de controle seja dada por:

$$u = \alpha(x, \theta), \quad (76)$$

parametrizada por um parâmetro escalar  $\theta$ . Por simplicidade, os autores assumem que se conhece a lei de controle de realimentação de estado estático, com isso seria trivial estender os resultados para a saída dinâmica em malha fechada. É assumido também por simplicidade que  $\theta$  e  $y$  são escalares. Tem-se, então, o seguinte sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = f(t, \alpha(x, \theta)), \quad (77)$$

com equilíbrio parametrizado em  $\theta$ .

A partir deste cenário, chega-se a um mapa estático quadrático de uma única entrada, como mostrado na Figura 7. Em [1], são realizadas as seguintes hipóteses sobre o sistema em malha fechada.

**Hipótese 3.1:** Existe uma função suave  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que:

$$f(t, \alpha(x, \theta)) = 0 \quad \text{se e somente se} \quad x = l(\theta)$$

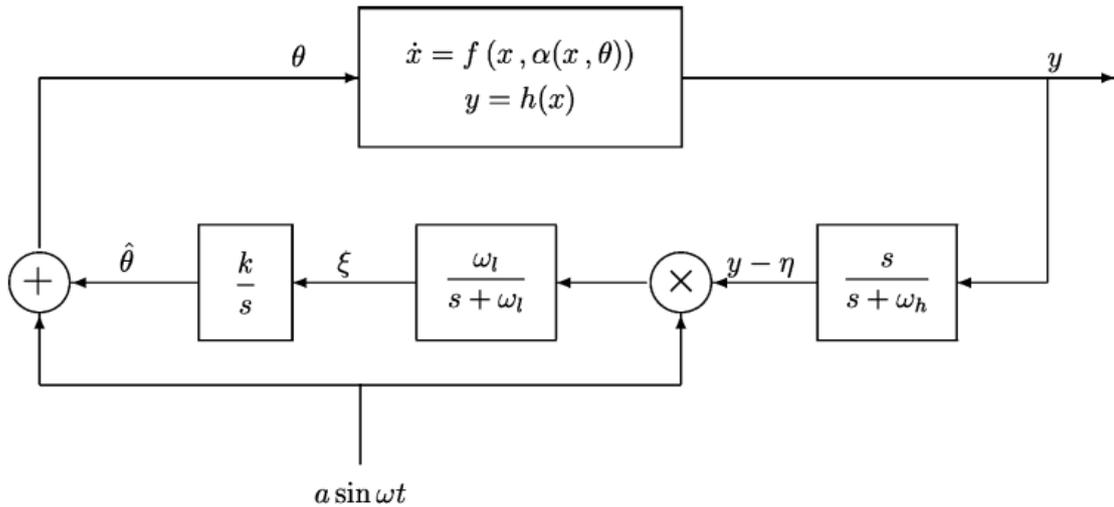


Figura 7 - Esquema de busca extremal para sistema dinâmico.

**Hipótese 3.2:** Para cada valor de  $\theta \in \mathbb{R}$ , o equilíbrio  $x = l(\theta)$  do sistema (77) é localmente exponencialmente estável com taxa de decaimento e sobrepasso uniformes em  $\theta$ .

Com isso, os autores afirmam que a lei de controle (76) é robusta em relação ao próprio parâmetro  $\theta$ , sendo capaz de estabilizar exponencialmente qualquer equilíbrio produzido por  $\theta$ . Ou seja, a lei de controle foi projetada para que se alcance a estabilidade local, sem a necessidade de conhecer  $f(x, u)$  ou  $l(\theta)$ .

**Hipótese 3.3:** Existe  $\theta^* \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(h \circ l)'(\theta^*) = 0, \quad (78)$$

$$(h \circ l)''(\theta^*) < 0, \quad (79)$$

O símbolo  $\circ$  denota uma função composta em (78) e (79). Enquanto os símbolos  $'$  e  $''$  indicam primeira e segunda derivada em relação a  $\theta$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, considera-se que o mapa de saída  $y = h(l(\theta))$  tem um ponto de máximo em  $\theta = \theta^*$ . O objetivo é desenvolver um mecanismo de resposta que maximize o valor estacionário de  $y$ , mas sem que seja necessário conhecer  $\theta^*$ ,  $h$  e  $l$ .

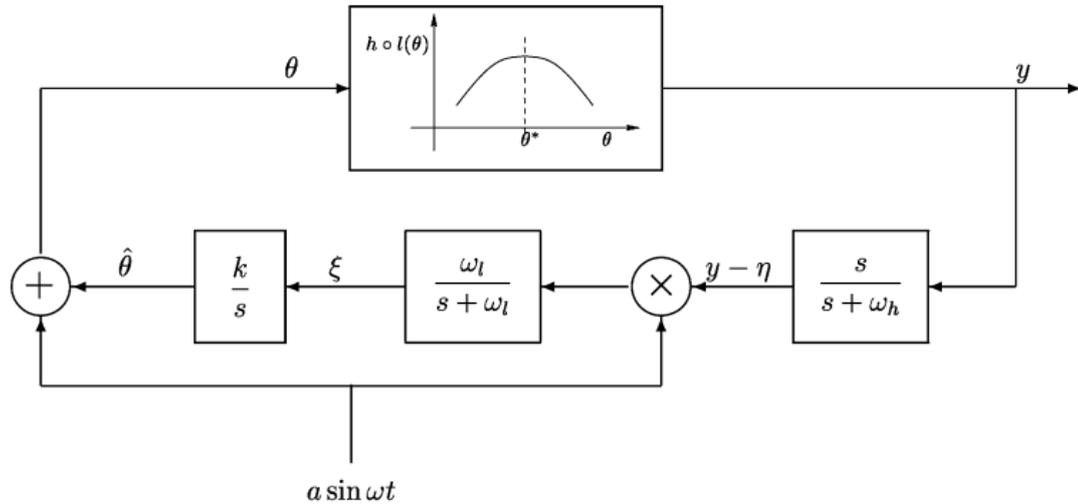


Figura 8 - Esquema de busca extremal com a perturbação periódica com a planta sendo vista como um mapa estático.

Na Figura 7, é mostrado um esquema de realimentação, uma adaptação de um método de busca extremal para mapas estáticos não lineares. E, antes de provarmos sua estabilidade, partimos da ideia principal de uma perturbação periódica lenta  $a \sin \omega t$  sendo adicionada ao sinal  $\hat{\theta}$ , sendo esta a melhor estimativa para o parâmetro desconhecido. Caso essa perturbação seja mais lenta que a dinâmica da planta, o mapa da Figura 7 se aproxima de um mapa estático, mostrado na Figura 8. Caso  $\hat{\theta}$  esteja em ambos os lados de  $\theta^*$ , a perturbação  $a \sin \omega t$  irá criar uma resposta periódica de  $y$  que estará em fase ou fora de fase com  $a \sin \omega t$ . O filtro passa-alta  $s/(s + \omega_h)$  elimina o componente DC de  $y$ . Com isso,  $a \sin \omega t$ , e  $s/(s + \omega_h)y$  serão aproximadamente duas senóides, tais que:

- em fase para  $\hat{\theta} < \theta^*$
- fora de fase para  $\hat{\theta} > \theta^*$ .

Os autores afirmam, que em ambos os casos, o produto de duas senóides irá resultar em um componente DC que será extraído pelo filtro passa baixa  $\omega_l/(s + \omega_l)$ .

Serão utilizados os seguintes parâmetros para a análise do esquema, e seu uso será

visto na sequência:

$$\omega_H = \omega\omega_H = \omega\delta\omega'_H = \mathcal{O}(\omega\delta), \quad (80)$$

$$\omega_L = \omega\omega_L = \omega\delta\omega'_L = \mathcal{O}(\omega\delta), \quad (81)$$

$$k = \omega K = \omega\delta K' = \mathcal{O}(\omega\delta), \quad (82)$$

onde  $\omega$  e  $\delta$  são constantes positivas e pequenas quando comparadas a  $\omega'_H$ ,  $\omega'_L$  e  $K'$ , também positivas. De (80) e (81), vemos que as frequências de corte dos filtros passa-alta e passa-baixa precisam ser inferiores à frequência do sinal de perturbação. Além disso, o ganho de adaptação  $k$  precisa ser pequeno.

Para dar continuidade a análise, os autores tratam, num primeiro momento, o caso estático visto na Figura 8, utilizando o método da média. Em seguida, utilizando o método da perturbação singular, é feita a análise do sistema completo, visto na Figura 7.

O sistema representado na Figura 7 pode ser sintetizado da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(t, \alpha(x, \hat{\theta} + a \text{sen } \omega t)), \quad (83)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = k\xi, \quad (84)$$

$$\dot{\xi} = -\omega_l\xi + \omega_l(y - \eta)a \text{sen } \omega t, \quad (85)$$

$$\dot{\eta} = -\omega_h\eta + \omega_h y. \quad (86)$$

Introduzindo novas coordenadas, temos:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*, \quad (87)$$

$$\tilde{\eta} = \eta - h \circ l(\theta^*). \quad (88)$$

Então, na escala de tempo  $\tau = \omega t$ , podemos reescrever (83) a (86) da seguinte

forma:

$$\omega \frac{d}{d\tau} = f(x, \alpha(x, \theta^* + \tilde{\theta} + a \text{sen } \tau)), \quad (89)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} = \delta K' \xi, \quad (90)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta(-\omega'_L \xi + \omega'_L(h(x) - h \circ l(\theta^*) - \tilde{\eta})a \text{sen } \tau), \quad (91)$$

$$\frac{d\tilde{\eta}}{d\tau} = \delta(-\omega'_H \tilde{\eta} + \omega'_H(h(x) - h \circ l(\theta^*))). \quad (92)$$

### 3.1 Análise média

O estudo da estabilidade é dividida em etapas, antes de analisar o sistema geral (74)-(76), “congela-se” a variável  $x$  em um valor de equilíbrio constante ( $x = l(\theta)$ ) utilizando-se o escalonamento temporal,  $\tau = \omega t$ , tal que a partir de (74), temos:

$$\omega \frac{d}{d\tau} = f(x, u). \quad (93)$$

De acordo com a Hipótese 3.1, o sistema reduzido ( $\omega \rightarrow 0$ ) pode ser então escrito como  $f(x, \alpha(x, \omega)) = 0$ , substituindo-se  $x = (l(\theta))$  em (75), tal que:

$$y = h(l(\theta)) \quad (94)$$

$$= (h \circ l)(\theta) \quad (95)$$

$$= Q(\theta). \quad (96)$$

Lembrando que  $\theta = \hat{\theta} + a \text{sen } \tau$  e que o erro de estimação é  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} + \theta^*$ , manipula-se estas equações e obtém-se:

$$\theta = \theta^* + \tilde{\theta} + a \text{sen } \tau. \quad (97)$$

O valor de equilíbrio é dado, então, por:

$$x = l(\theta^* + \tilde{\theta} + a \text{sen } \tau), \quad (98)$$

Substituindo este valor de equilíbrio, reescrevemos (90) a (92), agora para o sistema

reduzido:

$$\frac{d\tilde{\theta}_r}{d\tau} = \delta K' \xi_r, \quad (99)$$

$$\frac{d\xi_r}{d\tau} = \delta(-\omega'_L \xi_r + \omega'_L(v(\tilde{\theta}_r + a \text{sen } \tau) - \tilde{\eta}_r)a \text{sen } \tau), \quad (100)$$

$$\frac{d\tilde{\eta}_r}{d\tau} = \delta(-\omega'_H \tilde{\eta}_r + \omega'_H(v(\tilde{\theta}_r + a \text{sen } \tau))), \quad (101)$$

onde:

$$v(\tilde{\theta}_r + a \text{sen } \tau) = h \circ l(\theta^* + \tilde{\theta}_r + a \text{sen } \tau) - h \circ l(\theta^*). \quad (102)$$

Segundo a Hipótese 3.3, temos:

$$v(0) = 0, \quad (103)$$

$$v'(0) = (h \circ l)'(\theta^*) = 0, \quad (104)$$

$$v''(0) = (h \circ l)''(\theta^*) < 0. \quad (105)$$

As equações (99) a (101) estão na forma em que o Teorema da Média [23] é aplicado. Seus modelos reduzidos aplicado ao teorema são:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_r^a \\ \xi_r^a \\ \tilde{\eta}_r^a \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} K' \xi_r^a \\ -\omega'_L \xi_r^a + \frac{\omega'_L}{2\pi} a \int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^a + a \text{sen } \sigma) \text{sen } \sigma d\sigma \\ -\omega'_H \tilde{\eta}_r^a + \frac{\omega'_H}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^a + a \text{sen } \sigma) d\sigma \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Para linearizar o sistema, é necessário determinar o equilíbrio médio  $(\tilde{\theta}_r^{a,e}, \xi_r^{a,e}, \tilde{\eta}_r^{a,e})$  que satisfaça as seguintes condições:

$$\tilde{\xi}_r^{a,e} = 0, \quad (107)$$

$$\int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^{a,e} + a \text{sen } \sigma) \text{sen } \sigma d\sigma = 0, \quad (108)$$

$$\tilde{\eta}_r^{a,e} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tilde{\theta}_r^{a,e} + a \text{sen } \sigma) d\sigma. \quad (109)$$

Para colocarmos  $\tilde{\theta}_r^{a,e}$  na forma  $\tilde{\theta}_r^{a,e} = b_1 a + b_2 a^2 + \mathcal{O}(a^3)$ , substituindo em (108) as equações (103) e (104), integrando e igualando as potências de  $a$ . Teremos, então,

$v''(0)b_1 = 0$  e  $v''(0)b_2 + \frac{1}{8}v'''(0) = 0$ . Isso implica em:

$$\tilde{\theta}_r^{a,e} = -\frac{v'''(0)}{8v''(0)}a^2 + \mathcal{O}(a^3). \quad (110)$$

Aplicando o mesmo raciocínio em (109), obtemos:

$$\tilde{\eta}_r^{a,e} = \frac{v''(0)}{4}a^2 + \mathcal{O}(a^3). \quad (111)$$

Temos, então, que o equilíbrio do modelo médio é:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_r^{a,e} \\ \xi_r^{a,e} \\ \tilde{\eta}_r^{a,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v'''(0)}{8v''(0)}a^2 + \mathcal{O}(a^3) \\ 0 \\ \frac{v''(0)}{4}a^2 + \mathcal{O}(a^3) \end{bmatrix}. \quad (112)$$

A matriz Jacobiana de (106) em  $(\tilde{\theta}, \xi, \tilde{\eta})_r^{a,e}$  é dada por

$$J_r^a = \delta \begin{bmatrix} 0 & K' & 0 \\ \frac{\omega'_L}{2\pi} a \int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + a \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma & -\omega'_L & 0 \\ \frac{\omega'_H}{2\pi} \int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + a \sin \sigma) d\sigma & 0 & -\omega'_H \end{bmatrix} \quad (113)$$

A Jacobiana será Hurwitz, se e somente se:

$$\int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + a \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma < 0. \quad (114)$$

Após mais cálculos utilizando as equações (97) e (98), obtém-se:

$$\int_0^{2\pi} v'(\tilde{\theta}_r^{a,e} + a \sin \sigma) \sin \sigma d\sigma = \pi v''(0)a + \mathcal{O}(a^2). \quad (115)$$

Substituindo (115) em (113), encontra-se:

$$\det(\lambda I - J_r^a) = \left( \lambda^2 + \delta\omega'_L\lambda - \frac{\delta^2\omega'_L K'}{2}v''(0)a^2 + \mathcal{O}(\delta^2 a^3) \right) \times (\lambda + \delta\omega'_H). \quad (116)$$

com isso, prova-se que  $J_r^a$  é Hurwitz para um valor suficientemente pequeno de  $a$ . Com isso, pode-se determinar que os pontos de equilíbrio do sistema médio é exponencialmente estável para um tamanho suficientemente pequeno. De acordo com o Teorema da Média

[23], tem-se em [1] o seguinte resultado.

**Teorema 3.1:** Existe um  $\bar{\delta}$  e  $\bar{a}$  tal que para todo  $\delta \in (0, \bar{\delta})$  e  $a \in (0, \bar{a})$  sistema reduzido tem uma única solução exponencialmente estável  $(\tilde{\theta}_r^{2\pi}(\tau), \xi_r^{2\pi}(\tau), \tilde{\eta}_r^{2\pi}(\tau))$  para o período de  $2\pi$ , e essa solução satisfaz:

$$\left| \begin{bmatrix} \theta_r^{2\pi}(\tau) + \frac{v'''(0)}{8v''(0)}a^2 \\ \xi_r^{2\pi}(\tau) \\ \tilde{\eta}_r^{2\pi}(\tau) - \frac{v''(0)}{4}a^2 \end{bmatrix} \right| \leq \mathcal{O}(\delta) + \mathcal{O}(a^3), \quad \forall \tau \geq 0. \quad (117)$$

Com isso, os autores afirmam que esse resultado implica que todas as soluções  $(\tilde{\theta}_r(\tau), \xi_r(\tau), \tilde{\eta}_r(\tau))$  convergem para uma vizinhança de  $\mathcal{O}(\delta + a^2)$  da origem. É importante que esse resultado seja interpretado em termos do sistema visto em Figura 8. Uma vez que  $y = h \circ l(\theta^* + \tilde{\theta}_r(\tau) + a \sin \tau)$  e  $(h \circ l)'(\theta^*) = 0$ , temos:

$$y - h \circ l(\theta^*) = (h \circ l)''(\theta^*)(\tilde{\theta}_r + a \sin \tau)^2 + \mathcal{O}((\tilde{\theta}_r + a \sin \tau)^3), \quad (118)$$

onde

$$\tilde{\theta}_r + a \sin \tau = (\tilde{\theta}_r - \tilde{\theta}_r^{2\pi}) + \left( \tilde{\theta}_r^{2\pi} + \frac{(h \circ l)'''(\theta^*)}{8(h \circ l)''(\theta^*)}a^2 \right) - \frac{(h \circ l)'''(\theta^*)}{8(h \circ l)''(\theta^*)}a^2 + a \sin \tau. \quad (119)$$

Uma vez que o primeiro termo converge para zero, o segundo termo é  $\mathcal{O}(\delta + a^3)$ , o terceiro termo é  $\mathcal{O}(a^2)$  e o quarto termo é  $\mathcal{O}(a)$ , então

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_r(\tau) + a \sin \tau| = \mathcal{O}(a + \delta). \quad (120)$$

Assim, a partir de (118), tem-se:

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} |y(\tau) - h \circ l(\theta^*)| = \mathcal{O}(a^2 + \delta^2). \quad (121)$$

A última expressão caracteriza a performance assintótica do esquema de busca de extremo na Figura 8, e explica por que é importante que, além da perturbação periódica seja pequena, mas também que as frequências de corte dos filtros e que o ganho de adaptação  $k$  sejam pequenas.

Outra importante conclusão que pode ser retirada de (117), é que a solução  $\tilde{\theta}_r(\tau)$

irá convergir para  $\mathcal{O}(\delta + a^3)$  próximo de  $-\frac{(h \circ l)'''(\theta^*)}{8(h \circ l)''(\theta^*)}a^2$ .

Uma vez que  $(h \circ l)''(\theta^*) < 0$ , seu sinal irá depender do sinal de  $(h \circ l)'''(\theta^*)$ . Se  $(h \circ l)'''(\theta^*) > 0$ , então a curva  $h \circ l(\theta)$  será mais plana do lado direito de  $\theta = \theta^*$ . Já  $\tilde{\theta}$ , terá um deslocamento em direção ao sinal de  $(h \circ l)'''(\theta^*)$ , então,  $\tilde{\theta}_r(\tau)$  irá convergir para o lado mais plano de  $h \circ l(\theta)$ . E isso é o desejado, estar onde  $h \circ l(\theta)$  seja menos sensível a variações em  $\theta$  e mais próximo do valor máximo.

### 3.2 Análise via Perturbação Singular

Comprovada a estabilidade do sistema reduzido, os autores voltam, então, ao sistema geral mostrado na Figura 7, cujo modelo em espaço de estado foi mostrado nas equações (89) a (92) na escala de tempo  $\tau = \omega t$ . Para tornar a notação compacta, reescrevemos as equações (90) a (92), como sendo:

$$\frac{dz}{d\tau} = \delta G(\tau, x, z), \quad (122)$$

onde  $z = (\tilde{\theta}, \xi, \tilde{\eta})$ . Pelo Teorema 4.1, existe uma solução periódica exponencialmente estável  $z_r^{2\pi}(\tau)$ , tal que:

$$\frac{dz_r^{2\pi}(\tau)}{d\tau} = \delta G(\tau, L(\tau, z_r^{2\pi}(\tau)), z_r^{2\pi}(\tau)), \quad (123)$$

onde  $L(\tau, z) = l(\theta^* + \tilde{\theta} + a \sin \tau)$ . Para trazer os sistemas (89) e (122) para forma de perturbação padrão singular, em [1] é deslocado o estado  $z$  usando a transformação

$$\tilde{z} = z + z_r^{2\pi}(\tau), \quad (124)$$

e obtemos (92), como sendo:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \delta \tilde{G}(\tau, x, \tilde{z}), \quad (125)$$

$$\omega \frac{dx}{d\tau} = \tilde{F}(\tau, x, \tilde{z}), \quad (126)$$

onde

$$\tilde{G}(\tau, x, \tilde{z}) = G(\tau, x, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)) - G(\tau, L(\tau, z_r^{2\pi}(\tau)), z_r^{2\pi}(\tau)), \quad (127)$$

$$\tilde{F}(\tau, x, \tilde{z}) = f(x, \alpha(x, \theta^* + \tilde{\theta} - \tilde{\theta}_r^{2\pi}(\tau) + \tilde{\theta}_r^{2\pi}(\tau) + a \sin \tau)). \quad (128)$$

Nota-se que  $x = L(\tau, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau))$  é o estado quase estável, e que a equação reduzida (92), como sendo:

$$\frac{d\tilde{z}_r}{d\tau} = \delta \tilde{G}(\tau, L(\tau, \tilde{z}_r + z_r^{2\pi}(\tau)), \tilde{z}_r + z_r^{2\pi}(\tau)) \quad (129)$$

tem equilíbrio na origem  $\tilde{z} = 0$ . Para completar a análise da perturbação singular, é necessário estudar também o *modelo da camada limite* (BLM) na escala de tempo  $t - t_0 = \tau/\omega$ :

$$\frac{dx_b}{dt} = \tilde{F}(\tau, x_b + L(\tau, \tilde{z} + z_r^{2\pi}(\tau)), \tilde{z}) = f(x_b + l(\theta), \alpha(x_b + l(\theta), \theta)), \quad (130)$$

onde  $\theta = \theta^* + \tilde{\theta} + a \sin \tau$  pode ser visto como um parâmetro independente da variável de tempo  $t$ . Uma vez que  $f(l(\theta), \alpha(l(\theta), \theta)) = 0$ ,  $x_b = 0$  é um equilíbrio de (130). Como dito na Hipótese 2.2, esse equilíbrio é exponencialmente uniformemente estável em  $\theta$ .

Combinando a estabilidade do modelo reduzido (129) com a estabilidade do modelo em camada (130) e usando o Teorema de Tikhonov [23] no intervalo infinito, conclui-se:

- A solução  $z(\tau)$  de (122) converge exponencialmente para uma vizinhança de  $\mathcal{O}(\omega)$  para a solução periódica de  $z_r^{2\pi}(\tau)$ , no qual  $\mathcal{O}(\delta)$  próximo ao equilíbrio  $z_r^{a,e}$ . Este, por sua vez, implica que a solução de  $\tilde{\theta}(\tau)$  das equações (90) a (92) irá convergir para uma vizinhança  $\mathcal{O}(\omega + \delta)$  de  $- \{[(h \circ l)'''(\theta^*)]/[8(h \circ l)''(\theta^*)]\} a^2 + \mathcal{O}(a^3)$ . Com isso,  $\theta(\tau) = \theta^* + \tilde{\theta}(\tau) + a \sin \tau$  irá convergir para para uma vizinhança  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  de  $\theta^*$ .
- A solução  $x(\tau)$  de (126) satisfaz  $x(\tau) - l(\theta^* + \tilde{\theta}_r(\tau) + a \sin \tau) - x_b(t) = \mathcal{O}(\omega)$ , onde  $\tilde{\theta}_r(\tau)$  é a solução do modelo reduzido encontrado nas equações (99) a (101), e  $x_b(t)$  é a solução do modelo (130). Tem-se então:

$$x(\tau) - l(\theta^*) = \mathcal{O}(\omega) + l(\theta^* + \tilde{\theta}_r(\tau) + a \sin \omega\tau) - l(\theta^*) - x_b(t). \quad (131)$$

Uma vez que  $\tilde{\theta}(\tau)$  converge exponencialmente para a solução periódica  $\tilde{\theta}_r^{2\pi}(\tau)$ , no qual  $\mathcal{O}(\delta)$  próximo ao equilíbrio  $\{[(h \circ l)'''(\theta^*)]/[8(h \circ l)''(\theta^*)]\}a^2 + \mathcal{O}(a^3)$ , e a solução  $x_b(t)$  de (130) está decaindo exponencialmente, então de (131),  $x(\tau) - l(\theta^*)$  converge exponencialmente para uma vizinhança  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  de zero. Conseqüentemente,  $y = h(x)$  converge para uma vizinhança  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  de seu equilíbrio máximo  $h \circ l(\theta^*)$

Por último, em [1], os autores resumem as conclusões acima com os seguintes teoremas:

**Teorema 3.2:** Considere que as Hipóteses 3.1 a 3.3 sejam satisfeitas. Existe um conjunto de condições iniciais em torno do ponto  $(x, \hat{\theta}, \xi, \eta) = (l(\theta^*), \theta^*, 0, h \circ l(\theta^*))$  e constantes  $\bar{\omega}, \bar{\delta}$  e  $\bar{a}$  tal que para todo  $\omega \in (0, \bar{\omega})$ ,  $\delta \in (0, \bar{\delta})$  e  $a \in (0, \bar{a})$ , a solução  $(x(t), \hat{\theta}(t), \xi(t), \eta(t))$  converge exponencialmente para uma vizinhança de  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ . Tem-se também que  $y(t)$  converge para uma vizinhança de  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  de  $h \circ l(\theta^*)$

**Teorema 3.3:** Dentro das condições do Teorema 3.2, existe uma solução periódica exponencialmente estável para uma vizinhança de  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  do ponto  $(x, \hat{\theta}, \xi, \eta) = (l(\theta^*), \theta^*, 0, h \circ l(\theta^*))$ .

## 4 CONTROLE EXTREMAL PARA MAPEAMENTOS DINÂMICOS COM SINAL DE HESSIANA DESCONHECIDO

Sendo o objetivo deste trabalho propor que a otimização seja feita sem que se possa afirmar que o ponto de extremo é um máximo ou um mínimo, será desenvolvido neste capítulo, então, um estudo parecido ao aplicado no Capítulo 2. Para isso, será criada uma situação em que o cenário apresentado em [1], mostrado no Capítulo 3, será alterado assumindo que o sinal da Hessiana é desconhecido.

### 4.1 Formulação do Problema

Para assumirmos que em [1] o sinal da Hessiana é desconhecido, a principal consideração a ser feita é em relação a Hipótese 3.3, que, para essa suposição, considera-se:

**Hipótese 4.1:** Existe  $\theta^* \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(h \circ l)'(\theta^*) = 0,$$

$$(h \circ l)''(\theta^*) \neq 0.$$

Essa hipótese é diferente do que é comumente visto na literatura, mas isso se deve ao fato de que está sendo considerado que a Hessiana é desconhecida, nesse caso  $(h \circ l)''(\theta^*) \neq 0$  e  $(\theta^*, y^*)$  é o valor extremo desconhecido com  $\theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$ .

Assim como no Capítulo 2, o problema da falta de conhecimento do sinal da Hessiana será contornado utilizando um algoritmo de chaveamento baseado em uma função de monitoração para a estimativa do gradiente. Com isso, a Figura 7 pode ser redesenhada conforme visto na Figura 9. Para que o ganho não seja confundido com o índice de chaveamento, novamente iremos considerar o ganho como  $k_i$ . Por meio da Figura 9, define-se facilmente o sinal de controle  $U(t)$  por:

$$U(t) = (-1)^{(k+m)} k_i \xi(t). \tag{132}$$

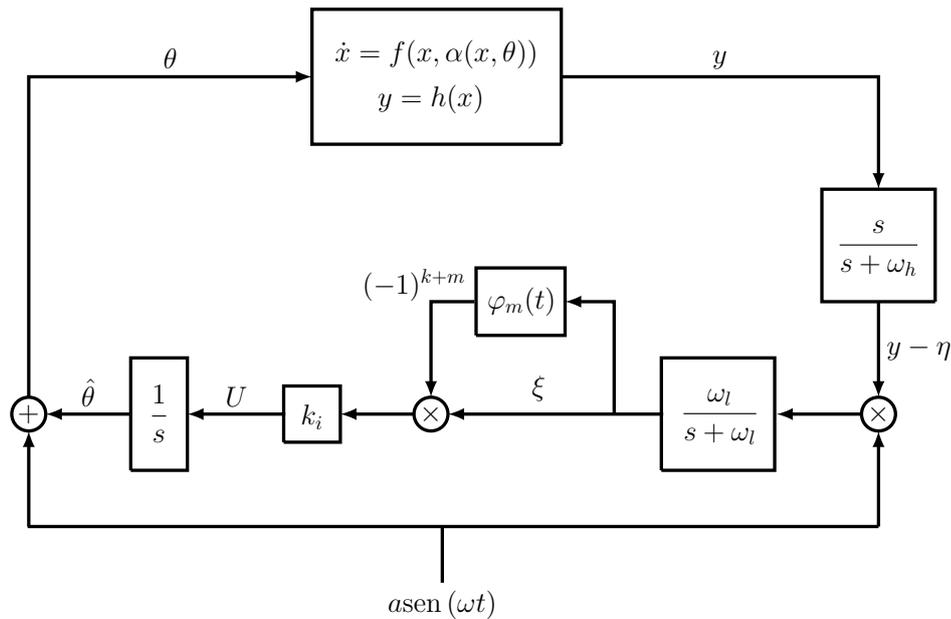


Figura 9 - Esquema de busca extremal para sistema dinâmico com sinal da Hessiana desconhecido.

#### 4.2 Majorante do Gradiente

É sabido que a construção da função de monitoração é feita com base no majorante do Gradiente. No Capítulo 2, para encontrar a equação do majorante, foi necessário analisar o esquema do ESC, manipulando equações a partir do mapa de entrada.

Neste capítulo, vamos tomar como referência o Teorema 3.2 visto em [1], retratado no capítulo anterior, nele os autores afirmam que a solução de  $\xi(t)$  converge exponencialmente para uma vizinhança de  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ . Com isso, podemos escrever o majorante de  $\xi(t)$  como sendo

$$|\xi(t)| \leq e^{-\lambda_1(t-t_i)}|\xi(t_i)| + Re^{-\lambda_2 t} + \mathcal{O}(\omega + \delta + a), \quad (133)$$

sendo  $\lambda_1 > 0$  uma constante de ordem  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ , enquanto que  $\lambda_2 > 0$  e  $R > 0$  são constantes desconhecidas. O segundo termo da inequação (133), é uma exponencial desconhecida com  $R$  dependendo das condições iniciais  $(x(0), \hat{\theta}(0), \xi(0), \eta(0))$  do Teorema 3.2.

### 4.3 Projeto da Função de Monitoração

Como dito anteriormente, o projeto da monitoração se dá a partir do majorante do Gradiente, para esse passo, será repetido os passos análogos desenvolvidos na seção 2.2.2. Definimos então a função auxiliar  $\varphi_k(t)$  como

$$\varphi_k(t) = e^{-\lambda(t-t_k)} |\xi(t_k)| + a(k) e^{-\frac{t}{a(k)}} + a(k) (\omega + \delta + a), \quad (134)$$

onde  $\lambda > 0$  é uma constante de projeto de ordem  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ , o termo  $t_k$  é o instante em que ocorre o chaveamento,  $k$  é a quantidade de chaveamentos e  $a(k)$  é qualquer sequência monotonicamente crescente em  $k$ .

A função de monitoração  $\varphi_m(t)$  pode ser definida como [32]

$$\varphi_m(t) = \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) (\subset [0, +\infty)). \quad (135)$$

Novamente se tratando de uma situação em que o sinal da Hessiana é desconhecido, invoca-se, então,  $\varphi_m$ . Visto em (135), sempre  $|\xi(t)| \leq \varphi_k(t_k)$  em  $t = t_k$ . Deste modo, o tempo de chaveamento  $t_k$  será definido (para  $k \geq 0$ ) por

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{t \geq t_k : |\xi(t)| = \varphi_k(t)\}, \\ +\infty, \end{cases} \quad (136)$$

onde  $k \in [1, 2, \dots]$  e  $t_0 := 0$ . Por construção, a seguinte desigualdade é obtida de (135)

$$|\xi(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (137)$$

### 4.4 Análise de Estabilidade

Diferentemente do Teorema 2.1, a monitoração em (134)-(135) nos permite lidar com o caso mais geral dinâmico com o custo de obtermos velocidades de convergência menores e conjuntos residuais maiores de ordem proporcional a frequência  $\omega$ , de acordo com o teorema a seguir.

**Teorema 4.1:** Considerando a planta (74) e (75), com a lei de controle (76) e a função de monitoração (135). Então, se  $\omega$  na perturbação senoidal  $a \sin \omega t$  é suficiente-

mente grande, pode-se concluir que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(\omega + \delta + a), \quad (138)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(\omega^2 + \delta^2 + a^2), \quad (139)$$

independente do sinal da hessiana.

*Prova:* Por simplicidade, assumiremos em (133) que o conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a) = k_1(\omega + \delta + a)$ , sendo  $k_1$  uma constante fixa desconhecida. Considera-se dois casos:  $|\xi(t)| > \mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  e  $|\xi(t)| \leq \mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ . Enquanto  $|\xi(t)| > \mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ , suponhamos por contradição que a lei de controle  $U(t)$ , vista em (132), realiza infinitos chaveamentos,  $\forall t \in [0, +\infty)$ . Então, o termo  $a(k)$  (134) aumentará ilimitadamente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ . Assim, existe um valor finito  $\kappa > 0$  tal que para  $k \geq \kappa$ : **(i)** o termo  $a(k)$  será o limitante superior para  $k_1$  em (133), tal que  $k_1(\omega + \delta + a) < a(\kappa)(\omega + \delta + a)$ , **(ii)** o termo  $Re^{-\lambda_2 t} < a(\kappa)e^{t/a(\kappa)}$  para  $Re^{-\lambda_2 t}$  em (133), e **(iii)** o sinal da Hessiana é corretamente estimado, i.e.,  $(-1)^{(\kappa+m)} \text{sgn}(k_i) \text{sgn}((h \circ l)''(\theta^*)) = -1$ . Por conveniência, define-se

$$\zeta(t) := e^{-\lambda_1(t-t_i)} |\xi(t_i)| + Re^{-\lambda_2 t} + \mathcal{O}(\omega + \delta + a), \quad (140)$$

de acordo com o lado direito da desigualdade (133). A partir do item **(i)** e **(ii)**, conclui-se que  $\varphi_m(t) > \zeta(t)$ ,  $\forall t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$ . Do item **(iii)**,  $\zeta$  é o limitante superior válido para  $|\xi(t)|$ . Consequentemente, nenhum chaveamento irá ocorrer após  $t = t_\kappa$ , i.e.,  $t_{\kappa+1} = +\infty$  – veja (136) – o que nos leva a uma contradição. Portanto,  $\varphi_k(t)$  deve parar o chaveamento após algum valor finito  $k = N$  e  $t_N \in [0, +\infty)$ , sempre que  $|\xi(t)| > \mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ . Assim sendo, de (134), (135) e (137), conclui-se que

$$|\zeta(t)| \leq e^{-\lambda(t-t_N)} |\xi(t_N)| + a(k) e^{-\frac{t}{a(N)}} + \underbrace{a(N)(\omega + \delta + a)}_{\mathcal{O}(\omega + \delta + a)}, \quad (141)$$

i.e., o gradiente converge para um conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ . Lembrando que no caso complementar já temos  $|\xi(t)| \leq \mathcal{O}(\omega + \delta + a)$ . Logo conclui-se que  $\xi(t)$  tende localmente para um conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}(\omega + \delta + a)$  à medida que  $t \rightarrow +\infty$ .

De forma análoga a que foi desenvolvida na prova do Teorema 2.1, pode-se concluir

que (139) e (139) são válidas ao menos localmente.  $\square$

#### 4.5 Resultados de Simulação

Para o desenvolvimento da simulação, foi considerado o mapa:

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{100\pi}} \exp\left(-\frac{(t-40)^2}{100}\right) + \dot{\theta}, \quad (142)$$

$$y = -x^2 + 2x - 1. \quad (143)$$

e os seguintes valores  $\omega = 35$ ,  $a = 0.1$  e  $k_i = 0.1$ .

Para encontrar o ponto de convergência da entrada  $x(t)$  é necessário derivar a equação da saída (143), obtendo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + 2, \quad (144)$$

para, em seguida, igualar a derivada encontrada a zero. Sendo assim, nota-se facilmente que a convergência irá ocorrer em  $x = 1$ . Na Figura 10 é possível acompanhar a entrada  $x(t)$  convergindo para o ponto de otimização  $x^*$ .

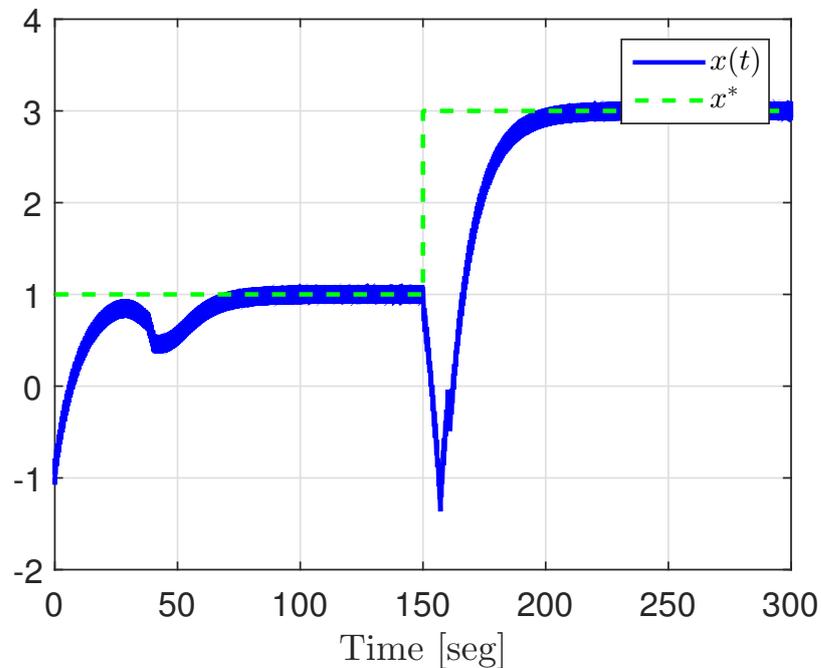


Figura 10 - Entrada do mapa  $x(t)$  e o ponto de otimização  $x^*$ .

O ponto de convergência da saída  $y(t)$  pode ser encontrado substituindo o valor da entrada  $x(t)$  em (143). Para esse caso, teremos  $y = 0$ . Na Figura 11 é possível acompanhar a saída  $y(t)$  convergindo para o ponto ótimo  $y^*$ .

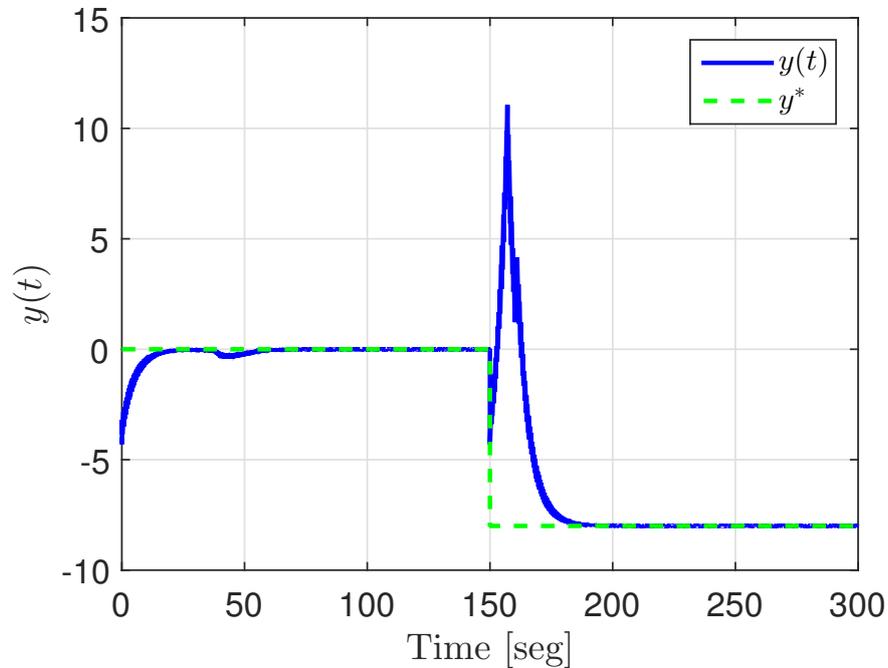


Figura 11 - Saída  $y(t)$  e valor ótimo  $y^*$ .

Por meio de uma derivada de segunda ordem de (143), é possível definir o extremo da função analisada. A partir de

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2, \quad (145)$$

e sendo  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ , trata-se de um ponto de máximo. Ainda analisando a Figura 11, nota-se que o sistema foi inicializado achando se tratar de um problema de mínimo, porém, a saída,  $y(t)$ , começa a se distanciar do valor ótimo, divergindo em aproximadamente 40 segundos. Visto o erro na interpretação do sistema, a função de monitoração, Figura 12, realiza chaveamentos até a saída seja recuperada e que a convergência do sistema seja garantida, e identificando o extremo como um ponto de máximo.

Com o intuito de testar a eficiência dessa abordagem, após 150 segundos, a equação da saída foi alterada. Para essa mudança de cenário, (142) foi mantida e para  $y(t)$  foi

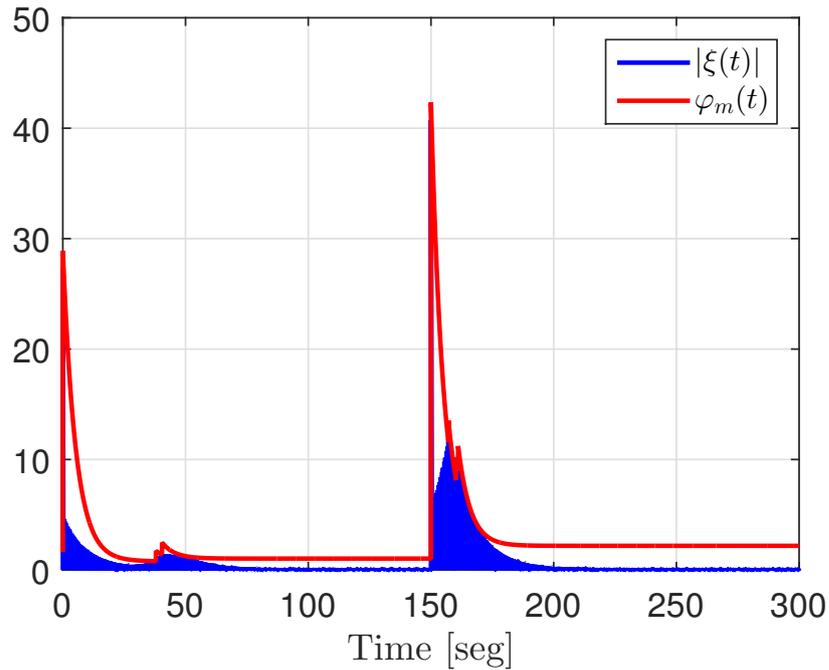


Figura 12 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e  $|\xi(t)|$ .

definida a seguinte equação

$$y = x^2 - 6x + 1. \quad (146)$$

Para essa situação deve ser feita uma nova análise para que se saiba os pontos de convergência de  $x$  e  $y$ . Derivando a equação da saída, temos que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x - 6. \quad (147)$$

Ao igualar essa derivada a zero, encontra-se  $x = 3$  como o ponto de convergência, Figura 10. Substituindo o valor encontrado para  $x(t)$  na nova equação de  $y(t)$ , (146), teremos em  $y = -8$ , Figura 11, a convergência da saída. Como na análise anterior, por meio de uma derivada de segunda ordem de (146), será definido o extremo da saída  $y(t)$ . Sendo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2, \quad (148)$$

com  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ , trata-se de um ponto de mínimo. Analisando novamente a Figura 11 a saída foi interpretada com um sinal de máximo e logo após começa a divergir. Novamente

a função de monitoração atua, em aproximadamente 165 segundos, e seu chaveamento leva a saída a identificar o extremo como mínimo e convergir.

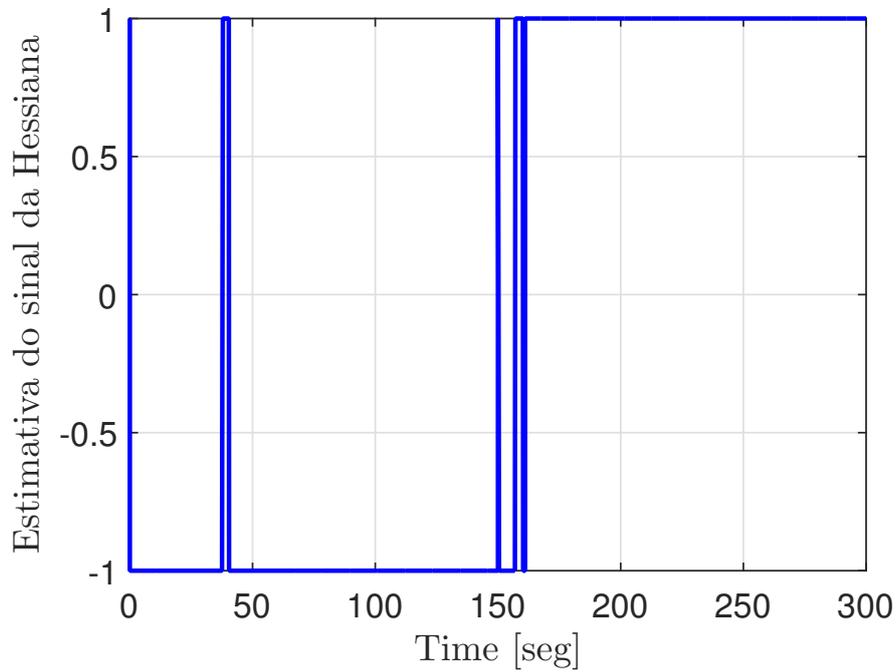


Figura 13 - Mudança de sinal da estimativa da Hessiana.

Analisando a Figura 12, a trajetória da função de monitoração,  $\varphi_m(t)$ , e de  $|\xi(t)|$  pode ser vista de forma clara. O chaveamento de  $\varphi_m(t)$ , e conseqüentemente a mudança de sinal da estimativa da Hessiana, Figura 13, ocorre nos momentos em que a saída  $y(t)$  começa a se distanciar de seu valor ótimo, e pode se repetir até que garanta a convergência, mesmo que momentânea, tendo um decaimento exponencial da função de monitoração após cada chaveamento.

## CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma proposta de otimização em tempo real de mapeamento de sistemas estático e dinâmico desconhecendo o sinal de sua Hessiana. No Capítulo 1, foi apresentado um caso simples de controle extremal para sistemas estáticos pelo método Gradiente, servindo como base para o Capítulo 2, onde o estudo do primeiro capítulo foi recriado numa situação em que o sinal da Hessiana fosse desconhecido. Como proposto, foi utilizado um algoritmo de chaveamento que contornou esse problema de desconhecimento de sinal. Foi construída uma função de monitoração, feita a análise da estabilidade e apresentados resultados de simulação.

Para estender esse estudo também para o caso dinâmico, no Capítulo 3 foi apresentado o estudo desenvolvido em [1], sendo este um esquema de controle extremal também pelo método Gradiente. Para o Capítulo 4, assumiu-se que em [1] o sinal da Hessiana é desconhecido. Novamente foi construída uma função de monitoração e feita a análise da estabilidade, comprovando o estudo através de resultados de simulação.

Foram apresentados resultados satisfatórios, em que função de monitoração foi capaz de levar o sistema à convergência, fazendo com que a saída do sistema para o caso estático e dinâmico tivesse o comportamento esperado, e se mostrou eficiente também quando a direção de controle (sinal da Hessiana) ou o ponto de otimização sofre alteração.

Uma possível aplicação deste método seria em problemas de minimização e maximização em busca de fonte em robótica autônoma,

### Trabalhos Futuros

Com relação à trabalhos futuros, visando dar continuidade a todo estudo desenvolvido na presente dissertação com o propósito de manter o desconhecimento do sinal da Hessiana como desafio, alguns casos seriam pesquisas interessantes, entre eles: desenvolver a versão estocástica para a abordagem vista; adicionar atrasos na entrada ou saída do sistema; e, sendo esse estudo desenvolvido em um sistema SISO (única entrada e única saída), a possibilidade de desenvolver para um sistema MISO (múltiplas entradas e única saída).

Porém, a proposta de maior relevância seria, sendo este trabalho todo desenvolvido

pelo método Gradiente, aplicar todo o estudo desenvolvido para o ESC pelo método de Newton.

Pelo método do Gradiente, a taxa de convergência e a estabilidade podem ser muito sensíveis a curvatura do mapeamento da planta. Para que as condições de estabilidade sejam garantidas sobre um dado domínio de operação, usa-se uma sintonia mais conservadora, o que resulta em uma otimização lenta. De forma a contornar esta característica, foi desenvolvida a busca extremal pelo método de Newton, Figura 14. Por este método, a taxa de convergência é independente da curvatura do mapeamento da planta [27].

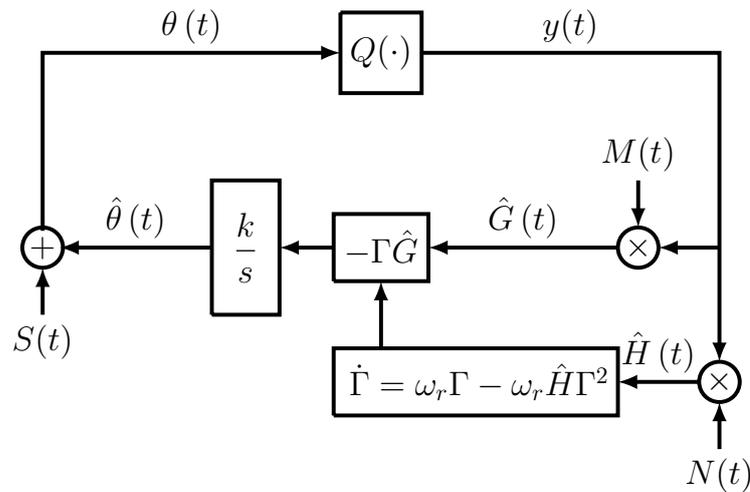


Figura 14 - Esquema de busca extremal baseado no método de Newton.

Uma dificuldade a ser contornada nessa proposta é pelo fato do sinal da inversa da Hessiana ( $H^{-1}$ ) ser necessário para ser se inicializar  $\Gamma(0)$ . Pelo método de Newton, emprega-se uma equação diferencial de Riccati cuja solução é dada por  $\Gamma(t)$ . O erro desta estimativa é dado por

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}. \quad (149)$$

Uma possível solução para essa situação seria substituir a equação diferencial de Riccati por adaptação via *Swapping* [34].

## Publicação

Trabalho publicado durante o mestrado e que serviu de base para o desenvolvimento de esta dissertação.

DIBO, A. L.; OLIVEIRA, T. R. Controle Extremal de Mapeamentos Escalares com Sinal de Hessiana Desconhecido. XXII Congresso Brasileiro de Automática, 2018, João Pessoa.

DIBO, A. L.; OLIVEIRA, T. R. Extremum Seeking for Static Maps with Unknown Hessian Signs. 27<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, 2019, Israel (Under review).

## REFERÊNCIAS

- [1] KRSTIC, M.; WANG, H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.
- [2] ZHANG, C.; ORDONEZ, R. *Extremum Seeking Control and Application: A Numerical Optimization-Based Approach*. [S.l.]: Springer-VerlagLondom Limited,, 2012.
- [3] LEBLANC, M. *Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée*. [S.l.]: Revue Generale de l'Electricite., 1922.
- [4] DRAPER, C.; LI, Y. *Principles of optimizing control system and an application to the internal combustion engine*. [S.l.]: R. Oldenburger, 1951.
- [5] ARIYUR, K. B.; KRSTIĆ, M. *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons., 2003.
- [6] ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. [S.l.]: Canada: Addison-Wesley., 2005.
- [7] AMINDE, N. O. *Controle extremal via funções de monitoração e realimentação de saída*. [S.l.]: Tese de mestrado, COPPE/UFRJ, 2013.
- [8] NESIC, D.; TAN, Y.; MAREELS, I. On the choice of dither in extremum seeking systems: a case study. *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on.*, p. 2789–2794, 2006.
- [9] OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes. *Journal of Franklin Institute*, v. 349, p. 1397–1415, 2012.
- [10] POVEDA, J. I.; TEEL, A. R. A framework for a class of hybrid extremum seeking controllers with dynamic inclusions. *Automatica*, v. 76, p. 113 – 126, 2017.
- [11] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, p. 1911 – 1926, 2017.

- [12] FEILING, J.; KOGA, S.; KRSTIĆ, M.; OLIVEIRA, T. R. Gradient extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion pdes. *Automatica*, v. 95, p. 197 – 206, 2018.
- [13] LIU, S. J.; KRSTIĆ, M. *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. [S.l.]: Springer, 2012.
- [14] OLIVEIRA, T. R.; AMINDE, N. O.; HSU, L. Monitoring function based extremum seeking control for uncertain relative degrees with light source seeking experiments. *IEEE Conference on Decision and Control*, v. 53, p. 3456 – 3462, 2014.
- [15] HSU, L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Extremum seeking control via monitoring function and time-scaling for plants of arbitrary relative degree. *IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, v. 13, p. 1 – 6, 2014.
- [16] AMINDE, N. O.; OLIVEIRA, T. R.; HSU, L. Global output-feedback extremum seeking control via monitoring functions. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, p. 1031–1036, 2013.
- [17] YU, H.; OZGUNER, U. Extremum-seeking control strategy for ABS system with time delay. *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, v. 5, p. 3753–3758, 2002.
- [18] KILLINGSWORTH, N.; KRSTIĆ, M. Auto-tuning of PID controllers via extremum seeking. *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, p. 2251–2256, 2005.
- [19] NOGUEIRA, E. M. *Controle via Busca Extremal da Produção de Petróleo em Poços Operando com Elevação Artificial por Injeção de Gás*. [S.l.: s.n.], 2012.
- [20] BINETTI, P.; ARIYUR, K. B.; KRSTIĆ, M. Formation flight optimization using extremum seeking feedback. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 26, p. 132–142, 2003.
- [21] PETERSON, K. S.; STEFANOPOULOU, A. G. Extremum seeking control for soft landing of an electromechanical valve actuator. *Automatica*, v. 40, p. 1063–1069, 2004.

- [22] HSU, L.; KRSTIC, M. Stochastic averaging in continuous time and its applications to extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 10, p. 2235–2250, 2010.
- [23] KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. [S.l.]: Englewood Cliffs: Prentice-Hall,, 2002.
- [24] OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 3, p. 1128–1134, 2010.
- [25] KOKOTOVIĆ, P.; KHALIL, H. K.; O'REILLY, J. *Singular perturbation methods in control: analysis and design*. [S.l.]: SIAM,, 1999.
- [26] UTKIN, V. I. *Sliding modes in control and optimization*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992.
- [27] MOASE, W. H.; MANZIE, C.; BREAR, M. J. Newton-like extremum-seeking for the control of thermoacoustic instability. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, v. 55, p. 2094–2105, 2010.
- [28] DIBO, A. L.; OLIVEIRA, T. R. Controle extremal de mapeamentos escalares com sinal de hessiana desconhecido. *XXII Congresso Brasileiro de Automática*, p. 1–7, 2018.
- [29] DIBO, A. L.; OLIVEIRA, T. R. Extremum seeking for static maps with unknown hessian signs. *27th Mediterranean Conference on Control and Automation, under review*, p. 1–6, 2019.
- [30] RODRIGUES, V. H. P.; OLIVEIRA, T. R. Global adaptive hosm differentiators via monitoring functions and hybrid norm-state observers for output feedback. *International Journal of Control.*, p. DOI:10.1080/00207179.2017.1392041, 2017.
- [31] KRSTIC, M. Performance improvement and limitations in extremum seeking control. *Systems & Control Letters*, v. 39, p. 313–326, 2000.
- [32] OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; NUNES, E. V. L.; HSU, L. Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.*, p. 692–707, 2007.

- [33] GOEBEL, R.; SANFELICE, R. G.; TEEL, A. Hybrid dynamical systems – modeling, stability, and robustness. *Princeton University Press.*, p. ISBN: 978-0-691-15389-6, 2012.
- [34] KRSTIC, M.; KOKOTOVIC, P. V. Adaptive nonlinear design with controller-identifier separation and swapping. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, p. 426–441, 1995.